МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методичні рекомендації
до виконання практичних завдань
для здобувачів вищої освіти всіх спеціальностей
першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2026

УДК 519.8(072.034)
Д70

Укладачі: Л. М. Малярець
О. В. Мінєнкова

Затверджено на засіданні кафедри економіко-математичного моделювання.
Протокол № 8 від 08.01.2026 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Д70 **Дослідження** операцій та методи оптимізації [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до практичних завдань для здобувачів вищої освіти всіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня / уклад. Л. М. Малярець, О. В. Мінєнкова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2026. – 85 с.

Подано вправи й задачі з навчальної дисципліни "Дослідження операцій та методи оптимізації". Наведено приклади та основні теоретичні відомості, потрібні для їх розв'язання.

Рекомендовано для здобувачів вищої освіти всіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня денної форми навчання.

УДК 519.8(072.034)

Вступ

В умовах цифровізації використання економіко-математичних методів і побудованих на їхній основі моделей стає основним методом пізнання, здобування нових знань щодо соціально-економічних процесів і явищ на різних рівнях управління ними.

Методи дослідження операцій та оптимізації забезпечують пошук оптимальних (найкращих) рішень для складних соціально-економічних систем із використанням математичного моделювання, аналізу й розроблення алгоритмів для мінімізації чи максимізації цільових функцій за певних обмежень.

Наведені в методичних рекомендаціях приклади не тільки роз'яснюють загальнотеоретичні положення, але й наочно показують можливі сфери застосування в економічному аналізі. Самостійне виконання запропонованих завдань сприяє закріпленню теоретичної бази знань і формуванню практичних навичок, потрібних для розв'язання питань, пов'язаних із дослідженням економічних процесів і явищ, а також дає змогу оцінити якість засвоєння матеріалу.

У результаті вивчення навчальної дисципліни здобувачі вищої освіти набувають компетентностей щодо загальної технології моделювання, пошуку оптимальних рішень в управлінні об'єктами, явищами, процесами в економіці в різних умовах визначеності та в умовах ризику; навчаються класифікувати типи задач оптимізації та вибирати математичні моделі й методи для їх розв'язання; вивчають основні математичні методи оптимізації, за допомогою яких розробляють економіко-математичні моделі для обґрунтування управлінських рішень в економіці, а також розв'язують реальні економічні задачі за допомогою різних економіко-математичних методів. Набуті здобувачами вищої освіти знання, навички та вміння формування моделей і розв'язування задач, аналізу результатів є фундаментом компетентностей сучасного економіста.

Практичне заняття 1
Оптимізаційні економіко-математичні методи та моделі

1.1. Приклади розв'язання задач

Велику групу математичних методів в економіці становлять оптимізаційні методи, оскільки перед менеджерами, економістами, працівниками системи управління, інженерами різного рівня постають проблеми ухвалення рішення, які потребують оптимізації результатів різних видів діяльності з урахуванням наявних ресурсів. Процес розроблення моделі передбачає використання різних математичних методів для пошуку найкращого рішення.

Типовими оптимізаційними завданнями є задачі оптимального планування, у яких виділяють змінні й параметри (кількість куплених продуктів, кількість виробленої продукції, кількість перевезеного вантажу), ціль, якої прагнуть досягти (функція цілі) і яку слід оптимізувати (мінімізувати витрати на споживання, максимізувати прибуток підприємства, мінімізувати вартість перевезень), і обмеження, тобто умови, що обмежують можливості досягнення бажаної цілі (у раціоні має бути визначено компоненти, обмежені ресурси підприємства, кількість перевезеного товару).

Загальну задачу оптимізації формулюють так: визначте екстремум (максимум чи мінімум залежно від практичного сенсу задачі) функції

$$Z_{extr} = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} \varphi_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le (\ge, =) b_i,\ i = \overline{1, m}, \\ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Функцію (1.1) називають *функцією цілі*. Будь-який розв'язок системи (1.2), який задовольняє умови невід'ємності, називають *допустимим розв'язком*. А розв'язок, який задовольняє умови (1.1) і (1.2), називають *оптимальним розв'язком*.

Оптимізаційні задачі за видом цільової функції та за видом обмежень класифікують на групи. Якщо функція цілі й система обмежень є лінійними, то йдеться про лінійне програмування, в іншому разі – про задачу нелінійного програмування. У разі квадратичної функції цілі та лінійної системи обмежень задачу оптимізації називають задачею квадратичного програмування. Якщо функцію цілі можна подати у вигляді суми функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної, то розглядають задачу сепарабельного програмування. Якщо керовані змінні принципово можуть бути тільки цілими, то таку задачу оптимізації називають цілочисловою.

За інформаційними властивостями оптимізаційні задачі поділяють на статичні та динамічні. Крім наведених моделей, до оптимізаційних належать імітаційні та евристичні моделі.

Розгляньмо приклади побудови математичних моделей різних економічних задач.

Приклад 1.1

Задача про оптимальне використання ресурсів

Фірма випускає два види деталей (А, В). Для виготовлення використовують два вихідні ресурси, витрати яких на одну деталь і добові запаси вихідних продуктів подано в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Вихідні дані

Ресурси	Витрати ресурсу на виготовлення однієї деталі		Запас, кг
	A	B	
Ресурс 1	2	3	130
Ресурс 2	1	5	200

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на першу деталь перевищує попит на другу не більш ніж на 15 кг. Крім того, установлено, що попит на другу деталь не перевищує 30 шт. на добу.

Відпускна ціна 1 кг першої деталі – 6 грош. од., другої – 21 грош. од.

Потрібно визначити, яку кількість деталей кожного виду має виробляти фірма, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним.

Розв'язання:

Складаємо математичну модель задачі.

Позначаємо: x_1 – добовий обсяг випуску першої деталі; x_2 – добовий обсяг випуску другої. Змінні мають бути невід'ємними за своїм економічним змістом.

Тоді цільова функція та система обмежень такі:

$$Z_{\max}(x_1, x_2) = 6x_1 + 21x_2 .$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 130, \\ x_1 + 5x_2 \le 200, \\ x_1 - x_2 \le 15, \\ x_2 \le 30. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Приклад 1.2

Задача про найдешевший раціон

Під час відгодування тварин кожна тварина щоденно має отримати не менш ніж 60 од. поживної речовини *A*, не менш ніж 50 од. речовини *B* і не менш ніж 12 од. речовини *C*. Зазначені поживні речовини містять три види корму. Уміст одиниці поживних речовин в 1 кг кожного з видів кормів наведено в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Вихідні дані

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму виду		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Складіть денний раціон, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин за мінімальних грошових витрат, якщо ціна 1 кг корму I виду становить 5 грн, корму II виду – 15 грн і корму III виду – 10 грн.

Розв'язання:

Позначаємо через x_1, x_2, x_3 кількість корму кожного виду відповідно. Оскільки вказано необхідну кількість поживних речовин для кожної тварини, то змінні можуть приймати тільки невід'ємні значення та мають задовольняти систему обмежень із отримання поживних речовин. Загальна вартість денного раціону тварини має бути мінімальною.

Отже, математична модель задачі має вигляд:

$$Z_{\min} = 5x_1 + 15x_2 + 10x_3.$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12. \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}.$$

Приклад 1.3

Нелінійна оптимізаційна задача

Комбінат реалізовує продукцію двома способами: у роздріб через магазин і оптом через торговельних агентів.

Під час продажу x_1 кг продукції через магазин витрати на реалізацію становлять $(x_1+2)^2$ грош. од., а під час продажу x_2 кг продукції за допомогою торговельних агентів – $x_2^{\ 2}$ грош. од.

Побудуйте математичну модель для визначення кількості продукції, яку варто продавати кожним способом, щоб витрати на реалізацію були мінімальними, якщо на добу для продажу виділяють 2 000 кг продукції.

Розв'язання:

Складаємо математичну модель задачі: мінімум сумарних витрат

$$Z_{\min} = (x_1+2)^2 + x_2^{\ 2}$$

за обмеженнями $\quad x_1 + x_2 = 2\,000, \quad x_{1,2} \geq 0.$

Приклад 1.4

Дробово-лінійна оптимізаційна задача

Для виробництва двох виробів A і B підприємство використовує три типи технологічного обладнання. Кожен із виробів має пройти оброблення на певному типі обладнання. Час оброблення кожного із виробів і витрати, пов'язані з виробництвом одного виробу, наведено в табл. 1.3. Обладнання 1-го і 3-го типів підприємство може використовувати не менш ніж 48 і 6 год відповідно, а обладнання 2-го типу – не більш ніж 50 год.

Таблиця 1.3

Вихідні дані

Тип обладнання	Витрати часу на оброблення одного виробу, год	
	A	B
1	12	4
2	10	5
3	1	1
Витрати на виробництво одного виробу, тис. грн	1	2

Визначте обсяг виробництва продукції за умови найменшої середньої собівартості одного виробу.

Розв'язання

Будуємо економіко-математичну модель задачі.

Нехай x_1, x_2 – кількість виробів виду A і B відповідно.

Загальні витрати на виробництво становлять $x_1 + 2x_2$ тис. грн, а середня собівартість одного виробу буде дорівнювати $\frac{x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2}$.

Економіко-математична модель задачі має такий вигляд:

$$Z_{\min} = \frac{x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2}.$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \geq 48, \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 50, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приклад 1.5

Цілочислова оптимізаційна задача

Підприємство виготовляє дизельні двигуни. Для виготовлення двох основних видів дизельних двигунів HDI та TDI використовують три види допоміжних деталей (циліндри, поршні, клапани). Прибуток від реалізації одного двигуна кожного виду, запаси та витрати деталей на виготовлення одного двигуна кожного виду відповідно до прийнятої технології подано в табл. 1.4.

Таблиця 1.4

Вихідні дані

Різновид допоміжних деталей	Витрати деталей на виготовлення одного дизельного двигуна, шт.		Запас деталей, шт.
	HDI	TDI	
I	12	4	100
II	4	4	200
III	3	12	330
Прибуток від реалізації двигуна, у. о.	1 000	1 150	max

Побудуйте математичну модель для визначення оптимального плану виробництва дизельних двигунів двох типів, за яким підприємство отримає максимальний прибуток від їх реалізації.

Розв'язання:

За вихідними даними складаємо математичну модель задачі.

Якщо через x_1 позначити кількість двигунів першого типу HDI, а через x_2 – кількість двигунів TDI, то загальний прибуток Z від реалізації є функцією двох змінних: $\mathrm{Z} = 1\,000\,\mathrm{x}_1 + 1150\,\mathrm{x}_2$. Цільова функція має сягати максимального значення.

Оскільки витрати деталей на виготовлення двигунів не можуть перевищувати їх запасів, а кількість готової продукції має бути невід'ємною та цілою, математична модель задачі має такий вигляд:

$$Z_{\max} = 1\,000 x_1 + 1150 x_2.$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 100, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 200, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 330, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 - \textit{цілі}. \end{cases}$$

Приклад 1.6

Транспортна задача

Підприємство має три цехи (A_1, A_2, A_3) і чотири склади (B_1, B_2, B_3). Перший цех виробляє 50 тис. шт. виробів, другий – 60 тис. шт. виробів, третій – 10 тис. шт. виробів. Пропускну здатність складів характеризують такі показники: склад 1 – 10 тис. шт., склад 2 – 30 тис. шт., склад 3 – 40 тис. шт., склад 4 – 30 тис. шт. Вартість перевезення з першого цеху до складів 1, 2, 3, 4 за 1 тис. шт. виробів відповідно 2, 3, 2, 4 грн, із другого – 3, 2, 5,1 грн, із третього – 4, 3, 2, 6 грн.

Складіть такий план перевезення виробів, за якого витрати на перевезення були б найменшими.

Розв'язання:

Умову задачі в табличній формі подано в табл. 1.5.

Таблиця 1.5

Умова задачі

Цех	Склад				Обсяги виробництва, тис. шт.
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	2	4	50
A_2	3	2	5	1	60
A_3	4	3	2	6	10
Місткість складів	10	30	40	30	

Позначаємо: x_{ij} – кількість вантажу, який потрібно перевезти з цеху A_i до складу B_j, щоб витрати перевезення були найменшими.

Математична модель цієї транспортної задачі: знайти мінімум лінійної функції цілі:

$$Z_{\min} = 2x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{14} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + x_{24} + \\ + 4x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + 6x_{34}$$

за обмежень-рівностей:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,4}.$$

1.2. Завдання для самостійної роботи

1.1. Аналітичний відділ складає план виробництва продукції двох типів на II квартал поточного року з метою досягнення максимального прибутку та з урахуванням того, що використовують тільки наявні запаси сировини чотирьох видів. Вихідні дані наведено в табл. 1.6.

Таблиця 1.6

Вихідні дані

Вид сировини	Норма витрат кг/м		Запас сировини, кг
	Продукція I	Продукція II	
1	2	1	28
2	2	1	36
3	0	5	55
4	4	2	41
Прибуток	9	4	

Побудуйте математичну модель задачі.

1.2. Від пункту A до пункту B щоденно відправляються пасажирські та швидкі потяги. У табл. 1.7 наведено наявний парк вагонів різних типів, із яких щоденно можна комплектувати ці потяги, і кількість пасажирів, яких уміщує кожний із потягів.

Таблиця 1.7

Вихідні дані

Потяги	Вагони				
	багажний	поштовий	плацкартний	купейний	м'який
Швидкий	1	1	5	6	3
Пасажирський	1	–	8	4	1
Кількість пасажирів	–	–	58	40	32
Парк вагонів	12	8	81	70	26

Побудуйте математичну модель визначення оптимальної кількості швидких та пасажирських потягів за умови, що кількість пасажирів, яких перевозять, досягає максимуму.

1.3. Кредитний відділ банку визначає оптимальний портфель інвестування на модернізацію обладнання та соціальні програми трьох підприємств, що забезпечить найменший рівень збитковості банку. Збитковість програми модернізації обладнання – 3 бали за 1 грош. од.

інвестицій, соціальних програм – 7 балів. Інвестування здійснюють за умови досягнення рівнів розвитку капіталу підприємств не менш ніж 10, 7, 14 одиниць відповідно. У табл. 1.8 наведено величини зростання рівня розвитку капіталу підприємств за відповідним напрямом інвестування.

Таблиця 1.8

Вихідні дані

Підприємство	Зростання рівня розвитку капіталу	
	Модернізація обладнання	Соціальні програми
"Будмайстер"	2	1
СТО "Мотор"	4	5
"Чистий дім"	3	7

Побудуйте математичну модель інвестиційного портфеля.

1.4. Обсяг ресурсів хімічного заводу є обмеженим і становить 38 л розчину 1-го виду та 20 л розчину 2-го виду. Розчину 1-го виду витрачають на виробництво продукції типу А й типу В відповідно 8 л та 4 л, розчину 2-го виду – відповідно 5 л та 2 л. Вартість 1 т продукції типу А – 7 грош. од., типу В – 3 грош. од.

Побудуйте математичну модель визначення оптимального плану виробництва продукції кожного типу за умови максимізації прибутку.

1.5. Кредити на придбання 1 м^2 житла в центрі міста й 1 м^2 житла в передмісті забезпечують банку відповідно 6 тис. грн та 5 тис. грн прибутку. Операції кредитування здійснюють три агенції нерухомості, у яких працюють відповідно 13, 10 і 18 спеціалістів. У табл. 1.9 наведено кількість працівників кожної агенції, яких потрібно залучити до укладання угоди кредитування на 1 м^2 житла.

Таблиця 1.9

Вихідні дані

№ агенції	Кількість працівників	
	Житло в центрі міста	Житло в передмісті
1	2	3
2	3	2
3	2	1

Побудуйте математичну модель визначення оптимальної площі житла за умови максимізації прибутку.

Практичне заняття 2
Задача лінійного програмування та методи її розв'язання

2.1. Приклади розв'язання задач

Розгляньмо докладніше математичну постановку задачі лінійного програмування (ЗЛП) та методи її розв'язання. Цю задачу можна сформулювати так: обчисліть найбільше (найменше) значення лінійної функції

$$Z_{\max\,(\min)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

за заданої системи обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Якщо задачу лінійного програмування задано у двовимірному просторі, її можна розв'язати графічним методом.

План графічного методу розв'язання ЗЛП

1. Знаходимо багатокутник розв'язків, будуючи область допустимих рішень системи обмежень задачі.

2. Будуємо вектор $\overline{gradZ} = \overline{\nabla Z} = (c_1; c_2)$.

3. Проводимо лінію рівня $Z_0 \perp \overline{\nabla Z}$.

4. Лінію рівня пересуваємо за напрямом вектора $\overline{\nabla Z}$ для задач на максимум і за напрямом, протилежним до $\overline{\nabla Z}$, для задач на мінімум. Пересування лінії рівня роблять доти, доки в ній залишиться тільки одна загальна точка з областю допустимих рішень (ОДР). Ця точка визначає єдине рішення ЗЛП та екстремум.

Якщо виявиться, що лінія рівня паралельна одній зі сторін ОДР, то ЗЛП буде мати безліч рішень.

Якщо ОДР є необмеженою областю, то цільова функція може бути необмеженою.

Задача лінійного програмування може бути нерозв'язаною, якщо її визначальні обмеження виявляться суперечливими.

5. Знаходимо координати точки екстремуму й значення цільової функції в ній.

Приклад 2.1

Знайдіть оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування:

$$Z_{\max} = -x_1 + x_2 .$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5 . \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання:

Для знаходження багатокутника планів у першій чверті координатної площини будуємо прямі через дві точки, відповідно:

$$l_1 : \ (2;\ 0), \quad (0; -4); \quad l_2 : \ (2;\ 0), \quad (0; -1); \qquad l_3 : \ (5;\ 0), \quad (0; 5).$$

Усі нерівності системи обмежень сумісні в межах багатокутника планів $ABCD$ (рис. 2.1).

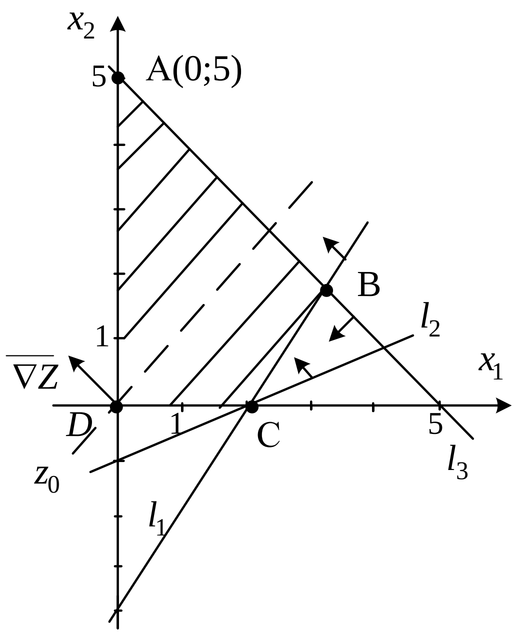

Рис. 2.1. **Графічне розв'язання задачі**

Будуємо вектор $\overline{gradZ} = (-1;1)$, який визначає напрям найбільш швидкого зростання цільової функції, і перпендикулярно йому через початок координат проводимо лінію рівня $Z_0 \perp \overline{\nabla Z}$. Пересуваючи лінію рівня в напрямі градієнта, бачимо, що MN – опорна пряма, а вона визначає точку максимуму A. Визначаємо координати точки A із системи рівнянь сторін AB і AD:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 5, \quad A(0;5). \end{cases}$$

Отже, маємо оптимальний план $X^* = (0; 5)$, якому відповідає максимальне значення цільової функції: $Z_{max} = Z(X^*) = -1 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 5.$

Приклад 2.2

Знайдіть оптимальний розв'язок ЗЛП:

$$Z_{\min} = 2x_1 - x_2.$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 18, & (1) \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, & (2) \\ x_1 + x_2 \ge 5, & (3) \\ -7x_1 + 8x_2 \ge 0. & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання:

Будуємо область допустимих планів D, що задовольняють систему обмежень задачі (рис. 2.2).

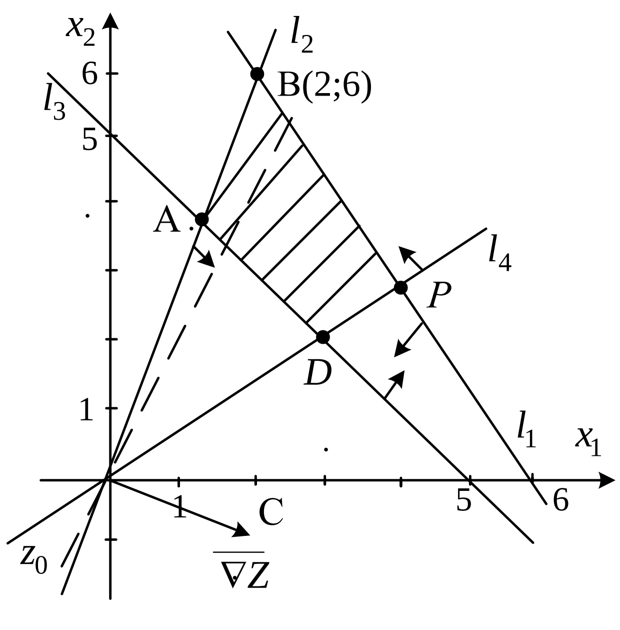

Рис. 2.2. **Область допустимих планів**

Знаходимо вектор $\overline{gradZ} = (2;-1)$. Будуємо лінію рівня $Z_0 \perp \overline{\nabla Z}$ та пересуваємо її в протилежному від градієнта напрямі до крайньої точки області $ABPD$. Бачимо, що точкою мінімуму є точка B. Визначаємо її координати, розв'язуючи систему рівнянь із прямих AB і BP:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 18, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Обчислюємо значення функції Z у точці $\mathrm{B} = (2;\ 6)$:

$$\mathrm{Z}_{\min} = \mathrm{Z}(2;\ 6) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 6 = -2.$$

Отже, маємо оптимальний план $\mathrm{X}^* = (2;\ 6)$, якому відповідає значення цільової функції $Z_{\min} = -2$.

Приклад 2.3

Розв'язання:

Знайдіть найбільше значення функції $Z_{\max} = -3x_1 - 2x_2$ за таких умов:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 9, & (1) \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 2, & (3) \\ x_2 \le 5. & (4) \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Будуємо область допустимих планів $ABPQR$, що задовольняє систему обмежень задачі (рис. 2.3).

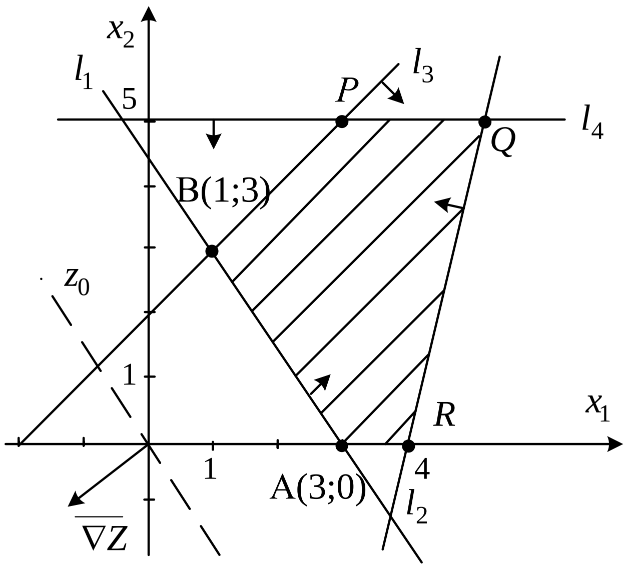

Рис. 2.3. **Графічне розв'язання задачі**

Знаходимо і будуємо вектор $\overline{gradZ} = (-3;-2)$. У напрямі вектора $\overline{\nabla Z}$ будуємо опорну пряму, перпендикулярну $\overline{\nabla Z}$, яка проходить через сторону AB багатокутника планів $Z_0 \perp \overline{\nabla Z}$, та пересуваємо її в протилежному від градієнта напрямі. Найбільшого значення функція набуває в точках відрізка AB . Рівняння прямої: $3x_1 + 2x_2 = 9$.

Після розв'язання системи рівнянь граничних прямих для точок A і B отримуємо: $A(3;\,0)$ і $B(1;\,3)$.

На відрізку AB значення x_1 змінюються від 1 до 3, тобто $1 \le x_1 \le 3$. Із рівняння прямої AB випливає:

$$x_2 = \frac{9}{3} - \frac{3}{2}x_1.$$

Тоді безліч усіх оптимальних планів, обумовлених відрізком AB, можна подати як:

$$\overline{X}_{\max} = \left\{x_1; \frac{9}{3} - \frac{3}{2}x_1\right\}, \quad \text{де } 1 \le x_1 \le 3.$$

Надаючи змінній x_1 будь-які числові значення від 1 до 3, отримуємо оптимальні плани задачі, за якими цільова функція прийме значення:

$$Z_{\max} = -3x_1 - 2x_2 = -3x_1 - 2 \cdot \left(\frac{9}{3} - \frac{3}{2}x_1\right) = -9.$$

Тобто $\mathrm{Z}_{\max} = -9,\ \overline{X}_{\max} = \left\{x_1; \frac{9}{3} - \frac{3}{2}x_1\right\}, \quad$ де $1 \le x_1 \le 3$.

Приклад 2.4

Знайдіть оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування:

$$Z_{\min} = 2x_1 - 3x_2.$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 3x_2 \le 30, & (1) \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12, & (2) \\ 2x_1 - 3x_2 \le 0. & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання:

Будуємо багатокутник планів за допомогою прямих:

$$l_1:\ (3;0),\quad (0;-10);\quad l_2:\ (4;0),\quad (0;3);\quad l_3:\ (0;0),\quad (3;2).$$

Усі нерівності системи обмежень сумісні в межах багатокутника планів D (рис. 2.4).

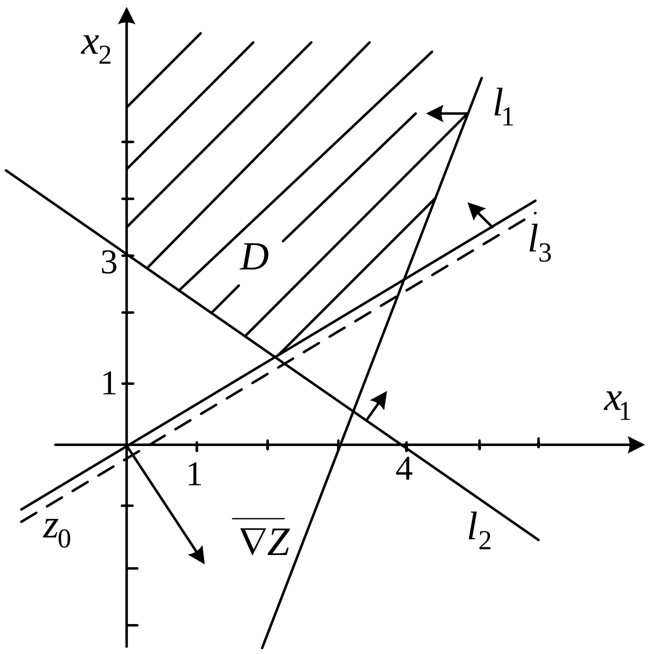

Рис. 2.4. **Область допустимих планів**

Знаходимо і будуємо вектор $\overline{gradZ} = (2;-3)$. Рухаючись у напрямі цього вектора, не можна отримати опорну пряму для області D. Це означає, що функція Z є необмеженою знизу, тобто $Z \to -\infty$, і вихідна задача розв'язку не має.

Якщо задача лінійного програмування має дві або більше змінні, її можна розв'язати симплексним методом. Цей метод є універсальним методом розв'язання ЗЛП, адже він дозволяє розв'язати практично будь-яку задачу, подану в канонічному вигляді.

План симплексного методу розв'язання ЗЛП:

1. Записуємо систему обмежень задачі з невід'ємними вільними членами в канонічному вигляді, тобто у вигляді рівнянь.

2. Виділяємо в системі обмежень одиничний базис, зберігаючи вільні члени невід'ємними.

3. Знаходимо вихідний план і перевіряємо його на оптимальність. Для цього потрібно:

а) обчислити величину $z_j = \vec{C}_{\text{баз}} \cdot \vec{a}_j$;

б) обчислити оцінки $\Delta_j = z_j - c_j$.

Якщо всі оцінки $\Delta_j \geq 0$ (у разі максимізації цільової функції) або всі оцінки $\Delta_j \leq 0$ (у разі мінімізації цільової функції), то вихідний опорний план є оптимальним і задачу розв'язано.

Якщо цю умову не виконано, то план треба поліпшити.

4. Поліпшуємо вихідний опорний план.

а) якщо одна від'ємна оцінка (задача максимізації) або одна додатна (задача мінімізації), то для відповідного j-го вектора обчислюємо параметр:

$$\theta_j = \min\left(\frac{b_i}{a_{ij}}\right), \text{де } a_{ji} > 0.$$

Відповідний вектор вводимо до базису, використовуючи однократне заміщення базису;

б) якщо декілька від'ємних оцінок (задача максимізації) або декілька додатних (задача мінімізації), то для кожного відповідного вектора обчислюємо $\left|\Delta_j \cdot \theta_j\right|$ і в базис вводимо вектор із максимальним значенням цього добутку ($\max\left|\Delta_j \cdot \theta_j\right|$).

5. Новий опорний план перевіряємо на оптимальність, починаючи з третього пункту. Процес продовжуємо, поки не буде виконано критерій оптимальності.

Зауваження:

1. Якщо для j-го вектора оцінка $\Delta_j < 0$ (у разі максимізації цільової функції) або оцінка $\Delta_j > 0$ (у разі мінімізації цільової функції), а координати j-го вектора від'ємні, то план не є оптимальним, поліпшити його неможливо, задача розв'язку не має.

2. Якщо на будь-якому етапі розрахунків виникає невизначеність у виборі розв'язувального рядка, тобто відбувається зациклення, то слід

вибирати той рядок, для якого відношення елементів наступного (попереднього) стовпчика до розв'язувального буде мінімальним. Причому в новому стовпчику беруть до уваги як невід'ємні, так і від'ємні координати вектора. Процес триває доти, доки розв'язувальний рядок не визначать однозначно.

Приклад 2.5

Для виготовлення різних виробів A і B підприємство використовує три різні види сировини. Витрати на виробництво одного виробу кожного виду, ціну одного виробу A і B, а також загальну кількість сировини кожного виду, яку може використати підприємство, подано в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Вихідні дані

Вид сировини	Витрати сировини (кг) на один виріб		Запас сировини (кг)
	A	*B*	
1	1	2	4
2	1	1	3
3	2	1	8
Ціна виробу (у. о.)	3	4	

За допомогою симплексного методу складіть план виробництва виробів A і B так, щоб загальна вартість всієї продукції, виробленої підприємством, була максимальною.

Розв'язання:

Складаємо математичну модель задачі.

Позначаємо через x_1 та x_2 кількість виробів A і B відповідно. Оскільки є обмеження на виділений підприємству фонд сировини кожного виду, то змінні x_1 та x_2 мають задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Загальна вартість продукції, що виробило підприємство за умови випуску x_1 виробів A та x_2 виробів B, така: $Z_{\max} = 3x_1 + 4x_2$.

За допомогою балансових змінних $x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$ система обмежень задачі в канонічному вигляді є такою:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8. \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

Балансові змінні за економічним змістом означають кількість сировини того чи іншого виду, яка за цього плану виробництва не буде використаною (залишок).

Складаємо симплекс-таблицю (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Симплекс-таблиця

i	базис	$C_{баз}$	C_j	3	4	0	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	4	1	2	1	0	0
2	A_4	0	3	1	1	0	1	0
3	A_5	0	8	2	1	0	0	1
4	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		0	0	0	0	0	0
5	$\Delta_j = z_j - c_j$		–	–3	–4	0	0	0
6	A_3	0	1	0	1	1	–1	0
7	A_1	3	3	1	1	0	1	0
8	A_5	0	2	0	–1	0	–2	1
9	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		9	3	3	0	3	0
10	$\Delta_j = z_j - c_j$		–	0	–1	0	3	0
11	A_2	4	1	0	1	1	–1	0
12	A_1	3	2	1	0	–1	2	0
13	A_5	0	3	0	0	1	–3	1
14	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		10	3	4	1	2	0
15	$\Delta_j = z_j - c_j$		–	0	0	1	2	0

І ітерація

Значення всіх основних змінних x_1, x_2 дорівнюють нулю, а додаткові змінні набувають своїх значень згідно з обмеженнями задачі. Ці значення змінних відповідають такому плану, за якого нічого не виробляють, сировину не використовують і значення лінійної функції $Z(X_0)$ дорівнює нулю. Цей план не є оптимальним, тому що $\Delta_1 = -3$, $\Delta_2 = -4$.

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{4}{1};\frac{3}{1};\frac{8}{2}\right\} = \frac{3}{1}, \qquad \theta_2 = \min\left\{\frac{4}{2};\frac{3}{1};\frac{8}{1}\right\} = \frac{4}{2}.$$

$$|\Delta_1 \cdot \theta_1| = |3 \cdot (-3)| = 9 - \max, \quad |\Delta_2 \cdot \theta_2| = |2 \cdot (-4)| = 8.$$

Будемо вводити до базису вектор $\vec{a}_1$, а виводити – $\vec{a}_4$.

ІІ ітерація

Отриманий план $X_1 = (3; 0; 1; 0; 2)$ не є оптимальним, оскільки оцінка $\Delta_2 = -3 < 0$. Його потрібно поліпшити. Для цього слід обчислити $\theta_2 = \min\left\{\frac{1}{1};\frac{3}{1};-\right\} = \frac{1}{1}$. Уводимо до базису вектор $\vec{a}_2$, а виводимо $\vec{a}_3$.

ІІІ ітерація

Усі оцінки $\Delta_j \geq 0$, тому план є оптимальним.

$$X^* = (2; 1; 0; 0; 3), \; Z_{\max}(X^*) = 10.$$

Висновок: для того щоб отримати максимальний прибуток у розмірі 10 у. о., потрібно виготовити два вироби A та один виріб B. При цьому ресурси першого і другого видів буде використано повністю, а ресурс третього виду не буде використано на 3 кг.

Приклад 2.6

Розв'яжіть задачу симплексним методом.

$$Z_{\max} = x_1 + 2x_2 + 3x_3.$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 25, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15. \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Розв'язання:

Система обмежень задачі в канонічному вигляді:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 25, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 15. \end{cases}$$

Складаємо симплекс-таблицю (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Симплекс-таблиця

i	базис	$C_{баз}$	C_j	1	2	3	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_4	0	25	6	4	3	1	0
2	A_5	0	15	5	3	2	0	1
3	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		0	0	0	0	0	0
4	$\Delta_j = z_j - c_j$			–1	–2	–3	0	0
5	A_4	0	5/2	–3/2	–1/2	0	1	–3/2
6	A_3	3	15/2	5/2	3/2	1	0	1/2
7	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		45/2	15/2	9/2	3	0	3/2
8	$\Delta_j = z_j - c_j$		–	13/2	5/2	0	0	3/2

І ітерація

Вихідний план X_0 не є оптимальним, тому що три від'ємні оцінки:

$$\Delta_1 = -1,\ \Delta_2 = -2,\ \Delta_3 = -3.$$

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{25}{6};\frac{15}{5}\right\} = \frac{15}{5},\quad \theta_2 = \min\left\{\frac{25}{4};\frac{15}{3}\right\} = \frac{15}{3},\quad \theta_3 = \min\left\{\frac{25}{3};\frac{15}{2}\right\} = \frac{15}{2}.$$

$$|\Delta_1 \cdot \theta_1| = |(-1) \cdot 3| = 3,\qquad |\Delta_2 \cdot \theta_2| = |(-2) \cdot 5| = 10,$$

$$|\Delta_3 \cdot \theta_3| = |(-3) \cdot 7{,}5| = 22{,}5 - \max.$$

Будемо вводити до базису вектор $\vec{a}_3$, а виводити – $\vec{a}_5$.

II ітерація

Отриманий план $X_1 = X^* = (0; 0; \frac{15}{2}; \frac{5}{2}; 0)$ є оптимальним, оскільки всі оцінки $\Delta_j \geq 0$. Цільова функція дорівнює $Z_{\max}(X^*) = \frac{45}{2}$.

Приклад 2.7

Розв'яжіть задачу симплексним методом.

$$Z_{\max} = x_1 + x_2.$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ -3x_1 + x_2 \leq 0, \\ -x_1 - x_2 \leq 4. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Додаємо балансові змінні. Канонічна система обмежень має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 4, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 4. \end{cases}$$

Складаємо симплекс-таблицю (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Симплекс-таблиця

i	базис	$C_{баз}$	C_j	1	1	0	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	4	1	–4	1	0	0
2	A_4	0	0	–3	1	0	1	0
3	A_5	0	4	–1	–1	0	0	1
4	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		0	0	0	0	0	0
5	$\Delta_j = z_j - c_j$		–	–1	–1	0	0	0
6	A_1	1	4	1	–4	1	0	0
7	A_4	0	12	0	–11	3	1	0
8	A_5	0	8	0	–5	1	0	1
9	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		4	1	–4	1	0	0
10	$\Delta_j = z_j - c_j$		–	0	–5	1	0	0

І ітерація

Вихідний план X_0 не є оптимальним, тому що $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = -1$.

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{4}{1};-;-\right\} = \frac{4}{1}, \quad \theta_2 = \min\left\{-;\frac{0}{1};-\right\} = \frac{0}{1}.$$

$$|\Delta_1 \cdot \theta_1| = |(-1)\cdot 4| = 4 - \max, \qquad |\Delta_2 \cdot \theta_2| = |(-1)\cdot 0| = 0.$$

Будемо вводити до базису вектор $\vec{a}_1$, а виводити – $\vec{a}_3$.

ІІ ітерація

Отриманий план $X_1 = (4; 0; 0; 12; 8)$ не є оптимальним, оскільки оцінка $\Delta_2 = -5 < 0$. Але й усі елементи вектора $\vec{a}_2$ є від'ємними, план поліпшити неможливо. Отже, задача не має розв'язків.

2.2. Завдання для самостійної роботи

2.1. Для виготовлення трьох видів виробів *A, B* і *C* використовують токарне, фрезерне, зварювальне та шліфувальне обладнання. Витрати часу на оброблення одного виробу для кожного з типів обладнання подано в табл. 2.5. Також зазначено загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання та прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Таблиця 2.5

Вихідні дані

Тип обладнання	Витрати часу (станко-год) на оброблення одного виробу виду			Загальний фонд робочого часу обладнання (год)
	A	*B*	*C*	
Фрезерне	2	3	5	220
Токарне	2	8	2	180
Зварювальне	7	7	5	340
Шліфувальне	5	6	4	260
Прибуток (грн)	24	18	20	

Потрібно визначити, скільки виробів і якого виду слід виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

Складіть математичну модель задачі та визначте, яким методом її можна розв'язати і чому.

2.2. Виділено два маршрути, за кожним із яких треба зробити певну кількість рейсів, і два типи автомашин, які можна використати протягом чотирьох годин та однієї години. Норми витрат часу рейсу й прибуток рейсу наведено в табл. 2.6.

Побудуйте математичну модель задачі для визначення оптимальної кількості рейсів та розв'яжіть її графічним методом.

Таблиця 2.6

Вихідні дані

Тип машини	Норма витрат, год	
	1-й маршрут	2-й маршрут
1	2	3
2	0	1
Прибуток	1	2

2.3. Раціон для харчування тварин на фермі складається з двох різновидів кормів I та II. Один кілограм корму коштує 80 грош. од. і становить: 1 од. жирів, 3 од. білків, 1 од. вуглеводів, 2 од. нітратів. Один кілограм корму II коштує 10 грош. од. і становить 3 од. жирів, 3 од. білків, 8 од. вуглеводів, 4 од. нітратів.

Складіть найбільш дешевий раціон харчування, що забезпечує жирів – не менш ніж 6 од., білків – не менш ніж 9 од., вуглеводів – не менш ніж 8 од., нітратів – не більш ніж 16 од. Розв'яжіть задачу графічним методом.

2.4. Для виробництва двох видів виробів A і B підприємство використовує три різновиди сировини. Інші умови завдання наведено в табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Вихідні дані

Різновид сировини	Норма витрат сировини на один виріб, кг		Загальна кількість сировини, кг
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу, грош. од.	30	40	

Складіть такий план випуску продукції, за якого прибуток підприємства від реалізації продукції буде максимальним, за умови, що виробів B треба виготовити не менше, ніж виробів A. Розв'яжіть задачу графічним та симплексним методами.

2.5. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі A, B і C використовує три види основної сировини: цукор-пісок, патоку та фруктове пюре.

Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі певного виду наведено в табл. 2.8. Також зазначено загальну кількість сировини кожного виду, яку може використати фабрика, і наведено прибуток від реалізації 1 т карамелі певного виду.

Таблиця 2.8

Вихідні дані

Вид сировини	Норма витрат сировини (т) на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	A	B	C	
Цукор-пісок	1	1	2	8
Патока	2	1	1	6
Фруктове пюре	–	2	3	12
Прибуток від реалізації 1 т (грн)	10	11	12	

Складіть план виробництва карамелі, що забезпечує максимальний прибуток від реалізації, симплексним методом.

2.6. Прибуток від реалізації продуктів харчування чотирьох видів становить відповідно 4, 6, 9 та 6 грош. од. за одиницю продукції.

Витрати на постачання продуктів до першого магазину не мають перевищувати 30 грош. од., до другого – 20 грош. од. Нормy витрат на постачання одиниці продуктів до кожного магазину наведено в табл. 2.9.

Таблиця 2.9

Вихідні дані

№ магазину	Витрати на постачання грош. од. / 1 кг			
	Печиво	Цукор	Борошно	Цукерки
1	2	0	1	3
2	1	3	3	2

Побудуйте математичну модель задачі з визначення оптимального плану постачання продуктів за умови максимізації прибутку та розв'яжіть її симплексним методом.

2.7. Розв'яжіть задачу лінійного програмування графічним методом:

1. $Z_{\max} = 2x_1 + x_2$.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 5, \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 20, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 5\,x_1 \leq 25. \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

2. $Z_{\min} = -x_1 + 2x_2$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ -2\,x_1 + 4x_2 \leq 9. \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

3. $Z_{\min} = -x_1 - x_2$.

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 6, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 1. \end{cases}$$

$x_2 \ge 0$.

4. $Z_{\max} = x_1 + 2x_2$.

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + x_2 \le 3. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

5. $Z_{\min} = 3x_1 - 4x_2$.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

6. $Z_{\max} = 2x_1 + 3x_2$.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

2.8. Розв'яжіть задачу симплексним методом:

1. $Z_{\max} = -3x_1 - 3x_2 + 4x_3$.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 \le 5, \\ -4x_1 + 5x_3 < 5, \\ 6x_1 - 6x_2 - 2x_3 \le 3. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$.

2. $Z_{\min} = 2x_1 - x_2 + x_3$.

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 4x_3 \le 5, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 < 6, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 1. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$.

3. $Z_{\max} = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 < 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 7. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$.

4. $Z_{\min} = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$.

5. $Z_{\max} = 2x_1 + x_2 + 2x_3$.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$.

6. $Z_{\min} = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3$.

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 3x_3 = 11, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$.

Практичне заняття 3
Теорія двоїстості й аналіз лінійних моделей економічних оптимізаційних задач. Транспортна задача

3.1. Приклади розв'язання задач

До кожної задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність іншу задачу лінійного програмування, яку називають двоїстою щодо вихідної задачі. Знаючи оптимальний розв'язок однієї задачі, на основі теорем двоїстості можна знайти оптимальний розв'язок іншої, не розв'язуючи її.

План побудови математичної моделі двоїстої задачі

1. Кожній нерівності системи обмежень вихідної задачі ставлять у відповідність змінну y_i.

2. Коефіцієнтами функції цілі двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень вихідної задачі.

3. Коефіцієнти системи обмежень вихідної задачі утворюють транспоновану матрицю коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі.

4. Знаки нерівностей змінюють на протилежні. Вільними членами системи обмежень стають коефіцієнти функції цілі вихідної задачі.

5. Умову максимізації цільової функції замінюють на умову мінімізації та навпаки.

Теорема 3.1. Якщо одна задача має оптимальний розв'язок, то інша задача також має оптимальний розв'язок, причому $Z_{\max}\left(X^*\right)=F_{\min}\left(Y^*\right)$ або $Z_{\min}\left(X^*\right)=F_{\max}\left(Y^*\right)$. Якщо одну з двоїстих задач не розв'язано через $Z_{\max}\left(X^*\right)\to\infty$ (або $F_{\min}\left(Y^*\right)\to\infty$), то інша задача не має допустимих розв'язків.

Теорема 3.2. Якщо під час підстановки компонент оптимального плану в систему обмежень вихідної задачі i-те обмеження перетворюється в нерівність, то i-та компонента оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Приклад 3.1

Для виготовлення трьох видів продукції A, B і C використовують два види сировини, яку підприємство може щомісяця закуповувати в обмежених обсягах. Щомісячний пошук необхідної сировини, її витрати на виготовлення одиниці кожного виду продукції, а також прибуток від реалізації одиниці продукції подано в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Вихідні дані

Вид сировини	Норма витрат			Запас сировини, кг
	A	B	C	
I	1	1	1	3
II	1	2	0	4
Прибуток, грн	6	8	1	

Визначте, яку кількість продукції кожного виду підприємство має випускати щомісячно, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

Складіть двоїсту задачу до цієї та розв'яжіть обидві задачі за допомогою симплексного методу й теорем двоїстості, а також перевірте точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

Розв'язання:

Математична модель задачі має такий вигляд:

$$Z_{\max} = 6x_1 + 8x_2 + x_3.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 4. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Пряма задача на мінімум має обмеження вигляду "$\le$", кількість невідомих дорівнює 3 (x_1, x_2, x_3), обмежень – 2. Тоді двоїста задача на максимум буде мати обмеження вигляду "$\ge$", кількість невідомих буде дорівнювати 2 (y_1, y_2), обмежень – 3. Змінні в обох задачах мають бути невід'ємними. Коефіцієнти цільової функції прямої задачі є величинами в правих частинах системи обмежень двоїстої задачі, і навпаки.

Транспонувавши матрицю коефіцієнтів системи обмежень вихідної задачі, маємо такий вигляд двоїстої задачі:

$$F_{\min} = 3y_1 + 4y_2.$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 6, \\ y_1 + 2y_2 \ge 8, \\ y_1 \ge 1. \end{cases}$$

$$y_2 \ge 0.$$

Розв'язуємо вихідну задачу симплекс-методом. Для цього записуємо систему обмежень в канонічному вигляді за допомогою балансових змінних, а потім складаємо симплекс-таблицю (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Симплекс-таблиця

i	базис	$C_{баз}$	C_j	6	8	1	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_4	0	3	1	1	1	1	0
2	A_5	0	4	1	2	0	0	1
3	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		0	0	0	0	0	0
4	$\Delta_j = z_j - c_j$			–6	–8	–1	0	0
5	A_4	0	1	1/2	0	1	1	–1/2
6	A_2	8	2	1/2	1	0	0	1/2
7	z_j		16	4	8	0	0	4
8	Δ_j			–2	0	–1	0	4
9	A_1	6	2	1	0	2	2	–1
10	A_2	8	1	0	1	–1	–1	1
11	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		20	6	8	4	4	2
12	$\Delta_j = z_j - c_j$			0	0	3	4	2

Отже, $X^* = (2, 1, 0, 0, 0)$, $Z_{\max} = 20$.

За першою теоремою двоїстості: $Z_{\max} = F_{\min} = 20$.

Використовуючи другу теорему, знаходимо розв'язок двоїстої задачі.

Підставляємо $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ та $x_3 = 0$ в обмеження вихідної задачі:

$$\begin{cases} 2+1=3, \\ 2+2\cdot 1=4. \end{cases}$$

Перше та друге обмеження є рівностями, тому в оптимальному розв'язку $y_1 > 0$ і $y_2 > 0$.

Маємо: $x_1 = 2 > 0$ і $x_2 = 1 > 0$. Тому перше та друге обмеження двоїстої задачі є рівностями:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 6, \\ y_1 + 2y_2 = 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = 6, \\ y_2 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Отже, $Y^* = (4, 2)$ і $F_{\min} = Z(X^*) = 3\cdot 4 + 4\cdot 2 = 20$.

За правилом Δ-рядка отримуємо $Y^* = (4, 2)$. Це той самий розв'язок двоїстої задачі, що й за теоремами двоїстості.

Отже $X^* = (2, 1, 0)$, $Z_{\max} = 20$, $Y^* = (4, 2)$, $F_{\min} = 20$.

Змінні $y_1^* = 4$ і $y_2^* = 2$ визначають умовні двоїсті оцінки одиниці сировини відповідно I та II типів. Ці дві оцінки відмінні від нуля, і тому їх використовують цілком. Позитивні умовні оцінки мають тільки ті типи сировини, які повністю використовують за оптимального плану виробництва. Отже, двоїсті оцінки характеризують дефіцит використовуваної сировини.

Величина двоїстої оцінки показує, на скільки зросте максимальне значення цільової функції вихідної задачі в разі збільшення кількості сировини відповідного виду на 1 кг. Наприклад, збільшення кількості сировини I виду на 1 кг приведе до того, що з'явиться можливість скласти новий план виробництва, за яким щомісячний загальний прибуток від реалізації виробів може збільшитися на $\Delta Z = 4$.

Транспортна задача (ТЗ) становить основу цілого класу оптимізаційних задач, пов'язаних із розподілом ресурсів за певних обмежень щодо їх кількості або умов розподілу. Загальна постановка ТЗ полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлення (складів, постачальників) A_1, A_2, …,

A_m у n пунктів призначення (споживачів) B_1, B_2, …, B_n. Математична модель ТЗ за допомогою табл. 3.3 має такий вигляд:

Таблиця 3.3

Таблиця перевезень

Поста-чальники	Споживачі				Запаси, a_i
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби, b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

План розв'язання транспортної задачі

1. Визначення будь-якого вихідного опорного плану (за методом північно-західного кута (діагональний) або мінімальної вартості).

2. Перевірка плану на оптимальність за методом потенціалів (якщо допустимий розв'язок $X = \left(x_{ij}\right)_{m\,x\,n}$ ТЗ є оптимальним, то існують потенціали (числа) постачальників u_i (потенціал i-го постачальника, $i = \overline{1,m}$) і споживачів v_j (потенціал j-го споживача, $j = \overline{1,n}$)). Для вільних клітин таблиці ТЗ потрібно виконати таку умову: $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0$, якщо $x_{ij}^{\ *} = 0$.

3. Поліпшення вихідного опорного плану, якщо складений план не є оптимальним (перерозподіл за знайденим циклом).

4. Перевірка нового плану на оптимальність.

5. Якщо план оптимальний, то він та його вартість і є розв'язком ТЗ.

Приклад 3.2

Маємо три пункти відправлення і чотири пункти призначення. Запаси продукції в кожного постачальника становлять 60, 65, 70 од. відповідно, а потреби кожного споживача – 40, 50, 70, 35 од. Тарифи c_{ij} представлені вартісною матрицею перевезень від пункту A_i до пункту B_j:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Складіть початковий опорний план методом північно-західного кута та методом мінімальної вартості.

Обидва плани перевірте методом потенціалів та визначте оптимальний план перевезення.

Розв'язання:

Задачу спочатку слід перевірити на збалансованість (загальні запаси мають дорівнювати загальним потребам):

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 60 + 65 + 70 = \sum_{j=1}^{4} b_j = 40 + 50 + 70 + 35 = 195.$$

Отже, ТЗ є закритою.

1. Записуємо вихідні дані задачі у вигляді таблиці та складаємо вихідний опорний план перевезень за методом північно-західного кута.

Згідно із цим методом першою заповнюємо клітинку, що має індекси $i = 1$, $j = 1$. Порівнявши запаси постачальника A_1 та потреби споживача B_1, визначаємо, що обсяг постачання до цієї клітинки становить 40 од.

Оскільки потреби споживача B_1 задовольнили в повному обсязі, а в постачальника A_1 залишилось ще 20 од., то наступною заповнюємо клітинку $i = 1$, $j = 2$, направивши туди потрібні 20 од. вантажу.

Наступною заповнюємо клітинку $i = 2$, $j = 2$. Відповідно до потреб споживача B_2 направляємо туди 30 од. вантажу. Оскільки в постачальника A_2 залишилося ще 35 од., поставимо цей вантаж до клітинки $i = 2$, $j = 3$. Тепер постачальник A_2 вичерпав свої можливості, але споживачеві B_3 необхідні ще 35 од.

Беремо цей вантаж у постачальника A_3, тобто робимо поставку такого обсягу до клітинки $i=3$, $j=3$. У постачальника A_3 лишилося ще 35 од., потрібних споживачеві B_4. Ставимо ці 35 од. до клітинки $i=3$, $j=4$.

Отже, весь вантаж було розподілено та потреби всіх споживачів задоволено.

Маємо вихідний опорний план X_0, який подано в табл. 3.4.

Таблиця 3.4

Вихідний опорний план X_0

Поста-чальники	Споживачі				Запаси, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	[2] 40	[4] 20	[3]	[2]	60
A_2	[3]	[1] 30	[2] 35	[3]	65
A_3	[5]	[4]	[1] 35	[5] 35	70
Потреби, b_j	40	50	70	35	195 / 195

За вихідним опорним планом вартість перевезень становить:

$$Z(X_0) = 2 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 1 \cdot 30 + 2 \cdot 35 + 1 \cdot 35 + 5 \cdot 35 = 470.$$

Цей план є невиродженим, оскільки кількість заповнених клітинок таблиці становить $m+n-1=6$, де m – кількість постачальників ($m=3$), n – кількість споживачів ($n=4$). Отже, кількість заповнених клітинок дорівнює числу базисних невідомих.

Перевіряємо за методом потенціалів, чи є вихідний план оптимальним. Для цього кожному постачальникові ставимо у відповідність потенціал u_i, а споживачеві – потенціал v_j.

Складаємо таблицю потенціалів так, як у табл. 3.5. Нехай $u_1=0$, тоді значення інших потенціалів визначаємо за умови, що для кожної заповненої клітинки таблиці перевезень сума потенціалів постачальника та споживача дорівнює вартості перевезень одиниці вантажу між цими учасниками, тобто $u_i + v_j = c_{ij}$.

Тепер перевіряємо, чи виконано для всіх вільних клітинок таблиці перевезень умову: $u_i + v_j \le c_{ij}$ $(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4})$ $(\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \ge 0)$.

Оскільки в табл. 3.5 є три клітинки з додатною оцінкою: $\Delta_{13} = 2$, $\Delta_{14} = 7$, $\Delta_{24} = 3$, то план X_0 не є оптимальним. Його можна поліпшити, перерозподіливши вантаж, починаючи з клітинки з найбільшою оцінкою Δ_{14}.

Таблиця 3.5

Таблиця потенціалів для плану X_0

u_i \ v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 5$	$v_4 = 9$
$u_1 = 0$	2	4	5 / 3	9 / 2
$u_2 = -3$	–1 / 3	1	2	6 / 3
$u_3 = -4$	–2 / 5	0 / 4	1	5

У таблиці перевезень, яка є планом X_0, будуємо замкнутий цикл перерозподілу (табл. 3.6).

Таблиця 3.6

Замкнутий цикл перерозподілу перевезень для плану X_0

План X_0	40	-Θ 20		+Θ
		+Θ 30	-Θ 35	
			+Θ 35	-Θ 35

Починаючи зі знака "+", яким позначаємо клітинку з найбільшою додатною оцінкою, розставляємо по черзі знаки "–" і "+" у всіх кутах (поворотах). Кількість вантажу, що потрібно перерозподілити за цим циклом, визначаємо як найменшу з поставок, які відповідають "від'ємним" кутам циклу:

$$\theta = \min\{20;\ 35; 35\} = 20.$$

Отримуємо новий опорний план X_1 (табл. 3.7), із переходом до якого загальна вартість перевезень має зменшитися на величину $\Delta Z = \Delta \cdot \theta = 7 \cdot 20 = 140$, і цільова функція дорівнюватиме $Z(X_1) = 330$.

Таблиця 3.7

Замкнутий цикл перерозподілу перевезень для плану X_1

План X_1	40			20
		50	15 -Θ	+Θ
			55 +Θ	-Θ 15

Перевіряємо, чи є план X_1 оптимальним. Для цього складаємо відповідну йому таблицю потенціалів (табл. 3.8).

Таблиця 3.8

Таблиця потенціалів для плану X_1

u_i \ v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = -3$	$v_3 = -2$	$v_4 = 2$
$u_1 = 0$	2	–3 / 4	–2 / 3	2
$u_2 = 4$	6 / 3	1	2	6 / 3
$u_3 = 3$	5 / 5	0 / 4	1	5

План X_1 не є оптимальним, оскільки має додатні оцінки $\Delta_{21} = 3$ і $\Delta_{24} = 3$. Вони однакові, отже потрібно зробити поставку до клітинки $i = 2$, $j = 4$ (де найбільш заповнений стовпчик).

Цикл перерозподілу позначено пунктиром у таблиці перевезень за планом X_1 (див. табл. 3.7). За цим циклом перерозподіляємо вантаж у такій кількості: $\theta = \min\{15; 15\} = 15$.

Новий план X_2 (табл. 3.9) перевіряємо на оптимальність (табл. 3.10).

Таблиця 3.9

План перевезень X_2

План X_2	40			20
		50		15
			70	

Таблиця 3.10

Таблиця потенціалів для плану X_2

u_i \ v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 0$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$
$u_1 = 0$	2	0 / 4	1 / 3	2
$u_2 = 1$	3 / 3	1	2	3
$u_3 = 0$	2 / 5	0 / 4	1	2 / 5

За планом X_2 загальна вартість перевезень має становити:

$$Z(X_2) = 330 - 3 \cdot 15 = 285.$$

Оскільки всі оцінки є недодатними, то план X_2 – оптимальний. Загальна вартість перевезень за цим планом є мінімальною та дорівнює:

$$Z_{\min} = Z(X^*) = 2 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 50 + 3 \cdot 15 + 1 \cdot 70 = 285.$$

Загальна вартість перевезень продукції від постачальників до споживачів є мінімальною за таким планом:

$$X^* = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Складаємо опорний план методом мінімальної вартості (табл. 3.11).

Таблиця 3.11

Вихідний опорний план X_0

Поста-чальники	Споживачі				Запаси, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 / 40	4	3	2 / 20	60
A_2	3	1 / 50	2	3 / 15	65
A_3	5	4	1 / 70	5	70
Потреби, b_j	40	50	70	35	195 / 195

Згідно із цим методом клітинки заповнюють поступово – від тієї, що має найменшу вартість перевезення, і до найдорожчої.

Складений опорний план дорівнює оптимальному $X_0 = X^*$.

Отже, слід зауважити, що вихідний опорний план перевезень краще складати за методом мінімальної вартості. Це може скоротити пошук оптимального плану та зменшити кількість циклів для розв'язання задачі.

3.2. Завдання для самостійної роботи

3.1. Для виробництва продукції трьох видів A, B і C використовують три різноманітні види сировини. Запаси сировини становлять 360, 192 та 180 кг. Норми витрат кожного з видів сировини на одиницю продукції певного виду і ціну одиниці продукції кожного виду наведено в табл. 3.12. Потрібно:

а) визначити план випуску продукції, який забезпечує її максимальний випуск;

б) сформувати для цієї задачі двоїсту і визначити оптимальний план двоїстої задачі, користуючись теоремами двоїстості.

Таблиця 3.12

Вихідні дані

Вид сировини	Норма витрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	Виріб A	Виріб B	Виріб C
I	18	15	12
I	6	4	8
III	5	3	3
Ціна одиниці продукції (грн)	9	10	16

3.2. Запишіть до цієї ЗЛП двоїсту та розв'яжіть обидві задачі.

1. $Z_{\max} = x_1 + 2x_2$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 1. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

2. $Z_{\min} = -2x_1 + x_2$.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 3. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

3. $Z_{\min} = -2x_1 - 3x_2$.

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 4x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 5. \end{cases}$$

$x_2 \ge 0.$

4. $Z_{\max} = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3$.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

5. $Z_{\max} = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3$.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 24, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$

6. $Z_{\min} = -2x_1 - x_2 + x_3$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 \le 14, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 18. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

3.3. Знайдіть оптимальній розв'язок транспортних задач:

1. $\vec{a} = (60; 70; 20; 45)$,
$\vec{b} = (40; 30; 30; 50)$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 22 & 5 \\ 10 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. $\vec{a} = (30; 90; 40)$,
$\vec{b} = (10; 30; 50; 50; 80)$.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 4 & 10 \\ 10 & 3 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 10 & 5 & 1 & 16 \end{pmatrix}.$$

3. $\vec{a} = (200; 300; 200; 200; 100)$,
$\vec{b} = (200; 200; 100; 200)$.

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. $\vec{a} = (10; 15; 25)$,
$\vec{b} = (5; 10; 20; 15)$.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Практичне заняття 4
Цілочислове програмування

4.1. Приклади розв'язання задач

Значна частина задач потребує цілочислового розв'язку. Ця умова є нелінійною і може бути як у лінійних, так і нелінійних задачах.

У загальному вигляді математична модель цілочислового програмування є такою:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \quad x_j \geq 0, \quad x_j - \textit{цілі}.$$

За наявності в задачі лінійного програмування двох змінних її можна розв'язати графічним методом. Якщо координати оптимального плану не є цілочисловими в області допустимих розв'язків будують цілочислові лінії й знаходять на границях їх перетину такі цілі числа x_1 і x_2, які задовольняють систему обмежень і за яких значення цільової функції найбільш близьке до оптимального нецілочислового розв'язку. Координати такої вершини і є цілочисловим розв'язком.

Приклад 4.1

$$Z_{\min} = -2x_1 + x_2.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0 - \textit{цілі}. \end{cases}$$

Розв'язання:

Без умови цілочисловості чотирикутник *OABC* є областю допустимих розв'язків на рис. 4.1.

Оптимальний розв'язок у точці $B\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $Z_{\min} = -\frac{10}{3}$.

Умову цілочисловості задовольняють 14 точок. Замінюємо багатокутник *OABC* на *OAEFKICP*, що містить всі допустимі точки із цілoчисловими координатами. За градієнтом оптимум у точці $\mathrm{I}(2,1)$, $Z_{\min} = (X_{\text{ціл}}) = -2 \cdot 2 + 1 = -3$.

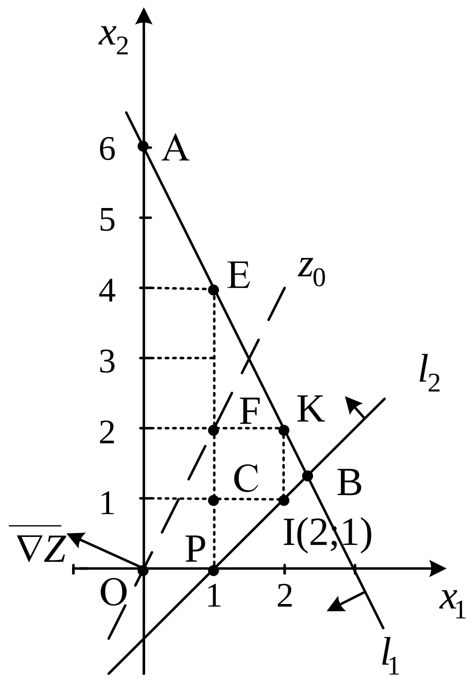

Рис. 4.1. **Розв'язання задачі графічним методом**

Цілочисловий розв'язок може бути знайдено з використанням алгоритму, запропонованого Гоморі.

План методу Гоморі

1. Симплексним методом знаходять оптимальний розв'язок задачі.
2. Якщо розв'язок цілочисловий, то задачу розв'язано.
3. Якщо ж він нецілочисловий та містить хоча б одну дробову координату, то накладають додаткове обмеження за цілочисловістю й обчислення продовжують до отримання нового розв'язку.

$$\{\beta_i\} - \sum_{x_j \in \{\mathrm{B3}\}} \{\alpha_{ij}\} x_j \le 0.$$

4. Якщо й він є нецілочисловим, то знову накладають додаткове обмеження. Обчислення продовжують доти, поки не буде отримано цілочисловий розв'язок.

Приклад 4.2

Розв'язуємо задачу 4.1 за допомогою методу Гоморі. Для цього зводимо її до канонічного вигляду. Отримуємо:

$$Z_{\min} = -2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4.$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,\ x_1,\ x_2 - цілі. \end{cases}$$

Далі використовуємо симплекс-таблицю (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Симплексна таблиця

Б	$C_б$	C_j	–2	1	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	6	2	1	1	0
A_4	0	1	1	–1	0	1
	Δ_j	0	2	–1	0	0
A_3	0	4	0	3	1	–2
A_1	–2	1	1	–1	0	1
	Δ_j	–2	0	1	0	–2
A_2	1	4/3	0	1	1/3	–2/3
A_1	–2	7/3	1	0	1/3	1/3
	Δ_j	–10/3	0	0	–1/3	–4/3

Отже, розв'язком задачі є $X\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0\right)$. Він не є цілочисловим, тому вводимо додаткове обмеження. Його складають для тієї змінної, дробова частина від якої максимальна. Знаходимо дробові частини чисел 7/3 та 4/3. У цьому випадку вони однакові й дорівнюють 1/3. Складаємо додаткове обмеження для змінної x_2, яке набуває такого вигляду:

$$\left\{\frac{4}{3}\right\} - \left\{\frac{1}{3}\right\}x_3 - \left\{-\frac{2}{3}\right\}x_4 \leq 0.$$

Канонічний вигляд цієї умови такий: $\frac{1}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4-x_5=\frac{1}{3}$.

Подальше обчислення наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Симплексна таблиця

Б	$C_б$	C_j	–2	1	0	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	1	4/3	0	1	1/3	–2/3	0
A_1	–2	7/3	1	0	1/3	–1/3	0
		1/3	0	0	1/3	1/3	–1
A_2	1	1	0	1	0	–1	1
A_1	–2	2	1	0	0	0	1
A_3	0	1	0	0	1	1	–3
	Δ_j	–3	0	0	0	–1	–1

Із таблиці випливає, що оптимальним планом задачі з додатковим обмеженням є вектор $X^*(2,1,1,0,0)$, при цьому $Z_{\min}=-3$. Порівнюючи отримане значення цільової функції цілочислового розв'язку зі значенням оптимального розв'язку, зазначаємо, що пошук цілочислового розв'язку приводить до збільшення екстремального значення.

Приклад 4.3

Для поліпшення фінансового становища фірма ухвалила рішення про збільшення випуску конкурентоздатної продукції, для чого в одному із цехів необхідно встановити додаткове обладнання, що потребує 19/3 м^2 площі. Фірма може купити устаткування двох видів. На придбання додаткового устаткування вона виділила 10 тис. грн.

Придбання одного комплекту устаткування першого виду коштує 1 тис. грн, другого виду – 3 тис. грн. Придбання одного комплекту устаткування першого виду дозволяє збільшити випуск продукції за зміну на 2 од., а одного комплекту устаткування другого виду – на 4 од.

Знаючи, що для встановлення одного комплекту устаткування першого виду потрібно 2 м^2 площі, а для устаткування другого виду – 1 м^2 площі, визначте такий набір додаткового устаткування, що дає змогу максимально збільшити випуск продукції.

Розв'язання:

Нехай фірма придбала x_1 комплектів додаткового устаткування першого виду й x_2 комплектів устаткування другого виду. Математична модель задачі буде мати такий вигляд:

$$Z_{\max} = 2x_1 + 4x_2 .$$

за обмежень: $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1,\, x_2 \ge 0 - цілі. \end{cases}$$

У табл. 4.3 наведено розв'язання задачі симплексним методом. Отримано $X^* = (9/5;\, 41/15)$, $Z_{\max}(X^*) = 218/15.$

Цей розв'язок не є цілочисловим.

Таблиця 4.3

Симплексна таблиця

Б	$C_б$	C_j	2	4	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	19/3	2	1	1	0
A_4	0	10	1	3	0	1
	Δ_j	0	–2	–4	0	0
A_3	0	3	5/3	0	1	–1/3
A_2	4	10/3	1/3	1	0	1/3
	Δ_j	40/3	–2/3	0	0	4/3
A_1	2	9/5	1	0	3/5	–1/5
A_2	4	41/15	0	1	–1/5	2/5
	Δ_j	218/15	0	0	2/5	6/5

Знаходимо дробові частини чисел 9/5 та 41/15:

$$\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}; \quad \left\{\frac{41}{15}\right\} = \frac{41}{15} - 2 = \frac{11}{15}; \quad \frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \frac{11}{15}.$$

Беручи до уваги, що $\left\{\frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}$; $\left\{-\frac{1}{5}\right\} = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$, складаємо додаткове обмеження: $3/5x_3 + 4/5x_4 \geq 4/5$. Або в канонічному вигляді: $3/5x_3 + 4/5x_4 - x_5 = 4/5$. Подальше обчислення наведено в табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Симплексна таблиця

Б	$C_б$	C_j	2	4	0	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	2	9/5	1	0	3/5	–1/5	0
A_2	4	41/15	0	1	–1/5	2/5	0
		4/5	0	0	3/5	4/5	–1
A_1	2	1	1	0	0	–1	1
A_2	4	3	0	1	0	2/3	–1/3
A_3	0	4/3	0	0	1	4/3	–5/3
	Δ_j	14	0	0	0	2/3	2/3

Порівнюючи отримане значення цільової функції цілочислового розв'язку зі значенням оптимального розв'язку, зазначаємо, що пошук цілочислового розв'язку приводить до зменшення екстремального значення.

Отже, отримали оптимальний цілочисловий план: $X^* = (1; 3)$ – $Z_{\max}(X^*) = 14$.

Приклад 4.4

Знайдіть розв'язок ЗЛП:

$$Z_{\max} = 5x_1 + 4x_2.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45, \\ x_1, x_2 \geq 0 - \textit{цілі}. \end{cases}$$

Початкову задачу лінійного програмування ($ЛП_0$) (без урахування цілочисловості) розв'язуємо графічно (рис. 4.2). Її оптимальним розв'язком буде: $x_1 = 3{,}75$; $x_2 = 1{,}25$; $Z = 23{,}75$. Він не є цілочисловим.

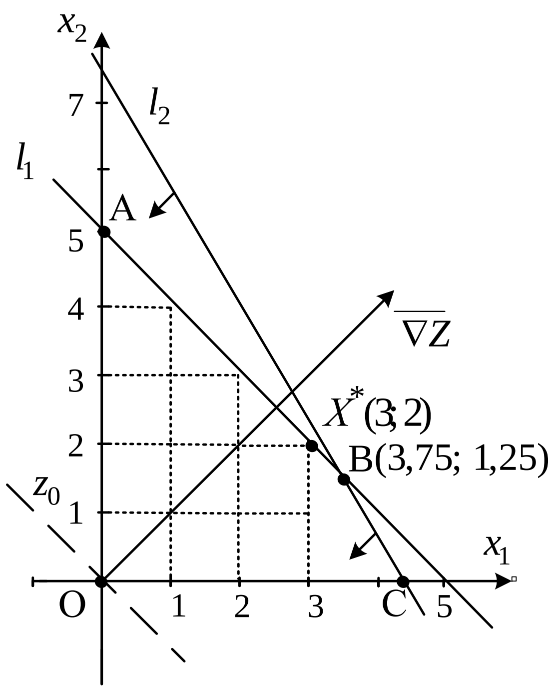

Рис. 4.2. **Графічне розв'язання задачі**

Застосовуємо *метод гілок і меж*, який змінює простір розв'язків задачі лінійного програмування. Спочатку вибираємо одну зі змінних, яка має бути цілочисловою і значення якої в оптимальному розв'язку не є цілочисловим.

Вибираємо $x_1 = 3{,}75$. Область $3 < x_1 < 4$ простору допустимих розв'язків задачі ЛП$_0$ не містить цілочислових значень змінної x_1 і може бути виключеною з розгляду. Це еквівалентно заміні вихідної задачі ЗЛ0 двома новими задачами лінійного програмування ЛП$_1$ і ЛП$_2$, які визначають так:

1) простір допустимих розв'язків ЛП$_1$ – простір допустимих розв'язків ЛП$_0$ + ($x_1 \le 3$);

2) простір допустимих розв'язків ЛП$_2$ – простір допустимих розв'язків ЛП$_0$ + ($x_1 \ge 4$).

Далі будемо розв'язувати задачу цілочислового програмування через розв'язання послідовності безперервних задач лінійного програмування.

Нові обмеження $x_1 \le 3$ і $x_1 \ge 4$ є взаємовиключними, оскільки ЛП$_1$ і ЛП$_2$ потрібно розглядати як незалежні задачі лінійного програмування (рис. 4.3).

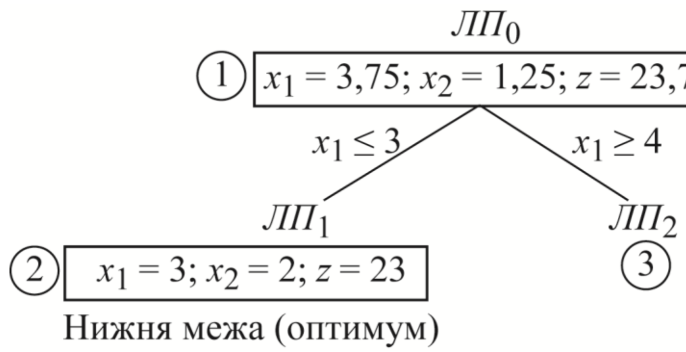

Рис. 4.3. **Розв'язання задачі ЛП$_1$**

Дихотомізація задач ЛП – основа концепції розгалуження в методі гілок і меж. У цьому випадку x_1 називають змінною розгалуження.

Оптимальний розв'язок задачі ЦЛП перебуває в просторі допустимих розв'язків або задачі ЛП$_1$, або ЛП$_2$. Отже, обидві підзадачі слід розв'язати. Потрібно вибирати спочатку задачу ЛП$_1$ (вибір довільний), що має додаткове обмеження $x_1 \le 3$, тобто:

$$Z_{\max} = 5x_1 + 4x_2.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45, \\ x_1 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0 - \text{\textit{цілі}}. \end{cases}$$

Оптимальним розв'язком задачі ЛП$_1$ є $x_1 = 3, x_2 = 2, Z = 23$. Оптимальний розв'язок задачі ЛП$_1$ задовольняє вимогу цілочисловості змінних. У цьому випадку зазначають, що задача ЛП$_1$ є прозондованою і можна сказати, що значення $Z = 23$ є нижньою межею оптимального (максимального) значення цільової функції вихідної задачі ЦЛП. За значення нижньої межі $Z = 23$ варто дослідити задачу ЛП$_2$. Оскільки в задачі ЛП$_0$ оптимальне значення цільової функції дорівнює 23,75 і всі її коефіцієнти є цілими числами, то неможливо отримати цілочисловий розв'язок задачі ЛП$_2$ (простір розв'язків якої більш вузький, ніж у задачі ЛП$_0$), який буде кращим за наявний. У результаті потрібно відкинути підзадачу ЛП$_2$ і вважати її прозондованою.

Слід розглянути два моменти: 1) під час вибору підзадачі можна для зондування розв'язати спочатку задачу ЛП$_2$ замість ЛП$_1$; 2) у задачі ЛП$_0$ можна спочатку вибрати змінну x_2 розгалуження замість x_1.

Ситуацію, коли першою розв'язують задача ЛП$_2$, ілюструють схемою обчислень (рис. 4.4). Оскільки значення змінної $x_2 = 0{,}83$ не є цілим числом, то задачу ЛП$_2$ досліджують далі. Варто розглянути задачі ЛП$_3$ і ЛП4, використовуючи гілки $x_2 \le 0$ і $x_2 \ge 0$ відповідно. Це означає, що:

1) простір розв'язків ЛП$_3$ = простір розв'язків ЛП$_2$ + $(x_2 \le 0)$ = = простір розв'язків ЛП$_0$ + $(x_1 \ge 4)$ + $(x_2 \le 0)$;

2) простір розв'язків ЛП$_4$ = простір розв'язків ЛП$_2$ + $(x_2 \ge 1)$ = = простір розв'язків ЛП$_0$ + $(x_1 \ge 4)$ + $(x_2 \ge 1)$.

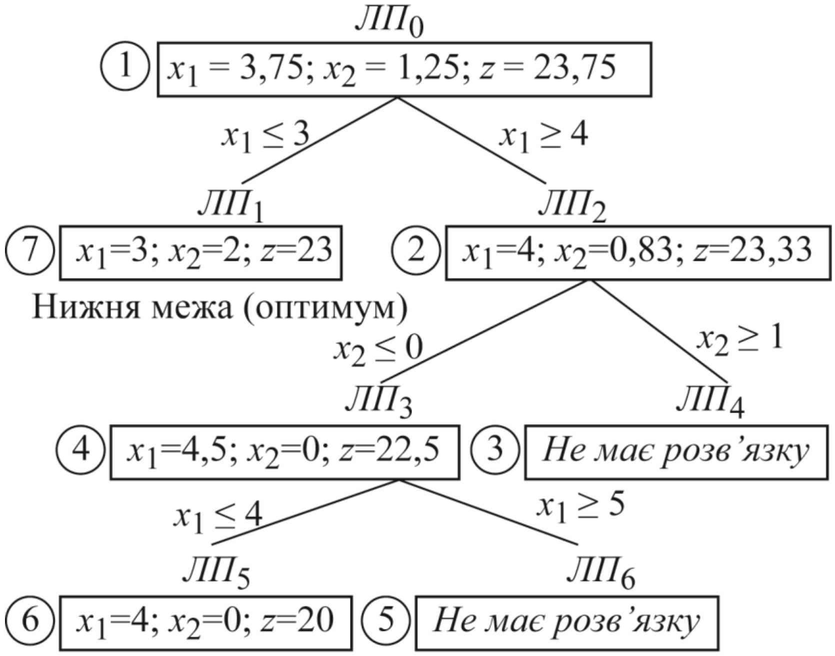

Рис. 4.4. **Розв'язання задачі ЛП$_2$**

Є ще три нерозглянуті задачі, які потрібно розв'язати – ЛП$_1$, ЛП$_3$ і ЛП$_4$. Нехай довільно вибрано першою задачу ЛП$_4$. Ця задача не має розв'язку, отже є прозондованою. Наступною задачею вибрано підзадачу ЛП$_3$. Її оптимальним розв'язком є $x_1 = 4{,}5,\ x_2 = 0,\ Z = 22{,}5$. Нецілочислове значення змінної $x_1 = 4{,}5$ породжує дві гілки розв'язку за $x_2 \le 4$ і $x_2 \ge 5$ і відповідні їм підзадачі ЛП$_5$ і ЛП$_6$. При цьому:

1) простір розв'язків ЛП$_5$ = простір розв'язків ЛП$_0$ + $(x_1 \ge 4)$ + + $(x_2 \le 0)$ + $(x_1 \ge 4)$;

2) простір розв'язків ЛП$_6$ = простір розв'язків ЛП$_0$ + $(x_1 \ge 4)$ + + $(x_2 \le 0)$ + $(x_2 \ge 5)$.

Тепер не розглянуто лише підзадачі ЛП$_1$, ЛП$_5$ і ЛП$_6$. Підзадача ЛП$_6$ є прозондованою, оскільки не має допустимих розв'язків. Підзадача ЛП$_5$ має цілочисловий розв'язок $x_1 = 4, x_2 = 0, Z = 20$, отже породжує нижню межу $Z = 20$ оптимального значення цільової функції задачі ЦЛП. Розв'язок підзадачі ЛП$_1$ є цілочисловим і $x_1 = 3, x_2 = 2, Z = 23$, отже нижню межу значень цільової функції вважаємо рівною 23. Оскільки всі підзадачі є прозондованими, оптимальним розв'язком задачі ЦЛП є розв'язок, що відповідає останній нижній межі X^*, тобто $x_1 = 3, x_2 = 2, Z = 23$.

Цей приклад акцентує основну слабкість методу гілок і меж щодо того, як вибрати наступну підзадачу для дослідження і як вибрати для неї змінну розгалуження. Розглянуту процедуру застосовано для розв'язання задач максимізації. Для розв'язання задач мінімізації в алгоритмі потрібно замінити нижню межу на верхню (початкове значення якої дорівнює $z = +\infty$).

4.2. Завдання для самостійної роботи

4.1. Розв'яжіть задачі цілочислового програмування:

1. $Z_{\min} = -4x_1 - 3x_2.$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 - \textit{цілі}. \end{cases}$$

2. $Z_{\max} = -x_1 + x_2.$
$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \ge 0,\ x_i \in Z,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3. $Z_{\min} = -x_1 - 2x_2.$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 9, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 - \textit{цілі}. \end{cases}$$

4. $Z_{\max} = -x_1 + 4x_2.$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 17, \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 - \textit{цілі}. \end{cases}$$

5. $Z_{\min} = -x_2.$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24, \\ x_i \ge 0,\ x_i \in Z,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

6. $Z_{\max} = 8x_1 + 6x_2.$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 - \textit{цілі}. \end{cases}$$

Практичне заняття 5
Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем

5.1. Приклади розв'язання задач

Для задачі нелінійного програмування, на відміну від лінійних задач, немає єдиного методу розв'язання. Залежно від виду цільової функції та системи обмежень розроблено спеціальні методи розв'язання, до яких належать методи множників Лагранжа, квадратичне й опукле програмування, градієнтні методи, наближені методи розв'язання, графічний метод.

Задачу математичного програмування

$$\begin{aligned}
&Z_{\max(\min)} = f(x),\\
&\varphi_i(\mathbf{x})\{\le, =, \ge\}\, b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right),\\
&\mathbf{x}\ge 0, \quad \mathbf{x}=(x_1, ..., x_n),
\end{aligned}$$

у якій або цільова функція, або обмеження, або те й інше є нелінійними, називають нелінійною.

Метод множників Лагранжа є класичним методом розв'язання задач математичного програмування.

План розв'язання задач методом множників Лагранжа

1. Складаємо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n).$$

2. Знаходимо частинні похідні функції Лагранжа за всіма змінними $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ та прирівнюємо до нуля. Отримуємо систему з $n+m$ рівнянь. Розв'язуємо отриману систему та знаходимо всі стаціонарні точки функції Лагранжа.

3. Зі стаціонарних точок, узятих без $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, вибираємо точки, у яких функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має умовні локальні екстремуми за наявністю обмежень $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ i=\overline{1,m}$. Цей вибір здійснюємо з використанням достатніх умов локального екстремуму.

Задачі нелінійного програмування з двома змінними можна розв'язати графічно. Точки екстремуму цих задач можуть лежати в середині області, на ребрі, грані або у вершині многокутника.

Приклад 5.1

Знайдіть глобальні екстремуми функції за заданих обмежень графічним методом:

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2.$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_1 - 2x_2 \le 3. \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Розв'язання:

Областю допустимих рішень є область, зображена на рис. 5.1.

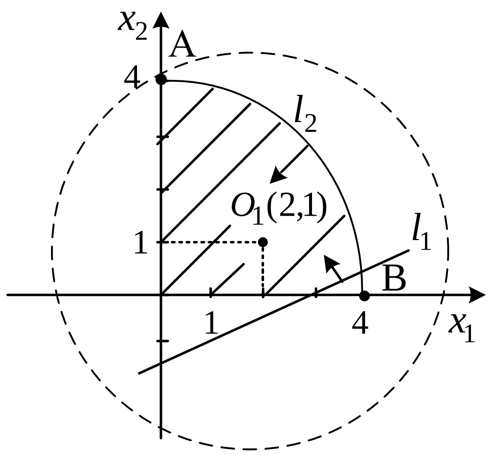

Рис. 5.1. **Область допустимих значень**

Лініями рівня є кола із центром у точці $O_1(2,1)$.

Глобальний мінімум досягається в точці $O_1(2,1)$, глобальний максимум – у точці $A(0,4)$. Цільова функція в точці A дорівнює:

$$Z_{\max}(A) = (0-2)^2 + (4-1)^2 = 13.$$

Отже, глобальний мінімум $Z_{\min}(O_1) = 0$ в точці $O_1(2,1)$, глобальний максимум дорівнює $Z_{\max}(A) = 13$ в точці $A(0,4)$.

Приклад 5.2

Знайдіть екстремуми функції за заданих обмежень графічним методом:

$$Z = 2x_1 - x_2 .$$

$$\begin{cases} x_1^2 + (x_2 - 3)^2 \le 9, \\ x_2 \ge 3. \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Розв'язання:

Областю допустимих рішень є область, зображена на рис. 5.2.

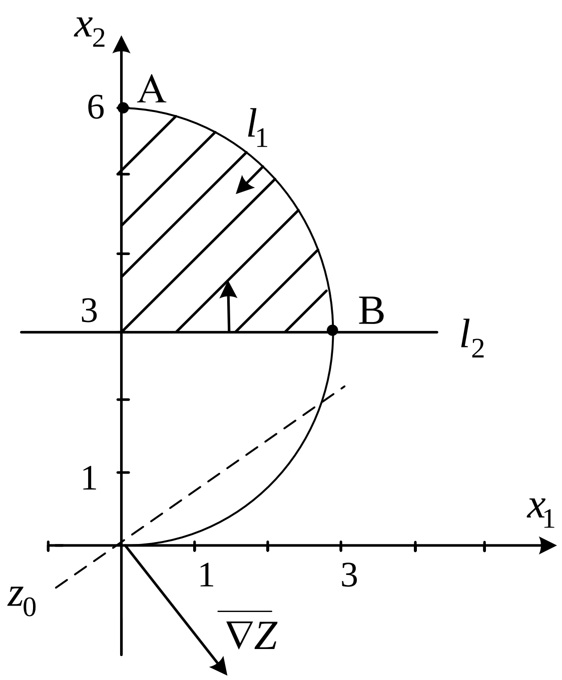

Рис. 5.2. **Область допустимих значень**

Градієнт цільової функції $\overline{gradZ} = (2; -1)$. Глобальний мінімум досягається в точці $A(0, 6)$, $Z_{\min}(A) = -6$, глобальний максимум – у точці $B(3, 3)$. Цільова функція в точці B дорівнює $Z_{\max}(B) = 3$.

Приклад 5.3

Знайдіть глобальні екстремуми функції за обмежень:

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 .$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Розв'язання:

Область допустимих рішень – *OABD* (рис. 5.3).

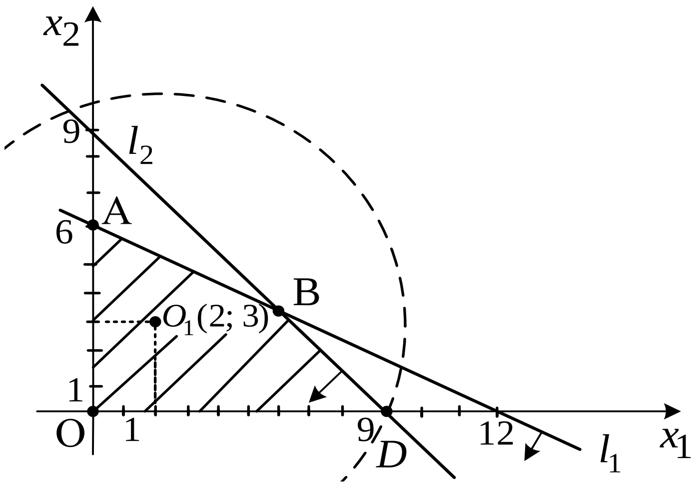

Рис. 5.3. **Область допустимих рішень**

Лініями рівня будуть кола із центром у точці $O_1(2;\,3)$.

Максимальне значення цільова функція має в точці $D(9;\,0)$, мінімальне – у точці $O_1(2;\,3)$. Тому $Z(D) = (9-2)^2 + (0-3)^2 = 58$.

Отже, глобальний максимум $Z_{\max}(D) = 58$ в точці $D(9;\,0)$, глобальний мінімум $Z_{\min}(O_1) = 0$ в точці в $O_1(2;\,3)$.

Приклад 5.4

Знайдіть мінімум та максимум функції за заданих обмежень графічним методом:

$$Z = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 5)^2.$$

$$\begin{cases} x_1^2 + (x_2 - 3)^2 \le 9, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 1. \end{cases}$$

$$x_2 \ge 0.$$

Розв'язання:

Областю допустимих рішень є область, зображена на рис. 5.4.

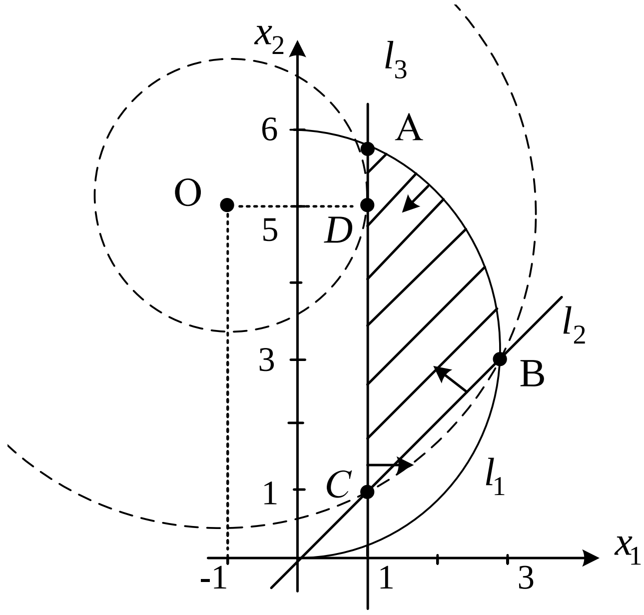

Рис. 5.4. **Область допустимих значень**

Лініями рівня є кола із центром у точці $O(-1, 5)$.

Глобальний мінімум досягається в точці $D(1, 5)$ на перпендикулярі (найкоротша відстань) до області допустимих значень:

$$Z_{\min}(D) = (1+1)^2 + (5-5)^2 = 4 .$$

Глобальний максимум досягається у двох точках $B(3, 3)$ та $C(1, 1)$ (максимальна однакова відстань до центра кола із цільової функції):

$$Z_{\max} = Z(B) = Z(C) = 16 + 4 = 20.$$

Приклад 5.5

Знайдіть екстремум функції методом Лагранжа:

$$Z_{\min} = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3 .$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складаємо функцію Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 4) + \\ + \lambda_2(2x_1 - 3x_2 - 12).$$

Знаходимо частинні похідні функції $F(X, \lambda)$ за всіма змінними і прирівнюємо їх до нуля. Отримуємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 1 + \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 2x_1 - 3x_2 - 12 = 0. \end{cases}$$

Відразу знайшовши $\lambda_1 = -1$, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь із чотирьох рівнянь на чотири невідомі:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\lambda_2 = 1, \\ 2x_2 - 3\lambda_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$$

Розв'язуємо її методом Гауса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 7/2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 11 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 13/2 & 25/2 \end{array}\right).$$

Отже, $\lambda_2 = 25/13, \quad x_3 = 103/26, \; x_2 = -31/13, \; x_1 = 63/26.$

За допомогою частинних похідних другого порядку доводимо, що X^* – точка мінімуму функції.

Отже, точка мінімуму $X^*\left(\frac{63}{26};-\frac{31}{13};\frac{103}{26}\right)$ і $Z_{\min} = 15\frac{27}{52}$.

Приклад 5.6

Підприємство реалізовує свій продукт двома способами: у роздріб через магазин і оптом через торговельних агентів.

Під час продажу x_1 кг продукту через магазин витрати на реалізацію становлять x_1^2 грош. од., а під час продажу x_2 кг продукту за допомогою торговельних агентів – x_2^2 грош. од.

Визначте, скільки кілограмів продукту слід продавати кожним способом, щоб витрати на реалізацію були мінімальними, якщо на добу виділяють для продажу 10 000 кг продукту.

Розв'язання:

Потрібно скласти математичну модель задачі.

Слід знайти мінімум сумарних витрат:

$$L = x_1^2 + x_2^2 \text{ за обмежень } x_1 + x_2 = 10\,000, \quad x_{1,2} \geq 0.$$

Для розрахунку моделі використовуємо метод множників Лагранжа. Складаємо функцію Лагранжа :

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 10\,000).$$

Варто знайти частинні похідні функції F за x_1, x_2, λ і прирівняти їх до нуля. Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 10\,000 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\lambda = -10\,000$, $x_1 = 5\,000$, $x_2 = 5000$, $L = 50\,000\,000$ грош. од. Надаючи x_1 значення більше і менше 5 000, обчислюємо L і з визначення екстремуму функції отримуємо, що L за $x_1 = x_2 = 5\,000$ досягає мінімуму. Отже, для мінімальних витрат потрібно реалізовувати на добу через магазин і торговельних агентів по 5 000 кг продукту. При цьому витрати на реалізацію становлять 50 000 000 грош. од.

5.2. Завдання для самостійної роботи

5.1. Знайдіть екстремуми функції за заданих обмежень графічним методом:

1. $Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$.

$$\begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \le 25, \\ x_2 \le 4. \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

2. $Z = 3x_1$.

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 \le 0, \\ -2x_1 + 2x_2 \le 4. \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

3. $Z = (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 1)^2$.

$$\begin{cases} (x_1 - 4)^2 + x_2^2 \le 9, \\ x_2 \ge \sqrt{5}. \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

4. $Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2$.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25, \\ \sqrt{3}x_1 - x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

5. $Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$.

$x_1^2 + x_2^2 \le 16, \quad x_{1,2} \ge 0.$

6. $Z = 2x_1 + x_2$.

$x_1^2 + x_2^2 \le 16, \quad x_{1,2} \ge 0.$

7. $Z = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2$.

$$\begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \ge 4. \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

8. $Z = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2$.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_2 \le 3. \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

5.2. Знайдіть екстремуми функції методом множників Лагранжа:

1. $f(x) = x_1 x_2$
$2x_1 + 3x_2 - 5 = 0$

2. $f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3 + 1$
$x_1^2 + x_2^2 = 4$

3. $f(x) = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2$
$x_1 + x_2 + x_3 = 8$

4. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

5. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
$3x_1^2 + x_2^2 = 12$

6. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1 x_2 + 3x_2^2$
$9x_1 + 10x_2 = 29$

7. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
$x_1^2 + x_2^2 = 2$

8. $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 10x_1 x_2 + 3x_2^2$
$9x_1 + 13x_2 = 31$

5.3. На складі зберігають запас сировини на виготовлення продукції двох видів – 52 т. Витрати сировини на виробництво продукції першого виду дорівнюють x, другого – y, де x, y – кількість продукції, що виготовляють. Прибуток обчислюють функцією $z = (x-2)^2 + (y-3)^2$.

Визначте оптимальну програму виробництва продукції за умови обмеженої кількості сировини.

5.4. За планом потрібно виробити продукцію першого та другого видів загальною кількістю 1 т, тобто $x + y = 1$. Прибуток від реалізації продукції обчислюють функцією $z = x^2 + y^2$.

Визначте оптимальну програму виробництва продукції.

Практичне заняття 6
Теорія ігор. Аналіз та управління ризиком в економіці на базі концепції теорії ігор

6.1. Приклади розв'язання задач

Метою учасників будь-якої матричної гри є вибір найбільш вигідних стратегій, що забезпечують гравцеві A максимальний виграш, а гравцеві B – мінімальний програш.

Число $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j \{a_{ij}\}$ називають нижньою чистою ціною гри. Число $\beta = \min\limits_j \max\limits_i \{a_{ij}\}$ називають верхньою чистою ціною гри. У матричній грі нижня чиста ціна гри не перевищує верхньої чистої ціни гри, тобто $\alpha \le \beta$. Матричну гру може бути розв'язано графічно й аналітично.

Якщо в матричній грі нижня і верхня чисті ціни збігаються, тобто $\alpha = \beta$, то гра має сідлову точку в чистих стратегіях і чисту ціну гри $v = \alpha = \beta$.

Приклад 6.1

Знайдіть ціну гри й оптимальні стратегії за заданої платіжної матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 & 14 & 5 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Перевіряємо, чи можна розв'язати цю гру в чистих стратегіях.

Для цього знаходимо нижню ціну α, вибравши найбільше з найменших значень за кожною стратегією гравця A (за рядками платіжної матриці):

$$\alpha = \max\{2; 5\} = 5.$$

Визначаємо верхню ціну гри β, вибравши найменше з найбільших значень програшу за стратегіями гравця B:

$$\beta = \min\{8; 10; 5; 14; 7\} = 5.$$

Отже, $\alpha = \beta$, а тому гра має розв'язок у чистих стратегіях і її ціна $\nu = \alpha = \beta = 5$.

Для гравця A активною стратегією є A_2, а для гравця B активною стратегією є B_3. Тоді розв'язок матричної гри має такий вигляд:

$$X^*(0;1),\ Y^*(0;0;1;0;0),\ \nu = 5.$$

Якщо в матричній грі $\alpha < \beta$, то говорять, що гра відбувається в змішаних стратегіях. Ціна гри перебуває в проміжку між нижньою та верхньою ціною ($\alpha < \nu < \beta$). Чисті стратегії гравця, що входять до його оптимальної змішаної стратегії з імовірностями, відмінними від нуля, називають *активними стратегіями* гравця.

Приклад 6.2

Розв'яжіть матричну гру графічно й аналітично. Поясніть отримані результати.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Визначаємо нижню ціну гри α:

$$\alpha = \max\{1;2;-1;1\} = 2.$$

Визначаємо верхню ціну гри β:

$$\beta = \min\{4;7\} = 4.$$

Отже, $\alpha \neq \beta$, а тому гра має розв'язок у змішаних стратегіях і її ціна ν задовольняє нерівність: $\alpha < \nu < \beta$.

Розв'язуємо задачу за допомогою графічного методу (рис. 6.1). Це можливо тому, що гравець B має тільки дві стратегії. Для цього на координатній площині вздовж осі абсцис відкладаємо відрізок одиничної довжини. Перпендикулярно йому проводимо осі B_1 і B_2, на яких відкладаємо програші гравця B, які відповідають його стратегіям за умови, що гравець A приймає будь-яку зі своїх стратегій. Ламана лінія A_1MA_4 є верхньою межею програшів гравця B. Гравець B хоче мінімізувати свій програш, тому на лінії A_1MA_4 знаходимо точку з мінімальною ординатою. Це точка M, утворена перетином ліній A_1A_1 і A_4A_4, які відповідають стратегіям A_1 і A_4 гравця A. Ордината точки M відповідає ціні гри, а проєкція точки M поділяє одиничний інтервал на осі абсцис на відрізки, які відповідають імовірностям p_1 і p_2, із якими гравець B приймає стратегії B_2 і B_1, відповідно.

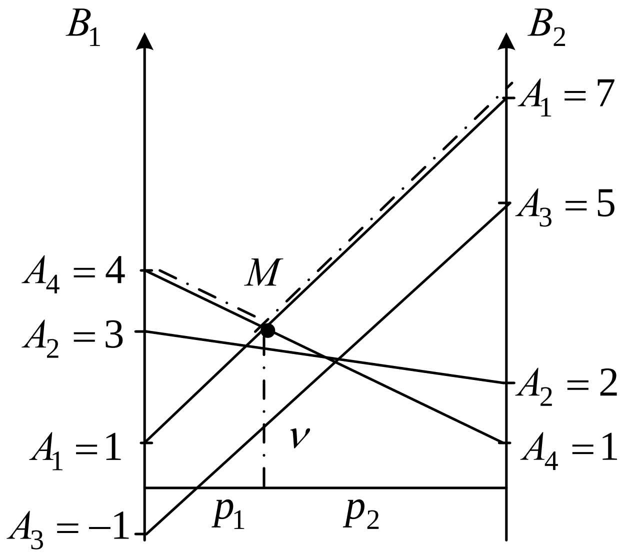

Рис. 6.1. **Розв'язання матричної гри графічним методом**

Точку M отримано перетином ліній A_1A_1 і A_4A_4, тому в активних стратегіях платіжна матриця має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

З урахуванням активних стратегій оптимальну стратегію гравця A визначає вектор $X^* = (x_1;\ 0;\ 0;\ x_4)$, а гравця B – вектор $Y^* = (y_1;\ y_2)$.

Записуємо систему рівнянь для визначення компонентів вектора X^*, використовуючи в цих рівняннях коефіцієнти числа за стовпцями платіжної матриці.

Оскільки випадкові події, які полягають у використанні гравцем A стратегії A_1 або стратегії A_4, становлять повну групу подій, сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці. Отже:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = \nu, \\ 7x_1 + x_4 = \nu, \\ x_1 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/3, \\ x_4 = 2/3, \\ \nu = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} X^* = (1/3;\ 0;\ 0;\ 2/3), \\ \quad \nu = 3. \end{array}$$

Для визначення компонентів вектора Y^* записуємо систему рівнянь, де коефіцієнти – це числа за рядками платіжної матриці активних стратегій. Маємо:

$$\begin{cases} y_1 + 7y_2 = \nu, \\ 4y_1 + y_2 = \nu, \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2/3, \\ y_2 = 1/3, \\ \nu = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} Y^* = (2/3;\ 1/3), \\ \quad \nu = 3. \end{array}$$

Бачимо, що значення ціни гри, яку визначають за оптимальними стратегіями обох гравців, однакові. Вони збігаються з даними, отриманими в ході аналізу графічного розв'язання для гравця B.

Отже $X^* = (1/3;\ 0;\ 0;\ 2/3);\quad Y^* = (2/3;\ 1/3);\quad \nu = 3.$

Приклад 6.3

Застосувавши графічний метод, для матричної гри "Покупець-продавець", обчисліть нижню та верхню вартості гри, визначте ціну гри та оптимальні стратегії кожного з гравців, якщо гру задано платіжною матрицею A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Відповідно до платіжної матриці гравець A має дві стратегії: A_1 та A_2, тоді як гравець B має п'ять стратегій: B_1, B_2, B_3, B_4 і B_5:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_1 \\ A_2. \end{array} \end{array}$$

Перевіряємо, чи має гра сідлову точку. Для цього визначаємо нижню ціну гри α, тобто порівнюємо найменші значення виграшів за кожним із рядків платіжної матриці (стратегії гравця A) та вибираємо серед них найбільше:

$$\alpha = \max\{1;\ 0{,}5\} = 1.$$

Визначаємо верхню ціну гри β, тобто порівнюємо найбільші значення програшів за кожним стовпцем платіжної матриці (стратегії гравця B) та вибираємо серед них найменше:

$$\beta = \min\{2;\ 3;\ 5;\ 3;\ 4\} = 2.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$, то гра не має сідлової точки, тому має розв'язок у мішаних стратегіях, при цьому ціна гри ν задовольняє умову: $\alpha < \nu < \beta$. Розв'язуємо задачу за допомогою графічного методу. Це можна зробити, оскільки гравець A має тільки дві стратегії.

На координатній площині вздовж осі абсцис відкладаємо відрізок одиничної довжини. Перпендикулярно йому проводимо осі A_1 і A_2, на яких відкладаємо виграші гравця A, що відповідають його стратегіям за умови, що гравець B дотримується однієї зі своїх стратегій (рис. 6.2).

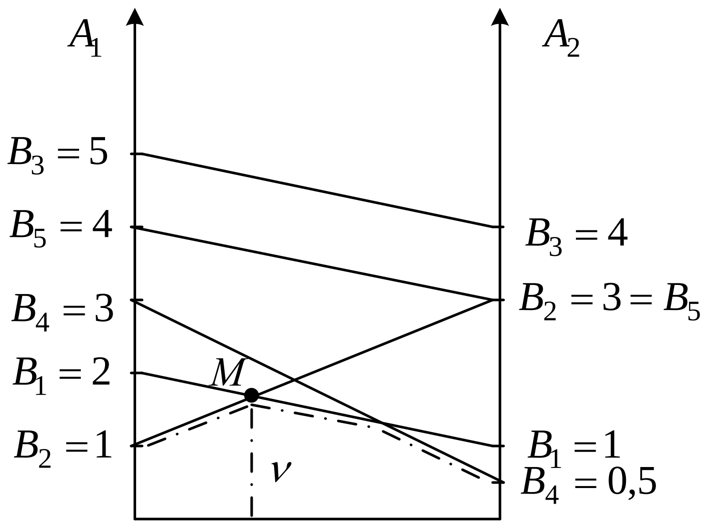

Рис. 6.2. **Розв'язання матричної гри графічним методом**

Ламана лінія нижньої межі є межею можливого виграшу гравця A. На цій межі знаходимо точку з максимальною ординатою. Видно, що цю точку утворено перетином ліній B_1 і B_2, які відповідають стратегіям B_1 і B_2 гравця B. Ордината цієї точки відповідає ціні гри, а відрізки, на які проєкція точки поділяє одиничний відрізок осі абсцис, визначають імовірності p_2 та p_1, із якими гравець A буде дотримуватися відповідно стратегій A_1 і A_2.

Отже, точку M розташовано на перетині ліній B_1 і B_2. Тоді в активних стратегіях платіжна матриця має такий вигляд:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

За цією матрицею оптимальну стратегію гравця *А* визначає вектор $X^* = (x_1; x_2)$, а гравця *В* – вектор $Y^* = (y_1; y_2; 0; 0; 0)$. Для розв'язання задачі складаємо систему рівнянь щодо компонентів вектора X^* та ціни гри. У перших двох рівняннях цієї системи коефіцієнтами за невідомих x_1 та x_2 є елементи платіжної матриці активних стратегій, що стоять у її стовпцях. Оскільки використання гравцем *А* стратегії A_1 або стратегії A_2 утворює повну групу подій, то сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці. Це й буде третім рівнянням системи. Отже, маємо:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = v, \\ x_1 + 3x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2/3, \\ x_2 = 1/3, \\ v = 5/3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} X^* &= (2/3; 1/3), \\ v &= 5/3. \end{aligned}$$

Для обчислення компонентів y_1 та y_2 вектора Y^*, які визначають імовірність вибору певної стратегії гравцем *В*, записуємо систему рівнянь, коефіцієнтами яких є елементи рядків платіжної матриці активних стратегій (тобто фіксованими є стратегії гравця A):

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = v, \\ y_1 + 3y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2/3, \\ y_2 = 1/3, \\ v = 5/3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} Y^* = (2/3; 1/3; 0; 0; 0), \\ v = 5/3. \end{matrix}$$

Бачимо, що значення ціни гри, які обчислювали відповідно до оптимальних стратегій обох гравців, однакові та збігаються з даними, отриманими в ході аналізу графічного розв'язання.

Отже, $X^* = (2/3; 1/3)$; $\quad Y^* = (2/3; 1/3; 0; 0; 0)$; $\quad v = 3$.

Приклад 6.4

Розв'яжіть матричну гру графічно й аналітично. Поясніть отримані результати.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Визначаємо нижню ціну гри α :

$$\alpha = \max\{2; 3; 4; 5\} = 5.$$

Визначаємо верхню ціну гри β :

$$\beta = \min\{5; 5\} = 5.$$

Отже, $\alpha = \beta$, а тому гра має розв'язок у чистих стратегіях і її ціна $v = \alpha = \beta = 5$.

Для гравця A активною стратегією є A_4, а для гравця B обидві стратегії однаково активні. Це підтверджено графічним розв'язанням цієї гри на рис. 6.3.

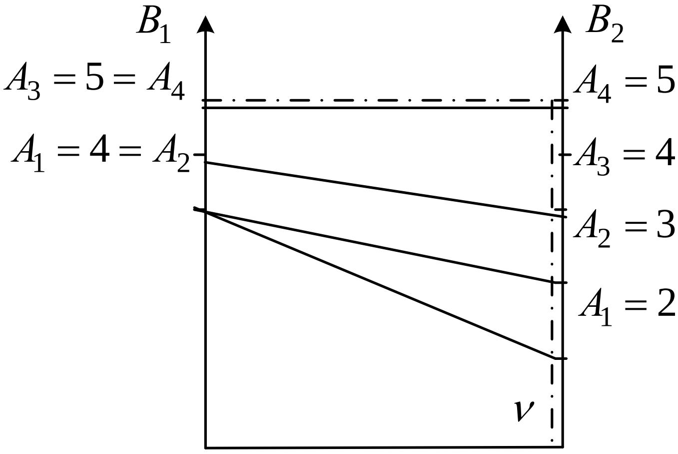

Рис. 6.3. **Розв'язання матричної гри графічним методом**

Оптимальні точки розташовано на лінії, яка відповідає стратегії A_4, а стратегії B_1 та B_2 рівноправні. Отже, розв'язок матричної гри має такий вигляд:

$$X^*(0;\ 0;\ 0;\ 1),\ Y^*(1/2;\ 1/2),\ \nu = 5.$$

6.2. Завдання для самостійної роботи

6.1. Знайдіть ціну гри та оптимальні стратегії за заданої платіжної матриці A. Поясніть отримані результати:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T$.

3. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 7 & -2 \\ 5 & 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T$.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 9 & 9 \end{pmatrix}^T$.

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 9 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T$.

9. $A=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & -2 & 2 \\ 6 & 9 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T.$ 10. $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

11. $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 7 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$ 12. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T.$

6.2. Особа, яка ухвалює рішення, проводить аналіз упровадження двох бізнес-проєктів компанії. Прибуток компанії, залежно від прийняття відповідної стратегії конкурента компанії, наведено матрицею

$$P=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 & 9 & 1 \\ 10 & 7 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжіть задану матричну гру графічно й аналітично. Побудуйте матрицю оцінювання ризиків та поясніть отримані результати.

6.3. Для опалення приміщення потрібно закупити паливо. Витрати палива та ціна на нього залежать від погоди в зимовий період, що наведено матрицею

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 3 \\ 10 & 0 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжіть задану матричну гру графічно й аналітично.

6.4. Підприємство виготовляє два види продукції та отримує прибуток, що залежить від попиту на продукцію. Попит має один із п'яти станів. Елементи наведеної матриці характеризують прибуток окремого виду продукції залежно від стану попиту:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжіть задану матричну гру графічно й аналітично, зробіть висновок. Побудуйте матрицю оцінювання ризиків та поясніть отримані результати.

Практичне заняття 7
Динамічне програмування

7.1. Приклади розв'язання задач

Динамічне програмування дозволяє знаходити оптимальний розв'язок задачі через її декомпозицію на декілька етапів. Цю декомпозицію здійснюють за різноманітними принципами: у деяких задачах – за часовими періодами, в інших – за об'єктами управління. Іноді розбиття створюють штучно. Фундаментальним принципом динамічного програмування, який становить основу декомпозиції задачі на етапи, є оптимальність.

Такий підхід зводить одну більшу за розмірністю задачу до багатьох задач, які мають меншу розмірність. Це значно скорочує обсяг обчислень та прискорює процес ухвалення управлінських рішень.

Обчислення в динамічному програмуванні виконують рекурентно в тому сенсі, що оптимальний розв'язок однієї підзадачі використовують як вихідні дані для наступної. Однією з таких задач є задача оптимального розподілу інвестицій планування.

Приклад 7.1

Рада директорів фірми вивчає пропозиції з модернізації чотирьох підприємств. Для цього виділено 5 млн у. о. Для кожного підприємства j розроблено декілька альтернативних проєктів. Кожен із проєктів характеризується сумарними затратами c_j та майбутніми прибутками R_j.

На кожному підприємстві можна здійснити тільки один проєкт. Відповідні дані наведено в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Задача на розподіл 5 млн у. о.

Проєкт	Підприємство 1		Підприємство 2		Підприємство 3		Підприємство 4	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3	c_4	R_4
$x_j = 1$	0	0	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0	0	0	0
$x_j = 2$	$\underline{1}$	$\underline{3}$	3	5	1	4	$\underline{2}$	$\underline{3}$
$x_j = 3$	–	–	5	9	$\underline{2}$	$\underline{6}$	–	–

Потрібно вибрати такі проєкти для кожного підприємства, щоб фірма отримала максимальний річний прибуток.

Розв'язання:

У цій задачі проєкт 1 пустий, розширення підприємства при ньому не передбачено. Найпростіший спосіб розв'язання задачі – використати повний перебір у табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Повний перебір

x_1	x_2	x_3	x_4	Витрати $\sum c_j(x_j)$	Прибутки $\sum R_j(x_j)$	План допустимий?
1	1	1	1	0	0	Так
1	1	1	2	2	3	Так
1	1	2	1	1	4	Так
1	1	2	2	1 + 2 = 3	4 + 3 = 7	Так
1	1	3	1	2	6	Так
1	1	3	2	2 + 2 = 4	6 + 3 = 9	Так
…	…	…	…	…	…	…
1	3	3	2	0 + 5 + 2 + 2 = 9	Нема	Ні
2	1	1	1	1 + 0 + 0 + 0 = 1	3 + 0 + 0 + 0 = 3	Так
2	1	1	2	1 + 0 + 0 + 2 = 3	3 + 0 + 0 + 3 = 6	Так
…	…	…	…	…	…	…
2	3	3	2	1 + 5 + 2 + 2 = 10	Нема	Ні

Задача має $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ можливих розв'язків. При цьому деякі з них не є допустимими, тому що для реалізації такого плану потрібно більше грошей, ніж 5 млн у. о.

Переходимо до математичної моделі задачі розподілу інвестицій, яка має такий вигляд:

$$f_1(y_1) = \max_{x_1,\dots,x_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} R_j(x_j) \right\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j) \le y_1,$$

$$x_j - \textit{цілі},\ j = 1,\dots,n.$$

Будемо використовувати такі позначення:

n – кількість підприємств;

y_j – кількість грошей на розширення підприємств j, $j = 1,\dots,n;$

x_j – номер проєкту, який вибрало підприємство j;

$c_j(x_j)$ – витрати на j-му підприємстві, де вибрали проєкт під номером x_j (млн у. о.);

$R_j(x_j)$ – річний прибуток, який буде отримано від реалізації проєкту під номером x_j (млн у. о. за рік);

$f_1(x_1)$ – максимальний річний прибуток, який буде отримано від реалізації проєктів $x_1, x_2 \dots, x_n$, за заданого обсягу інвестицій y_1.

Рекурентне рівняння Беллмана для процедури зворотної прогонки записуємо для цієї задачі так:

$$f_5(y_5) = 0,$$

$$f_j(y_j) = \max_{x_j \mid c_j(x_j) \le y_j} \{R_j(x_j) + f_{j+1}(y_j - c_j(x_j))\}, \quad j = 4,3,2,1.$$

Спочатку розв'язуємо задачу для 4-го підприємства, потім для 3-го та 4-го, потім для 2-го, 3-го та 4-го підприємств, і, нарешті, для 1-го, 2-го, 3-го та 4-го підприємств. У табл. 7.3 – 7.6 наведено результати розрахунків.

Результати отримано за допомогою таблиць, у яких містяться значення функції Беллмана $\{R_j(x_j) + f_{j+1}(y_j - c_j(x_j))\}$ від двох змінних x_j та y_j. Функцію знаходять для кожного можливого значення стану y_j та управління x_j.

Якщо неможливо знайти функції для деяких пар (x_j, y_j), то замість значення функції ставлять прочерк.

Після цього обчислюємо максимальне значення за рядками таблиці та оптимальний розв'язок, який міститься у двох останніх стовпцях будь-якої таблиці.

Етап 4. Підприємство 4:

$$f_4(y_4) = \max_{x_4 = 1:2 \mid c_4(x_4) \le y_4} \{R_4(x_4)\}.$$

Таблиця 7.3

Задача про інвестиції, етап 4

y_4	$R_4(x_4)$		Оптимальний розв'язок	
	$x_4 = 1$	$x_4 = 2$	$f_4(x_4)$	x_4^*
0	0	–	0	1
1	0	–	0	1
<u>2</u>	0	3	<u>3</u>	<u>2</u>
3	0	3	3	2
4	0	3	3	2
5	0	3	3	2

Етап 3. Підприємства 3 та 4:

$$f_3(y_3) = \max_{x_3 = 1:3 \mid c_3(x_3) \le y_3} \{R_3(x_3) + f_4(y_3 - c_3(x_3))\}.$$

Таблиця 7.4

Задача про інвестиції, етап 3

y_3	$R_3(x_3) + f_4(y_3 - c_3(x_3))$			Оптимальний розв'язок	
	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$f_3(x_3)$	x_3^*
1	2	3	4	5	6
0	0 + 0 = 0	–	–	0	1
1	0 + 0 = 0	4 + 0 = 4	–	4	2

Закінчення табл. 7.4

1	2	3	4	5	6
2	0 + 3 = 3	4 + 0 = 4	6 + 0 = 6	6	3
3	0 + 3 = 3	4 + 3 = 7	6 + 0 = 6	7	2
4	0 + 3 = 3	4 + 3 = 7	6 + 3 = 9	9	3
5	0 + 3 = 3	4 + 3 = 7	6 + 3 = 9	9	3

Етап 2. Підприємства 2, 3 та 4:

$$f_2(y_2) = \max_{x_2 = 1:3 \mid c_2(x_2) \le y_2} \{R_2(x_2) + f_3(y_2 - c_2(x_2))\}.$$

Таблиця 7.5

Задача про інвестиції, етап 2

y_2	$R_2(x_2) + f_3(y_2 - c_2(x_2))$			Оптимальний розв'язок	
	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$f_2(x_2)$	x_2^*
0	0 + 0 = 0	–	–	0	7
1	0 + 4 = 4	–	–	4	7
2	0 + 6 = 6	–	–	6	7
3	0 + 7 = 7	5 + 0 = 5	–	7	7
4	0 + 9 = 9	5 + 4 = 9	–	9	1, 2
5	0 + 9 = 9	5 + 6 = 11	0 + 9 = 9	11	2

Етап 1. Підприємства 1, 2, 3 та 4:

$$f_1(y_1) = \max_{x_1 = 1:2 \mid c_1(x_1) \le y_1} \{R_1(x_1) + f_3(y_1 - c_1(x_1))\}.$$

Коли всі чотири таблиці заповнено і для кожного j знайдено оптимальний розв'язок, треба визначити оптимальний план для всієї задачі.

Таблиця 7.6

Задача про інвестиції, етап 1

y_1	$R_1(x_1)+f_3(y_1-c_1(x_1))$		Оптимальний розв'язок	
	$x_1=1$	$x_1=2$	$f_1(x_1)$	x_1^*
0	0 + 0 = 0	–	0	1
1	0 + 4 = 4	3 + 0 = 3	4	1
2	0 + 6 = 6	3 + 4 = 7	7	2
3	0 + 7 = 7	3 + 6 = 9	9	2
4	0 + 9 = 9	3 + 7 = 10	10	2
<u>5</u>	0 + 11 = 11	3 + 9 = 12	<u>12</u>	<u>2</u>

Дані останньої табл. 7.6 етапу 1 свідчать, що максимальний прибуток становить $f_1(5)=12$ млн у. о. на рік. Для цього потрібно на першому підприємстві застосувати другий проєкт $x_1^*=2$. Характеристики другого проєкту $(c_1(2), R_1(2))=(1{,}3)$. Ці числа підкреслено в початковій табл. 7.1. На підприємствах 2, 3, та 4 залишається грошей: $y_2=y_1-c_1(2)=5-1=4$ млн у. о.

Переходимо до етапу 2 і підкреслюємо в рядку $y_2=4$ числа $f_2(4)=9$ та $x_2^*(4)=1$. Є ще один оптимальний розв'язок задачі. $x_2^*=1$ відповідає проєкту з характеристиками $(c_2(1), R_2(1))=(0{,}0)$. Ці числа підкреслено в початковій табл. 7.1. $y_3=y_2-c_2(1)=4-0=4$, тому на підприємства 3 та 4 переходять усі 4 млн у. о.

За даними табл. 7.4 етапу 3 з'ясовуємо, як можна ці $y_3=4$ млн у. о. оптимально використати. Підкреслюємо $f_3(4)=9$ та $x_3^*(4)=3$. Третій проєкт третього підприємства $x_3^*=3$ має такі характеристики: $(c_3, R_3)=(2{,}6)$. Підкреслюємо ці значення в початковій табл. 7.1. $y_4=y_3-c_3(3)=4-2=2$.

Як оптимально витратити $y_4 = 2$ млн у. о., показано в табл. 7.3 етапу 4. Для цього потрібно здійснити проєкт $x_1^* = 2$ на підприємстві 4. Підкреслюємо в табл. 7.1 $c_4(2) = 2, R_4(2) = 3$ та знаходимо кінцеву відповідь.

Для того щоб оптимально витратити 5 млн у. о. на чотирьох підприємствах, слід вибрати проєкти: $x^* = (2, 1, 3, 2)$. При цьому максимальний щорічний прибуток буде становити $f_1(5) = 12$ млн у. о.

Графічне розв'язання задачі повністю ідентичне табличному (рис. 7.1).

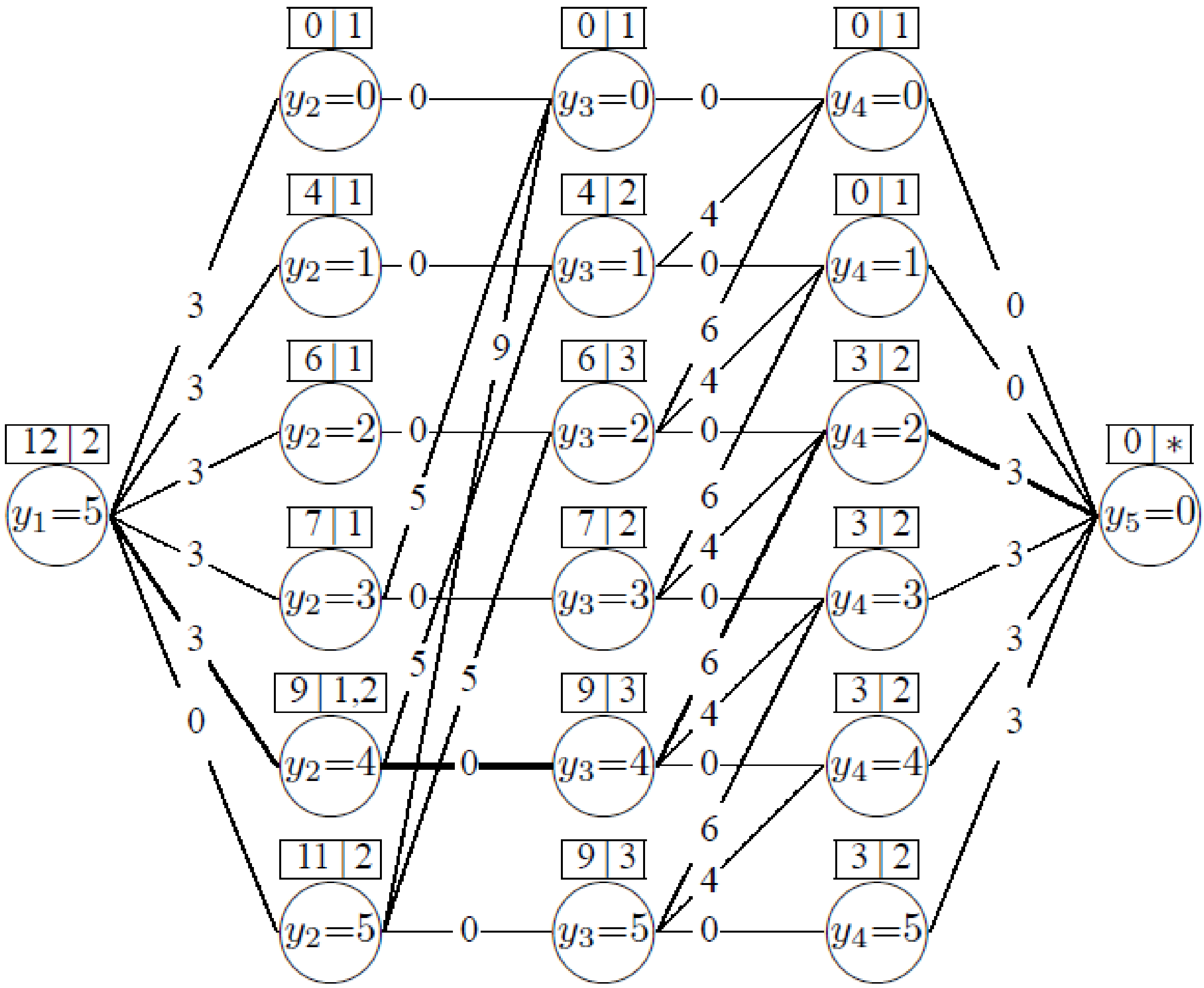

Рис. 7.1. **Графічне розв'язання задачі про оптимальний розподіл інвестицій**

Кожна вершина графа відповідає певному відомому стану системи, кожній дузі відповідає конкретний проєкт. Дуги мають напрям справа наліво. Спочатку над вершиною $y_5 = 0$ ставимо 0 та *. Виконуємо етап 4. Для кожного стану $y_4 \in 0:5$ знаходимо пару $f_4(y_4)$ та $x_4^*(y_4)$. Ці значення дають максимальний прибуток, який отримає підприємство 4. Номер проєкту, який потрібно для цього здійснити, пишемо над вершиною y_1. Над вершинами $y_j \in 0:5$ стоять ті самі числа, що у двох правих стовпцях етапу 4.

Перевірка:

загальна вартість всіх проєктів $\sum_j c_j(x_j^*) = 1 + 0 + 2 + 2 = 5$ млн у. о.;

щорічний прибуток $f_1(5) = \sum_j R_j(x_j^*) = 3 + 0 + 6 + 3 = 12$ млн у. о.

Однією з поширених задач динамічного програмування є задача управління запасами. Потрібно визначити таку програму, за якої загальна сума затрат на виробництво та зберігання запасів буде мінімальною, за умови повного та своєчасного задоволення попиту на продукцію.

Приклад 7.2

Завод може випускати щомісяця до 4 од. певної продукції. Витрати на виробництво x_j од. продукції на j місяць подано в табл. 7.7. Щомісяця завод має відвантажити 2 од. продукції своїм споживачам. Продукція може перебувати на складі. Витрати на збереження 1 од. становлять 1 млн у.о. Виплату за зберігання здійснюють у кінці місяця j. Склади можуть вмістити до 4 од. продукції. Беручи до уваги, що спочатку на складі було 2 од. продукції, визначте оптимальний план виготовлення на 4 місяці.

Таблиця 7.7

Витрати на виробництво x_j одиниць продукції

x_j	0	1	2	3	4	шт.
$C(x_j)$	0	7	9	11	13	млн у. о.

Позначаємо змінні і константи задачі:

n – кількість місяців планового відрізка;

x_j – випуск продукції на місяць j, $j=1,...,n$ (управління);

y_j – запаси наприкінці місяця j або на початку місяця $j+1$ (стан);

d_j – попит на місяць j, задана.

Змінні x_j і y_j пов'язані таким балансовим співвідношенням:

$$y_j = y_{j-1} + x_j - d_j, \quad j=1,...,n.$$

Будемо планувати на січень, лютий, березень та квітень ($n=4$). $d_j = 2,\ j=1,...,n,\ x_j,\ y_j \in 0:4.$

Математична модель задачі має такий вигляд:

$$f_1(y_0) = \min_{x_1,...,x_n}\left\{\sum_{j=1}^{n} C(x_j) + 1(y_{j-1} + x_j - 2)\right\}$$

$$\begin{cases} y_0 + x_1 - 2 = y_1, \\ y_1 + x_2 - 2 = y_2, \\ \ldots\ldots \\ y_{j-1} + x_j - 2 = y_j \\ \ldots\ldots \\ y_{n-1} + x_n - 2 = y_n \\ x_j, y_j \in 0:4 \\ y_0 = 0, \quad y_n = 0. \end{cases}$$

Визначте оптимальний план виробництва $x_1,....,x_n$, який мінімізує витрати.

Для розв'язання цієї задачі потрібно рівняння Беллмана:

$$f_j(y_{j-1}) = \min_{x_j}\{C(x_j) + 1\cdot(y_{j-1} + x_j - 2) + f_{j+1}(y_{j-1} + x_j - 2)\}.$$

Починаємо розв'язання задачі про запаси з останнього місяця – квітня.

Етап 4. Квітень:

$$f_4(y_3) = \min_{x_4 \in 0:4} \{C(x_4) + 1 \cdot (y_3 + x_4 - 2)\}.$$

У кінці квітня запаси на складі мають дорівнювати нулю: $y_3 + x_4 - 2 = y_4 = 0$, звідси $y_3 + x_4 = 2$. Усі можливі значення x_4 і y_3 та $C(x_4)$ наведено в табл. 7.8.

Для етапу 3 (березень, квітень) із $y_3 \in 0:4$, $y_3 = y_2 + x_3 - 2$ маємо: $0 \le y_2 + x_3 - 2 \le 4$.

Таблиця 7.8

Управління запасами, етап 4

y_3	Оптимальний розв'язок	
	$f_4(y_3)$	x_4^*
<u>0</u>	<u>9</u>	<u>2</u>
1	7	1
2	0	0

Ліва межа $0 + 2 \le y_2 + x_3$ дає заборонені варіанти в лівій частині табл. 7.9. Права межа $y_2 + x_3 \le 4 + 2$ відповідає прочеркам у правій нижній частині таблиці. У ній уже перелічено всі п'ять можливих співвідношень значень $y_2 \in 0:4$.

Етап 3. Березень, квітень:

$$f_3(y_2) = \min_{x_3 \in 0:4} \{C(x_3) + 1 \cdot (y_2 + x_3 - 2) + f_4 \cdot (y_2 + x_3 - 2)\}.$$

Таблиця 7.9

Управління запасами, етап 3

y_2	$C(x_3) + 1 \cdot (y_2 + x_3 - 2) + f_4 \cdot (y_2 + x_3 - 2)$					Оптимальний розв'язок	
	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$f_3(y_2)$	x_3^*
1	2	3	4	5	6	7	8
0	–	–	9 + 0 + 9 = 18	11 + 1 + 7 = 19	13 + 2 + 0 = 15	15	4

Закінчення табл. 7.9

1	2	3	4	5	6	7	8
1	–	7 + 0 + 9 = 16	9 + 1 + 7 = 17	11 + 2 + 0 = 13	–	13	3
<u>2</u>	0 + 0 + 9 = 9	7 + 1 + 7 = 15	9 + 2 + 0 = 11	–	–	<u>9</u>	<u>0</u>
3	0 + 1 + 7 = 8	7 + 2 + 0 = 9	–	–	–	8	0
4	0 + 2 + 0 = 2	–	–	–	–	2	0

Для другого етапу північно-західний та південно-східний кути матриці заповнюємо лініями через умову: $0 \le y_2 = y_1 + x_2 - 2 \le 4$ (табл. 7.10).

Етап 2. Лютий, березень, квітень:

$$f_2(y_1) = \min_{x_2 \in 0:4} \{C(x_2) + 1 \cdot (y_1 + x_2 - 2) + f_3 \cdot (y_1 + x_2 - 2)\}.$$

Таблиця 7.10

Управління запасами, етап 2

y_1	$C(x_2)+1\cdot(y_1+x_2-2)+f_3\cdot(y_1+x_2-2)$					Оптимальний розв'язок	
	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$f_2(y_1)$	x_2^*
<u>0</u>	–	–	9 + 0 + 15 = = 24	11 + 1 + 13 = = 25	13 + 2 + 9 = = 24	<u>24</u>	2, <u>4</u>
1	–	7 + 0 + 15 = = 22	9 + 1 + 13 = = 23	11 + 2 + 9 = = 22	13 + 3 + 8 = = 24	22	1, 3
2	0 + 0 + 15 = = 15	7 + 1 + 13 = = 21	9 + 2 + 9 = = 20	11 + 3 + 8 = = 22	13 + 4 + 2 = = 19	15	0
3	0 + 1 + 13 = = 14	7 + 2 + 9 = = 18	9 + 3 + 8 = = 20	11 + 4 + 2 = = 17	–	14	0
4	0 + 2 + 9 = = 11	7 + 3 + 8 = = 18	9 + 4 + 2 = = 15	–	–	11	0

Знаходження оптимального розв'язку здійснюємо на останньому етапі 1, який подано в табл. 7.11.

Етап 1. Січень, лютий, березень, квітень:

$$f_1(y_0) = \min_{x_1 \in 0:4} \{C(x_1) + 1 \cdot (y_0 + x_1 - 2) + f_2 \cdot (y_0 + x_1 - 2)\}.$$

Таблиця 7.11

Управління запасами, етап 1

y_0	$C(x_1)+1\cdot(y_0+x_1-2)+f_2\cdot(y_0+x_1-2)$					Оптимальний розв'язок	
	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$f_1(y_0)$	x_1^*
0	–	–	9 + 0 + 24 = = 33	11 + 1 + 22 = = 34	13 + 2 + 15 = = 30	30	4
1	–	7 + 0 + 24 = = 31	9 + 1 + 22 = = 32	11 + 2 + 15 = = 28	13 + 3 + 14 = = 30	28	3
<u>2</u>	0 + 0 + 24 = = 24	7 + 1 + 22 = = 30	9 + 2 + 15 = = 26	11 + 3 + 14 = = 28	13 + 4 + 11 = = 28	<u>24</u>	<u>0</u>
3	0 + 1 + 22 = = 23	7 + 2 + 15 = = 24	9 + 3 + 14 = = 26	11 + 4 + 11 = = 26	–	23	0
4	0 + 2 + 15 = = 17	7 + 3 + 14 = = 24	9 + 4 + 11 = = 24	–	–	17	0

$y_0 = 2$ з умов задачі, тому маємо, що $x_1^* = 0,$ $y_1 = = y_0 + x_1^* - 2 = 0$. У табл. 7.10 на етапі 2 бачимо два оптимальні розв'язки за $y_1 = 0$.

Нехай $x_2^* = 4.$ Із рівняння $y_2 = y_1 + x_2^* - 2$ визначаємо $y_2 = 0 + 4 - 2 = 2.$ Переходимо до таблиці 7.9 (етап 3) у рядок $y_2 = 2.$

Зрозуміло, що відповідна компонента розв'язку $x_3^* = 0$, і в таблиці етапу 4 потрібно дивитися на рядок $y_3 = y_2 + 0 - 2 = 0.$ Цей рядок $y_2 = 0$ дає останню компоненту розв'язку $x_4^* = 2.$

Отже, маємо такий план виробництва:

$$X^* = (0;\, 4;\, 0;\, 2), \quad f_1(2) = 24.$$

У лютому потрібно виготовити 4 од. продукції, у квітні – 2 од. При цьому за чотири місяці буде витрачено 24 млн. у. о. Цей план є оптимальним, але не єдиним.

7.2. Завдання для самостійної роботи

7.1. Визначте інший оптимальний план у задачі з *прикладу 7.1*.

7.2. Розв'яжіть задачу оптимального розподілу інвестицій обсягом 8 млн у. о. за запланованого мінімального способу модернізації (без "пустих" проєктів). Задачу розподілу подано в табл. 7.12.

Таблиця 7.12

Задача на розподіл 8 млн у. о.

Проєкт	Підприємство 1		Підприємство 2		Підприємство 3		Підприємство 4	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3	c_4	R_4
$x_j = 1$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	1	1	$\underline{1}$	$\underline{3}$
$x_j = 2$	3	4	4	6	2	3	3	5
$x_j = 3$	–	–	–	–	$\underline{4}$	$\underline{7}$	–	–

Потрібно вибрати такі проєкти для кожного підприємства, щоб воно отримало максимальний річний прибуток.

7.3. Визначте інший оптимальний план у задачі з *прикладу 7.2*.

7.4. Розв'яжіть задачу оптимального управління запасами за таких умов:

$$C_t(x_t; s_t) = C_t(x_t) + h_t \cdot s_t .$$

Уважаємо, що попит і функція затрат є однаковими для всіх відрізків планового періоду: $N = 4$, $d_t = 3$, $t = \overline{1,4}$, $C(0) = 0$, $C(1) = 15$, $C(2) = 17$, $C(3) = 19$, $C(4) = 21$, $C(5) = 23$, $h = 1$.

Обмеження виробничих потужностей і складських площ мають такий вигляд: $x_t \le 5$, $s_t \le 4$, $s_4 = 0$. Визначте оптимальний план виробництва.

Рекомендована література

1. Дослідження операцій та методи оптимізації [Електронний ресурс] : метод. рек. і завдання до виконання контрольних робіт для студентів усіх спец. першого (бакалаврського) рівня / уклад. Л. М. Малярець, О. В. Мінєнкова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. – 44 с. – Режим доступу : http://www.repository.hneu.edu.ua/jspui/handle/123456789/18483.

2. Збірник вправ з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" для студентів усіх галузей знань усіх форм навчання / уклад. Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Харків : ХНЕУ, 2009. – 88 с.

3. Малярець Л. М. Дослідження операцій та методи оптимізації. Задача лінійного програмування та методи її розв'язання [Електронний ресурс] / Л. М. Малярець, К. О. Ковальова, І. Л. Лебедєва. – Режим доступу : https://pns.hneu.edu.ua/course/view.php?id=7284.

4. Малярець Л. М. Дослідження операцій та методи оптимізації [Електронний ресурс] : мультимед. метод. рек. до самост. роботи з тем "Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей економічних оптимізаційних задач" та "Транспортна задача" / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2021. – Режим доступу : https://pns.hneu.edu.ua/course/view.php?id=6609.

5. Малярець Л. М. Дослідження операцій та методи оптимізації [Електронний ресурс] : мультимед. підруч. / Л. М. Малярець та ін. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2024. – Режим доступу : https://pns.hneu.edu.ua/course/view.php?id=7796.

6. Малярець Л. М. Дослідження операцій та методи оптимізації : практикум у 2-х ч. Ч. 1 / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2018. – 169 с.

7. Малярець Л. М. Дослідження операцій та методи оптимізації : практикум у 2-х ч. Ч. 2 / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 161 с. – Режим доступу : http://repository.hneu.edu.ua/handle/123456789/22002.

8. Малярець Л. М. Економіко-математичні методи та моделі [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Л. М. Малярець. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 412 с. – Режим доступу : http://repository.hneu.edu.ua/handle/123456789/29181.

9. Malyarets L. Operations Research and Optimization Methods [Electronic resource] : multimedia tests for Bachelor's (first) degree students of speciality 051 "Economics" (content module 1) / L. Malyarets, O. Martynova, Ie. Misiura. – 2021. – Access mode : https://pns.hneu.edu.ua/mod/url/view.php?id=471711.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методичні рекомендації до виконання практичних завдань для здобувачів вищої освіти всіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Малярець** Людмила Михайлівна
Мінєнкова Олена Вадимівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *Н. Г. Войчук*

Коректор *Н. Г. Войчук*

План 2026 р. Поз. № 131 ЕВ. Обсяг 85 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61165, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.