УДК: 519.85 https://doi.org/10.15407/jai2026.01.091

К. О. Веретельник[1]**, А. М. Чугай**[2]
[1, 2] Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, Україна
просп. Науки, 9А, Харків, 61166
[2] Інститут енергетичних машин та систем імені А.М. Підгорного Національної академії наук України
вул. Комунальників, 2/10, Харків, 61046
[1] kostiantyn.veretelnyk@hneu.net
[2] chugay.andrey80@gmail.com
[1] https://orcid.org/ 0009-0006-1114-8846
[2] https://orcid.org/ 0000-0002-4079-5632

ЖАДІБНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РОЗМІЩЕННЯ БАГАТОВИМІРНИХ КУЛЬ У КУЛІ З МІНІМАЛЬНИМ РАДІУСОМ

Анотація. У роботі розглядається задача розміщення куль у багатовимірному евклідовому просторі в кулі мінімального радіуса. Такі задачі виникають у геометричній оптимізації, аналізі високовимірних структур і застосовуються, зокрема, під час побудови багатовимірних кодових конфігурацій у задачах передавання й захисту інформації. Формально задача зводиться до пошуку конфігурації непретинних куль, що мінімізує радіус області, яка їх містить. Ця оптимізаційна задача належить до класу NP-складних, а її точний розв'язок у просторі високої розмірності потребує значних обчислювальних ресурсів. Для отримання швидких наближених рішень запропоновано жадібний алгоритм послідовного додавання куль. На кожному кроці нова куля розміщується якомога ближче до початку координат за умови дотримання геометричних обмежень, водночас уже розміщені елементи залишаються фіксованими. Такий підхід забезпечує низьку обчислювальну складність і дає змогу конструювати допустимі конфігурації у просторах великої розмірності. Проведені обчислювальні експерименти для різних розмірностей демонструють ефективність розробленого алгоритму та дають змогу оцінити щільність отриманих конфігурацій. Запропонований метод може використовуватися як стартовий етап перед застосуванням більш складних локальних або глобальних оптимізаційних алгоритмів.

Ключові слова: багатовимірна куля, математичне моделювання, обчислювальна геометрія, жадібний алгоритм, нелінійне програмування.

K. Veretelnyk[1], **A. Chuhai**[2]
[1,2]Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Ukraine
Nauky Ave, 9A, Kharkiv, 61166
[2]Anatolii Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine
Komunalnykiv St., 2/10, Kharkiv, 61046
[1]e-mail: kostiantyn.veretelnyk@hneu.net
[2] e-mail: chugay.andrey80@gmail.com
[1]https://orcid.org/0009-0006-1114-8846
[2]https://orcid.org/ 0000-0002-4079-5632

A GREEDY ALGORITHM FOR PLACING MULTIDIMENSIONAL SPHERES INSIDE A MINIMUM-RADIUS SPHERE

Abstract. This paper considers the problem of placing spheres in a multidimensional Euclidean space inside a sphere of minimum radius. Such problems arise in geometric optimization and the analysis of high-dimensional structures and are applied, in particular, to the construction of multidimensional code configurations in coding and information security. Formally, the problem is reduced to finding a configuration of non-overlapping spheres that minimizes the radius of the containing region. This optimization problem belongs to the class of NP-hard problems, and its exact solution in high-dimensional spaces requires significant computational resources. To obtain fast approximate solutions, a greedy algorithm based on sequential sphere insertion is proposed. At each step, a new sphere is placed as close as possible to the origin while satisfying geometric constraints, whereas previously placed elements remain fixed. This approach ensures low computational complexity and enables the construction of feasible configurations in spaces of large dimensionality. Computational experiments conducted for various dimensions demonstrate the efficiency of the proposed algorithm and allow the density of the resulting configurations to be evaluated. The proposed method can be used as an initial stage prior to applying more sophisticated local or global optimization algorithms.

Keywords: multidimensional sphere, mathematical modeling, computational geometry, greedy algorithm, nonlinear programming.

Вступ

Задачі розміщення куль у багатовимірних евклідових просторах відіграють центральну роль у геометричній оптимізації та аналізі високовимірних структур. Класична постановка пакування гіперкуль належить до фундаментальних задач дискретної геометрії, які мають численні застосування – від моделювання структури матеріалів до побудови оптимальних конфігурацій у задачах цифрового зв'язку та захисту інформації. Хоча для низьких розмірностей розроблено ефективні методи пакування, у розмірностях $d \geq 4$ задача стає надзвичайно складною. Загальний варіант пошуку найщільнішого пакування належить до NP-складних оптимізаційних проблем і вимагає експоненційних обчислювальних витрат у найгіршому випадку [1].

Високовимірні пакування мають особливе значення у практичних задачах, де необхідно забезпечити безперешкодне розміщення багатьох об'єктів у обмеженій області. Зокрема, у теорії зв'язку й кодування багатовимірні точки та їх околи інтерпретуються як сигнальні конфігурації або області коректного прийому у гаусових каналах. Геометрична структура таких множин визначає мінімальну міжвекторну відстань, енергетичні властивості та ймовірність помилки, що безпосередньо пов'язано зі сферичними моделями, решітковими констеляціями та підходами Voronoi-шейпінгу [2].

Хоча в цій роботі не акцентується увага саме на кодових конфігураціях, пакування куль природним чином слугує математичною моделлю для низки подібних прикладних задач.

Багатовимірні пакування активно досліджуються як у регулярних, так і в нерегулярних сценаріях. Оптимальні решіткові структури відомі лише для окремих розмірностей. Визначні результати української вченої Марини В'язовської довели оптимальність решітки $E8$ для $d \geq 4$. Також розв'язано аналогічну задачу для решітки Ліча у 24-вимірному просторі [3]. Для інших розмірностей точні рішення невідомі, а оцінки щільності базуються на чисельних або аналітичних межах [4].

Оскільки задача оптимального розміщення куль є обчислювально складною, практично широко використовують евристичні методи – випадкове послідовне додавання [5], методи стиснення [6], алгоритми масштабування [7] та різноманітні локальні оптимізатори. Такі підходи забезпечують можливість отримати коректні конфігурації у високих розмірностях, хоч і без гарантій глобальної оптимальності [8]. Жадібні алгоритми, зокрема послідовне додавання об'єктів із фіксацією попередніх рішень [9], давно зарекомендували себе як ефективний інструмент для швидкого конструювання допустимих розміщень у задачах пакування та розміщення об'єктів у контейнерах [10].

У цій роботі розглядається задача розміщення множини неперетинних гіперкуль усередині кулі мінімального радіуса у просторі довільної розмірності $d \geq 2$. Така постановка є природною узагальненою геометричною проблемою, яка охоплює широкий спектр прикладних задач, зокрема моделювання сигналів і ресурсів у системах зв'язку. Через NP-складність задачі пропонується жадібний алгоритм, який уникає глобальної оптимізації та дає змогу швидко одержати допустиму конфігурацію, здатну слугувати стартовим наближенням для подальших методів удосконалення. На кожному кроці алгоритм мінімізує положення нової кулі відносно центру області за умов ненакладання, що забезпечує низьку складність та ефективність навіть у високовимірних просторах.

Проведені обчислювальні експерименти для розмірностей до 32 демонструють працездатність методу та дають змогу оцінити досягнуті щільності. Отримані результати підтверджують, що жадібний підхід є цінним інструментом для попереднього конструювання складних конфігурацій, що важливо як у теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосунках.

Постановка задачі та математична модель

Розглянемо задачу розміщення множини куль у d-вимірному просторі R^d. Нехай необхідно розмістити N куль однакового радіуса $r > 0$ таким чином, щоб усі вони належали деякій кулі мінімально можливого радіуса $R \ge r$.

Нехай $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n \in R^d$ – множина центрів куль. Дві кулі з центрами $\mathbf{x}_i$ та $\mathbf{x}_j$ не накладаються тоді й лише тоді, коли виконується нерівність

$$\left\| \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \right\|^2 \ge 4r^2, \ 1 \le i < j \le N. \tag{1}$$

Це обмеження є базовою вимогою для задач пакування та геометричного моделювання [9].

Наступною умовою класичної задачі розміщення є виконання нерівності

$$\left\| \mathbf{x}_i \right\|^2 \ge (R - r)^2, \ 1 \le i \le N1, \tag{2}$$

яка означає, що кожна куля повністю належить області розміщення.

Задачу розміщення куль у контейнері мінімального радіуса можна записати в такий спосіб:

$$R^* = \arg \min_{R, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N} R \tag{3}$$

за умов (1), (2).

Задача (1)–(3) є NP-складною багатоекстремальною задачею нелінійного програмування. Саме тому точні методи розв’язання практично непридатні для $d > 5$ та великих N, що підтверджується сучасними оглядами з теорії багатовимірних пакувань [9].

Оскільки контейнерна область є кулею радіуса R, у яку мають бути розміщені всі кулі радіуса r, значення радіуса R можна визначити як:

$$R = r + \max_{1 \le i \le N} \left\| \mathbf{x}_i \right\|. \tag{4}$$

Тому вихідна задача мінімізації радіуса контейнера (1)–(3) еквівалентна задачі оптимізації

$$\min_{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N} \max_{1 \le i \le N} \left\| \mathbf{x}_i \right\| \tag{5}$$

за умов (1).

Це класична min-max оптимізаційна задача, властива для геометричних задач розміщення у високих розмірностях. Через обмеження (1) задача (5) є нелінійною, неопуклою та NP-складною [1].

Жадібний алгоритм

Запропонований жадібний метод є конструктивною процедурою послідовного вибору положень центрів куль, яка реалізує послідовне блокове наближення глобальної min–max задачі (8). На кожному кроці визначається положення нової кулі з мінімально можливою нормою за умов ненакладання з уже розміщеними кулями. Тобто оптимізація відбувається за блоком змінних, які визначають центр кулі. Такий підхід забезпечує низьку обчислювальну складність і масштабується на простори підвищеної розмірності. Він узгоджується з класичною схемою BCD (block coordinate descent), де блоками є підмножини координат будь-якого розміру, включно з високовимірними параметрами [9, 11].

Нехай у просторі R^d вже розміщено $k-1$ куль з центрами $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{k-1}$. Необхідно знайти положення центра $\mathbf{x}_k$ нової кулі радіуса r. Відповідна локальна оптимізаційна задача формулюється як

$$\mathbf{x}_k = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \left\| \mathbf{x} \right\| \tag{6}$$

за умов

$$\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_i \right\| \ge 2r, \ i = 1, ..., k-1. \tag{7}$$

Хоча підзадача розміщення однієї кулі (6)–(7) формально є системою квадратичних рівнянь та нерівностей, у принципі придатною для аналітичного розв’язання методом виключення змінних, такий підхід є практично непридатним через експоненційне зростання кількості потенційних комбінацій активних обмежень.

Для кулі в просторі R^d точка оптимуму може одночасно задовольняти до $m \le d$ активні умови неперетину (7), оскільки кожна така рівність задає гіперповерхню другого порядку, і для визначення точки потрібно не більше ніж d незалежних рівнянь.

Звідси випливає важлива властивість. Для двовимірного випадку (круги) потрібно перебрати комбінації до 2 активних обмежень, для тривимірних куль - до 3 активних обмежень, а для загального випадку – до d активних обмежень.

Отже, теоретично розв'язок може бути отриманий шляхом перебору всіх підмножин, що визначають потенційні точки дотику нової кулі до m попередніх. Кількість таких підсистем зростає комбінаційно. Більшість наборів попередніх куль геометрично не можуть одночасно торкатися нового центру. Це призводить до несумісних систем або до точок, що не задовольняють обмеження задачі.

Повний аналітичний перебір є алгоритмічно еквівалентним NP-повної задачі. Таким чином, хоча аналітичне розв'язання локальної задачі (6)–(7) існує теоретично, воно потребує перебору величезної кількості підмножин активних обмежень, розв'язання великої кількості систем квадратичних рівнянь, перевірки сумісності та неперетину для кожного кандидата. Через це аналітичний підхід є обчислювально недоцільним і загалом практично незастосовним.

З огляду на ці міркування, доцільно застосовувати числовий метод локальної оптимізації, який знаходить допустимий локальний мінімум задачі (6)–(7) без перебору усіх підсистем.

На першому кроці жадібного алгоритму перша куля розміщується з центром у початку координат. Система (7) порожня. Подальші кулі повинні задовольняти умову неперетину з нею.

Для вибору стартового положення наступних куль використовується параметричний опис точок у евклідовому просторі R^d у гіперсферичних (полярних, сферичних) координатах, який дає змогу рівномірно породжувати початкові точки центрів куль у кулі радіуса $\rho = R - r$, де R обирається достатньо великим. На практиці значення ρ та кутові параметри можуть обиратися випадково в зазначених інтервалах. Якщо для згенерованої стартової точки для $k = 2,3,...,n$, порушується хоча б одна з умов (7), процедура побудови початкового наближення повторюється. Враховуючи, що радіус R заздалегідь обирається достатньо великим, ймовірність успішної генерації допустимої точки є високою, а сама процедура не створює суттєвих обчислювальних витрат.

У двовимірному просторі початкова точка задається стандартними полярними координатами:

$$x_1 = \rho \cos \varphi_1,$$
$$x_2 = \rho \sin \varphi_1$$

де

$$\rho \in [r, R-r] \;\; \varphi_1 \in [0, 2\pi].$$

Нижня межа сегмента $[r, R-r]$ гарантує, що стартова точка не потрапляє у заборонену область, пов'язану з першою кулею.

У тривимірному просторі побудова стартового положення нової кулі здійснюється з використанням сферичних координат:

$$x_1 = \rho \cos \varphi_1$$
$$x_2 = \rho \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$
$$x_3 = \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

де

$$\rho \in [r, R-r] \;\; \varphi_1 \in [0, \pi], \;\; \varphi_2 \in [0, 2\pi].$$

У просторі розмірності $d \geq 4$ застосовується гіперсферичне параметричне подання

$$x_k = \rho \cos \varphi_k \sin \varphi_1 ... \sin \varphi_{k-1}, \;\; k = 1,..., d-1,$$
$$x_d = \rho \sin \varphi_1 ... \sin \varphi_{d-1} \; ,$$

де

$$\rho \in [r, R-r],$$
$$\varphi_1,...,\varphi_{d-2} \in [0, \pi], \;\; \varphi_{d-1} \in [0, 2\pi].$$

Таким чином, на кожному кроці алгоритм прагне розташувати новий центр якомога ближче до початку координат, наскільки це дозволяють обмеження задачі. Попередньо розміщені кулі при цьому не переміщуються, що забезпечує низьку обчислювальну складність алгоритму та можливість його практичної реалізації у просторах великої розмірності.

У результаті жадібний алгоритм формує допустиму конфігурацію кодових векторів із гарантованою мінімальною відстанню та відносно малою сумарною енергією. Отримане рішення не гарантує глобальної оптимальності задачі (1)–(3), однак є ефективною стартовою точкою для подальшого вдосконалення за допомогою локальних або глобальних оптимізаційних методів, а також метаевристик.

На рис. 1 проілюстровано декілька етапів жадібного алгоритму для розміщення куль у просторі R^2 (кругів).

Числові експерименти

У цьому розділі наведено результати числових експериментів із використанням запропонованого жадібного алгоритму для задачі розміщення неперетинних гіперкуль у просторі різної розмірності. Для $d = 2, 3, 4, 8, 24, 32, 64$ розмірності було згенеровано конфігурації з $N = 100$ куль однакового радіуса, а також обчислено характеристики побудованих розміщень: мінімальний радіус контейнера R^*, коефіцієнт заповнення контейнера, загальний час виконання алгоритму. Для розв'язання задач нелінійного програмування використовувався солвер IPOPT [12].

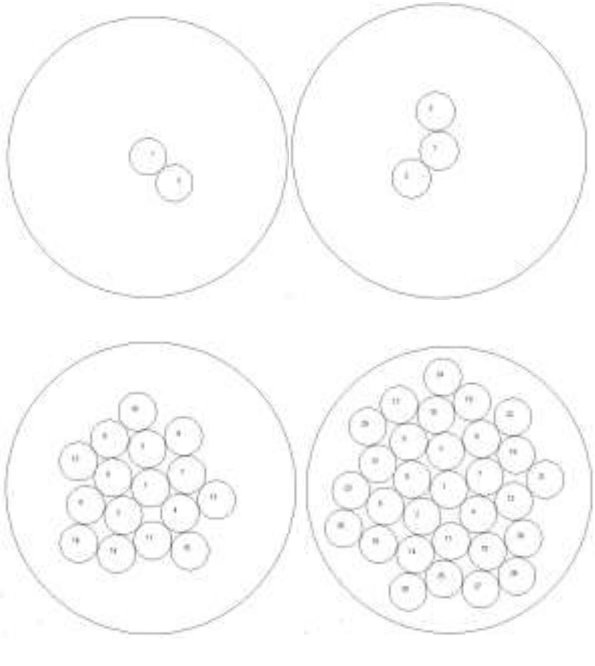

Рис. 1. Ілюстрація роботи жадібного алгоритму

Для розмірностей $d = 2, 3$ легко виконати візуальну верифікацію. Для розмірностей $d = 4, 8$ існують добре відомі базові орієнтири щільності, пов'язані з решітками D4 і E8 [1]. Розмірність $d = 24$ пов'язана з решіткою Ліча $\Lambda 24$. Розмірність $d = 32$ відома у сучасних системах багатовимірного шейпінгу та високорозрядної модуляції [2]. Розмірність $d = 64$ була обрана для демонстрації масштабованості. Алгоритм також працює і для більших розмірностей.

Таким чином, обрані вимірності дозволяють провести аналіз продуктивності алгоритму як у низьких, так і у високих розмірностях.

Для двовимірного та тривимірного простору побудовано графічні ілюстрації отриманих розміщень (рис. 2 та рис. 3). Візуально спостерігається характерна багатошарова решітчата структура, що природно виникає при жадібному зменшенні норми кожного нового вектора. Ці візуалізації підтверджують коректність реалізації алгоритму та його здатність формувати допустимі розміщення.

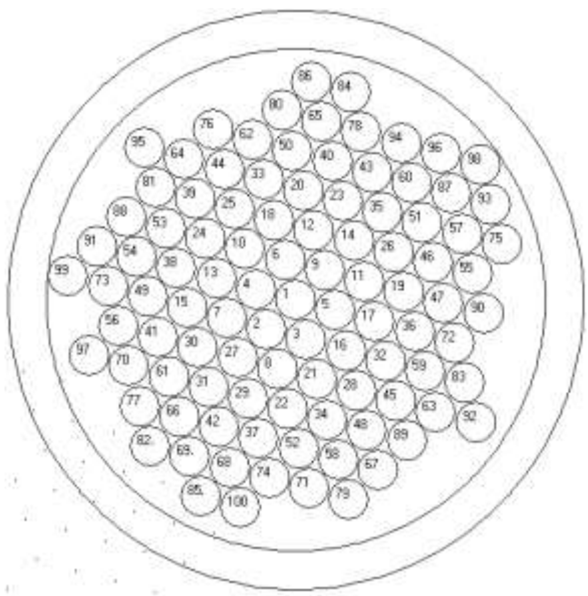

Рис. 2. Результат роботи алгоритму для $d = 2$

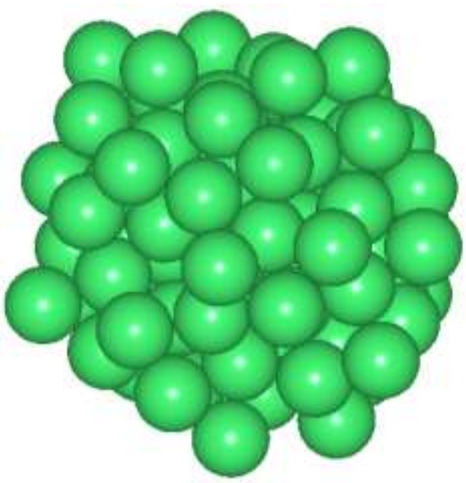

Рис. 3. Результат роботи алгоритму для $d = 3$

Нижче наведено узагальнену таблицю результатів (таблиця 1).

Таблиця 1. Характеристики конфігурацій багатовимірних куль

d	$R^*(4)$	fraction	час, с
2	13,1642	0,5770	12
3	6,7564	0,3242	15
4	4,8360	0,1828	18
8	3,0019	0,01517	30
24	2,9976	$3e^{-10}$	59
32	2,9972	$6e^{-14}$	86
64	3,0080	$2e^{-29}$	180

Алгоритм успішно працює в усіх протестованих просторах, включно з високими розмірностями. Щільність розміщення значно зменшується із зростанням розмірності. Час роботи алгоритму зростає помірно і дозволяє масштабувати метод до $d = 64$ і більше. Час виконання алгоритму масштабується відповідно до оцінки $O(N^2 d)$.

Висновки

У роботі запропоновано та досліджено жадібний алгоритм для задачі розміщення неперетинних гіперкуль у багатовимірних просторах усередині контейнерної кулі мінімального можливого радіуса. Задача є варіантом класичної min–max оптимізації та належить до класу NP-складних, що унеможливлює ефективне точне розв'язання у високих розмірностях.

Запропоновано нову конструктивну методику, яка будує допустимі конфігурації послідовним розміщенням куль. На кожному кроці мінімізується відстань нового центра до початку координат за умов неперетину з уже розміщеними елементами. Така схема інтерпретується як блочна оптимізація.

Обґрунтовано переваги числової локальної оптимізації над повним аналітичним розв'язанням підзадач. Хоча системи квадратичних рівнянь формально розв'язні, кількість потенційних комбінацій активних обмежень зростає комбінаційно з розмірністю, а більшість таких систем є несумісними або породжують заборонені точки. Перехід до числового солвера дає змогу уникнути вибуху складності і забезпечує обчислювальну стабільність.

Результати підтверджують, що запропонований жадібний алгоритм є простим, масштабованим та ефективним інструментом для швидкого формування допустимих конфігурацій куль у високих вимірностях. Незважаючи на те, що алгоритм не гарантує глобальної оптимальності, він забезпечує достатньо високу якість початкового розв'язку при низьких обчислювальних затратах, що є суттєвою перевагою у застосуваннях, де потрібна подальша оптимізація або багаторазове повторення розрахунків.

Література

1. J. H. Conway, N. J. A. Sloane, Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer New York, NY (1999). doi: 10.1007/978-1-4757-6568-7.
2. S. Li, A. Mirani, M. Karlsson, E. Agrell, Low-Complexity Voronoi Shaping for the Gaussian Channel. IEEE Transactions on Communications 70(2) (2022) 865–873. doi: 10.1109/TCOMM.2021.3130286.
3. M. S. Viazovska, The sphere packing problem in dimension 8. Annals of Mathematics 185(3) (2017) 991–1015. doi: 10.1007/s12652-021-03612-z.
4. H. Cohn, N. Elkies, New upper bounds on sphere packings I. Annals of Mathematics 157(2) (2003) 689–714. doi: 10.4007/annals.2003.157.689.
5. S. Torquato, O. U. Uche, F. H. Stillinger, Random sequential addition of hard spheres in high Euclidean dimensions. Phys. Rev. E 74(6) (2006) 061308. doi: 10.1103/PhysRevE.74.061308.
6. W. S. Jodrey, E. M. Tory, Computer simulation of close random packing of equal spheres. Phys. Rev. A 32(4), (1985) 2347–2351. doi: 10.1103/PhysRevA.32.2347.
7. A. R. Kansal, S. Torquato, F. H. Stillinger, Computer generation of dense polydisperse sphere packings. Journal of Chemical Physics 117 (2002) 8212–8218. doi: 10.1063/1.1511510.
8. G. Yaskov, A. Chugay, Packing equal spheres by means of the block coordinate descent method. CEUR Workshop Proceedings 2608 (2020) 150–160. doi: org/10.32782/cmis/2608-13.
9. M. Skoge, A. Donev, F. H. Stillinger, S. Torquato, Packing hyperspheres in high-dimensional Euclidean spaces Phys. Rev. E 74(4) (2006) 041127. doi: 10.1103/PhysRevE.74.041127.
10. K. He, W. Huang, An efficient placement heuristic for three-dimensional rectangular packing.

Computers & Operations Research 38(1) (2011) 227 – 233. doi: 10.1016/j.cor.2010.04.015.

11. D. P. Bertsecal, Nonlinear Programming (1999) ISBN 1-886529-00-0.

12. A. Wächter, L. Biegler, On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. Math. Program. 106 (2006) 25–57. doi: 10.1007/s10107-004-0559-y.

References

1. J. H. Conway, N. J. A. Sloane, Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer New York, NY (1999). doi: 10.1007/978-1-4757-6568-7.

2. S. Li, A. Mirani, M. Karlsson, E. Agrell, Low-Complexity Voronoi Shaping for the Gaussian Channel. IEEE Transactions on Communications 70(2) (2022) 865–873. doi: 10.1109/TCOMM.2021.3130286.

3. M. S. Viazovska, The sphere packing problem in dimension 8. Annals of Mathematics 185(3) (2017) 991–1015. doi: 10.1007/s12652-021-03612-z.

4. H. Cohn, N. Elkies, New upper bounds on sphere packings I. Annals of Mathematics 157(2) (2003) 689–714. doi: 10.4007/annals.2003.157.689.

5. S. Torquato, O. U. Uche, F. H. Stillinger, Random sequential addition of hard spheres in high Euclidean dimensions. Phys. Rev. E 74(6) (2006) 061308. doi: 10.1103/PhysRevE.74.061308.

6. W. S. Jodrey, E. M. Tory, Computer simulation of close random packing of equal spheres. Phys. Rev. A 32(4), (1985) 2347–2351. doi: 10.1103/PhysRevA.32.2347.

7. A. R. Kansal, S. Torquato, F. H. Stillinger, Computer generation of dense polydisperse sphere packings. Journal of Chemical Physics 117 (2002) 8212–8218. doi: 10.1063/1.1511510.

8. G. Yaskov, A. Chugay, Packing equal spheres by means of the block coordinate descent method. CEUR Workshop Proceedings 2608 (2020) 150–160. doi: org/10.32782/cmis/2608-13.

9. M. Skoge, A. Donev, F. H. Stillinger, S. Torquato, Packing hyperspheres in high-dimensional Euclidean spaces Phys. Rev. E 74(4) (2006) 041127. doi: 10.1103/PhysRevE.74.041127.

10. K. He, W. Huang, An efficient placement heuristic for three-dimensional rectangular packing. Computers & Operations Research 38(1) (2011) 227 – 233. doi: 10.1016/j.cor.2010.04.015.

11. D. P. Bertsecal, Nonlinear Programming (1999) ISBN 1-886529-00-0.

12. A. Wächter, L. Biegler, On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. Math. Program. 106 (2006) 25–57. doi: 10.1007/s10107-004-0559-y.

The article has been sent to the editors 03.02.26.
After processing 15.02.26.
Submitted for printing 30.03.26.