МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні рекомендації до виконання індивідуального навчально-дослідного завдання "Диференціальне числення функції однієї змінної"з навчальної дисципліни "ВИЩА МАТЕМАТИКА"

для студентів галузі знань 0515
"Видавничо-поліграфічна справа"
всіх форм навчання

Харків. Вид. ХНЕУ, 2013

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів.

Протокол № 7 від 20.03.2013 р.

Укладач Рибалко А. П.

М54 Методичні рекомендації до виконання індивідуального навчально-дослідного завдання "Диференціальне числення функції однієї змінної" з навчальної дисципліни "Вища математика" для студентів галузі знань 0515 "Видавничо-поліграфічна справа" всіх форм навчання / укл. А. П. Рибалко. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2013. – 52 с. (Укр. мов.)

Наведено методичні рекомендації до виконання індивідуального навчально-дослідного завдання "Диференціальне числення функції однієї змінної", яке відповідає змістовному модулю 2 робочої програми даної навчальної дисципліни.

Рекомендовано для студентів галузі знань 0515 "Видавничо-поліграфічна справа".

Вступ

З метою систематизації та закріплення теоретичних і практичних знань із навчальної дисципліни "Вища математика" передбачено виконання студентами індивідуальних навчально-дослідних завдань (ІНДЗ).

У першій частині роботи наведено зразок виконання ІНДЗ із розгорнутими поясненнями. ІНДЗ складаються з типових прикладів, що відповідають змістовному модулю 2 робочої програми даної навчальної дисципліни для студентів галузі знань 0515 "Видавничо-поліграфічна справа". Вони присвячені одному з розділів дисципліни – диференціальному численню функцій однієї змінної та його застосуванням. Завдання охоплюють такі теми:

1. Функції. Числові послідовності та їх границі.
2. Границя функції. Перша та друга особливі границі.
3. Неперервність функції. Класифікація точок розриву. Властивості неперервних функцій.
4. Похідна функції, її геометричний, фізичний та економічний зміст. Правила диференціювання.
5. Диференціювання функцій різних форм завдання. Похідні вищих порядків.
6. Теореми про диференційовні функції. Правило Лопіталя.
7. Диференціал функції. Застосування диференціала у наближених обчисленнях.
8. Дослідження функцій та побудова їх графіків.

Приклади розв'язання містять стислі теоретичні відомості, необхідні для виконання відповідних завдань. Для зручності наведено також таблицю похідних елементарних та складних функцій (додаток А).

У другій частині роботі подано індивідуальні навчально-дослідні завдання. Наведено 30 варіантів завдань, що складають ІНДЗ. Номери варіантів видаються викладачем. Перевірка виконання ІНДЗ супроводжується захистом роботи, підготовку до якого студенту рекомендовано здійснювати згідно з наведеними контрольними питаннями для самодіагностики.

Особливу увагу пропонується приділити вивченню літературних навчальних джерел, список яких наведено. Це дозволить поглибити отримані знання, краще усвідомити теоретичні факти та особливості їх застосування до практичних задач, а також сприятиме розвитку навичок чіткого формулювання математичних тверджень та їх ланцюгів.

Виконуючи ІНДЗ, студент отримує аналітично-дослідницькі компетентності, необхідні сучасному спеціалісту видавничо-поліграфічної справи у всіх сферах його діяльності. А саме після виконання ІНДЗ студент вмітиме: проводити аналіз задач та обирати необхідний апарат для їх розв'язання, здійснювати відповідні математичні обчислення, аналізувати отримані результати та робити висновки на достатньо високому професійному рівні; самостійно працювати із науково-методичною літературою; самостійно застосовувати отримані знання для розв'язання теоретичних і практичних задач з технології електронних мультимедійних видань та комп'ютеризованих технологій і систем поліграфічних виробництв, а також будувати та досліджувати математичні моделі цих задач; самостійно використовувати вивчений апарат при вивченні інших навчальних дисциплін, що створюють комп'ютерну та поліграфічну компетенцію фахівця.

Методичні рекомендації до виконання індивідуального навчально-дослідного завдання.

Завдання 1. Обчислити границю числової послідовності:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n+1)^3}{(4n-1)^2+(3n+5)^2}.$$

Розв'язання. Оскільки границя чисельника є невизначеною $[\infty-\infty]$ і границя знаменника нескінченна, скористатися правилом границі частки неможливо. Потрібно зробити перетворення, використовуючи алгебраїчну формулу $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n+1)^3}{(4n-1)^2+(3n+5)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+2)-(n+1)\right]\left[(n+2)^2+(n+2)(n+1)+(n+1)^2\right]}{(4n-1)^2+(3n+5)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left[(n+2)^2+(n+2)(n+1)+(n+1)^2\right]}{(4n-1)^2+(3n+5)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=.$$

Далі поділимо чисельник та знаменник на n^2 і, застосовуючи зв'язок між нескінченно великою $n\to\infty$ і нескінченно малою $\frac{1}{n}\to 0$, отримаємо:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right]}{\left(4-\frac{1}{n}\right)^2 + \left(3+\frac{5}{n}\right)^2} = \frac{1^2+1\cdot1+1^2}{3^2+4^2} = \frac{3}{25}.$$

Завдання 2. Обчислити границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{2x^2+3x-2}{x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^4-3x+2}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{1-\sqrt[3]{2x-3}}$;

г) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}}{\sqrt{5x^2-4}-\sqrt{2x^2+x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4+x^2-1}{x^4+7x}$; е) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos 4x-1}{\operatorname{arctg}^2 3x}$;

є) $\lim\limits_{x\to-3} \frac{4^{2x+6}-1}{\ln(x+4)}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{2-x}$.

Розв'язання. При обчисленні границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ на першому етапі слід підставити граничну точку x_0 у функцію $f(x)$ та перевірити, чи має місце невизначеність та якого вона типу.

У прикладах а) і б) отримаємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, що задана поліномами. У цих випадках слід розкласти чисельник і знаменник дробу на множники. У нагоді стануть такі формули:

$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$;

$x^3 \pm a^3 = (x\pm a)(x^2 \mp ax + a^2)$;

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$,

де x_1, x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$.

а) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{2x^2+3x-2}{x^3+8} = \left[\frac{2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-2}{(-2)^3+8} = \frac{0}{0}\right]$.

Щоб розкрити невизначеність, розкладаємо чисельник і знаменник дробу на множники, після чого скорочуємо спільні множники й отримаємо результат:

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+3x-2}{x^3+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)(x-0,5)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to-2}\frac{2(x-0,5)}{(x^2-2x+4)}=$$

$$=\frac{2(2-0,5)}{(-2)^2-2(-2)+4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4};$$

б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-3x+2}{x^2-1}=\left[\frac{1^4-3\cdot1+2}{1^2-1}=\frac{0}{0}\right].$

Знаменник цього дробу розкладаємо за формулою скороченого множення. Щоб розкласти на множники поліном у чисельнику, потрібно поділити його на критичний множник $(x-x_0)$. Подальше скорочення призводить до розкриття невизначеності:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4-3x+2}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x^3+x^2+x-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x^3+x^2+x-2)}{(x+1)}=$$

$$=\frac{(1^3+1^2+1-2)}{(1+1)}=\frac{1}{2};$$

в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{1-\sqrt[3]{2x-3}}=\left[\frac{\sqrt{6-2}-2}{1-\sqrt[3]{2\cdot2-3}}=\frac{0}{0}\right].$

Щоб позбутися невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ при обчисленні границь, що містять ірраціональні вирази, також потрібно виділити однакові множники в обох частинах дробу та скоротити їх. Для цього чисельник і знаменник дробу домножують на так званий спряжений ірраціональний вираз та використовують формули скороченого множення у вигляді:

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b;$

$(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a\pm b.$

Для даного прикладу скористаємось відразу двома формулами:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{1-\sqrt[3]{2x-3}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{6-x}-2\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)\left(1+\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{2x-3}\right)\left(1+\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(6-x-4)\left(1+\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}\right)}{\left(1-(2x-3)\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)\left(1+\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}\right)}{2(2-x)\left(\sqrt{6-x}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(1+\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}\right)}{2\left(\sqrt{6-x}+2\right)} = \frac{\left(1+\sqrt[3]{2\cdot 2-3}+\sqrt[3]{(2\cdot 2-3)^2}\right)}{2\left(\sqrt{6-2}+2\right)} = \frac{3}{8};$$

г) $$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}}{\sqrt{5x^2-4}-\sqrt{2x^2+x}} = \left[\frac{\sqrt[3]{(-1)^3+3(-1)^2+3(-1)+1}}{\sqrt{5(-1)^2-4}-\sqrt{2(-1)^2-1}} = \frac{0}{0}\right].$$

У цьому завданні слід поєднати методи, що були використані у попередніх прикладах. Так, вираз у чисельнику перетворюємо за формулою:

$$(x \pm a)^3 = (x^3 \pm 3x^2 a + 2xa^2 \pm a^3),$$

а у знаменнику спочатку "позбудемось ірраціональності", а потім розкладемо на множники й скоротимо дріб:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}}{\sqrt{5x^2-4}-\sqrt{2x^2+x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^3}\left(\sqrt{5x^2-4}+\sqrt{2x^2+x}\right)}{\left(\sqrt{5x^2-4}-\sqrt{2x^2+x}\right)\left(\sqrt{5x^2-4}+\sqrt{2x^2+x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\left(\sqrt{5x^2-4}+\sqrt{2x^2+x}\right)}{\left(5x^2-4-(2x^2+x)\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\left(\sqrt{5x^2-4}+\sqrt{2x^2+x}\right)}{\left(3x^2-x-4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\left(\sqrt{5x^2-4}+\sqrt{2x^2+x}\right)}{3(x+1)\left(x-\frac{4}{3}\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{\left(\sqrt{5x^2-4}+\sqrt{2x^2+x}\right)}{(3x-4)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5\cdot(-1)^2-4}+\sqrt{2\cdot(-1)^2-1}\right)}{(3\cdot(-1)-4)} = -\frac{2}{7};$$

д) $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4+x^2-1}{x^4+7x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

У даному випадку маємо невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, яка задана відношенням двох поліномів.

Перший спосіб розкриття невизначеності – ділення чисельника та знаменника дробу на старший степінь усього виразу:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+x^2-1}{x^4+7x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(5+1/x^2-1/x^4)}{x^4(1+7/x^3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(5+1/x^2-1/x^4)}{(1+7/x^3)}=\frac{5+0}{1+0}=5.$$

Другий спосіб базується на *теоремі про еквівалентність полінома на нескінченності його старшому члену*:

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \quad \sim \quad a_nx^n, \text{ при } x\to\infty.$$

Ураховуючи також *теорему про можливість заміни функцій на еквівалентні при обчисленні границь добутків та часток*, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+x^2-1}{x^4+7x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{matrix}5x^4+x^2-1\sim 5x^4\\ x^4+7x\sim x^4\end{matrix}\ (x\to\infty)\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4}{x^4}=\lim_{x\to\infty}5=5;$$

е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos4x-1}{\operatorname{arctg}^2 3x}=\left[\dfrac{\cos0-1}{\operatorname{arctg}^2 0}=\dfrac{0}{0}\right].$

Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, яка задана тригонометричними функціями, розкривається за допомогою *першої чудової границі* :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$$

та її наслідків. Найзручніше у цьому випадку використовувати так звану *таблицю еквівалентних*:

$$\sin x\sim \operatorname{tg}x\sim \arcsin x\sim \operatorname{arctg}x\sim x \quad \text{при} \quad x\to0.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos4x-1}{\operatorname{arctg}^2 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left|\begin{matrix}\cos4x-1=-(1-\cos4x)=-2\sin^2 2x\sim-2\cdot(2x)^2=-8x^2\\ \operatorname{arctg}^2 3x\sim(3x)^2=9x^2\end{matrix}\ (x\to0)\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}-\frac{8x^2}{9x^2}=-\frac{8}{9};$$

є) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4^{2x+6}-1}{\ln(x+4)}=\left[\dfrac{4^{2\cdot(-3)+6}-1}{\ln(-3+4)}=\dfrac{0}{0}\right]$.

У цьому завданні потрібно використати *наслідки із другої чудової границі*, які також можна навести у вигляді таблиці еквівалентних:

$$
\begin{aligned}
&e^x-1\sim\ln(1+x)\sim x \\
&a^x-1\sim x\ln a \qquad\qquad \text{при} \quad x\to 0 \\
&\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{4^{2x+6}-1}{\ln(x+4)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}4^{2x+6}-1\sim(2x+6)\ln 4 \qquad (x\to -3)\\ \ln(x+4)=\ln(1+(x+3))\sim(x+3)/\ln 4\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(2x+6)\ln 4}{(x+3)/\ln 4}=\lim_{x\to -3}\frac{2(x+3)\ln^2 4}{(x+3)}=2\ln^2 4;$$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{2-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{x-1}\right)^{2-x}=\left[1^\infty\right]$.

Невизначеність типу $\left|1^\infty\right|$ розкривають зведенням до *другої чудової границі*, яка може бути записана в таких формах:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

У даному прикладі потрібно спочатку виділити одиницю у виразі в дужках, а потім перетворити степінь таким чином, щоб можна було застосувати другу чудову границю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{2-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x-1}\right)^{2-x}=\left[1^\infty\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x-1}\right)^{\frac{(x-1)}{6}\cdot\frac{6}{(x-1)}(2-x)}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x-1}\right)^{\frac{(x-1)}{6}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6(2-x)}{(x-1)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12-6x}{x-1}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}12-6x\sim -6x\\ \quad x-1\sim x\end{array}(x\to\infty)\right|=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x}{x}}=\mathrm{e}^{-6}.$$

Завдання 3. Дослідити функції $y = f(x)$ на неперервність, визначити тип точок розриву:

а) $y = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x - 3}$; б) $y = \begin{cases} 3x+1, & \text{якщо } x \le 0 \\ 1 - x^2, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$ в) $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ називається *неперервною* в точці x_0, якщо

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Наведене означення не єдине, воно найбільш зручне для використання при практичному дослідженні функцій на неперервність. Точки, в яких ця умова не виконується, називаються точками розриву.

Справедлива *теорема про неперервність елементарних функцій:* кожна елементарна функція неперервна в усіх внутрішніх точках області визначення.

Точки розриву класифікуються таким чином.

Точка x_0 називається *точкою усувного розриву*, якщо існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b \neq \infty$, але значення $f(x_0)$ не визначене, або $f(x_0) \neq b$.

Точка x_0 називається *точкою розриву першого роду* функції $f(x)$, якщо в цій точці функція має різні односторонні границі, тобто $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b_1 \neq \infty$, $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b_2 \neq \infty$, але $b_1 \neq b_2$.

Усі інші точки розриву називаються *точками розриву другого роду.*

а) $y = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x - 3}$.

Оскільки задана функція елементарна, то у всіх точках своєї області визначення $D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$ вона неперервна. Причому для всіх $x \neq 3$

$$y = \frac{x(x-2)(x-3)}{x-3} = x(x-2) = x^2 - 2x.$$

Границя в точці $x_0 = 3$ існує і дорівнює скінченному числу:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^2 - 2x) = 3 \neq \infty ,$$

тому за означенням функція має в точці $x = 3$ усувний розрив. Достатньо покласти додатково $f(3) = 3$, і функція стане неперервною.

б) $y = \begin{cases} 3x+1, & \text{якщо } x \le 0 \\ 1-x^2, & \text{якщо } 0 < x \le 1. \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$

Функція задається різними аналітичними виразами для різних областей. Вона є неперервною при $x \in (-\infty;0) \cup (0;1) \cup (1;\infty)$, оскільки кожна з функцій $y = 3x+1$, $y = 1-x^2$, $y = \sqrt{x}$ елементарна й тому неперервна в усіх точках відповідного інтервалу.

Дослідимо поведінку $y = f(x)$ у граничних точках $x = 0$ і $x = 1$.

Знайдемо односторонні границі і значення функції в цих точках:

$$f(-0) = \lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0}(3x+1) = 3\cdot 0+1 = 1,$$

$$f(+0) = \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}(1-x^2) = 1-0 = 1,$$

$$f(0) = (3x+1)\big|_{x=0} = 3\cdot 0+1 = 1.$$

Оскільки $f(-0) = f(+0) = f(0) = 1$, то функція $f(x)$ неперервна в точці $x = 0$.

Аналогічно

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(1-x^2) = 1-1^2 = 0,$$

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}\sqrt{x} = \sqrt{1} = 1.$$

Оскільки обидві границі скінченні, але $f(1-0) \ne f(1+0)$, то функція має в точці $x = 1$ розрив першого роду типу стрибок (величина стрибка дорівнює $\delta = f(1+0) - f(1-0) = 1-0 = 1$);

в) $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$.

Функція елементарна, її область визначення $D(f) = (-\infty;2) \cup (2;\infty)$, у всіх точках $D(f)$ вона неперервна.

Знаходимо односторонні границі в точці $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2} = \frac{1}{(2-0)-2} = \frac{1}{-0} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 2-0} f(x) = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2} = \frac{1}{(2+0)-2} = \frac{1}{+0} = +\infty \quad \Rightarrow \lim_{x\to 2+0} f(x) = 3^{+\infty} = +\infty.$$

Одна з односторонніх границь є нескінченною, тому точка $x = 2$ – точка розриву другого роду.

Завдання 4. Знайти похідні y'_x для заданих функцій. У пунктах а) і б) знайти диференціали.

а) $y = 3^x\sqrt{x} - \dfrac{\mathrm{tg}x}{x^4} + \ln^3 2$; б) $y = \sqrt[3]{\cos^2(6x-1)}$;

в) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1+x}{2x}\cdot \mathrm{arcctg}\sqrt{x}$; г) $y = \arcsin^x x$;

д) $\sin(xy) = x^2 - 3y + 2$; е) $x = \ln t;\quad y = t^2 - t$.

Розв'язання.

а) $y = 3^x\sqrt{x} - \dfrac{\mathrm{tg}x}{x^4} + \ln^3 2$.

Застосуємо правила відшукання похідних суми, різниці, добутку та частки:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(uv)' = u'v + v'u;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Отримаємо:

$$y' = \left(3^x\sqrt{x} - \frac{\mathrm{tg}x}{x^4} + \ln^3 2\right)' =$$

$$= \left(3^x\right)'\sqrt{x} + 3^x\left(\sqrt{x}\right)' - \frac{(\mathrm{tg}x)'\cdot x^4 - \mathrm{tg}x\cdot (x^4)'}{\left(x^4\right)^2} + \left(\ln^3 2\right)' =$$

$$= 3^x\ln 3\cdot\sqrt{x} + 3^x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot x^4 - \mathrm{tg}x\cdot 4x^3}{x^8} + 0 =$$

$$= \frac{3^x(2x\ln 3 + 1)}{2\sqrt{x}} - \frac{x - 2\sin 2x}{x^5\cdot\cos^2 x}.$$

Тут були використані формулами з таблиці похідних

$$(Const)' = 0;\quad \left(x^a\right)' = a\cdot x^{a-1};\quad \left(a^x\right)' = a^x\cdot\ln a;\quad (\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

а також формулами тригонометрії $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ для спрощення виразу. Диференціал заданої функції знаходимо за формулою $dy = y'dx$:

$$dy = \left(\frac{3^x(2x\ln 3 + 1)}{2\sqrt{x}} - \frac{x - 2\sin 2x}{x^5 \cdot \cos^2 x}\right)dx;$$

б) $y = \sqrt[3]{\cos^2(6x-1)}$.

За правилом диференціювання *складної функції*

$$[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$$

знаходимо:

$$y' = \left(\sqrt[3]{\cos^2(6x-1)}\right)' = \frac{2}{3}(\cos(6x-1))^{-1/3} \cdot (\cos(6x-1))' =$$

$$= \frac{2}{3}(\cos(6x-1))^{-1/3} \cdot (-\sin(6x-1)) \cdot (6x-1)' =$$

$$= \frac{2}{3}(\cos(6x-1))^{-1/3} \cdot (-\sin(6x-1)) \cdot 6x =$$

$$= -\frac{4\sin(6x-1)}{\sqrt[3]{\cos(6x-1)}}.$$

Диференціал цієї функції має вигляд: $dy = -\frac{4\sin(6x-1)}{\sqrt[3]{\cos(6x-1)}}dx$;

в) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1+x}{2x} \cdot \mathrm{arcctg}\sqrt{x}$.

У цьому завданні використовуємо правила диференціювання суми, добутку, частки та складної функції:

$$y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1+x}{2x} \cdot \mathrm{arcctg}\sqrt{x}\right)' =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}\right)' - \left(\left(\frac{1}{2} \cdot x^{-1} + \frac{1}{2}\right)' \cdot \mathrm{arcctg}\sqrt{x} + \frac{1+x}{2x} \cdot \left(\mathrm{arcctg}\sqrt{x}\right)'\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \left(-\frac{1}{2x^2} \cdot \mathrm{arcctg}\sqrt{x} + \frac{1+x}{2x} \cdot \frac{-1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{\mathrm{arcctg}\sqrt{x}}{2x^2} + \frac{1}{4x\sqrt{x}};$$

г) $y = \arcsin^x x$.

Для обчислення похідної *степенево-показникової функції* $y=[u(x)]^{v(x)}$ скористаємося *логарифмічним диференціюванням.* Спочатку логарифмуємо обидві частини рівності $y=\arcsin^x x$, враховуючи властивість логарифма

$$\ln a^b = b\ln a;$$

$$\ln y = \ln\arcsin^x x = x\cdot\ln\arcsin x.$$

Диференціюємо отримане рівняння, пам'ятаючи, що $y=y(x)$ – функція змінної x:

$$(\ln y)' = (x\cdot\ln\arcsin x)';$$

$$\frac{y'}{y}=(x)'\cdot\ln\arcsin x + x\cdot(\ln\arcsin x)' = \ln\arcsin x + x\cdot\frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}.$$

Звідси знаходимо вираз для похідної заданої функції:

$$y'=y\cdot\left(\ln\arcsin x+\frac{x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\right)=$$

$$=\arcsin^x x\cdot\left(\ln\arcsin x+\frac{x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\right);$$

д) $\sin(xy)=x^2-3y+2$.

Маємо *неявно задану функцію* $y=y(x)$. Щоб знайти її похідну, продиференціюємо обидві частини рівності, якою задана ця функція, пам'ятаючи, що функція змінної x:

$$(\sin(xy))'=\left(x^2-3y+2\right)';$$

$$\cos(xy)\cdot(x'y+xy')=(x^2)'-(3y)'+2';$$

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')=2x-3y'.$$

Отримане рівняння розв'яжемо відносно похідної y':

$$y\cos(xy)+xy'\cos(xy)=2x-3y';$$

$$xy'\cos(xy)+3y'=2x-y\cos(xy);$$

$$y'=\frac{2x-y\cos(xy)}{x\cos(xy)+3};$$

е) $x=\ln t;\quad y=t^2-t$.

Похідна y'_x *параметрично заданої функції* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ знаходиться за формулою:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Обчислюємо:

$$y'_x = \frac{\left(t^2 - t\right)'}{(\ln t)'} = \frac{2t-1}{1/t} = 2t^2 - t = \left| x = \ln t \Rightarrow t = e^x \right| = 2e^{2x} - e^x.$$

Завдання 5. Обчислити за допомогою правила Лопіталя границі б), в), д) завдання 2 та границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x + x - 1}{\sin x - x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2 - 3x + 4}$.

Розв'язання. При обчисленні границь функцій за допомогою *правила Лопіталя*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

можна розкрити невизначеності типів $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. При необхідності правило Лопіталя може бути використане повторно.

По-перше, обчислимо границі із завдання 2:

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^4 - 3x + 2)'}{(x^2 - 1)'} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^3 - 3}{2x} = \frac{4\cdot 1^3 - 3}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x} - 2}{1 - \sqrt[3]{2x-3}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(\sqrt{6-x} - 2)'}{(1 - \sqrt[3]{2x-3})'} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{6-x}}}{-\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-3)^2}}} =$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{3\sqrt[3]{(2x-3)^2}}{4\sqrt{6-x}} = \frac{3\sqrt[3]{(2\cdot 2-3)^2}}{4\sqrt{6-2}} = \frac{3}{8};$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^2-1}{x^4+7x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x^4+x^2-1)'}{(x^4+7x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{20x^3+2x}{4x^3+7}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(20x^3+2x)'}{(4x^3+7)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{60x^2+2}{12x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(60x^2+2)'}{(12x^2)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{120x}{24x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}5=5.$

Видно, що відповіді співпали з отриманими при розв'язанні іншими методами в завданні 2.

Для обчислення наступних границь можна скористатися лише правилом Лопіталя.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+x-1}{\sin x-x^2}=\left[\dfrac{2^0+0-1}{\sin 0-0^2}=\dfrac{1-1}{0-0}=\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x+x-1)'}{(\sin x-x^2)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\ln 2+1}{\cos x-2x}=\dfrac{2^0\ln 2+1}{\cos 0-2\cdot 0}=\dfrac{\ln 2+1}{1-0}=1+\ln 2.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2-3x+4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln^2 x)'}{(x^2-3x+4)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\ln x\cdot(1/x)}{2x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\ln x}{2x^2-3x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2\ln x)'}{(2x^2-3x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot(1/x)}{4x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2x^2-3x}=\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0.$

Завдання 6. Написати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y=3x-\ln x$ у точці $x_0=1$. Знайти точки, в яких дотична до цієї кривої паралельна осі абсцис.

Розв'язання. *Рівняння дотичної* до графіка функції $y=y(x)$ у точці $x=x_0$ має вигляд:

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0),$$

рівняння нормалі –

$$y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0),$$

де $y_0 = y(x_0)$. Обчислюємо:

$$y_0 = y(x_0) = y(1) = 3 \cdot 1 - \ln 1 = 3;$$

$$y'(x) = (3x - \ln x)' = 3 - \frac{1}{x};$$

$$y'(x_0) = y'(1) = 3 - \frac{1}{1} = 2.$$

Підставляючи ці значення в наведені вище формули, отримаємо рівняння дотичної

$$y - 3 = 2(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y + 1 = 0$$

та рівняння нормалі

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - 7 = 0.$$

Дотична є паралельною до вісі абсцис у тих точках, у яких кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює нулю. У даному випадку

$$k = y'(x) = 3 - \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1/3,$$

тобто дотична до кривої $y = 3x - \ln x$ є паралельною вісі абсцис у точці $(1/3; 1 + \ln 3)$.

Завдання 7. Обчислити наближено $\operatorname{arctg} 1{,}02$ за допомогою диференціала.

Розв'язання. Застосування диференціала до наближених обчислень базуються на заміні приросту функції диференціалом:

$$\Delta y \approx dy \quad \Leftrightarrow \quad \Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) \approx y'(x_0) \cdot \Delta x = dy(x_0)$$

Звідси

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy(x_0), \qquad \text{де } dy(x_0) = y'(x_0) \cdot \Delta x.$$

У даному випадку $y(x) = \operatorname{arctg} x$, $y'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$.

Підставивши ці дані у формулу, отримаємо:

$$\operatorname{arctg} 1{,}02 = \operatorname{arctg}(1 + 0{,}02) \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1+1^2} \cdot 0{,}02 = \frac{\pi}{4} + 0{,}01 \approx 0{,}786.$$

Завдання 8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 + 9x^2 - 8$ на сегменті $[-2;1]$.

Розв'язання. Відомо, що *неперервна на сегменті функція набуває своїх найбільшого та найменшого значень або в критичних точках, або на кінцях відрізку.*

Знаходимо критичні точки, тобто точки області визначення, в яких похідна не існує або дорівнює нулю:

$$y' = 3x^2 + 18x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x(x+6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0; \quad x_2 = -6.$$

Точка $x_2 = -6$ не належить відрізку $[-2;1]$, тому її не розглядаємо. У критичній точці $x_1 = 0$, а також на кінцях сегмента обчислюємо значення функції:

$$y(0) = 0^3 + 9 \cdot 0^2 - 8 = -8;$$

$$y(-2) = (-2)^3 + 9 \cdot (-2)^2 - 8 = -8 + 36 - 8 = 20;$$

$$y(1) = 1^3 + 9 \cdot 1^2 - 8 = 2.$$

Обираємо з них найменше та найбільше:

$$y_{найм} = y(0) - 8;$$

$$y_{найб} = y(-2) = 20.$$

Завдання 9. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Дослідження функції будемо проводити за такою *схемою*:

1) знайдемо область визначення, інтервали неперервності і точки розриву функції; визначаємо, чи є функція парною, непарною, періодичною; знаходимо точки перетину графіка функції з осями;

2) знайдемо асимптоти графіка функції;

3) за допомогою похідної визначимо інтервали монотонності та її екстремуми функції;

4) за допомогою похідної другого порядку визначимо інтервали опуклості графіка і точки перегину;

5) побудуємо графік функції.

1. Область визначення функції $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$:

$$D(y) = \{x \in R: \ 1 - x^2 \neq 0\} = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty).$$

Задана функція неперервна, як елементарна, в кожній точці області визначення $D(y)$, тобто на інтервалах $(-\infty;1),(-1;1)$ та $(1;\infty)$. Точки $x_1=-1, x_2=1$, у яких функція невизначена, є точками розриву.

Виявляється, що ця функція є непарною, оскільки

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{1-(-x)^2}=-\frac{x^3}{1-x^2}=-y(x),$$

тому її графік є симетричним відносно центра координат. Зауважимо, що парні функції задовольняють умову $y(-x)=y(x)$ та мають графік, симетричний відносно вісі ординат. Функція не є періодичною.

Знаходимо точки перетину графіка з осями координат: точки перетину з віссю *Oy* відповідають $x=0$, звідки $y=\dfrac{0^3}{1-0^2}=0$; в точках перетину з віссю *Ox* виконується умова $y=0$, що в даному випадку справедливо лише при $x=0$. Таким чином, крива проходить через початок координат.

2. Спочатку знаходимо вертикальні асимптоти графіка. Вони можуть бути лише в граничних точках інтервалів неперервності функції, тобто потрібно перевірити точки розриву $x_1=-1, x_2=1$. Для цього обчислимо односторонні границі функції в цих точках:

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{1-x}\cdot\lim_{x\to-1-0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1-0}=\frac{1/2}{-0}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{1-x}\cdot\lim_{x\to-1+0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1+0}=\frac{1/2}{+0}=+\infty.$$

Оскільки обидві границі дорівнюють нескінченності, пряма $x=-1$ є вертикальною асимптотою.

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to1-0}\frac{x^3}{1+x}\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(1-0)}=\frac{1/2}{+0}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to1+0}\frac{x^3}{1+x}\cdot\lim_{x\to1+0}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(1+0)}=\frac{1/2}{-0}=-\infty.$$

Звідси пряма $x=1$ також є вертикальною асимптотою.

З'ясуємо, чи має графік даної функції похилі або горизонтальні асимптоти. Якщо границі

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x} \quad \text{та} \quad b_+=\lim_{x\to+\infty}\left(y(x)-k_+\cdot x\right)$$

є скінченними, то при $x \to +\infty$ графік функції $y = y(x)$ має похилу асимптоту, яка задається рівнянням $y = k_+ x + b_+$. Аналогічно, якщо границі

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} \quad \text{та} \quad b_- = \lim_{x\to-\infty} \left(y(x) - k_- \cdot x\right)$$

є скінченними, то при $x \to -\infty$ графік функції $y = y(x)$ має похилу асимптоту, яка задається рівнянням $y = k_- x + b_-$. Зазначимо, що горизонтальні асимптоти є частинним випадком похилих при $k = 0$. Нарешті, у випадку, коли наведені вище границі виявляються нескінченними, графік функції не має ні похилих, ні горизонтальних асимптот.

У даному випадку:

$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(1-x^2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x - x^3} = \left| \begin{array}{c} x - x^3 \sim -x^3 \\ x \to \pm\infty \end{array} \right| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1,$$

$$b_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \left(y(x) - k_\pm \cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} - (-1)\cdot x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Таким чином, $k_+ = k_- = -1$ і $b_+ = b_- = 0$, тому пряма $y = -x$ є похилою асимптотою при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$.

3. Обчислюємо похідну заданої функції:

$$y' = \left(\frac{x^3}{1-x^2} \right)' = \frac{(x^3)'(1-x^2) - x^3(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}.$$

Знаходимо критичні точки – точки області визначення, в яких похідна дорівнює нулю або не існує. Для цього прирівнюємо до нуля чисельник і знаменник похідної:

$$\left[\begin{array}{l} 3x^2 - x^4 = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2(3 - x^2) = 0 \\ x^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3} \\ x_4 = -1, x_5 = 1 \notin D(y) \end{array}$$

Критичні точки $x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}$ і точки розриву $x_4 = -1, x_5 = 1$ розбивають числову вісь на шість інтервалів, у кожному з яких похідна зберігає знак, а отже, функція є монотонною. Підставляємо будь-яку точку з інтервалу в похідну, визначаємо її знак на цьому інтервалі та робимо висновок відносно монотонності функції. За отриманими результатами складемо таблицю (табл. 1).

Таблиця 1

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};-1)$	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	$(1;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};\infty)$
y′	+	0		−	0		−	0	+
y	↘	min	↗	↗	–	↗	↗	max	↘

Таким чином, дана функція спадає при $x \in \left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3};\infty\right)$ та зростає при $x \in \left(-\sqrt{3};-1\right) \cup \left(-1;1\right) \cup \left(1;\sqrt{3}\right)$.

У критичній точці $x_1 = 0$ похідна не змінює знак, тому в ній функція екстремуму не має. У точці $x_2 = -\sqrt{3} \approx -1{,}73$ похідна змінює знак із мінуса на плюс, тому функція має в цій точці мінімум, який дорівнює

$$y_{\min} = y(-\sqrt{3}) = \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6.$$

У точці $x_3 = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ похідна змінює знак із плюса на мінус, тому функція має максимум, його значення таке:

$$y_{\max} = y(\sqrt{3}) = -y(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}6.$$

4. Обчислюємо похідну другого порядку:

$$y'' = \left(\frac{3x^2 - x^4}{\left(1-x^2\right)^2}\right)' = \frac{\left(3x^2 - x^4\right)'\left(1-x^2\right)^2 - \left(3x^2 - x^4\right)\left[\left(1-x^2\right)^2\right]'}{\left(1-x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(6x - 4x^3\right)\left(1-x^2\right)^2 - \left(3x^2 - x^4\right)2\left(1-x^2\right)\left(-2x\right)}{\left(1-x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(1-x^2\right)\left[\left(6x - 4x^3\right)\left(1-x^2\right) + 4x\left(3x^2 - x^4\right)\right]}{\left(1-x^2\right)^4} = \frac{6x + 2x^3}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Знаходимо критичні точки другого роду, тобто точки області визначення, в яких похідна другого порядку дорівнює нулю або не існує:

$$\left[\begin{array}{l} 6x+2x^3=0 \\ 1-x^2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x(3+x^2)=0 \\ x^2=1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{c} x_1=0 \ (3+x^2\neq 0) \\ x_2=-1,\ x_3=1\notin D(y) \end{array}$$

Критична точка другого роду $x_1=0$ і точки розриву $x_2=-1, x_3=1$ розбивають числову вісь на чотири інтервали, в кожному з яких друга похідна зберігає знак, і графік функції зберігає напрям опуклості. Досліджуємо знак другої похідної й робимо висновки, які наведено у вигляді таблиці (табл. 2).

Таблиця 2

x	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	$(1;\infty)$
y''	+	−	0	+	-
y	$\cup$	$\cap$	перегин	$\cup$	$\cap$

Оскільки в точці $x_1=0$ друга похідна змінює знак, то точка графіка з координатами $(x_1; y(x_1))=(0;0)$, є точкою перегину графіка.

5. За отриманими результатами будуємо графік функції (рисунок).

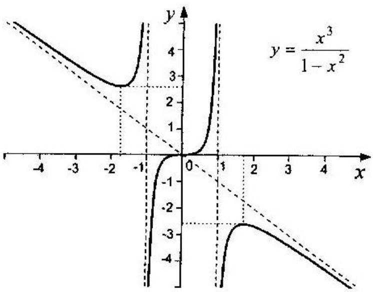

Рис. **Графік функції** $y=\frac{x^3}{1-x^2}$

Варіанти індивідуальних навчально-дослідних завдань

Завдання 1. Обчислити границю числової послідовності:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+5n+2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+5^n}{2^n-5^n}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+6)^3-(n-2)^3}{(5n+4)^2+n^2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2}\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2+5}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5+1}+\sqrt[3]{n^6-1}}{\sqrt{4n^3+3}+\sqrt[3]{8n^5+2}}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n^2-1)^2-(n^2+5)^2}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{2n^3+3n}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n^3+3n^2+1}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3+1}+\sqrt[3]{n^6+4}}{2n(3+n)}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+4)!}{(n+2)!+(n+3)!}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^8-4n^3+1}}{n\sqrt{n^2+2}}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(4n+1)+3}{(2n-3)^2+(3n+1)^2}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-1}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4-1}+\sqrt[3]{5n^6+2}}{3n^2+2n-5}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n+3)}-n\right)$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3+3n^2+2}{(n+2)(n+3)(n+4)}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{5n^8+1}+2n^2}{\sqrt{3n^2+7}}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n(4n+7)}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+2n^3+n^6}}{\sqrt{3n^4+8}}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+2)^2-(n^2-1)^2}{(n+2)(n+5)}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{n^2+4n-1}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+100n+10}{100n^3+n}$.

Завдання 2. Обчислити границі функцій.

1. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+4x^2-x-2}{1-x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{1+\sqrt[3]{1-x}}$

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{3x^2-4x+1}}{\sqrt{x^3}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x+2}{4x^2+12}$;

е) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin x-\sin(\pi/3)}{2\operatorname{arctg}(3x-\pi)}$; є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x4^x}{1-\cos 2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{7x+4}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-x-3}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{2x^3-6x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{4-x}-1}{2-\sqrt{x+1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{3x^2+x-1}}{2+\sqrt[3]{5x+2}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+4x^2-2x}{5x^4-x^3+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x\operatorname{tg}^2(3x-6)}$; є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{\cos^2 2x-1}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{5x-1}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2-2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+8x}{x^3+5x^2+8x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{8+3x}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{7x^2+x+1}}{\sqrt[4]{x}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3x\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^5}-5x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{3^{-x}-3^x}$; є) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(3+2x)\cos(x+1)}{4\operatorname{arctg}(x+1)}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{2-9x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-10x-25}{x^2-7x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4+27x}{18-5x^2-x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}{1+\sqrt[3]{5-2x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{6x^2-x-3}-2}{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{1-2x^2-x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{\operatorname{arctg}^2(6x-\pi)}{\cos x-\cos(\pi/6)}$;

є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{\ln(1+3x)\cdot\sin(1+2x)}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5}{x^2+1}\right)^{2x^2+3}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+12x-64}{2x^2-9x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+x^2-x-22}{x^3+4x^2+4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt[3]{4x}}{\sqrt{5+2x}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x^2-2}}{\sqrt{5x^2-3x+2}-\sqrt{4x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3+x^2-1}{2x^3+3x^2+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x\cdot\sin\dfrac{x}{3}}{(x^3+2)\cdot\operatorname{tg}4x}$; є) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^3-e^x}{x\log_2(4-x)}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{9}{\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}+5}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-16}{5x^2-4x-12}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^4+7x^2-9}{x^4-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{14-x}}{1+\sqrt[3]{4-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2-\sqrt{2x^2+5x+1}}{\sqrt[3]{x+3}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2+1}{-3x^4-x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{3x^2\cos x}$;

є) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2^{x+3}-2}{\arcsin(4-x^2)}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sqrt{3x}\right)^{2/\sqrt{x}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{3x^2-2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{16-x^4}{10+7x-3x^2-2x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}+1}{\sqrt{3x-2}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+5}-\sqrt{3x^2-10x+1}}{x^3-64}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+x^3+1}{x^4-2x^2+5}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\lg(1+7x)}{1-\cos 3x}$; є) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e-e^{x^2}}{\sin x\cdot\operatorname{tg}(x-1)}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{4-5x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{x^5+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x}-3}{1-\sqrt[3]{4-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1+\sqrt[3]{x^3+7}}{\sqrt{4x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+2x+9}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x+2}{2x^2+4x+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 2x}{\cos 3x-\cos x}$; є) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln^2 x}{\arcsin(x^2-2x+1)}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-4}\right)^{2x+1}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-9x+8}{2x^2-17x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x+12}{x^4+8x}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{2-\sqrt[3]{3x-4}}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{3+x^2}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+1}{2x^4+3}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cos 2x}{3x(1-x)}$;

є) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)\cos(x-1)}{2\lg(x+2)}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+3}\right)^{\sqrt{x}+2}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3-4x+48}{x^3+8x^2+16x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1+\sqrt[3]{2x-7}}{\sqrt{1+x}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{5x^2+9x-2}}{4-\sqrt{3x^2-3x-2}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+5}{-x^5+x^2+2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 2x}{\arcsin 3x}$; є) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3^{2x-5}-3}{x\log_3(x-2)}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{1-3x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-2x+4}{x^3+2x^2+x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{4x-3}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x^2-5x+1}-2}{27x-x^4}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+1}{5x^4-x+2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 3x-1}{(3-x)\mathrm{tg}\, 7x^2}$; є) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x\ln x^2}{2^{x^2-2}-1/2}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{5x+6}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-x-15}{27-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-x^5}{x^3-x^2-5x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt[3]{6-x}}{\sqrt{7-x}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{5-4x^2}-\sqrt{3x^2-2x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^3-2x^2}{9x^4-2x^3+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$; є) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\operatorname{tg}(x+5)\sin(x-5)}{\log_2^2(6-x)}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+3}\right)^{1-4x}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{4-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-6x+9}{x^3+x^2-6x}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2-\sqrt{3-x}}{\sqrt[3]{x}+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{5-x^2-x^3}-\sqrt{13-x^2}}{1-\sqrt[3]{x^2-3}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{x}-3x}{2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{2\sin^2(x-1)}$; є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)\cdot\operatorname{ctg}3x}{\arcsin(1-2x)}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-5}\right)^{9x+2}$

14. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+x}{2x^3+3x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-\sqrt{x^2-5x+5}}{\sqrt[3]{x^2-8x+16}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+x^4-2}{-2x^5+3x^4+2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 3x}{\operatorname{arctg}^2 3x}$; є) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x\ln(2x+5)}{e^{-x}-e^2}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\operatorname{tg}x)^{3\operatorname{ctg}x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{2x^2+3x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+x^2+4}{x^3-x^2-6x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}{2-\sqrt[3]{x+5}}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{6x^2+5x+3}-2}{x(2+x)+1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3+x^2-1}{2x^4+3x^2+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\operatorname{tg}3x}{x^2\cos 3x}$; є) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x^2-4)}{\lg^2(x-1)}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{2x}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+4x-7}{4x^2-3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+2x+33}{x^4+27x}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{1-\sqrt[3]{x-1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x^2+3x+2}}{2+\sqrt[3]{4x}}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2-5x+4}{4x^2-2x-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-5^{\sqrt{x-1}}}{2x\lg x}$; є) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5}\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{7}{2-3x}\right)^{5x+6}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^5-x+1}{x^4+x}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2+\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt{4+x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{3x-1}}{1-\sqrt[3]{x^2+x-1}}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-2x^2+3x}{3x^4+3x^3+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{\ln\cos 2x}$;

є) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+5x-1}\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{4-x}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{9-x^2}{3x^2+7x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4+7x^2-5x-4}{x^3-2x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+3}{2x+3}\right)^{2/x}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2-3x-1}-\sqrt{2x^2+1}}{8+x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^5+3x^4+1}{x^4-x^3+2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sin x+\sin 2x}$; є) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^3+6x}-\sqrt{x^3+x^2+3}\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-4\sqrt{x}\right)^{2/x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-8x+3}{x^3-x^2-12x}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{1+\sqrt[3]{1-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3-3x^2+3x-1}}{\sqrt{5x^2-4}-\sqrt{3x^2-2x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-4)}{\sqrt{x}\ln(x-1)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cos 3x}{\operatorname{tg}3x^2}$;

є) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt[3]{x^2+3x}-\sqrt[3]{1+7x+x^2}\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2-3x^2}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+2x-5}{x^3+6x^2+5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-x^3}{x^3+x^2-12}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+9}}{x^5-16x}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{2-3x}}{3-\sqrt[3]{8x^2-5}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3}{5x^3+7x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{x\sin(2x-1)}{4^{x-1}-1/2}$; є) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{1+\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt{1-2x}-3}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2+7}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^3+3x^2-4x-1}{x^3+x^2-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{\sqrt[3]{x+4}+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{x^2+7x+1}}{x^2-4x+4}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^2+1}{6x^4-x^3+5x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{x\log_3(3x-1)}{\arcsin\left(\dfrac{1-9x^2}{4}\right)}$;

є) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^3+1}-\sqrt{x^4+2x^2}\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+3}{2x+3}\right)^{2/x}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-7x^2-4}{16-x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt[3]{9-x}}{\sqrt{3x-2}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-27x}{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{2x^2-5x+1}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-7x^2+1}{x^4-3x^2+2}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-4)}{\sqrt{x}\ln(x-1)}$;

є) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x\sqrt{x}-\sqrt{4x^3+5x^2+3x-2}\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{3x^2-1}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{8+x^3}{2x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+5x-7}{x^3-2x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-\sqrt{3x+4}}{\sqrt[3]{x-3}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+9}}{x^5-16x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x+3}{4x^2-5x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2^2(1-2x)}{(x^2-x)\operatorname{tg}3x}$;

є) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\sqrt{x}-\sqrt{x^5+3x^3+3}\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{3+2/x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4-x^2}{3x^2+8x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-2x^4+1}{x^4-x}$; в) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{1+\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt{1-2x}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^5+1}{\sqrt{4x^2-x+2}-\sqrt{3x^2-4x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+12x-3}{2x^2+3x-5}$;

е) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}2x}{\sin x-\sin 5x}\right)$; є) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+4}\right)^{x+3}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{5x^2-11x-12}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+2x^3+x^2}{2x^3+x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}+2}{\sqrt{7-x}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+5}}{x^4-3x^2-4}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+6}{3-2x^3-4x^5}$;

е) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-xe^{9-6x+x^2}}{\arcsin^2(2x-6)}$; є) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+5}\right)^{2-x}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{7x^2+2x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-x^2-18}{x^3-11x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4-\sqrt{5x+6}}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3-\sqrt{3x^2+x-1}}{x^2+4x+4}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-3x^2+4}{-2x^4-x+2}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,\mathrm{arctg}(x/2)}{3^x-3^{-x}}$;

є) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right)^{3+\sqrt{x}}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+3x-9}{x^2-2x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{3x^3-5x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2-\sqrt{2x^2-3x-5}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}$; г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}+2}{1-\sqrt[3]{x^2-3}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2}{9x-2x^3+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x\sin(15-3x)}{\ln(2x-9)}$; є) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}+1}\right)^{5/\sqrt{x}}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^3-8}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1-x^4}{3x^5+2x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{6}}{x^3+2x^2-8x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{2x^2+2}}{2+\sqrt[3]{1-9x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^7-x^3+x}{10+3x^5-x^7}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos 5x}{x3^x-x}$;

є) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^{4-5x}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{x^2+5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{7x^4-5x^3-2}{x^5-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{3x+4}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{2x^2+x-5}}{1+\sqrt[3]{5-2x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2-5}{1+2x-2x^3}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x}{5^{-x}-5^x}$;

є) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-5}\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x}{x^2+3}\right)^{5-x}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3x^2-8x-16}{x^2-6x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{6x^5-x^2+7}{x^4+x}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2\sqrt{4+x}-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt[3]{x+2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2-\sqrt{x^2+3x+6}}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^2+x-1}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x^3-1}{x^2+3x^3+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x}{\log_4(1-5x)}$;

є) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}-1}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{4-x}$.

Завдання 3. Дослідити функції $y=f(x)$ на неперервність, визначити тип точок розриву. Побудувати графік функції.

1. а) $y=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1}$; б) $y=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ \arcsin x, & 0\le x<1; \\ 1-x, & x\ge 1 \end{cases}$ в) $y=2^{\frac{1}{x-3}}$.

2. а) $y=\frac{x^3-4x^2+3x}{x-1}$; б) $y=\begin{cases} -3x, & x<0 \\ e^x-1, & 0\le x<1; \\ x-1, & x\ge 1 \end{cases}$ в) $y=\frac{x+5}{x-2}$.

3. а) $y = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$; б) $y = \begin{cases} x + 2, & x \le 0 \\ 2\cos x, & 0 < x \le \pi/2; \\ x^2, & x > \pi/2 \end{cases}$ в) $y = \dfrac{x - 2}{x^2 - 1}$.

4. а) $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x + 2}$; б) $y = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ \log_2 x, & 1 < x \le 2; \\ 2x - 3, & x > 2 \end{cases}$ в) $y = e^{\frac{1}{3x-6}}$.

5. а) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$; б) $y = \begin{cases} 1 - x^2, & x \le 1 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 4; \\ x - 2, & x > 4 \end{cases}$ в) $y = \left(\dfrac{x + 1}{x - 5}\right)^2$.

6. а) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$; б) $y = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 \le x < \pi/4; \\ x + 1, & x > \pi/4 \end{cases}$ в) $y = \dfrac{x + 3}{(x - 1)^2}$.

7. а) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4x + 4}$; б) $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \le 0 \\ x^3 + 1, & 0 < x < 1; \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$ в) $y = 3^{\frac{1}{x+4}}$.

8. а) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 - 7x}{x + 1}$; б) $y = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ \operatorname{arctg} x, & 0 < x \le 1; \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$ в) $y = \dfrac{x + 9}{x + 1}$.

9. а) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$; б) $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 1, & x \le 0 \\ 3^x, & 0 < x < 1; \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$ в) $y = \dfrac{x - 4}{x^2 - 25}$.

10. а) $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1}$; б) $y = \begin{cases} 2x, & x \le 0 \\ (x - 1)^2, & 0 < x < 1; \\ x^2 - 1, & x \ge 1 \end{cases}$ в) $y = 5^{\frac{1}{1-x}}$.

11. а) $y=\dfrac{x^3-x^2-12x}{x+3}$; б) $y=\begin{cases} x^4, & x<0 \\ \sin x, & 0\le x<\pi/2; \\ 2x, & x\ge \pi/2 \end{cases}$ в) $y=\dfrac{x+8}{(x-2)^2}$.

12. а) $y=\dfrac{x^2-4x-5}{x-5}$; б) $y=\begin{cases} 3x+1, & x\le 0 \\ x^2-1, & 0<x\le 1; \\ \ln x, & x>1 \end{cases}$ в) $y=\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$.

13. а) $y=\dfrac{x^2-2x+8}{x+2}$; б) $y=\begin{cases} x+1, & x<-1 \\ -x^3, & -1\le x<1; \\ 3x-4, & x\ge 1 \end{cases}$ в) $y=e^{\frac{1}{2x+1}}$.

14. а) $y=\dfrac{x^3+x^2-6x}{x-2}$; б) $y=\begin{cases} 3x, & x<0 \\ \arccos x, & 0\le x<1; \\ x^2-1, & x\ge 0 \end{cases}$ в) $y=\dfrac{x+3}{x-6}$.

15. а) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$; б) $y=\begin{cases} 4x+5, & x\le -\pi/4 \\ \mathrm{tg}\, x, & -\pi/4\le x<0; \\ \sqrt{x}, & x\ge 0 \end{cases}$ в) $y=\dfrac{3x+1}{(x-4)^2}$.

16. а) $y=\dfrac{x^3-15x^2+75x-125}{5-x}$; б) $y=\begin{cases} x^2-2, & x\le 0 \\ 2^x, & 0<x<1; \\ 3x-1, & x\ge 1 \end{cases}$ в) $y=\dfrac{x}{x^2-9}$.

17. а) $y=\dfrac{x^3+2x^2-8x}{x+4}$; б) $y=\begin{cases} 1-x^2, & x\le 1 \\ \ln x, & 1<x\le e; \\ 3-x, & x>e \end{cases}$ в) $y=\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)^2$.

18. а) $y=\dfrac{x^2-9x+8}{x-8}$; б) $y=\begin{cases} x+1, & x\le -1 \\ \mathrm{arctg}\, x, & -1<x<0; \\ \sqrt{x}, & x\ge 0 \end{cases}$ в) $y=\dfrac{x-4}{5x+10}$.

19. а) $y=\dfrac{x^3+64}{x+4}$; б) $y=\begin{cases} 2x+3, & x\le -1 \\ x^3, & -1<x<1; \\ 2-x^2, & x\ge 1 \end{cases}$ в) $y=6^{\frac{1}{x-2}}$.

20. а) $y=\dfrac{x^3-4x^2-5x}{x-5}$; б) $y=\begin{cases}1+x, & x<0\\ \cos x, & 0\le x<\pi/2;\\ 1-x, & x\ge \pi/2\end{cases}$ в) $y=\dfrac{x+7}{x^2-1}$.

21. а) $y=\dfrac{x^2-6x-7}{x+1}$; б) $y=\begin{cases}x+1, & x\le -1\\ \sqrt[3]{x}, & -1<x\le 1;\\ \ln x+1, & x>1\end{cases}$ в) $y=\dfrac{x-4}{(x+1)^2}$.

22. а) $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x+3}$; б) $y=\begin{cases}1-x^2, & x\le 0\\ e^x, & 0<x<1;\\ 2x, & x\ge 1\end{cases}$ в) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-7}\right)^2$.

23. а) $y=\dfrac{x^3+9x^2}{x+9}$; б) $y=\begin{cases}x^2, & x<0\\ \sin 2x, & 0\le x<\pi/4;\\ 4x-1, & x\ge \pi/4\end{cases}$ в) $y=4^{\frac{1}{2x-1}}$.

24. а) $y=\dfrac{x^2-x-20}{x-5}$; б) $y=\begin{cases}2x+3, & x<-1\\ \arcsin x, & -1\le x<0;\\ -x^2, & x\ge 0\end{cases}$ в) $y=\dfrac{3+x}{2-x}$.

25. а) $y=\dfrac{x^2+5x-14}{x-2}$; б) $y=\begin{cases}-x^2, & x\le 0\\ \log_4 x, & 1\le x<4;\\ x-3, & x\ge 4\end{cases}$ в) $y=\dfrac{x+6}{x^2-4}$.

26. а) $y=\dfrac{x^3-6x^2}{x}$; б) $y=\begin{cases}-x^3, & x<0\\ \sqrt{x}, & 0\le x<1;\\ 3x-1, & x\ge 1\end{cases}$ в) $y=8^{\frac{1}{7-x}}$.

27. а) $y=\dfrac{x^2+8x-9}{x+9}$; б) $y=\begin{cases}-x, & x<0\\ \mathrm{tg}\,x, & 0\le x<\pi/4;\\ 4x, & x\ge \pi/4\end{cases}$ в) $y=\dfrac{x+2}{(x-5)^2}$.

28. а) $y=\dfrac{x^3-12x^2+48x-64}{x-4}$; б) $y=\begin{cases}3x-2, & x\le 0\\ x^2-1, & 0<x\le 1;\\ \ln x, & x>1\end{cases}$ в) $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$.

29. а) $y=\dfrac{x^3-8x^2}{x-8}$; б) $y=\begin{cases}1-x^2, & x\le 0\\ 3^x-1, & 0<x<1;\\ 2x, & x\ge 1\end{cases}$ в) $y=\dfrac{x+7}{2x-5}$.

30.) $y=\dfrac{x^3+8}{2+x}$; б) $y=\begin{cases}-x-1, & x\le -1\\ x^2, & -1\le x<1;\\ \sqrt{x}, & x\ge 1\end{cases}$ в) $y=7^{\frac{1}{4-2x}}$.

Завдання 4. Знайти похідні y'_x для заданих функцій. У пунктах а) і б) знайти диференціали.

1. а) $y=x^3 3^x-\dfrac{\lg x}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{2\pi}{3}$; б) $y=\ln\cos\dfrac{2x+3}{2x+1}$;

в) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; г) $y=(x^2+3x-4)^{\operatorname{tg}x}$;

д) $y^2-\ln x=x^2\ln y$; е) $x=\log_2 t;\quad y=te^t$.

2. а) $y=x\operatorname{arctg}x+\dfrac{2\sqrt{x}}{e^x}-\ln^2 3$; б) $y=\log_2^2\operatorname{tg}x$;

в) $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{4x-3-x^2}}{2-x}+\dfrac{2}{2-x}\sqrt{-x^2+4x-3}$; г) $y=(\sin x)^{x-2\sqrt{x}}$;

д) $\cos(x^3-y^2)=3x^2y-1$; е) $x=\operatorname{tg}2t;\quad y=t+2\sqrt{t}$.

3. а) $y=e^x\operatorname{ctg}x-\dfrac{\operatorname{arcctg}x}{\sqrt[4]{x}}+\ln\cos 2$; б) $y=\ln\operatorname{ctg}\dfrac{2x-1}{2x+1}$;

в) $y=\arccos\dfrac{4}{2x+3}+\sqrt[3]{4x^2+12x-7}$; г) $y=\left(x^4+5\right)^{\arccos x}$;

д) $y\sin x-1=2x-\sin 2y$; е) $x=\cos 3t;\quad y=\sqrt{2t^3+t}$.

4. а) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\ln x}+x\operatorname{tg}x-3e^2$; б) $y=\log_4\log_2\operatorname{ctg}x$;

в) $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$; г) $y=(\cos 3x)^{x^2-x}$;

д) $4^{x+2y-1}=\frac{y^3}{\sqrt{x}}$; е) $x=\arccos t$; $y=t\arcsin t$.

5. а) $y=5x\ln x-\frac{\arcsin x}{\sqrt[5]{x^3}}+\frac{\pi}{2}$; б) $y=\sqrt[7]{\arccos^2 3x}$;

в) $y=\sqrt{x^2-8x+17}\cdot\operatorname{arctg}(x-4)-\ln\left(x-4+\sqrt{x^2-8x+17}\right)$;

г) $y=(\operatorname{tg}x)^{\lg x}$; д) $xy-x=\operatorname{ctg}(x^2-y^2)$; е) $x=\cos\frac{t}{4}$; $y=\sin^4 t$.

6. а) $y=\sqrt{x}\cdot\log_7 x-\frac{\arccos x}{2x+3}+\sqrt[3]{12}$; б) $y=\ln\ln^3\ln^2 x$;

в) $y=x\cdot(2^x+1)\cdot\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; г) $y=\left(5x+\sqrt[3]{x}\right)^{\sin x}$;

д) $\operatorname{arctg}(y^2-3x)=\frac{y}{x}$; е) $x=\sqrt{2t+1}$; $y=t^4-4^{-t}$.

7. а) $y=\frac{3x-1}{\sin x}+xe^x-\frac{3\pi}{2}$; б) $y=\ln\ln\sin\left(1+\frac{1}{x}\right)$;

в) $y=\frac{1}{3}\cdot\frac{3x-1}{3x^2-2x+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{2}}$; г) $y=(\operatorname{ctg}2x)^{\sqrt{x}}$;

д) $\operatorname{arcctg} y=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$; е) $x=t^3-1$; $y=\cos^2(4t)$.

8. а) $y=\frac{\cos x}{3x^2}-e^x\cdot\sqrt[3]{x}-\log_4 5$; б) $y=\ln\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$;

в) $y=\sqrt{9x^2+24x+12}+2\arcsin\frac{2}{3x+4}$; г) $y=\left(2-\sqrt[5]{x^2}\right)^{\operatorname{arcctg}x}$;

д) $\operatorname{ctg}(x^2+xy)=y^2+1$; е) $x=3t+2$; $y=t2^{-t}$.

9. а) $y=\sqrt{x}\ln x+\frac{\sin x}{5x-1}+\lg^3 4$; б) $y=\ln\left(3x+\sqrt{4+9x^2}\right)$;

в) $y=\frac{x+2}{x^2+4x+6}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}}$; г) $y=(\arcsin 4x)^{5-3x^2}$;

д) $\ln\left(x^2+y^2\right)=\frac{x}{\sqrt{y}}$; е) $x=e^{-2t}$; $y=e^t+e^{2t}$.

10. а) $y=\operatorname{arctg}x\cdot\sqrt{x}+\frac{x^2-3x}{\ln x}-\frac{5\pi}{6}$; б) $y=\arccos^3\sqrt{x}$;

в) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; г) $y=(\cos x)^{\arcsin x}$;

д) $\sqrt[3]{2x-3y+4}=e^{xy}$; е) $x=3^t$; $y=t^2+2t-1$.

11. а) $y=2^x\arcsin x+\frac{\ln x}{7x-1}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $y=\sqrt[5]{\sin^3(2x-3)}$;

в) $y=\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\ln\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}$; г) $y=\left(x^2-5x+6\right)^{\operatorname{ctg}3x}$;

д) $xy^3=e^{5x-y}$; е) $x=2t+3$; $y=\sqrt{\cos^3 t}$.

12. а) $y=\frac{3\cos x}{2x+5}-4^x\cdot\sqrt{x}+\ln^3 2$; б) $y=\log_4\sqrt[4]{\frac{1}{1-x^4}}$;

в) $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$; г) $y=\left(\sin x^2\right)^{\operatorname{tg}x}$;

д) $\sqrt{\frac{x}{y}}=2^{x+3y+1}$; е) $x=\frac{1}{2t^2}$; $y=t\arcsin^2 t$.

13. а) $y=5\sqrt[5]{x}+\frac{x\cdot\operatorname{tg}x}{2x-9}-2e^2$; б) $y=\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{6x}}$;

в) $y=\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{8x-x^2-7}-9\arccos\sqrt{\frac{x-1}{6}}$; г) $y=\log_3^x(x^2-4)$;

д) $\frac{x}{y}\ln\left(\frac{y}{x}\right)=e$; е) $x=\frac{1}{t}$; $y=\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{3t^3}$.

14. а) $y=\frac{3x+5}{\log_2 x}-x\cdot 7^x+\sqrt[3]{2}$; б) $y=\ln^2(x+\cos x)$;

в) $y=\sqrt{x^2+5x+4}+3\ln\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}\right)$; г) $y=\left(2x^3+1\right)^{\arcsin x}$;

д) $\sqrt[4]{\dfrac{y}{x}}=xy^2-4$; е) $x=\dfrac{1}{\operatorname{tg}t}$; $y=\dfrac{t}{\operatorname{arctg}t}$.

15. а) $y=e^x\cdot\sqrt[4]{x}+\dfrac{\operatorname{ctg}x}{6x-5}-\sin^2 3$; б) $y=\arcsin\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)$;

в) $y=\dfrac{4}{2x+1}\sqrt{-x^2-x}+\ln\dfrac{1+2\sqrt{-x^2-x}}{2x+1}$; г) $y=\operatorname{ctg}^x(1-x)$;

д) $\arccos(xy-2y^2)=\sqrt{x}$; е) $x=e^{2x+1}$; $y=(1-t)^2$.

16. а) $y=x^3\log_7 x-\dfrac{\sqrt{x}}{2^x}+\operatorname{tg}\sqrt{2}$; б) $y=\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)$;

в) $y=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\arcsin\dfrac{4x+3}{\sqrt{17}}+\sqrt{1-3x-2x^2}$; г) $y=\arccos^x(6x+2)$;

д) $e^{x/y}=\sin 2x+\cos 3y$; е) $x=\sqrt[5]{t^4}$; $y=4-\sqrt[5]{t}$.

17. а) $y=\dfrac{2\operatorname{ctg}x-1}{\sqrt{x}}-\operatorname{tg}x\cdot e^x+\pi\cdot 3^{-2}$; б) $y=\operatorname{tg}^3\left(1-3\sqrt[3]{x}\right)$;

в) $y=3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+x\left(2x^2+5\right)\sqrt{x^2+1}$; г) $y=\cos^x(5x^2+6)$;

д) $\log_7(x^2y+xy^2)=4y$; е) $x=\cos\dfrac{t}{2}$; $y=t\sin\dfrac{t}{2}+1$.

18. а) $y=\dfrac{3\operatorname{ctg}x}{\sqrt{x^3}}+x^7\ln x-\operatorname{arctg}\sqrt{1{,}1}$; б) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$;

в) $y=2\sqrt{4x^2+2x-2}+3\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{x+1}}$; г) $y=\operatorname{tg}^x(x+7)$;

д) $\sin\left(\dfrac{\pi x}{y}\right)=x^2-y^2$; е) $x=\dfrac{1}{\cos 2t}$; $y=\dfrac{t}{\sin 2t}$.

19. а) $y=\dfrac{\cos x}{x+2}-\sqrt[4]{x}\cdot\sin x+5\log_3 4$; б) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;

в) $y=\ln\left(x+\sqrt{3+x^2}\right)\cdot\left(\sqrt{3+x^2}+x\right)$; г) $y=(\arcsin 5x)^{\lg x}$;

д) $\operatorname{ctg}(\pi-xy)=y^2+2x+1$; е) $x=t\sqrt{t}$; $y=t-e^{-t}$.

20. а) $y=\sqrt[3]{x}\cdot\log_2 x-\dfrac{x}{\sin x}+2e^4$; б) $y=3^{\sqrt{\operatorname{ctg}7x^2}}$;

в) $y=5\arcsin\sqrt{\dfrac{x+2}{5}}+\sqrt{6+x-x^2}$; г) $y=\left(x^2+1\right)^{\operatorname{arcctg}x}$;

д) $x^2y^3-x^3y^2=\cos(x-y)$; е) $x=\cos^2 3t$; $y=t+\sin^2 3t$.

21. а) $y=x^2\cos x+\dfrac{4x-1}{\arccos x}-\sqrt{\ln 3}$; б) $y=\log_5^5(5x^5)$;

в) $y=\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$; г) $y=(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$;

д) $x^5y+10=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$; е) $x=-\dfrac{1}{t}$; $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$.

22. а) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2x-1}-4^x\cdot\log_4 x+\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^2$; б) $y=\ln^3(1+\cos x)$;

в) $y=2\sqrt{x^2+3x+2}+\arccos\dfrac{1}{2x+3}$; г) $y=(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{arctg}x}$;

д) $\dfrac{x-y}{x+y}=\sqrt{xy}$; е) $x=\dfrac{1}{3t^3}$; $y=\sin(t^3)$.

23. а) $y=(6x-1)\cdot e^x-\dfrac{\cos x}{\sqrt{x^5}}+(\log_5 e)^{-2}$; б) $y=\arccos^2\sqrt{x}$;

в) $y=\sqrt{1+49x^2}\cdot\operatorname{arctg}7x-\ln\left(7x+\sqrt{1+49x^2}\right)$ г) $y=(\sin x)^{\arcsin x}$;

д) $y=\left(e^x-1\right)^{\ln x+1}$; е) $x=2^t$; $y=1+2^t-2^{-t}$.

24. а) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{2x}}+2^x\operatorname{ctg}x-\dfrac{4\pi}{3}$; б) $y=\dfrac{\sin^2 4x}{4\cos 8x}$;

в) $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}+\dfrac{2}{x-1}\sqrt{2x-x^2}$; г) $y=\left(1+\sqrt{x}\right)^{x^2}$;

д) $5^{xy-x}=\sqrt{y}$; е) $x=\log_2 t$; $y=4+\log_4^4 t$.

25. а) $y=\dfrac{x^2+4}{\cos x}-\sqrt[3]{x}\cdot\ln x+\operatorname{arctg}^2\pi$; б) $y=-\dfrac{\cos^2 10x}{20\sin 20x}$;

в) $y=\sqrt{1+4x^2}\cdot\operatorname{arctg}2x-\ln\left(x+\sqrt{1+4x^2}\right)$; г) $y=(\cos x)^{\arccos x}$;

д) $x\sin y=y\cos x$; е) $x=e^{2t}+2$; $y=e^{-3t}-3$.

26. а) $y=\dfrac{x^3}{\arccos x}-7^x\cdot\operatorname{tg}x+2\sqrt{\sin 2}$ б) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

в) $y=\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+(3x+2)\sqrt{x-1}$; г) $y=(\lg x)^{\lg x}$;

д) $\sqrt[3]{y}=xe^{x+y}$; е) $x=\sqrt{t-1}$; $y=t\sqrt{t-1}$.

27. а) $y=(2x^2+4)\cdot 2^x-\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}+\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^3$; б) $y=\ln\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$;

в) $y=\ln\left(e^{4x}+\sqrt{e^{8x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-4x}\right)$; г) $y=(\sin\pi x)^{x^2}$;

д) $\sqrt[4]{x+y}=yx$; е) $x=\operatorname{tg}2t$; $y=\operatorname{arctg}2t$.

28. а) $y=(\sin x-1)\ln x+\dfrac{1-5x^3}{\operatorname{arcctg}x}-e\sqrt{3}$; б) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$;

в) $y=\sqrt{9x^2+6x-3}+2\arcsin\dfrac{2}{1+3x}$; г) $y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^{x^3}$;

д) $\lg(xy)=\ln(x-y)$; е) $x=\cos t^2$; $y=\arccos t^2$.

29. а) $y=\dfrac{3^x+1}{\operatorname{arctg}x}-x\sin x+\log_2^2 5$; б) $y=\ln\arccos\sqrt{1-e^{2x}}$;

в) $y=\sqrt{1+2x-x^2}\arcsin\dfrac{x\sqrt{2}}{x+1}-\sqrt{2}\ln(1+x)$; г) $y=\left(e^x-1\right)^{\ln x+1}$;

д) $\operatorname{tg}(x^2+xy+y^2)=\pi$; е) $x=2^t$; $y=t-4^{-t}$.

30. а) $y=x\arccos x-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+\dfrac{5\pi}{3}$; б) $y=\ln\left(2x+\sqrt{9+4x^2}\right)$;

в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2x-1}{4x^2-4x+3}$; г) $y=(\log_4 x)^{\sqrt{x}}$;

д) $x\operatorname{tg}y=y\operatorname{ctg}x$; е) $x=t^4-1$; $y=t-e^{-t}$.

Завдання 5. Обчислити за допомогою правила Лопіталя границі б), в), д) завдання 1 та границі:

1. а) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin x-1}{\ln\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{\ln(2x+1)}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x-x\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_4 x}{x^3-1}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin 3x}{1-\operatorname{ctg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-6}{e^x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}x-x}{\ln(1+x^2)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3e^{-x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{3\ln\sin x+\pi}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^x}{x^3+2x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{e^{4x}-4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_3 x}{\sqrt[9]{(2x+1)^2}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^x-3}{\ln x+2x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x\ln x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \operatorname{tg} 3x}{\ln \operatorname{tg} 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3}{2^{x+1}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(1/x)}{2\operatorname{arctg}x-\pi}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-8}{\log_2(3x-1)}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+2x}{e^x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6^{x+2}}{\ln(2x+1)}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\log_2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{x^5-3}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x+x^2}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_4(2x)}{\sqrt{8x-1}}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{3+\ln x}{\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x}{(1{,}1)^x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+3}{e^{2x}}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+3x-1}{\arcsin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{5^{x+1}}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}2x}-1}{x-\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x-7}{3^x}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-\cos 2x}{e^{3x}-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^2}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+\ln x-1}{4\operatorname{arctg}x-\pi}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8^x}{\log_4(x^5+1)}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{e^x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\lg(3x-1)}{\sqrt[3]{5x+1}}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-x}{\ln(1+3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x+1}}{(x+1)^2}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg}x}{\sqrt{\sin 3x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^{x+5}}{x^6+3}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x - 2xe^x}{\operatorname{arctg}x - \sin x + x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_7 x}{\sqrt[5]{x-1}}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x - 2^{-x}}{5^x - 4^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+6x-1}{\log_3(5x+1)}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln\cos 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x^3}{2^x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x - e}{\ln x + 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\lg(x^2+1)}{\sqrt[3]{x^2}}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{2\ln x}{\ln\sin x + 1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7^{x+2}}{x^2+5x-6}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2^x+3^x}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg}x}{\sin x - x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^{x+2}}{\ln^2(x+2)}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(e^x-e^2)}{\ln(2-x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{4x+3}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x - x}{\operatorname{tg}x+\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-6}{\log_3(x^2+5)}$.

Завдання 6. Написати рівняння дотичних прямих і нормалей до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0. Знайти точки, в яких дотична паралельна вісі абсцис.

1. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$; $x_0 = 0$.

2. $y = x + \sin 2x$; $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

3. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$; $x_0 = 3$.

4. $y = \sqrt{25 - x^2}$; $x_0 = 4$.

5. $y = x^3 - x^2 - 4x + 2$; $x_0 = -1$.

6. $y = 2\sqrt{x}$; $x_0 = 4$.

7. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $x_0 = 0$.

8. $y = 2(1-\sqrt{x})^2$; $x_0 = 4$.

9. $y=\dfrac{\ln x}{x}$; $x_0=1$.

10. $y=\dfrac{8}{4+x^2}$; $x_0=2$.

11. $y=\sqrt{25-x^2}$; $x_0=3$.

12. $y=\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$; $x_0=3+\sqrt{2}$.

13. $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$; $x_0=3$.

14. $y=2x-3\sqrt[3]{x}$; $x_0=-1$.

15. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$; $x_0=1$.

16. $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+2$; $x_0=1-\sqrt{2}$.

17. $y=x-\cos x$; $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

18. $y=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-2$; $x_0=1$.

19. $y=\dfrac{2}{x^2+4}$; $x_0=-2$.

20. $y=2x^3-4x^2+3x-7$; $x_0=1$.

21. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; $x_0=1$.

22. $y=\sqrt{3x}$; $x_0=3$.

23. $y=\dfrac{x}{x+2}$; $x_0=-1$.

24. $y=x^3-2x^2+x-4$; $x_0=1$.

25. $y=x+\ln x$; $x_0=1$.

26. $y=x^3+2x^2+3$; $x_0=-2$.

27. $x^2+y^2=4$; $x_0=2$.

28. $y=2+x-x^2$ $x_0=-1$.

29. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; $x_0=1$.

30. $y=10-3\sqrt[3]{x^2}$; $x_0=8$.

Завдання 7. Обчислити наближено значення за допомогою диференціала.

1. $\operatorname{tg}46^\circ$.
2. $\arcsin 0{,}05$.
3. $\ln 1{,}2$.
4. $\sqrt[4]{15{,}08}$.
5. $\sin 9^\circ$.
6. $\operatorname{arctg}0{,}95$.
7. $\sin 28^\circ$.
8. $\arcsin 0{,}52$.
9. $\ln 0{,}93$.
10. $\sqrt[5]{33}$.
11. $\sin 33^\circ$.
12. $\operatorname{arctg}0{,}98$.
13. $\operatorname{tg}43^\circ$.
14. $\arccos 0{,}03$.
15. $\sqrt{1{,}01}$.
16. $\ln 1{,}05$.

17. $\sqrt[5]{245}$.

18. $\cos 18^\circ$.

19. $\operatorname{arctg} 1{,}06$.

20. $\sqrt[3]{7{,}97}$.

21. $\arcsin 0{,}01$

22. $\cos 62^\circ$.

23. $\arccos 0{,}53$.

24. $\sqrt{3{,}97}$.

25. $\ln 0{,}99$.

26. $\sqrt[3]{120}$.

27. $\cos 57^\circ$.

28. $\operatorname{arctg} 1{,}1$.

29. $\sqrt{15{,}8}$.

30. $\arcsin 0{,}49$.

Завдання 8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на сегменті [*a; b*]:

1. $y = \sqrt{25 - x^2}$; $[-3;4]$.
2. $y = e^x(x-1)$; $[-1;1]$.
3. $y = \arcsin(x^2)$; $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
4. $y = \frac{\ln x}{x}$; $[1;4]$.
5. $y = \operatorname{tg} x - x$; $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
6. $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$; $[-1;2]$.
7. $y = \sqrt{x^2 + 4}$; $[-1;2]$.
8. $y = 2x^5 - 5x^2 - 3$; $[0;2]$.
9. $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$; $[0;3]$.
10. $y = x^2 - 4x + 4$; $[0;4]$.
11. $y = \frac{e^x}{x+1}$; $[-0{,}5;1]$.
12. $y = 2\sin x - x$; $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
13. $y = x^5 + 5x^3 - 2$; $[-1;1]$.
14. $y = x^3 - 3x^2 + 7$; $[1;5]$.
15. $y = \cos 2x - 2x$; $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
16. $y = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$; $[-3;0]$.
17. $y = \sqrt{25 - x^2}$; $[-4;5]$.
18. $y = x^4 - 2x^2 - 1$; $[0;3]$.
19. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$; $[-1;1]$.
20. $y = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$; $[-3;0]$.
21. $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$; $[0;3]$.
22. $y = x^3 - 3x^2 + 7$; $[1;5]$.

23. $y=\dfrac{1}{x^2-6x+10}$; $[1;5]$.

24. $y=\sqrt{4-x^2}$; $[-1;2]$.

25. $y=x\ln x$; $\left[\dfrac{1}{e^2};1\right]$.

26. $y=\sqrt{3+2x}$; $[-1;1]$.

27. $y=\sqrt{1+x^2}$; $[-2;1]$.

28. $y=x^3+6x^2-15x$; $[0;4]$.

29. $y=\arccos(x^2)$; $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

30. $y=\dfrac{x}{x^2+4}$; $[-2;1]$.

Завдання 9. Провести повне дослідження функції $y=f(x)$ та побудувати її графік.

1. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

2. $y=\dfrac{(x-2)^3}{(x+1)^2}$.

3. $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$.

4. $y=\dfrac{x^2+4}{3x}$.

5. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

6. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

7. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

8. $y=\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^2$.

9. $y=\dfrac{x^2-3}{x}$.

10. $y=\dfrac{x+4}{(x-4)^2}$.

11. $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$.

12. $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$.

13. $y=\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2$.

14. $y=\dfrac{x^3-1}{3x^2}$.

15. $y=\dfrac{3x-1}{(x-2)^2}$.

16. $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.

17. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$.

18. $y=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$.

19. $y=\dfrac{x^2+1}{2x}$.

20. $y=\dfrac{3x}{(x+2)^2}$.

21. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

22. $y = \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$.

23. $y = \dfrac{x+2}{(x-5)^2}$.

24. $y = \dfrac{x^2 - 1}{3x}$.

25. $y = \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$.

26. $y = \dfrac{x+2}{(x-5)^2}$.

27. $y = \dfrac{x^2 - 2}{2x}$.

28. $y = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}$.

29. $y = \dfrac{x}{2 - x^3}$.

30. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Контрольні запитання для самодіагностики

1. Наведіть означення границі функції в точці.

2. Які функції називаються нескінченно великими при $x \to x_0$? Які арифметичні властивості нескінченно великих ви знаєте? Наведіть приклади їх застосування.

3. Які функції називаються нескінченно малими при $x \to x_0$? Які арифметичні властивості нескінченно малих ви знаєте? Наведіть приклади їх застосування.

4. Сформулюйте теорему про зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими. Наведіть приклад застосування.

5. Наведіть означення односторонніх границь функції в точці.

6. Які типи невизначенностей ви знаєте?

7. Як розкрити невизначеність типу $\left|\dfrac{0}{0}\right|$, яка задана відношенням двох поліномів?

8. Як розкрити невизначеність типу $\left|\dfrac{0}{0}\right|$, яка містить ірраціональні функції?

9. Наведіть два способи розкриття невизначеності типу $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, яка задана відношенням двох поліномів.

10. Сформулюйте першу чудову границю. Яку невизначеність вона розкриває і коли застосовується?

11. Які функції називаються еквівалентними при $x \to x_0$? Сформулюйте теорему про застосування еквівалентних функцій при обчисленні границь. Наведіть приклад.

12. Наведіть наслідки першої чудової границі та приклади їх використання.

13. Сформулюйте другу чудову границю. Яку невизначеність вона розкриває?

14. Наведіть наслідки другої чудової границі та приклади їх використання.

15. Що називають таблицею еквівалентних нескінченно малих? Наведіть приклади використання.

16. Яка функція називається неперервною (розривною) в точці? Наведіть означення неперервної функції в точці в термінах односторонніх границь.

17. Яка функція називається елементарною? Сформулюйте теорему про неперервність елементарних функцій.

18. Сформулюйте властивості неперервних функцій у точці.

19. Що ви знаєте про функції, неперервні на сегменті? Сформулюйте відповідні теореми.

20. Які типи точок розриву ви знаєте? Як встановити тип розриву?

21. Які точки можуть бути точками розриву, якщо функція задана однією формулою?

22. Які точки можуть бути точками розриву, якщо функція задана декількома формулами?

23. Наведіть означення похідної функції, диференційовності функції в точці та на інтервалі.

24. Який зв'язок між неперервністю та диференційовністю функції в точці?

25. Який геометричний (механічний, економічний) зміст похідної?

26. Наведіть рівняння дотичної і нормалі функції в заданій точці.

27. Наведіть похідні основних елементарних функцій. Наведіть правила диференціювання суми, добутку, частки двох функцій.

28. Яка функція називається складною? Як обчислити її похідну? Наведіть приклад.

29. Що називають логарифмічним диференціюванням? У яких випадках воно застосовується?

30. Яка функція називається неявною? Як обчислити її похідну?

31. Яка функція називається параметричною? Як обчислити її похідну?

32. Що називається диференціалом функції? Як його обчислити? Який геометричний зміст диференціалу?

33. Наведіть означення похідних та диференціалів вищих порядків. Наведіть приклад їх відшукання.

34. Для чого і в яких випадках застосовується правило Лопіталя? Сформулюйте відповідні теореми.

35. Наведіть загальну схему дослідження функції методами диференціального числення. На якому етапі застосовується теорія границь? Для чого використовується перша та друга похідні функції?

36. Що називається асимптотою графіка функції? Які типи асимтот ви знаєте? Як знайти асимптоти графіка функції?

37. Чи може графік функції мати одночасно вертикальні та горизонтальні асмптоти? Вертикальні та похилі? Похилі та горизонтальні?

38. Які функції називають монотонними? Сформулюйте необхідну і достатню умову монотонності функції на проміжку.

39. Що називається локальним екстремумом функції? Наведіть необхідну і достатні умови екстремуму функції, а також схему дослідження функції на екстремум.

40. Коли графік функції є опуклим (угнутим) на заданому інтервалі?

41. Як дослідити функцію на опуклість (угнутість) її графіка? Сформулюйте відповідні теореми.

42. Що таке точка перегину графіка функції? Як її знайти? Сформулюйте необхідну і достатню умову точки перегину графіка функції.

Додатки

Додаток А

Таблиця похідних

Елементарні функції		Складні функції	
$y=f(x)$	$y'=f'(x)$	$y=f(u)$	$y'=f'_u u'_x$
$C=const$	0	C=const	0
$x^\alpha,\ \alpha\in R$	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$u^\alpha,\ \alpha\in R$	$\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$
e^x	e^x	e^u	$e^u\cdot u'$
a^x	$a^x\ln a$	a^u	$a^u\ln a\cdot u'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{1}{u}\cdot u'$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\log_a u$	$\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$\cos u\cdot u'$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-\sin u\cdot u'$
$\mathrm{tg}\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\,u$	$\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$\mathrm{ctg}\,x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{ctg}\,u$	$\frac{-1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos u$	$\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\mathrm{arctg}\,x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\,u$	$\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$\mathrm{arcctg}\,x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\mathrm{arcctg}\,u$	$\frac{-1}{1+u^2}\cdot u'$
Деякі степеневі функції:			
x	1	u	u'
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2}\cdot u'$

Рекомендована література

Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Берман Г. Н. – М. : Наука, 1972. – 384 с.

Бугров Я. С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Бугров Я. С., Никольский С. М. – М. : Наука, 1988. – 431 с.

Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.

Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 / Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.– М. : Высшая школа, 1986. – 304 с.

Дубовик В. П. Вища математика / Дубовик В. П., Юрик. І. І. – К. : "Вид. А.С.К.", 2004. – 647 с.

Дубовик В. П. Вища математика. Збірник задач / Дубовик В. П., Юрик І. І. – К. : "Вид. А.С.К.", 2003. – 480 с.

Малярець Л. М. Математика для економістів. Вища математика для економістів: навчальний посібник. Ч. 1 / Малярець Л. М., Афанасьєва Л. М., Ігначкова А. В. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 396 с.

Малярець Л. М. Практичний посібник до розв'язання задач з курсу "Математика для економістів". Ч. 1 / Малярець Л. М., Широкорад Л. Д. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2008. – 304 с.

Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление, Т.1 / Пискунов Н. С. – М. : Наука, 1985. – 432 с.

Робоча програма навчальної дисципліни "Вища математика" для студентів напряму підготовки 0927 "Видавничо-поліграфічна справа" всіх форм навчання / укл. Т. В. Денисова, Г. В. Макарова, В. Ф. Сенчуков. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2007. – 84 с.

Сборник задач по математике для вузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1993. – 478 с.

Травкін Ю. І. Підручник для економічних спеціальностей "Математика для економістів" / Травкін Ю. І., Малярець Л. М. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2006, – 816 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації
до виконання індивідуального
навчально-дослідного завдання
"Диференціальне числення
функції однієї змінної"з навчальної дисципліни
"ВИЩА МАТЕМАТИКА"
для студентів галузі знань
0515 "Видавничо-поліграфічна справа"
всіх форм навчання

Укладач **Рибалко** Антоніна Павлівна

Відповідальний за випуск **Маляреця Л. М.**

Редактор **Лященко Т. О.**

Коректор **Мартовицька-Максимова В. А.**

План 2013 р. Поз. № 214.
Підп. до друку 10.06.2013. Формат 60×90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 3,25. Обл.-вид. арк. 4,06. Тираж 50 прим. Зам. № 212.

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9а

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
Дк № 481 від 13.06.2001 р.