

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ АЕРОКОСМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
"ХАРКІВСЬКИЙ АВІАЦІЙНИЙ ІНСТИТУТ"**

**ISSN 2071-1077(print)  
ISSN 2663-2411(online)**

**ВІДКРИТІ ІНФОРМАЦІЙНІ  
ТА КОМП'ЮТЕРНІ ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ  
Збірник наукових праць**

Включено до Переліку наукових фахових видань України  
та міжнародну наукометричну базу даних **Index Copernicus**

**Випуск 109**

**Харків «ХАІ»**

**2026**

*Затверджено до друку вченою радою Національного аерокосмічного університету «Харківський авіаційний інститут»,  
протокол № 02 від 23.09.2026 р.*

**Редакційна колегія: О. Г. Гребеніков, В. В. Воронько, Є. А. Дружинін, М. В. Карускевич, В. І. Назін, В. Т. Сікульський, В. Ф. Сорокін, В. А. Тітов, І. Б. Туркін, О. Є. Федорович, Abdulhamit Kucukaslan, Éva Kocsisné Pfeifer**

**Відкриті інформаційні та комп'ютерні інтегровані технології: збірник наукових праць – Харків : Нац. аерокосм. ун-т "ХАІ", 2026. – Вип. 109– 276 с.**

Висвітлено питання інтегрованих технологій в проектуванні та конструюванні авіаційної техніки, у виробництві та інженерному аналізі промислових об'єктів, відкритих інформаційних технологій і забезпечення життєвого циклу промислових виробів.

Для фахівців авіаційної промисловості і наукових організацій, викладачів і студентів.

**Адреса редакційної колегії: 61070, Харків, вул. Вадима Манька, 17, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», тел. (057) 788-43-63.**

**Ідентифікатор медіа № R30-01719 (Рішення від 26.10.2023 р. № 1146).**

**E-mail: agrebenikov@ukr.net**

У збірнику публікуються статті українською та англійською мовами.

Збірник входить до затвердженого Переліку наукових фахових видань України (категорія Б) у межах кластеру «Механічна інженерія та машинобудування», в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (доктора філософії) за спеціальностями G8 (матеріалознавство), G9 (прикладна механіка), G10 (металургія), G11 (машинобудування), G12 (авіаційна та ракетно-космічна техніка) (Наказ Міністерства освіти і науки України від 11.06.2026 № 928). Збірник включено до міжнародної наукометричної бази **Index Copernicus**.

**ЗМІСТ*****Інтегровані технології в проектуванні та конструюванні***

|                                                                                                                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| О. М. Литвинов, О. В. Чуприна, В. О. Гребеніков, М. В. Чуприна.<br>Загальні принципи логістики мобільних контейнерних хабів інтеграції<br>авіації та БПЛА цивільного призначення . . . . . | 5  |
| Serhii Filipkovskyi, Evgen Polyakov.<br>Finite element model of an aircraft wing for studying whirl flutter . . . . .                                                                      | 16 |
| В. М. Орел, О. Ф. Саленко, П. П. Мельничук, Т.Ф. Козловська<br>Перспективи ремонту безпілотних літальних апаратів із застосуванням<br>технологій 3D друку . . . . .                        | 26 |
| В. В. Воронько, Д. Ю. Дмитренко. Аналітичний огляд алюмінієвих сплавів<br>та їх поєднань для потайних заклепкових з'єднань тонкостінних<br>металевих конструкцій . . . . .                 | 44 |

***Інтегровані технології у виробництві***

|                                                                                                                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| І. В. Бичков, К. В. Майорова, Г. С. Селезньова, Н. І. Бичков,<br>С. О. Кравченко. Формування моделі промислової чистоти як складової<br>частини виробу на етапах його життєвого циклу . . . . .         | 67  |
| М. Є. Тараненко, О. Г. Наріжний, О. В. Косенко. Фактори для просторово-<br>часового керування електрогидравлічним штампуванням великих<br>листових деталей . . . . .                                    | 83  |
| Ю. В. Широкий, О. Д. Семененко, Р. В. Воропай, Ю. О. Сисоєв.<br>Вплив технологічних параметрів адитивного виробництва на<br>мікроструктуру та експлуатаційні властивості металевих матеріалів . . . . . | 96  |
| С. Ю. Саєнко, К. П. Мсаллам. Розрахунок та моделювання системи<br>рідинного охолодження кабелю . . . . .                                                                                                | 122 |

***Інтегровані технології в інженерному аналізі***

|                                                                                                                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Serhii Kijchuk, Oleksandr Podorozhnyi, Danylo Shuvalov. Prototype of a<br>Hardware-Software Complex for Multi-Parameter Air Quality Monitoring . . . . .                                                                   | 129 |
| Ю. О. Семененко, О. І. Семененко, М. С. Романов. Дослідження нелінійної<br>динаміки протікання перехідних процесів в електричних мережах . . . . .                                                                         | 141 |
| Tetiana Denysova. Application of addition theorems to the solution of the<br>stress concentration problem in multi-connected domain with circular and<br>elliptical boundaries . . . . .                                   | 157 |
| О. М. Андрусенко, О. Г. Поляков. Теоретичне моделювання можливих<br>аварійних ситуацій при бурінні криволінійних свердловин . . . . .                                                                                      | 168 |
| А. В. Тітов, К. Б. Балущок, В. А. Тітов, М. А. Буртан. Комп'ютерне<br>моделювання ізотермічної штамповки моноколеса ГТД у в'язкопластичній<br>постановці методом скінченних елементів з використанням CAE DEFORM . . . . . | 177 |

## Application of addition theorems to the solution of the stress concentration problem in multi-connected domain with circular and elliptical boundaries

*Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics*

The article solves a plane problem of the theory of elasticity regarding the interaction of stress fields caused by the presence of combined defects in an elastic medium. An infinite isotropic elastic plane with a circular hole and a rectilinear semi-infinite cut, on the banks of which a normal uniformly distributed load is applied, is investigated. Such problems are of fundamental importance for fracture mechanics and strength theory, since the stress intensity factors (SIFs) at the crack tip directly determine the reliability and durability of critical structural elements under complex operating conditions. It is the local stress concentration around such defects as technological holes and service cuts that usually becomes the root cause of premature failure of critical engineering units, which necessitates obtaining accurate calculation models. The study is based on a rigorous analytical approach using the apparatus of addition theorems for basic solutions of the Lamé equations system in mixed coordinate systems. For an accurate mathematical description of the geometry of the multi-connected domain formed by the combination of a circular hole and a semi-infinite cut, a combination of polar and elliptical coordinate systems is applied. The solution is constructed in the form of a superposition of basic solutions of the Lamé equations given in different coordinate systems, which allows for the precise satisfaction of boundary conditions on the boundaries of both defects simultaneously. The use of expansion formulas for harmonic functions in different coordinate systems made it possible to link the boundary conditions on the defect contours and reduce the original boundary value problem to an infinite system of linear algebraic equations with respect to unknown coefficients. The paper provides a detailed analysis of the mathematical properties of the obtained system of equations in the context of the interaction between the hole and the cut; it is proved that the system has a completely continuous operator in the  $l_2$  space, and the conditions for its quasi-regularity and complete regularity are established depending on the geometric parameters of the problem, which guarantees rapid convergence of the solution and fully justifies the possibility of using the reduction method for its solution. The specified system is solved by the small parameter method, which allowed for obtaining analytical expressions for the SIF at the tip of the semi-infinite cut, taking into account the reinforcing effect of the nearby circular hole. The obtained analytical dependence provides the possibility of conducting deep qualitative and quantitative analysis of the influence of geometric factors over a wide range of their variation. The results presented in the article are an effective analytical tool for conducting refined assessments of the strength and fracture toughness of structural elements with interacting defects of various shapes. The proposed approach allows for avoiding the use of resource-intensive numerical methods and ensures high accuracy of results in stress concentration problems. The obtained calculation formulas can be directly used in engineering practice to improve the reliability of assessing the technical condition of structures under complex stress states, as well as in the design of parts with keyed or splined joints.

**Keywords:** stress intensity factor, theory of elasticity, circular hole, semi-infinite cut, addition theorems, basic solutions, Lamé equations; polar and elliptical coordinate systems.

### Introduction

The issues of strength and fracture mechanics of structural materials have remained the subject of close attention of researchers for many decades. In engineering practice, stress intensity factors (SIF) are key parameters characterizing the local stress distribution in the vicinity of a crack tip. The calculation of these factors

lies at the heart of the methods of linear elastic fracture mechanics used to determine the reliability and durability of critical structural elements such as gear teeth, splined and keyed joints [1].

Fundamental analytical methods for solving plane problems of the theory of elasticity for bodies with holes were established in the works of N. I. Muskhelishvili [2] and G. N. Savin [3]. The problems of cracks and cuts received profound development in the works of G. Irwin [4], H. Westergaard [5], and V. V. Panasyuk [1, 6]. Issues of the interaction of stress fields from several defects were considered in the studies of L. T. Berezhnytskyi [7], M. P. Savruk [8], and A. S. Kosmodamiansky [9].

A special place in solving such problems is occupied by the method proposed in the works of V. S. Protsenko [10]. His approach, based on the use of addition theorems for basic solutions of the Lamé equations, allowed for the efficient investigation of the stress-strain state of media with non-parallel boundaries. Further development of this method as applied to the connection between polar and elliptical coordinates is presented in works [11, 12]. To justify the mathematical correctness of the obtained infinite systems of equations, the methods set out in [13] were used.

In recent years, interest in this topic has not waned, which is due to the need to refine the service life characteristics of modern machinery. Significant results in the field of analyzing the interaction of holes and cracks were obtained by A. R. Shahani and S. A. Karami [14]. Modern aspects of determining the stress state of bodies with cavities and cracks are presented in the works of V. G. Piskunov and V. K. Sivets [15]. Also, an important contribution to the study of crack propagation near curvilinear boundaries in modern formulations was made by M. V. Delyavskyi [16].

Despite the existence of serious theoretical developments, the problem of the interaction between a circular hole and a semi-infinite cut requires obtaining accurate and compact analytical dependencies. Existing numerical methods, although allowing such problems to be solved, often do not provide the possibility of a qualitative analysis of the influence of geometric parameters over a wide range of their variation. In this regard, it remains relevant to construct rigorous analytical solutions based on the superposition method and the use of mixed coordinate systems.

The purpose of this study is to construct a mathematical model of the stress-strain state of an elastic plane with combined defects and to obtain calculation formulas for determining the stress intensity factor in the vicinity of the tip of a semi-infinite cut interacting with a circular hole. To achieve this goal, the apparatus of addition theorems for the basic solutions of the Lamé equations in polar and elliptical coordinates is used, which allows reducing the problem to the analysis of infinite systems of linear algebraic equations and obtaining the final dependencies by the small parameter method.

## 1. Problem Statement and Boundary Conditions

Consider an infinite isotropic elastic plane containing a circular hole and a straight semi-infinite cut. To describe the geometry of the domain and subsequent solution of the problem, we introduce polar  $(\rho, \phi)$  and elliptical  $(\xi, \theta)$  coordinates related to the Cartesian coordinates  $(x, y)$  by the following relations:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \\x &= a \operatorname{ch} \xi \cos \theta, \quad y = a \operatorname{sh} \xi \sin \theta \\(a > 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\infty < \xi < \infty).\end{aligned}$$

The equations  $\xi^2 = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$  define families of ellipses and hyperbolas having common foci at points  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$ . In the limiting cases ( $\xi = 0$ ,  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ ), the ellipses degenerate into the segment  $y = 0$ ,  $|x| \leq a$ , and the branches of the hyperbola degenerate into the rays  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, -a]$ .

Let the elastic plane have a circular hole  $\rho \leq \rho_0$  ( $\rho_0 < a$ ) and a cut  $\theta = 0$  ( $y = \pm 0$ ,  $x > a$ ). We shall assume that a normal uniformly distributed pressure  $\sigma_0$  ( $\sigma_0 > 0$ ) is applied to the cut faces in the section  $a < x < x_0 = a \operatorname{ch} \xi_0$ , while in the section  $x > x_0$ , the cut faces are free from external forces and do not contact each other. We also assume that the hole boundary  $\rho = \rho_0$  is not loaded by external forces.

The problem is reduced to solving the system of Lamé equations:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} + (1 - 2\nu) \Delta \bar{u} = 0, \quad (1.1)$$

where  $\bar{u}$  is the elastic displacement vector;

$\nu$  is Poisson's ratio,

under the boundary conditions:

$$\sigma_y|_{\theta=0} = \begin{cases} -\sigma_0, & 0 < \xi < \xi_0, \\ 0, & \xi > \xi_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\tau_{xy}|_{\theta=0} = 0, \quad (1.3)$$

$$\sigma_\rho|_{\rho=\rho_0} = \tau_{\phi}|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (1.4)$$

In addition to these conditions, the solution must satisfy the condition of zero stresses at infinity.

## 2. Method of the Problem Solution

We shall seek the solution to the formulated problem in the form:

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \int_0^\infty [H_1(\lambda) \bar{u}_1(\xi, \theta; \lambda) + H_2(\lambda) \bar{u}_2(\xi, \theta; \lambda)] d\lambda + \\ & + \sum_{n=0}^\infty B_n^{(1)} \bar{u}_{3,n}(\rho, \phi) + \sum_{n=2}^\infty B_n^{(2)} \bar{u}_{4,n}(\rho, \phi), \end{aligned}$$

where  $\bar{u}_1(\xi, \theta; \lambda)$ ,  $\bar{u}_2(\xi, \theta; \lambda)$  and  $\bar{u}_{3,n}(\rho, \phi)$ ,  $\bar{u}_{4,n}(\rho, \phi)$  are particular solutions of equation (1.1) in elliptical and polar coordinate systems, respectively [2].

From condition (1.3), we have:

$$H_1(\lambda) = -(1 - 2\nu) H_2(\lambda). \quad (1.5)$$

To satisfy condition (1.2), we use the expansion formulas for the basis solutions of the Lamé system in elliptical and polar coordinates [2]:

$$\bar{u}_{3,n}(\rho, \phi) = a^{-(n+1)} \int_0^\infty A_{n+1}(\lambda) \bar{u}_3(\xi, \theta; \lambda) d\lambda, \quad (1.6)$$

$$\bar{u}_{4,n}(\rho, \phi) = a^{-(n-1)} \int_0^\infty A_{n-1}(\lambda) [2 \bar{u}_4(\xi, \theta; \lambda) + (n-1+\chi) \bar{u}_3(\xi, \theta; \lambda)] d\lambda \quad (1.7)$$

$$(0 \leq \theta < \pi/2).$$

By calculating the stress  $\sigma_y$  on the cut  $\theta=0$  with the help of equalities (1.6) and (1.7), we obtain:

$$\sigma_y \Big|_{\theta=0} = \frac{2G}{a \operatorname{sh} \xi} \left\{ \int_0^\infty [H_1(\lambda) + 2(1-\nu) H_2(\lambda)] \lambda \operatorname{ch} \pi \lambda \sin \lambda \xi d\lambda + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^\infty [B_k^{(1)} + k B_{k+2}^{(2)}] a^{-(k+1)} \int_0^\infty A_{k+1}(\lambda) \lambda \sin \lambda \xi d\lambda \right\},$$

where  $G$  is the shear modulus.

From condition (1.2), we obtain:

$$H_2(\lambda) = -\frac{a \sigma_0}{\pi G \lambda \operatorname{ch} \pi \lambda} \int_0^{\xi_0} \operatorname{sh} \xi \sin \lambda \xi d\xi - \frac{1}{\operatorname{ch} \pi \lambda} \sum_{k=0}^\infty [B_k^{(1)} + k B_{k+2}^{(2)}] a^{-k-1} A_{k+1}(\lambda). \quad (1.8)$$

The stresses  $\sigma_\rho$  and  $\tau_{\rho\phi}$  on the circle  $\rho=\rho_0$  are given by:

$$\frac{\sigma_\rho}{2G} \Big|_{\rho=\rho_0} = -\sum_{n=0}^\infty (n+1) \rho_0^{-(n+2)} B_n^{(1)} \cos n\phi - \sum_{n=2}^\infty (n-1)(n+2) \rho_0^{-n} B_n^{(2)} \cos n\phi + \\ + \sum_{n=2}^\infty a^{-(n+1)} (n-1) \rho_0^{n-2} \cos n\phi \int_0^\infty D_{n-1}(\lambda) H_1(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2} \int_0^\infty H_2(\lambda) \left[ \sum_{n=0}^\infty D_{n+1}(\lambda) a^{-(n+1)} \times \right. \\ \left. \times (n+1)(n-2) \rho_0^n \cos n\phi - \sum_{n=2}^\infty D_{n-1}(\lambda) (n-1-\chi) a^{-(n-1)} (n-1) \rho_0^{n-2} \cos n\phi \right] d\lambda, \\ \frac{\tau_{\rho\phi}}{2G} \Big|_{\rho=\rho_0} = -\sum_{n=1}^\infty (n+1) \rho_0^{-(n+2)} B_n^{(1)} \sin n\phi - \sum_{n=2}^\infty (n-1) n \rho_0^{-n} B_n^{(2)} \sin n\phi - \\ - \sum_{n=2}^\infty a^{1-n} (n-1) \rho_0^{n-2} \sin n\phi \int_0^\infty D_{n-1}(\lambda) H_1(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2} \int_0^\infty H_2(\lambda) \left[ -\sum_{n=1}^\infty D_{n+1}(\lambda) a^{-(n+1)} \times \right. \\ \left. \times (n+1) n \rho_0^n \sin n\phi + \sum_{n=2}^\infty D_{n-1}(\lambda) (n-1-\chi) a^{1-n} (n-1) \rho_0^{n-2} \sin n\phi \right] d\lambda.$$

In the obtained equalities, the formulas for the transformation from elliptical to polar coordinates were used [2].

Satisfying conditions (1.4) and taking into account equality (1.5), we obtain:

$$-\rho_0^{-2} B_0^{(1)} = a^{-1} \int_0^\infty H_2(\lambda) D_1(\lambda) d\lambda, \quad -\rho_0^{-3} B_1^{(1)} = a^{-2} \rho_0 \int_0^\infty H_2(\lambda) D_2(\lambda) d\lambda, \\ -(n+1) \rho_0^{-(n+2)} B_n^{(1)} - (n-1)(n+2) \rho_0^{-n} B_n^{(2)} - \frac{1}{2} (n-2)(n-1) a^{1-n} \rho_0^{n-2} \times \\ \times \int_0^\infty D_{n-1}(\lambda) H_2(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2} (n-2)(n+1) a^{-(n+1)} \rho_0^n \int_0^\infty D_{n+1}(\lambda) H_2(\lambda) d\lambda = 0, \quad (1.9) \\ -(n+1) \rho_0^{-(n+2)} B_n^{(1)} - (n-1) n \rho_0^{-n} B_n^{(2)} + \frac{1}{2} (n-2)(n-1) a^{1-n} \rho_0^{n-2} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} D_{n-1}(\lambda) H_2(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2} n(n+1) a^{-(n+1)} \rho_0^n \int_0^{\infty} D_{n+1}(\lambda) H_2(\lambda) d\lambda = 0 \quad (n=2, 3, \dots).$$

System of equalities (1.9) is inconvenient for further analysis because it contains the quantities  $B_k^{(1)} + k B_{k+2}^{(2)}$ , therefore, we introduce new unknowns  $x_n$  using the formula:

$$B_n^{(1)} + n B_{n+2}^{(2)} = \frac{a \sigma_0}{\pi G} \rho_0^{n+1} x_n. \quad (1.10)$$

Then, equality (1.8) takes the form:

$$H_2(\lambda) = -\frac{a \sigma_0}{\pi G} \left[ \frac{1}{\lambda \operatorname{ch} \pi \lambda} \int_0^{\xi_0} \operatorname{sh} \xi \sin \lambda \xi d\xi + \frac{1}{\operatorname{ch} \pi \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} x_k \varepsilon^{k+1} A_{k+1}(\lambda) \right], \quad (1.11)$$

$$\varepsilon = \rho_0 / a.$$

From equalities (1.10), we find the quantities  $B_n^{(1)}$ ,  $B_n^{(2)}$  and evaluate:

$$B_n^{(1)} + n B_{n+2}^{(2)} = \frac{1}{2} \rho_0^{n+1} \varepsilon^{n+1} \int_0^{\infty} \left[ (n-1)(n-2) D_{n-1}(\lambda) - 2n^2 \varepsilon^2 D_{n+1}(\lambda) + \right. \\ \left. + n(n+3) \varepsilon^4 D_{n+3}(\lambda) \right] H_2(\lambda) d\lambda \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$B_0^{(1)} = -\rho_0 \varepsilon \int_0^{\infty} D_1(\lambda) H_2(\lambda) d\lambda.$$

Taking into account formulas (1.10) and (1.11), the last equalities yield an infinite system of linear algebraic equations for the unknowns  $x_n$ :

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} D_{nk} x_k + f_n \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (1.12)$$

$$D_{nk} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{n+k} \int_0^{\infty} \left[ (n-1)(n-2) D_{n-1}(\lambda) - 2n^2 \varepsilon^2 D_{n+1}(\lambda) + \right. \\ \left. + n(n+3) \varepsilon^4 D_{n+3}(\lambda) \right] \frac{1}{\operatorname{ch} \pi \lambda} A_{k+1}(\lambda) d\lambda,$$

$$f_n = -\frac{\varepsilon^{n-1}}{2} \int_0^{\infty} \left[ (n-1)(n-2) D_{n-1}(\lambda) - 2n^2 \varepsilon^2 D_{n+1}(\lambda) + n(n+3) \varepsilon^4 D_{n+3}(\lambda) \right] f(\lambda) d\lambda,$$

$$(n=1, 2, \dots),$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda \operatorname{ch} \pi \lambda} \int_0^{\xi_0} \operatorname{sh} \xi \sin \lambda \xi d\xi,$$

$$f_0 = \varepsilon \int_0^{\infty} D_1(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad D_{0k} = \varepsilon^{k+2} \int_0^{\xi_0} D_1(\lambda) \frac{A_{k+1}(\lambda)}{\operatorname{ch} \pi \lambda} d\lambda.$$

We introduce the following notation:

$$J_{m,k} = \int_0^\infty D_m(\lambda) A_{k+1}(\lambda) \frac{d\lambda}{\operatorname{ch} \pi \lambda}, \quad j_m = \int_0^\infty D_m(\lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

Then, the matrix elements and the constant terms of the infinite system can be written more compactly:

$$D_{nk} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{n+k} \left[ (n-1)(n-2) J_{n-1,k} - 2n^2 \varepsilon^2 J_{n+1,k} + (n+3)n \varepsilon^4 J_{n+3,k} \right],$$

$$D_{0k} = \varepsilon^{k+2} J_{1,k},$$

$$f_n = -\frac{1}{2} \varepsilon^{n-1} \left[ (n-1)(n-2) j_{n-1} - 2n^2 \varepsilon^2 j_{n+1} + (n+3)n \varepsilon^4 j_{n+3} \right], \quad f_0 = \varepsilon j_1.$$

For the quantities  $J_{m,k}$  and  $j_m$  we have the following estimates:

$$J_{m,k} < \frac{(m+1)(k+1)(k+2)}{4m^2 \sqrt{\pi}}, \quad |j_m| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{4} (\operatorname{ch} \xi_0 - 1) \quad (m \geq 1, k \geq 0). \quad (1.13)$$

The estimates (1.13) imply the convergence of the series:

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} |D_{nk}(\varepsilon)|^2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(\varepsilon)|^2 \quad \text{for } 0 < \varepsilon < 1.$$

This allows us to conclude that system (1.12) has a completely continuous operator in the  $l_2$  space. The solution to such a system also belongs to the  $l_2$  space and can be found by the reduction method [3]. It can be shown that system (1.12) is quasi-regular for  $0 < \varepsilon < 1$  and totally regular for  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$  for some  $\varepsilon_0 \in [0, 1]$ . The restriction  $0 < \varepsilon < 1$  is naturally related to the problem statement and implies that the circle  $\rho = \rho_0$  and the semi-infinite cut  $\theta = 0$  do not intersect or touch each other.

### 3. Infinite System Solution and SIF Formula

We will seek the solution of system (1.12) using the small parameter method. To this end, we expand the unknown quantities  $x_n$  and the matrix elements into power series in terms of the parameter  $\varepsilon$ :

$$x_0 = \omega_0^{(1)} \varepsilon + \omega_0^{(2)} \varepsilon^3 + \omega_0^{(3)} \varepsilon^5 + \dots, \quad x_1 = \omega_1^{(1)} \varepsilon^2 + \omega_1^{(2)} \varepsilon^4 + \dots,$$

$$x_2 = \omega_2^{(1)} \varepsilon^3 + \dots, \quad x_3 = \omega_3^{(1)} \varepsilon^4 + \dots,$$

$$D_{00} = \varepsilon^2 J_{1,0}, \quad D_{01} = \varepsilon^3 J_{1,1}, \quad D_{10} = \varepsilon^3 J_{2,0}$$

$$f_0 = \varepsilon j_1, \quad f_1 = \varepsilon^2 j_2 - 2\varepsilon^4 j_4, \quad f_2 = 4\varepsilon^3 j_3 + \dots, \quad f_3 = -\varepsilon^2 j_2 + \dots,$$

$$j_1 = \sqrt{2} \operatorname{sh}(\xi_0/2) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{sh}(\xi_0/2)), \quad j_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\operatorname{sh}^3(\xi_0/2)}{\operatorname{ch} \xi_0},$$

$$j_3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \xi_0} \left( \operatorname{sh}(\xi_0/2) \operatorname{ch}(2\xi_0) - \frac{1}{4} \operatorname{ch}(\xi_0/2) \operatorname{sh}(2\xi_0) \right),$$

$$j_4 = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{\operatorname{sh}^3(\xi_0/2)}{\operatorname{ch} \xi_0} + \frac{\sqrt{2}}{96} \frac{\operatorname{sh}(\xi_0/2)}{\operatorname{ch}^3 \xi_0} \left( \frac{3}{2} \operatorname{ch}^3 \xi_0 + \frac{9}{2} \operatorname{ch}^2 \xi_0 - 2 \operatorname{ch} \xi_0 - 4 \right),$$

$$J_{1,0} = 1/8, \quad J_{1,1} = 1/8, \quad J_{2,0} = 1/16.$$

Equating the coefficients of the same powers of  $\varepsilon$ , we find:

$$\begin{aligned} \omega_0^{(1)} &= j_1, \quad \omega_0^{(2)} = J_{1,0} \cdot j_1, \quad \omega_0^{(3)} = J_{1,0}^2 \cdot j_1 + J_{1,1} \cdot j_2, \\ \omega_1^{(1)} &= j_2, \quad \omega_1^{(2)} = J_{2,0} \cdot j_1 - 2j_4, \quad \omega_2^{(1)} = 4j_3, \quad \omega_3^{(1)} = -j_2. \end{aligned}$$

Solving the obtained infinite system (1.12) by the reduction method allows for determining the unknown coefficients  $x_n$  with the required accuracy. The relationship between the found coefficients and the local characteristics of the stress field makes it possible to obtain a final expression for assessing the strength at the cut tip. The desired formula for the stress intensity factor  $\sigma_y$  takes the form:

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ \sqrt{2(a-x)} \sigma_y \right] \Big|_{\xi=0}, \\ K_I &= \frac{4\sigma_0 \sqrt{a}}{\pi} \operatorname{sh}(\xi_0/2) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{sh}(\xi_0/2))}{\sqrt{2} \operatorname{sh}(\xi_0/2)} \right] \varepsilon^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{4} - \frac{3}{16 \operatorname{ch} \xi_0} - \frac{1}{16} \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{sh}(\xi_0/2))}{\sqrt{2} \operatorname{sh}(\xi_0/2)} \right] \varepsilon^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{128} \left[ 19 + \frac{16}{\operatorname{ch} \xi_0} - \frac{36}{\operatorname{ch}^2 \xi_0} + \frac{8}{\operatorname{ch}^3 \xi_0} - 7 \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{sh}(\xi_0/2))}{\sqrt{2} \operatorname{sh}(\xi_0/2)} \right] \varepsilon^6 \right\} + O(\varepsilon^8). \end{aligned} \quad (1.14)$$

It should be noted that a straightforward analysis shows that the coefficients are positive for  $\varepsilon^{2k}$  ( $k=1, 2, 3$ ).

Suppose that  $\xi = \xi_0$  corresponds to  $x = x_0$ , then ( $\theta = 0$ ):

$$x_0 = a \operatorname{ch} \xi_0, \quad \operatorname{ch} \xi_0 = \frac{x_0}{a}, \quad \operatorname{sh}^2 \frac{\xi_0}{2} = \frac{\operatorname{ch} \xi_0 - 1}{2} = \frac{x_0 - a}{2a}, \quad \operatorname{sh} \frac{\xi_0}{2} = \sqrt{\frac{x_0 - a}{2a}}.$$

Formula (1.14) is rewritten as follows:

$$\begin{aligned} K_I &= \left\{ 1 + \frac{1}{2} [1 - n(x_0)] \varepsilon^2 + \left[ \frac{1}{4} - \frac{3}{16} \frac{a}{x_0} - \frac{1}{16} n(x_0) \right] \varepsilon^4 + \frac{1}{128} \left[ 19 + 16 \frac{a}{x_0} - 36 \left( \frac{a}{x_0} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 8 \left( \frac{a}{x_0} \right)^3 - 7 n(x_0) \right] \varepsilon^6 \right\} \frac{2\sqrt{2} \sigma_0}{\pi} \sqrt{x_0 - a} + O(\varepsilon^8), \\ n(x_0) &= \sqrt{a} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x_0}{a}} - 1}{\sqrt{x_0 - a}}. \end{aligned}$$

## Conclusions

1. A mathematical model of the stress-strain state of an isotropic elastic plane has been constructed, taking into account the interaction of the stress fields of a circular hole and a semi-infinite cut.

2. The application of the apparatus of addition theorems for basic solutions of the Lamé equations in a mixed system of polar and elliptic coordinates allowed for the

reduction of the original boundary value problem to an infinite system of linear algebraic equations with respect to unknown coefficients.

3. It has been theoretically substantiated that the obtained infinite system of equations has a completely continuous operator in the  $l_2$  space, is quasi-regular (or completely regular under certain parameter ratios), and can be effectively solved by the reduction method.

4. An analytical dependence for the stress intensity factor in the vicinity of the tip of a semi-infinite cut has been obtained. The use of the small parameter method allowed for the derivation of calculation formulas that take into account the influence of the problem geometry on the local stress distribution over a wide range of parameter variations.

5. The geometric constraints of the model have been established, ensuring the stability and accuracy of the solution under the condition of no intersection or contact between the boundaries of the hole and the cut, which corresponds to the physical meaning of the problem.

6. The practical significance of the obtained results lies in the possibility of using the derived dependencies to perform refined engineering calculations of the durability and reliability of structural elements containing similar defects without the need to employ resource-intensive numerical methods.

### Список літератури

1. Саврук, М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами : в 4 т. / М. П. Саврук. – Киев : Наук. думка, 1988. – Т. 2. – 620 с.
2. Muskhelishvili, N. I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity / N. I. Muskhelishvili. – Groningen : P. Noordhoff Ltd, 1953. – 704 p.
3. Савин, Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – Киев : Наук. думка, 1968. – 888 с.
4. Irwin, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate / G. R. Irwin // Journal of Applied Mechanics. – 1957. – Vol. 24. – P. 361–364.
5. Westergaard, H. M. Bearing pressures and cracks / H. M. Westergaard // Journal of Applied Mechanics. – 1939. – Vol. 6. – P. 49–53.
6. Панасюк, В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наук. думка, 1991. – 416 с.
7. Бережницкий, Л. Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л. Т. Бережницкий, М. В. Делявский, В. В. Панасюк. – Киев : Наук. думка, 1979. – 400 с.
8. Саврук, М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев : Наук. думка, 1981. – 324 с.
9. Космодамианский, А. С. Напряженное состояние многосвязных сред с криволинейными границами / А. С. Космодамианский. – Донецк : Вища шк., 1978. – 152 с.
10. Проценко, В. С. Теоремы сложения для решений уравнений Ламе в полярных и эллиптических координатах / В. С. Проценко // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 10. – С. 43–46.
11. Проценко, В. С. Некоторые соотношения между гармоническими функциями в цилиндрических и сфероидальных координатах / В. С. Проценко, А. И. Соловьев // Прикладная механика. – 1982. – Т. 18, № 5. – С. 107–110.

12. Бузько, Я. П. О некоторых формулах разложения гармонических функций в эллиптических и полярных координатах и их применении к решению краевых задач теории упругости / Я. П. Бузько, Т. В. Денисова, А. И. Соловьев. – Киев, 1995. – 10 с. – Деп. в ГНТБ Украины, № 681-Ук95.

13. Kantorovich, L. V. Approximate Methods of Higher Analysis / L. V. Kantorovich, V. I. Krylov. – Groningen : P. Noordhoff Ltd, 1958. – 681 p.

14. Shahani, A. R. Stress intensity factors for a crack originating from a hole in a finite thickness plate / A. R. Shahani, S. A. Karami // Engineering Fracture Mechanics. – 2020. – Vol. 226. – 106826.

15. Piskunov, V. G. Determination of Stress-Strain State of Multilayered Beams with Cuts and Inclusions / V. G. Piskunov, V. K. Sivets // International Applied Mechanics. – 2021. – Vol. 57, No. 2. – P. 192–203.

16. Делявский, М. В. Развитие трещин вблизи круговых включений при двухосном растяжении пластины / М. В. Делявский // Физ.-хим. механика материалов. – 2022. – Т. 58, № 1. – С. 83–90.

### References

1. Savruk, M. P. Koeffitsienty intensivnosti napryazhenii v telakh s treshchinami : v 4 t. / M. P. Savruk. – Kiev : Nauk. dumka, 1988. – Т. 2. – 620 s.

2. Muskhelishvili, N. I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity / N. I. Muskhelishvili. – Groningen : P. Noordhoff Ltd, 1953. – 704 p.

3. Savin, G. N. Raspredelenie napryazhenii okolo otverstii / G. N. Savin. – Kiev : Nauk. dumka, 1968. – 888 s.

4. Irwin, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate / G. R. Irwin // Journal of Applied Mechanics. – 1957. – Vol. 24. – P. 361–364.

5. Westergaard, H. M. Bearing pressures and cracks / H. M. Westergaard // Journal of Applied Mechanics. – 1939. – Vol. 6. – P. 49–53.

6. Panasyuk, V. V. Mekhanika kvazikhрупкого razrusheniya materialov / V. V. Panasyuk. – Kiev : Nauk. dumka, 1991. – 416 s.

7. Berezhnitskyĭ, L. T. Izgib tonkikh plastin s defektami tipa treshchin / L. T. Berezhnitskyĭ, M. V. Delyavskyĭ, V. V. Panasyuk. – Kiev : Nauk. dumka, 1979. – 400 s.

8. Savruk, M. P. Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami / M. P. Savruk. – Kiev : Nauk. dumka, 1981. – 324 s.

9. Kosmodamianskyĭ, A. S. Napryazhennoe sostoyanie mnogosvyaznykh sred s krivolineĭnymi granitsami / A. S. Kosmodamianskyĭ. – Donetsk : Vishcha shk., 1978. – 152 s.

10. Protsenko, V. S. Teoremy slozheniya dlya resheniĭ uravneniĭ Lamé v polyarnykh i ellipticheskikh koordinatakh / V. S. Protsenko // Dokl. AN USSR. Ser. A. – 1983. – № 10. – S. 43–46.

11. Protsenko, V. S. Nekotorye sootnosheniya mezhdru garmonicheskimi funktsiyami v tsilindricheskikh i sferoidal'nykh koordinatakh / V. S. Protsenko, A. I. Solov'ev // Prikladnaya mekhanika. – 1982. – Т. 18, № 5. – S. 107–110.

12. Buz'ko, Ya. P. O nekotorykh formulakh razlozheniya garmonicheskikh funktsiĭ v ellipticheskikh i polyarnykh koordinatakh i ikh primenenii k resheniyu kraevykh zadach teorii uprugosti / Ya. P. Buz'ko, T. V. Denysova, A. I. Solov'ev. – Kiev, 1995. – 10 s. – Dep. v GNTB Ukrainy, № 681-Uk95.

13. Kantorovich, L. V. Approximate Methods of Higher Analysis / L. V. Kantorovich, V. I. Krylov. – Groningen : P. Noordhoff Ltd, 1958. – 681 p.

14. Shahani, A. R. Stress intensity factors for a crack originating from a hole in a finite thickness plate / A. R. Shahani, S. A. Karami // Engineering Fracture Mechanics. – 2020. – Vol. 226. – 106826.

15. Piskunov, V. G. Determination of Stress-Strain State of Multilayered Beams with Cuts and Inclusions / V. G. Piskunov, V. K. Sivets // International Applied Mechanics. – 2021. – Vol. 57, No. 2. – P. 192–203.

16. Delyavskyi, M. V. Razvitie treshchin vblizi krugovykh vklyuchenii pri dvukhosnom rastyazhenii plastiny / M. V. Delyavskyi // Fiz.-khim. mekhanika materialov. – 2022. – T. 58, № 1. – S. 83–90.

Поступила в редакцію 16.02.2026, рассмотрена на редколлегии 17.03.2026  
дата публікації 2.10.2026

### **Застосування теорем додавання до розв'язання задачі про концентрацію напружень у багатозв'язній області з круговими та еліптичними межами**

У статті розв'язано плоску задачу теорії пружності про взаємодію полів напружень, зумовлених наявністю поєднаних дефектів у пружному середовищі. Досліджується нескінченна ізотропна пружна площа з круговим отвором і прямолінійним напівнескінченим розрізом, на берегах якого прикладене нормальне рівномірно розподілене навантаження. Подібні задачі мають фундаментальне значення для механіки руйнування та теорії міцності, оскільки коефіцієнти інтенсивності напружень у вершині тріщини безпосередньо визначають надійність і довговічність відповідальних елементів конструкцій за складних умов експлуатації. Саме локальна концентрація напружень навколо таких дефектів, як технологічні отвори та експлуатаційні розрізи, зазвичай стає першопричиною передчасного виходу з ладу критичних вузлів техніки, що обумовлює необхідність отримання точних розрахункових моделей. Дослідження ґрунтується на строгому аналітичному підході з використанням апарату теорем додавання для базисних розв'язків системи рівнянь Ламе в мішаних системах координат. Для точного математичного опису геометрії багатозв'язної області, утвореної поєднанням кругового отвору та напівнескінченного розрізу, застосовано комбінацію полярної та еліптичної систем координат. Розв'язок побудовано у вигляді суперпозиції базисних розв'язків рівнянь Ламе, заданих у різних координатних системах, що дозволяє точно задовольнити граничні умови на межах обох дефектів одночасно. Використання формул розкладу гармонічних функцій у різних системах координат дало змогу пов'язати граничні умови на контурах дефектів та звести вихідну крайову задачу до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. У роботі проведено детальний аналіз математичних властивостей отриманої системи рівнянь у контексті взаємодії отвору та розрізу. Доведено, що вона має цілком неперервний оператор у просторі  $l_2$ , встановлено умови її квазірегулярності та повної регулярності залежно від геометричних параметрів задачі, що гарантує швидку збіжність розв'язку та повністю обґрунтовує можливість застосування для її розв'язання методу редукції. Зазначену систему розв'язано методом малого параметра, що дозволило одержати аналітичні вирази для КІН у вершині напівнескінченного розрізу з урахуванням підсилюючого впливу розташованого

поблизу кругового отвору. Отримана аналітична залежність забезпечує можливість проведення глибокого якісного та кількісного аналізу впливу геометричних факторів у широкому діапазоні їхньої зміни. Представлені в статті результати є ефективним аналітичним інструментом для проведення уточнених оцінок міцності та тріщиностійкості елементів конструкцій із взаємодіючими дефектами різної форми. Запропонований підхід дозволяє уникнути застосування ресурсомістких чисельних методів і забезпечує високу точність результатів у задачах про концентрацію напружень. Отримані розрахункові формули можуть бути безпосередньо використані в інженерній практиці для підвищення надійності оцінювання технічного стану конструкцій за складного напруженого стану, а також при проектуванні деталей зі шпонковими або зубчастими з'єднаннями.

**Ключові слова:** коефіцієнт інтенсивності напружень, теорія пружності, круговий отвір, напівнескінченний розріз, теореми додавання, базисні розв'язки, рівняння Ламе; полярна та еліптична системи координат.

#### **Відомості про автора:**

**Денисова Тетяна Володимирівна** – кандидат технічних наук, доцент, кафедри економіко-математичного моделювання, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків, Україна. e-mail: [tetiana.denysova@hneu.net](mailto:tetiana.denysova@hneu.net)). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7254-0901>.

#### **About the author:**

**Tetiana DENYSOVA** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Economic and Mathematical Modeling, Kharkov National Economic University named after Symon Kuznets, Kharkov, Ukraine. e-mail: [tetiana.denysova@hneu.net](mailto:tetiana.denysova@hneu.net)). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7254-0901>.

Наукове видання

**ВІДКРИТІ ІНФОРМАЦІЙНІ  
ТА КОМП'ЮТЕРНІ ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ**

**Випуск 109**

**Редактор: Н. М. Сікульська**

**Комп'ютерна верстка: Т. А. Гамануха**

**Підписано до друку 2.10.2026. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Папір офсетний.  
Ум. друк. арк. 15,3. Облік. вид. арк. 34,5. Наклад 34 прим. Замовлення 219-26**

---

**Видавець**

Національний аерокосмічний університет  
«Харківський авіаційний інститут»  
61070, Харків-70, вул. Вадима Манька, 17  
<http://www.khai.edu>

---

**Виготовлювач**

Національний аерокосмічний університет  
«Харківський авіаційний інститут»  
61070, Харків-70, вул. Вадима Манька, 17, [izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виробників та розповсюджувачів  
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001

---

Офіційний сайт: <http://nti.khai.edu/ojs/index.php/oikit>

**doi:10.32620/oikit.2026.109**