



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Підручник

За загальною редакцією
д-ра екон. наук, професора В. С. Пономаренка



Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2025

УДК 517(075.034)

B95

Рецензенти: професор кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», лауреат національної премії ім. Б. Патона, д-р фіз.-мат. наук *О. А. Галуза*; завідувачка кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики Навчально-наукового інституту «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, д-р фіз.-мат. наук, професор *О. П. Нечуйвітер*; професор кафедри фізики та математики Державного біотехнологічного університету МОН України, д-р техн. наук *Н. В. Сметанкіна*.

Рекомендовано до видання рішенням ученої ради Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця.

Протокол № 2 від 21.01.2025 р.

Авторський колектив: д-р екон. наук, професор В. С. Пономаренко (підрозд. 32 – 35, загальна редакція); д-р екон. наук, професор Л. М. Малярець (підрозд. 1 – 5); канд. техн. наук, доцент Т. В. Денисова (підрозд. 22 – 26); канд. фіз.-мат. наук, доцент Е. Ю. Железнякова (підрозд. 11 – 15); канд. фіз.-мат. наук, доцент І. Л. Лебедєва (підрозд. 19 – 21, практ. завдання за розд. 5 – 8); канд. екон. наук, доцент О. В. Міненкова (підрозд. 6 – 10); канд. техн. наук, доцент Є. Ю. Місюра (підрозд. 27 – 31); канд. екон. наук, доцент Л. О. Норік (підрозд. 16 – 18, практ. завдання за розд. 1 – 4).

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Вища математика [Електронний ресурс] : підручник / В. С. Пономаренко, Л. М. Малярець, Т. В. Денисова та ін. ; за заг. ред. В. С. Пономаренка. – 2-ге вид., випр. та допов. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2025. – 987 с. ISBN 978-966-676-892-9

Подано теоретичний і практичний матеріал за розділами: «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра й аналітична геометрія», «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної», «Функції багатьох змінних», «Інтегральне числення функції однієї та кількох змінних», «Диференціальні рівняння», «Ряди». За кожним підрозділом наведено запитання для самоперевірки, тестові завдання, а за кожним розділом – приклади розв'язання задач економічного змісту і завдання для самостійного розв'язання з відповідями.

Рекомендовано для здобувачів вищої освіти в таких галузях знань: «Соціальні та поведінкові науки», «Управління та адміністрування», «Інформаційні технології», «Виробництво та технології», «Соціальна робота», «Сфера обслуговування», «Публічне управління та адміністрування», «Міжнародні відносини», а також викладачів для забезпечення процесу неперервної математичної підготовки та організації самостійної роботи.

УДК 517(075.034)

© Пономаренко В. С., Малярець Л. М.,
Денисова Т. В. та ін., 2025

© Заг. ред. В. С. Пономаренка, 2025

© Харківський національний економічний
університет імені Семена Кузнеця, 2025

ISBN 978-966-676-892-9

Зміст

Вступ	15
Показчик позначень	18
Розділ 1. Лінійна алгебра	23
1. Числові матриці та дії над ними	24
1.1. Задача про використання сировини. Математична модель	24
1.2. Означення матриць і деякі їхні різновиди	26
1.3. Дії над матрицями	30
1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення	33
Ключові терміни	36
Запитання для самоперевірки	36
Тестові завдання до підрозділу 1	37
2. Визначники, методи обчислювання	39
2.1. Означення визначника. Визначники 2-го та 3-го порядків	39
2.2. Властивості визначників	42
2.3. Обернена матриця	49
2.4. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера	52
2.5. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом оберненої матриці	54
Ключові терміни	56
Запитання для самоперевірки	56
Тестові завдання до підрозділу 2	57
3. Системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими: дослідження на сумісність та розв'язання	59
3.1. Ранг матриці: означення, способи визначення	59
3.2. Дослідження систем m лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими. Теорема Кронекера – Капеллі	63
3.3. Загальний і частинні розв'язки системи. Базисні й опорні розв'язки	67
3.4. Дослідження та розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методами Гаусса та Жордана – Гаусса	68
3.5. Лінійна балансова модель (модель Леонтьєва)	78

Ключові терміни	82
Запитання для самоперевірки	83
Тестові завдання до підрозділу 3	83
4. Лінійні (векторні) n-вимірні простори	86
4.1. Лінійні n -вимірні простори: основні означення	86
4.2. Лінійна залежність і незалежність системи векторів	91
4.3. Базис n -вимірного простору. Розкладання вектора за базисом	96
Ключові терміни	108
Запитання для самоперевірки	108
Тестові завдання до підрозділу 4	109
5. Лінійні перетворення. Власні вектори і власні числа лінійного оператора	112
5.1. Лінійні перетворення (лінійні оператори). Матриця лінійного перетворення	112
5.2. Власні вектори та власні числа лінійного оператора: означення, властивості	118
5.3. Визначення власних чисел і власних векторів	123
5.4. Базис простору із власних векторів лінійного оператора ...	127
5.5. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)	131
Ключові терміни	134
Запитання для самоперевірки	134
Тестові завдання до підрозділу 5	135
Практичні завдання за розділом 1	137
Розв'язання задач економічного змісту	137
Завдання для самостійного розв'язання	149
Відповіді	155
Розділ 2. Векторна алгебра й аналітична геометрія	157
6. Елементи векторної алгебри	158
6.1. Вектори: основні означення, лінійні операції	158
6.2. Прямокутна система координат у просторі. Координатна й алгебраїчна форми задання векторів	162
6.3. Нелінійні операції над векторами	166
6.4. Найпростіші задачі аналітичної геометрії	174
Ключові терміни	178

Запитання для самоперевірки	178
Тестові завдання до підрозділу 6	179
7. Пряма на площині	182
7.1. Поняття про рівняння лінії на площині.	
Основні задачі аналітичної геометрії	182
7.2. Різновиди рівнянь прямої на площині	184
7.3. Основні задачі про пряму лінію на площині	191
7.4. Використання рівняння прямої під час розв'язання економічних задач	199
Ключові терміни	202
Запитання для самоперевірки	202
Тестові завдання до підрозділу 7	204
8. Криві 2-го порядку	207
8.1. Загальне рівняння кривої 2-го порядку: типи кривих	207
8.2. Коло та еліпс: означення, канонічні рівняння	208
8.3. Гіпербола: означення, канонічне рівняння, асимптоти	212
8.4. Парабола: означення, канонічне рівняння	216
8.5. Зведення загального рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду	218
8.6. Квадратичні форми. Застосування до перетворення рівнянь кривої 2-го порядку	224
Ключові терміни	229
Запитання для самоперевірки	229
Тестові завдання до підрозділу 8	230
9. Площина в просторі	232
9.1. Поняття про рівняння поверхні	232
9.2. Різновиди рівнянь площини в просторі	233
9.3. Основні задачі про площину	239
Ключові терміни	244
Запитання для самоперевірки	245
Тестові завдання до підрозділу 9	246
10. Пряма в просторі . Взаємне розташування прямої та площини. Поверхні 2-го порядку	248
10.1. Різновиди рівнянь прямої	248
10.2. Основні задачі про пряму в просторі	252

10.3. Пряма і площина: аналіз взаємного розташування	260
10.4. Поняття про поверхні 2-го порядку	263
Ключові терміни	270
Запитання для самоперевірки	271
Тестові завдання до підрозділу 10	272
Практичні завдання за розділом 2	275
Розв'язання задач економічного змісту	275
Завдання для самостійного розв'язання	279
Відповіді	283
Розділ 3. Вступ до математичного аналізу	285
11. Функціональна залежність. Класифікація функцій.	
Застосування функцій в економіці	285
11.1. Множини. Абсолютна величина дійсного числа	286
11.2. Функції: основні означення, способи задання	294
11.3. Класифікація функцій за їхніми властивостями	298
11.4. Класифікація функцій за діями над аргументом	303
11.5. Застосування елементарних функцій в економіці	305
Ключові терміни	308
Запитання для самоперевірки	308
Тестові завдання до підрозділу 11	309
12. Границя функції натурального аргументу	311
12.1. Числові послідовності: основні означення та арифметичні операції	311
12.2. Границя числової послідовності	313
12.3. Нескінченно малі послідовності: означення, властивості	316
12.4. Нескінченно великі послідовності: означення, властивості, зв'язок із нескінченно малими	319
12.5. Властивості границь числових послідовностей	321
Ключові терміни	326
Запитання для самоперевірки	326
Тестові завдання до підрозділу 12	327
13. Границя функції неперервного аргументу	329
13.1. Означення границі функції. Критерій існування	329
13.2. Поширення теорії границь послідовностей на функції	335

13.3. Різні типи невизначеностей та їхнє розкриття.	
Перша та друга особливі границі	336
13.4. Порівняння нескінченно малих. Застосування	
еквівалентних нескінченно малих до обчислення границь ...	348
Ключові терміни	350
Запитання для самоперевірки	351
Тестові завдання до підрозділу 13	351
14. Неперервність і розриви функцій	354
14.1. Означення неперервності функції в точці.	
Неперервність основних елементарних функцій	354
14.2. Розриви функцій та їхня класифікація	360
14.3. Неперервність функції на проміжку.	
Основні теореми про неперервні функції	365
Ключові терміни	368
Запитання для самоперевірки	368
Тестові завдання до підрозділу 14	369
Практичні завдання за розділом 3	371
Розв'язання задач економічного змісту	371
Завдання для самостійного розв'язання	375
Відповіді	379
Розділ 4. Диференціальне числення функції однієї змінної	381
15. Похідна та її властивості, диференціювання функцій	381
15.1. Означення похідної, загальний порядок її визначення,	
зв'язок похідної з неперервністю функції	382
15.2. Інтерпретація похідної в різних галузях знань	385
15.3. Таблиця похідних та правила диференціювання	387
15.4. Диференціювання складених функцій і функцій	
різних форм задання	390
15.5. Диференціал функції та його властивості	396
15.6. Застосування диференціала для наближених обчислень ...	399
15.7. Похідні та диференціали вищих порядків	401
15.8. Формула Тейлора	405
Ключові терміни	409
Запитання для самоперевірки	409
Тестові завдання до підрозділу 15	411

16. Застосування похідних для дослідження функцій	413
16.1. Теореми диференціального числення	413
16.2. Обчислення границь функцій за правилом Лопітала	417
16.3. Дослідження функцій на монотонність	420
16.4. Екстремум функції. Необхідна та достатні умови екстремуму	423
16.5. Опуклість, угнутість та точки перегину кривої	430
16.6. Асимптоти кривої. Загальна схема дослідження функції та побудова графіка	433
Ключові терміни	438
Запитання для самоперевірки	439
Тестові завдання до підрозділу 16	439
17. Застосування похідних в економічних дослідженнях	442
17.1. Задачі, у яких використовують поняття похідної	442
17.2. Граничний аналіз	443
17.3. Еластичність функції	445
17.4. Застосування похідної в економічній теорії	449
Ключові терміни	452
Запитання для самоперевірки	452
Тестові завдання до підрозділу 17	453
Практичні завдання за розділом 4	456
Розв'язання задач економічного змісту	456
Завдання для самостійного розв'язання	464
Відповіді	473
Розділ 5. Диференціальне числення функції багатьох змінних	479
18. Функція багатьох змінних	480
18.1. Основні поняття. Область визначення функції	480
18.2. Границя та неперервність функції двох змінних	485
18.3. Прирости функції двох змінних	488
18.4. Частинні похідні функції двох змінних	489
18.5. Частинні диференціали. Повний диференціал та його використання в наближених обчисленнях	493
Ключові терміни	500
Запитання для самоперевірки	500
Тестові завдання до підрозділу 18	501

19. Похідна за напрямом. Градієнт функції.	
Локальний і умовний екстремуми	504
19.1. Похідна за напрямком	504
19.2. Градієнт функції та лінії рівня	506
19.3. Локальний екстремум функції двох змінних	509
19.4. Умовний екстремум	512
19.5. Найменше та найбільше значення функції в замкненій області	520
Ключові терміни	522
Запитання для самоперевірки	522
Тестові завдання до підрозділу 19	522
20. Застосування функцій кількох змінних у дослідженнях економічних процесів	526
20.1. Поняття про емпіричні формули й метод найменших квадратів	526
20.2. Загальні поняття про задачі математичного програмування	535
20.3. Еластичність функції кількох змінних	541
Ключові терміни	546
Запитання для самоперевірки	546
Тестові завдання до підрозділу 20	546
Практичні завдання за розділом 5	549
Розв'язання задач економічного змісту	549
Завдання для самостійного розв'язання	566
Відповіді	571
Розділ 6. Інтегральне числення функцій однієї та кількох змінних	573
21. Первісна функція. Невизначений інтеграл.	
Методи інтегрування	573
21.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла	573
21.2. Невизначений інтеграл: означення, властивості, таблиця основних інтегралів	575
21.3. Метод безпосереднього інтегрування	580
21.4. Метод інтегрування заміною змінної	582
21.5. Метод інтегрування частинами	584

Ключові терміни	588
Запитання для самоперевірки	589
Тестові завдання до підрозділу 21	590
22. Інтегрування деяких класів елементарних функцій:	
раціональних, ірраціональних, тригонометричних	593
22.1. Інтегрування елементарних раціональних алгебраїчних дробів (РАД)	593
22.2. Інтегрування раціональних алгебраїчних дробів	596
22.3. Інтегрування деяких видів ірраціональних функцій	600
22.4. Інтегрування функцій, що раціонально залежать від тригонометричних функцій	603
Ключові терміни	613
Запитання для самоперевірки	613
Тестові завдання до підрозділу 22	614
23. Визначений інтеграл. Теорема Ньютона – Лейбніца.	
Методи інтегрування	617
23.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла ..	617
23.2. Основні властивості визначеного інтеграла	621
23.3. Зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами. Формула Ньютона – Лейбніца	624
23.4. Методи обчислення визначеного інтеграла	628
Ключові терміни	632
Запитання для самоперевірки	632
Тестові завдання до підрозділу 23	633
24. Застосування визначеного інтеграла	
в деяких геометричних та економічних задачах	636
24.1. Обчислення площі плоскої фігури	636
24.2. Обчислення об'ємів тіл за відомими площами поперечних перерізів	646
24.3. Обчислення об'єму тіла обертання	648
24.4. Обчислення довжини дуги плоскої кривої	649
24.5. Застосування інтегралів у деяких економічних задачах	654
24.6. Наближене обчислення визначених інтегралів	665
Ключові терміни	672
Запитання для самоперевірки	672
Тестові завдання до підрозділу 24	673

25. Невласні інтеграли. Інтеграл Ейлера – Пуассона	677
25.1. Інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли I роду)	677
25.2. Інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли II-го роду)	684
Ключові терміни	689
Запитання для самоперевірки	690
Тестові завдання до підрозділу 25	690
26. Подвійний інтеграл та його застосування	694
26.1. Подвійний інтеграл у декартових координатах: означення, теорема існування	694
26.2. Геометричний зміст подвійного інтеграла	696
26.3. Основні властивості подвійного інтеграла	697
26.4. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах	699
26.5. Подвійний інтеграл у полярних координатах	705
26.6. Деякі застосування подвійного інтеграла	711
Ключові терміни	716
Запитання для самоперевірки	717
Тестові завдання до підрозділу 26	718
Практичні завдання за розділом 6	721
Розв'язання задач економічного змісту	721
Завдання для самостійного розв'язання	728
Відповіді	734
Розділ 7. Диференціальні рівняння	739
27. Диференціальні рівняння 1-го порядку	739
27.1. Основні поняття та означення	740
27.2. Рівняння з відокремлюваними змінними	745
27.3. Однорідні диференціальні рівняння	747
27.4. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння Бернуллі	753
27.5. Рівняння в повних диференціалах	761
Ключові терміни	766
Запитання для самоперевірки	767
Тестові завдання до підрозділу 27	768

28. Диференціальні рівняння вищих порядків	770
28.1. Основні поняття та означення	770
28.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку	772
28.3. Однорідні лінійні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами	778
28.4. Розв'язання однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	782
Ключові терміни	789
Запитання для самоперевірки	789
Тестові завдання до підрозділу 28	791
29. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами. Системи лінійних диференціальних рівнянь	793
29.1. Структура розв'язку неоднорідних лінійних рівнянь	793
29.2. Розв'язання неоднорідних лінійних рівнянь зі спеціальними правими частинами	795
29.3. Розв'язання неоднорідних диференціальних рівнянь за методом варіації довільних сталих	800
29.4. Системи диференціальних рівнянь	803
Ключові терміни	811
Запитання для самоперевірки	811
Тестові завдання до підрозділу 29	812
30. Лінійні різницеві рівняння	815
30.1. Основні поняття та означення	815
30.2. Лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами	818
30.3. Однорідні лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами	820
30.4. Неоднорідні лінійні різницеві рівняння зі спеціальною правою частиною	826
30.5. Системи лінійних різницевих рівнянь	830
Ключові терміни	835
Запитання для самоперевірки	836
Тестові завдання до підрозділу 30	837

31. Використання диференціальних і різницевих рівнянь	
в економічних задачах	840
31.1. Відтворення загальних витрат виробництва	
за граничними характеристиками	840
31.2. Знаходження функцій витрат, попиту, ціни товару	
за їхньою еластичністю	842
31.3. Модель природного зростання	844
31.4. Модель природного зростання	
за умови насиченості ринку	846
31.5. Динаміка ринкових цін	849
31.6. Використання різницевих рівнянь в економіці	856
Ключові терміни	862
Запитання для самоперевірки	862
Тестові завдання до підрозділу 31	863
Практичні завдання за розділом 7	866
Розв'язання задач економічного змісту	866
Завдання для самостійного розв'язання	880
Відповіді	885
Розділ 8. Ряди	889
32. Основні поняття та означення. Необхідна ознака	
збіжності ряду	889
32.1. Числовий ряд та його збіжність	890
32.2. Ряд геометричної прогресії	894
32.3. Гармонійний ряд	895
32.4. Властивості збіжних рядів	896
32.5. Необхідна ознака збіжності ряду	899
Ключові терміни	902
Запитання для самоперевірки	902
Тестові завдання до підрозділу 32	903
33. Достатні умови збіжності числових рядів	905
33.1. Ознака порівняння рядів із додатними членами	905
33.2. Ознака Д'Аламбера	909
33.3. Радикальна ознака Коші	912
33.4. Інтегральна ознака Коші	913
33.5. Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду	915

33.6. Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду	917
Ключові терміни	920
Запитання для самоперевірки	920
Тестові завдання до підрозділу 33	921
34. Степеневий ряд та його збіжність. Ряди Тейлора	
та Маклорена	923
34.1. Функціональні ряди. Степеневий ряд	923
34.2. Область і радіус збіжності	924
34.3. Властивості степеневих рядів	930
34.4. Степеневі ряди Тейлора та Маклорена	933
Ключові терміни	937
Запитання для самоперевірки	937
Тестові завдання до підрозділу 34	937
35. Розвинення в ряд основних елементарних функцій.	
Використання рядів для наближених обчислень.	
Ряди Фур'є	940
35.1. Розвинення в ряд Маклорена основних елементарних функцій	940
35.2. Використання рядів у наближених обчисленнях	948
35.3. Ряди Фур'є	957
Ключові терміни	966
Запитання для самоперевірки	967
Тестові завдання до підрозділу 35	967
Практичні завдання за розділом 8	970
Розв'язання задач економічного змісту	970
Завдання для самостійного розв'язання	972
Відповіді	975
Рекомендована література	977
Предметний покажчик	979

Вступ

За всіх часів математика мала велике практичне значення і відігравала важливу роль не лише в науковому, технічному та економічному розвитку суспільства, а й у формуванні окремої особистості. Вона була тією невидимою силою, що об'єднувала інтелектуальний потенціал людства, сприяючи його прогресу в різних сферах. Математика була й залишається мовою, якою природа та суспільство говорять із нами, дозволяючи розкривати нові горизонти в розумінні світу. Ті, хто на високому рівні володіли математичними інструментами, завжди мали значний потенціал для реалізації своїх ідей і становили стратегічний ресурс нації.

У сучасному світі, де інновації й технології стали ключовими факторами прогресу, саме точні математичні методи стають основою для розвитку нових підходів у багатьох сферах. Одним зі значних наукових досягнень стало впровадження математичних методів в економічну науку й управління економічними процесами. Як відомо, ефективне управління цими процесами можливе лише за умови застосування точних математичних методів у всіх сферах господарської діяльності – від прогнозування розміщення корисних копалин до аналізу пропозиції та попиту на товари широкого вжитку, від складання оптимальних планів виробництва до планування транспортних перевезень і розміщення транспортних артерій тощо.

Математичні моделі допомагають у розв'язанні глобальних проблем, як-от зміна клімату, енергетична ефективність і сталий розвиток. Вони дають змогу прогнозувати наслідки різних варіантів дій, надаючи політикам і урядам інструменти для розроблення ефективних та обґрунтованих стратегій управління ресурсами й екологічними викликами.

Загалом роль математики в економічному розвитку важко переоцінити. Це не лише інструмент для розв'язання технічних задач, а й основа для ухвалення правильних рішень, які можуть змінити напрям розвитку цілого суспільства. Математика допомагає не тільки розуміти, як працюють економічні процеси, а й як їх можна ефективно трансформувати, аби досягти максимальної вигоди для всіх учасників економічної діяльності.

У сучасних умовах зростання ролі аналітичних досліджень соціально-економічних процесів майбутні економісти, програмісти, менеджери та інженери потребують глибокої математичної підготовки, яка б давала змогу застосовувати математичні інструменти для розв'язання широкого спектра

задач у своїй професійній діяльності, а також ефективно використовувати сучасне програмне забезпечення і комп'ютерну техніку. Бачення людського капіталу як головної рушійної сили розвитку суспільства зумовлює потребу в розв'язанні загальної проблеми підвищення якості підготовки майбутніх фахівців.

Широке впровадження нових інформаційних технологій і комп'ютеризація діяльності людини залишають у минулому просте передавання знань від викладача до здобувача вищої освіти. На зміну йому приходить концептуально новий підхід до процесу навчання, орієнтований на кінцевий результат – формування компетентнісного фахівця, який не лише набув певних знань, але й здатен ефективно використовувати їх у соціальній практиці та професійній діяльності. Формування майбутніх фахівців потребує перегляду як методів і методик викладання навчальних дисциплін, так і всього навчально-методичного забезпечення. Важливо, щоб зміст матеріалу, викладеного в підручнику, сприяв формуванню окремих компетентностей, які інтегрують у єдину фахову компетентність.

Якщо за роки навчання у виші здобувач вищої освіти сформує чітке уявлення про прикладні можливості математики, зрозуміє сутність математичного підходу до вивчення реального світу, способи його реалізації та потенційні результати, він буде прагнути набути глибоких знань і потрібної математичної культури, розвине в собі здатність самостійно підвищувати рівень своєї освіти, тоді й у професійній діяльності він зможе легко адаптуватися до мінливого соціально-економічного середовища, буде конкурентоспроможним на ринку праці як в Україні, так і за її межами.

Фундаментальною основою математичної підготовки здобувачів вищої освіти є навчальна дисципліна «Вища математика», яка є обов'язковою дисципліною циклу професійної підготовки та складовою структурно-логічної схеми підготовки бакалаврів різних галузей знань.

Основним завданням вивчення цієї навчальної дисципліни є надання здобувачам вищої освіти знань з основних розділів вищої математики, підвищення рівня їхньої фундаментальної математичної підготовки з посиленням її прикладної спрямованості, а також здобуття потрібної математичної бази для вивчення інших дисциплін як математичного, так і нематематичного циклу.

У процесі опанування навчальної дисципліни «Вища математика» здобувачі вищої освіти формують аналітично-дослідницькі компетентності – знання, уміння та навички з використання математичних інструментів, які

надають лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз, диференціальне та інтегральне числення функції однієї та кількох змінних, диференціальні рівняння та ряди. Саме тому кожний розділ підручника починають із переліку певних компетентностей, які мають сформуватися в майбутнього фахівця в результаті вивчення запропонованого матеріалу.

Автори цього підручника мають багаторічний досвід викладання математики здобувачам вищої освіти, тому в процесі його створення вони послуговувалися дидактичним принципом як у висвітленні матеріалу кожної теми, так і в побудові структури підручника. Кожний розділ містить достатню кількість докладно розв'язаних типових задач різного рівня складності, численні приклади розв'язання реальних задач економічного змісту і завдання для самостійного розв'язання з відповідями до них. Наприкінці кожного підрозділу розміщено перелік ключових термінів, запитання для самоперевірки та тестові завдання, що робить цей підручник ефективним засобом для самостійного вивчення навчальної дисципліни. Для зручності користувачів підручник містить перелік основних позначень та зручний предметний покажчик, який значно спрощує навігацію за матеріалом.

У кожному розділі теоретичний і практичний матеріал подано в обсязі, необхідному для засвоєння навчальної дисципліни «Вища математика», її подальшого застосування під час вивчення спеціальних навчальних дисциплін, а також для розв'язання задач фахової спрямованості.

Підручник рекомендовано для здобувачів вищої освіти в таких галузях знань: «Соціальні та поведінкові науки», «Управління та адміністрування», «Інформаційні технології», «Виробництво та технології», «Соціальна робота», «Сфера обслуговування», «Публічне управління та адміністрування», «Міжнародні відносини» – та викладачів як допомога в забезпеченні процесу неперервної математичної підготовки й організації самостійної роботи. Він також буде корисним для науковців і фахівців-практиків різних напрямів як довідник для розв'язання реальних задач, що потребують застосування інструментарію вищої математики.

Показчик позначень

- $\forall$ – квантор загальності («для будь-якого» або «для всіх»)
 $\exists$ – квантор існування (існує ...), $\bar{\exists}$ – не існує
 $:\Leftrightarrow$ – еквівалентність за означенням
 $\Leftrightarrow$ – рівносильність («тоді й тільки тоді, коли...»)
 $\Rightarrow$ – імплікація («із ... випливає ...» або «якщо ..., то ...»)
 $\in$ – символ належності («належить»), $\notin$ – не належить
 $\cup$ – об'єднання множин
 $\cap$ – переріз множин
 $\subset (\supset)$ – знак строгого включення
 $\setminus$ – різниця множин
 $\emptyset$ – порожня множина
 $\{x | P(x)\}$ – множина елементів x із властивістю $P(x)$
 $\bar{A}$ – доповнення множини A
 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – прямокутна матриця A розміру $m \times n$
 $\Delta A = |A|$ – визначник, або детермінант матриці A
 $M_{ij} (A_{ij})$ – мінор (алгебраїчне доповнення) елемента a_{ij}
 A^T – транспонована відносно A матриця
 $E (O)$ – одинична (нульова) матриця
 A^{-1} – матриця, обернена до A
 A^* – матриця, приєднана до A
 $\sum_{i=1}^n \left(\prod_{i=1}^n \right)$ – сума (добуток) елементів від першого до n -го
 $S_1 \sim S_2$ – еквівалентні системи рівнянь S_1 і S_2
 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ – система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими ($i = \overline{1, m}$)
 $A|B$ – розширена матриця системи рівнянь
 Δ_j – визначник, відповідний невідомому x_j
 $M^{(k)}$ – мінор k -го порядку матриці

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad - \text{матриця-стовпець вільних членів СЛАР } m \times n$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad - \text{матриця-стовпець невідомих СЛАР } m \times n$$

$\text{rang} A = r$ – ранг матриці A

$\mathbf{N}$ – множина натуральних чисел

$\mathbf{Z}$ – множина цілих чисел

$\mathbf{R}$ – множина дійсних чисел

$\mathbf{Q} (\bar{\mathbf{Q}})$ – множина раціональних (ірраціональних) чисел

$\mathbf{C}$ – множина комплексних чисел

U – універсальна множина (універсум)

$\bar{a}, \overline{AB}$ – вектор

$|\bar{a}|, |\overline{AB}|$ – довжина (модуль) вектора

$\bar{0}$ – нульовий вектор

$\bar{a} \parallel \bar{b} (\bar{a} \perp \bar{b})$ – колінеарні (ортогональні) вектори

$\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \mathbf{R}^n$ – одно-, дво-, три-, n -вимірні простори

$\text{pr}_l \bar{a}$ – проєкція вектора $\bar{a}$ на вісь l

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – координатні орти

a_x, a_y, a_z – координати вектора $\bar{a}$ в $\mathbf{R}^3$

$\bar{a} \cdot \bar{b}, (\bar{a}, \bar{b})$ – скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$

$\angle(\bar{a}, \bar{b})$ – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$

α, β, γ – напрямні кути вектора

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора

$\bar{a} \times \bar{b}, [\bar{a}, \bar{b}]$ – векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$

$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}, \bar{a} \bar{b} \bar{c}$ – мішаний добуток векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

k – кутовий коефіцієнт прямої

ε – ексцентриситет кривої 2-го порядку

$\bar{N} = (A, B, C)$ – нормальний вектор площини

$\bar{s} = (m, n, p)$ – напрямний вектор прямої в просторі

$l_1 \mid l_2$ – збіг прямих l_1 і l_2

C_n^m – біноміальні коефіцієнти

$\mathcal{A}$ – лінійне перетворення (лінійний оператор)

$\bar{x} (\mathcal{A}\bar{x})$ – прообраз вектора $\mathcal{A}\bar{x}$ (образ вектора $\bar{x}$)

$\mathcal{A}^{-1}$ – обернене лінійне перетворення

$\mathcal{E}$ – тотожне перетворення

$\mathbf{O}$ – нульовий оператор

λ – власне число, відповідне вектору $\bar{x}$

$i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця

$D(y), D(f)$ – область існування функції $y = f(x)$

$E(y), E(f)$ – область значень функції $y = f(x)$

$f: X \rightarrow Y$ – відображення елементів множини X на множину Y

$Q(x, y)$ – квадратична форма

$\{x_n\}$ – числова послідовність

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ – границя числової послідовності $\{x_n\}$

$n!$ – факторіал числа n

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ – границя функції $f(x)$ у точці x_0

$\lim_{x \rightarrow x_0 \mp 0} f(x) = f(x_0 \mp 0)$ – односторонні границі функції $f(x)$ у точці x_0

$\alpha \sim \beta$ – еквівалентні нескінченно малі α і β

$\alpha = O(\beta)$ – нескінченно малі α, β одного порядку

$\alpha = o(\beta)$ – α є нескінченно малою більш високого порядку, ніж β

$\lim_{x \rightarrow x_0 \mp 0} f(x)$ – односторонні границі функції $f(x)$ у точці x_0

$\Delta x (\Delta f(x))$ – приріст аргументу (приріст функції) у точці x

$y = f^{-1}(x)$ – обернена до $f(x)$ функція

$f'(x), y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$ – похідна функції $y = f(x)$ за змінною x

$\Big|_{x=x_0}$ – знак одинарної підстановки («у точці $x = x_0$ »)

$\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ – знак одинарної підстановки («у точці $x = x_0, y = y_0$ »)

$y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}$ – похідна функції $y = f(x)$ n -го порядку ($n \in \mathbf{N}$)

$dy, df(x)$ – диференціал функції $y = f(x)$ у точці x

$d^n y, d^n f(x)$ – диференціал функції $y = f(x)$ n -го порядку ($n \in \mathbf{N}$)

$E_x(y)$ – еластичність функції $y = f(x)$ за змінною x

$x_{\max} (x_{\min})$ – точка максимуму (мінімуму) функції

$f_{\max} (f_{\min})$ – максимум (мінімум) функції $y = f(x)$

$F(x)$ – первісна для функції $f(x)$

$\int f(x)dx$ – невизначений інтеграл (від) функції $f(x)$

$\int_a^b f(x)dx$ – визначений інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку інтегрування $[a, b]$

$\int_a^x f(u)du$ – інтеграл зі змінною верхньою межею інтегрування

$\Big|_a^b$ – символ подвійної підстановки

$a (b)$ – нижня (верхня) межа інтегрування

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функція n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ – границя функції $z = f(x, y)$ у точці (x_0, y_0)

$\Delta_{x_i} u$ – частинний приріст $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за змінною x_i

$u'_{x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i}$ – частинна похідна $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за змінною x_i

$d_{x_i} u, d_{x_i} f$ – частинний диференціал функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за змінною x_i

$du (d^m u)$ – повний диференціал першого (m -го порядку) функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($2 \leq m \leq n, m \in \mathbf{N}$)

$d_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}} u$ – частинний диференціал m -го порядку функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за змінними $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$

$\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}$ – частинна похідна m -го порядку функції
 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за змінними $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$
 $(2 \leq m \leq n, m \in \mathbf{N})$

$\iint_D f(x, y) ds$ – подвійний інтеграл від функції $z = f(x, y)$ по області D

$\overline{\Delta S} = (\Delta x, \Delta y)$ – вектор приростів аргументів функції $z = f(x, y)$

$\frac{\partial z}{\partial s}$ – похідна функції $z = f(x, y)$ за напрямком s

$\text{grad } z, \nabla z$ – градієнт функції $z = f(x, y)$

$M = \sup_{[a, b]} f(x)$ – найбільше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$

$m = \inf_{[a, b]} f(x)$ – найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$

$\Delta^2 y_n$ – скінченна різниця 2-го порядку для функції $y(n)$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – числовий ряд із загальним членом u_n

$S_n(S)$ – часткова сума (сума) ряду

$R_n(x)$ – n -й залишок числового (функціонального) ряду

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – степеневий ряд за степенями x

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ – степеневий ряд за степенями різниці $(x-a)$

R – радіус збіжності степеневого ряду

$(-R, R)$ – інтервал абсолютної збіжності ряду

T – період функції

$P_n(x)$ – многочлен степеня n від x

$\text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_s)$ – найменше спільне кратне чисел $n_i, i = \overline{1, s}$

$\rho(\varphi)$ – полярний радіус (кут)

■ – символ закінчення доведення теореми

Розділ 1. Лінійна алгебра



Лінійна алгебра як самостійна математична дисципліна почала формуватися у XVIII ст., коли в роботах німецького математика Г. Ф. Лейбніца та швейцарського математика Г. Крамера вперше було введено поняття визначника (детермінанта) і наведено загальні формули для визначення розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Пізніше англійськими математиками А. Келі та Дж. Сільвестром було введено поняття матриці та закладено основи матричного числення, що є апаратом для компактного запису й аналізу систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Саме ці поняття лінійної алгебри зараз ефективно використовують у прикладних задачах економіки. Наприклад, для характеристики параметрів виробничих або бізнес-процесів вихідні дані надають у вигляді матриці розміру $m \times n$.

Методи лінійної алгебри також застосовують для обґрунтування управлінських рішень, у процесі опрацювання результатів спостережень тощо. Зокрема, розв'язування задач оптимізації планів роботи підприємства, вивчення попиту, планування транспортних артерій можна звести до розв'язку систем m лінійних рівнянь з n невідомими. До речі, за розроблення методу розв'язання оптимізаційних задач лінійного програмування, що визначали як «внесок у теорію оптимального розподілу ресурсів», Л. Канторовичу і Т. Копмансу 1975 року було присуджено Нобелівську премію з економіки.



Після вивчення цього розділу ви зможете:

- використовувати числові матриці для формування й аналізу таблиць вихідних даних в економіці;
- використовувати системи лінійних рівнянь під час розроблення лінійних економіко-математичних моделей;
- застосовувати поняття лінійних векторних просторів для геометричної інтерпретації економічних задач;
- мати уявлення про власні числа і власні вектори квадратних матриць в аналітичних задачах економіки;
- використовувати власні числа і власні вектори квадратних матриць під час розроблення економіко-математичних моделей;

- застосовувати модель міжгалузевого балансу (багатогалузевої економіки) для виконання реальних завдань економіки;
- будувати лінійну модель обміну (модель міжнародної торгівлі) під час розв'язання конкретних задач.

1. Числові матриці та дії над ними

Основні питання:

- 1.1. Задача про використання сировини. Математична модель.
- 1.2. Означення матриць і деякі їхні різновиди.
- 1.3. Дії над матрицями.
- 1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення.

1.1. Задача про використання сировини. Математична модель

Розгляньмо реальну задачу планування випуску промислової продукції на прикладі окремого підприємства, що виготовляє електродвигуни як загального, так і спеціального призначення. Окрім того, завод виготовляє електричні прилади побутового призначення. Сформулюймо задачу планування розподілу матеріальних ресурсів під час виготовлення чотирьох основних видів продукції: електродвигунів АІР 80, АІР 90, АІР 100 та електричних насосів БЦ 1,1-20.

Основними матеріальними ресурсами, що застосовують у виробництві, є сировина, напівфабрикати, що надходять на підприємство від постачальників, паливо та транспорт. Однак на обсяг кожного із цих ресурсів є певні обмеження. Питомі витрати (витрати на виготовлення одиниці продукції кожного виду), а також загальні обсяги запасів ресурсів (у відповідних одиницях), що є в наявності, наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Питомі витрати матеріальних ресурсів та обсяги їхніх наявних запасів

Види ресурсів	Витрати на одиницю продукції (у. о.)				Обсяги наявних ресурсів (у. о.)
	АІР 80	АІР 90	АІР100	БЦ 1,1-20	
Сировина	176,00	236,70	279,90	144,50	17 039
Напівфабрикати	11,45	15,22	12,91	34,63	1 183
Паливо	6,00	7,00	7,00	6,50	513
Транспорт	3,75	5,04	5,86	3,58	365

Задача полягає в побудові такого плану виробництва наведених видів продукції, який би забезпечив повне використання кожного з матеріальних ресурсів, що підприємство має в наявності.

Складімо *математичну модель* задачі, тобто опишімо задачу, яку слід розв'язати, за допомогою математичної символіки. Спочатку введемо позначення величин, які в плані виробництва є числовими характеристиками, що відповідають повному використанню наявних ресурсів. Нехай x_1 – це кількість електродвигунів АІР 80; x_2 – кількість електродвигунів АІР 90; x_3 – кількість електродвигунів АІР 100; x_4 – кількість електричних насосів БЦ 1,1-20. Згідно з умовою задачі, відповідно до даних табл. 1.1, має бути розв'язано чотири рівняння, які утворюють таку систему:

$$\begin{cases} 176,00x_1 + 236,70x_2 + 279,90x_3 + 144,50x_4 = 17\,039, \\ 11,45x_1 + 15,22x_2 + 12,91x_3 + 34,63x_4 = 1183, \\ 6,00x_1 + 7,00x_2 + 7,00x_3 + 6,50x_4 = 513, \\ 3,75x_1 + 5,04x_2 + 5,86x_3 + 3,58x_4 = 365. \end{cases}$$

Отже, ми побудували *математичну модель* задачі про повне використання матеріальних ресурсів у вигляді системи лінійних рівнянь, тобто рівнянь першого степеня щодо невідомих. Приклади таких систем відомі зі шкільного курсу математики, але загальні методи їхнього розв'язання та, тим паче, дослідження для випадку довільної скінченної кількості рівнянь і невідомих у шкільному курсі не вивчають. Ці методи буде наведено в цьому розділі, але трохи пізніше.

У загальному випадку задачу про повне використання ресурсів формують так: підприємство виготовляє продукцію n типів, для виробництва яких застосовують m видів ресурсів. Потреби в ресурсах певного виду для виготовлення одиниці продукції кожного типу, а також обсяг запасів кожного виду ресурсів, що є в наявності, наведено в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Задача про повне використання ресурсів

Види ресурсів	Витрати ресурсів на виготовлення одиниці продукції (у. о.)				Обсяги ресурсів (у. о.)
	1	2	...	n	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

Складімо математичну модель задачі. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – кількість продукції певного типу, яку виробляє підприємство. Тоді за даними табл. 1.2 запишемо таку систему рівнянь:

[illegible]

Отже, визначення розв'язку задачі про повне використання сировини зведено до розв'язування системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. Для дослідження та розв'язання таких систем застосовують поняття матриць і визначників, які є основним математичним апаратом вивчення систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Числовою матрицею розміру m на n ($m \times n$) називають прямокутну таблицю чисел, яку складають m рядків і n стовпців. Числа, що утворюють матрицю, називають її **елементами**.

Матриці позначають великими літерами латинського алфавіту. Якщо елементами матриці є відомі величини, то матриці позначають літерами A , B , C та іншими, а їхні елементи – відповідними малими літерами з подвійними індексами a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , де індекс i відповідає номеру рядка матриці ($i = \overline{1, m}$), а j – номеру її стовпця ($j = \overline{1, n}$). Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Отже, елемент a_{ij} матриці A розташовано на перетині i -го рядка та j -го стовпця.

26

Під час зображення матриць множину її елементів беруть у круглі дужки, а іноді – у квадратні. У теоретичних дослідженнях у разі посилення на матрицю певного розміру зазвичай застосовують позначення $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

У наведеній задачі елементами матриці, що становлять коефіцієнти при невідомих, є питомі витрати на виготовлення продукції, тобто певні числа. У загальному випадку елементами матриці можуть бути не лише числа, але й інші об'єкти, наприклад, вектори, функції, їхні похідні й т. ін.

Матрицю $A = (a_{ij})_{n \times n}$, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців ($m = n$), називають **квадратною матрицею порядку n** (або n -го порядку). Інакше, тобто якщо $m \neq n$, матрицю називають **прямокутною**.

Матрицею-рядком називають матрицю розміру $1 \times n$, тобто таку матрицю, яка має один рядок і n стовпців. **Матрицею-стовпцем** називають матрицю розміру $m \times 1$, яка має m рядків і один стовпець.

Якщо розглядають матрицю-рядок (або матрицю-стовпець), то для її елементів номер рядка (або, відповідно, номер стовпця) указувати не треба. Тобто індекс елементів такої матриці становить лише одне число.

Матриця може містити навіть один елемент.

Нульовою матрицею називають матрицю, усі елементи якої дорівнюють нулю. Її позначають літерою O . Нульова матриця може мати довільний розмір.

Головною діагоналлю квадратної матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$ називають сукупність її елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, для яких номери рядка і стовпця збігаються, тобто $i = j$. Ці елементи розташовано на прямій, яка проведена з лівого верхнього кута квадратної матриці у її правий нижній кут. А сукупність елементів, які розташовані на прямій, що проведена із правого верхнього кута квадратної матриці в лівий нижній, називають **побічною діагоналлю** квадратної матриці. Це елементи $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{(n-1)2}, a_{n1}$.

Симетричною називають квадратну матрицю, у якої всі елементи, що розташовані симетрично відносно головної діагоналі, є попарно рівними між собою. Тобто для довільних її елементів за $i \neq j$ є правильним таке співвідношення: $a_{ij} = a_{ji}$, де $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Якщо елементи кожного рядка матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ записати в стовпець із тим самим номером, не порушуючи порядку їхнього розташування, то матимемо матрицю $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$, яку називають **транспонованою** до матриці A ,

а саму операцію переходу від матриці A до матриці A^T (заміну стовпців на рядки) називають **транспонуванням** матриці:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Зрозуміло, що подвійне транспонування дає вихідну матрицю: $(A^T)^T = A$, а транспонування симетричної матриці – матрицю, що збігається з вихідною.

Верхньою (нижньою) трикутною матрицею називають ненульову квадратну матрицю, усі елементи якої, що розташовані нижче (вище) від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Діагональною матрицею називають квадратну матрицю, у якої всі елементи, окрім, можливо, елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю. Її позначають літерою D :

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональну матрицю доцільно задавати переліком її діагональних елементів, указуючи для кожного з них лише один індекс: $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Одиничною матрицею називають діагональну матрицю, усі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці. У загальному випадку її позначають літерою E . Також можна застосовувати літеру I .

Під час позначення одиничної матриці зручно вказувати індекс, який відповідає її порядку, отже, одиничну матрицю n -го порядку позначають E_n :

$$E_1 = (1), \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \quad E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Символічні означення основних типів матриць та їхні приклади можна узагальнити у вигляді таблиці (табл. 1.3), у якій також для кожного символічного запису наведено приклад відповідної матриці.

Основні різновиди матриць

№ з/п	Назви	Символьні записи	Приклади
1	2	3	4
1	Прямокутна матриця A розміру $m \times n$	$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$ або $A = (a_{ij})_{m \times n}$	$A_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & -3 \\ 0 & 5 \\ 8 & 27 \end{pmatrix}$
2	Матриця-стовпець A розміру $m \times 1$	$A_{m \times 1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$	$A_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 31 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix}$
3	Матриця-рядок A розміру $1 \times n$	$A_{1 \times n} = (a_1 \quad \dots \quad a_j \quad \dots \quad a_n)$	$A_{1 \times 3} = (1 \quad 3 \quad -7)$
4	Квадратна матриця A n -го порядку	$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$ або $A = (a_{ij})_{n \times n}$	$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 31 & 3 & -8 \\ 9 & 10 & -1 \\ 0 & 52 & -3 \end{pmatrix}$
5	Верхня трикутна матриця A n -го порядку	$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$	$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 31 & -7 & 4 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
6	Нижня трикутна матриця A n -го порядку	$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$	$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

1	2	3	4
7	Діагональна матриця A n -го порядку	$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} = D$	$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \text{diag}(31, 10, -3)$
8	Одинична матриця A n -го порядку	$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E_n$	$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$
9	Нульова матриця A розміру $m \times n$	$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = O_{m \times n}$	$A_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{4 \times 2}$

1.3. Дії над матрицями

Елементи двох матриць однакового розміру, які стоять на перетині одних і тих самих (за номером) рядків і стовпців, називають **відповідними**.

Матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ і $B = (b_{ij})_{m \times n}$ однакового розміру називають **рівними**, якщо їхні відповідні елементи є рівними між собою:

$$A = B : \Leftrightarrow (a_{ij} = b_{ij}, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}).$$

Над матрицями визначено такі дії (операції): множення матриці на скаляр, додавання матриць, множення матриці на матрицю.

Розгляньмо означення і властивості цих операцій.

1. Добутком матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ зі скаляром $\lambda = \text{const}$ називають матрицю $C = (c_{ij})_{m \times n}$, елементи якої є добутком відповідних елементів матриці A із числом λ :

$$C = \lambda \cdot A : \Leftrightarrow (c_{ij} = \lambda a_{ij}, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}), \quad (1.3)$$

де $\lambda = \text{const}$.

Якщо $\lambda = -1$, то маємо матрицю, яку називають **протилежною** (до) матриці A : $-A = (-1) \cdot A$.

2. Сумою матриць $A = (a_{ij})_{m \times n}$ і $B = (b_{ij})_{m \times n}$ однакового розміру називають матрицю $C = A + B$ того самого розміру, кожний елемент c_{ij} якої є сумою відповідних елементів вихідних матриць:

$$C = A + B : \Leftrightarrow (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}). \quad (1.4)$$

Згідно з означенням нульової матриці, маємо: $A + O = A$.

Наслідок: різницю двох матриць $A - B$ можна розглядати як суму матриці A і матриці $-B$, що є протилежною матриці B :

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$



Визначмо матрицю $C = 2A - B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 5 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$.

Оскільки задані матриці A і B мають однаковий розмір, то означені дії можна виконати. Отже,

$$C = 2A - B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 5 \\ 15 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 10 & 2 \cdot (-1) - 3 \\ 2 \cdot 0 - (-2) & 2 \cdot 12 - 5 \\ 2 \cdot 4 - 15 & 2 \cdot 6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 2 & 19 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Операції додавання матриць і множення матриці на скаляр називають **лінійними операціями** над матрицями. Ці операції зводять до відповідних арифметичних дій над числами, які є елементами матриць, і мають ті самі властивості, що й операції над числами.

Наведімо ці властивості:

а) *комутативність* (переставний закон):

$$A + B = B + A, \quad \lambda \cdot A = A \cdot \lambda;$$

б) *асоціативність* (сполучний закон):

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C, \quad \lambda(\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu)A;$$

в) *дистрибутивність* (розподільний закон):

$$\lambda(A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

3. Добутком матриці A розміру $m \times k$ на матрицю B розміру $k \times n$ називають матрицю C розміру $m \times n$, елементи якої обчислюють за такою формулою: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$.

Отже,

$$C = A \cdot B : \Leftrightarrow (c_{ij} = \sum_{s=1}^k a_{is} \cdot b_{sj}, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}). \quad (1.5)$$

Із ф-ли (1.5) випливає правило, яке називають правилом **множення рядка на стовпець**: щоб обчислити елемент c_{ij} добутку матриць $C = A \cdot B$, слід кожний елемент i -го рядка матриці $A = (a_{ij})_{m \times k}$ помножити на відповідний йому за номером елемент j -го стовпця матриці $B = (b_{ij})_{k \times n}$ (рис. 1.1) й обчислити суму всіх таких добутків.

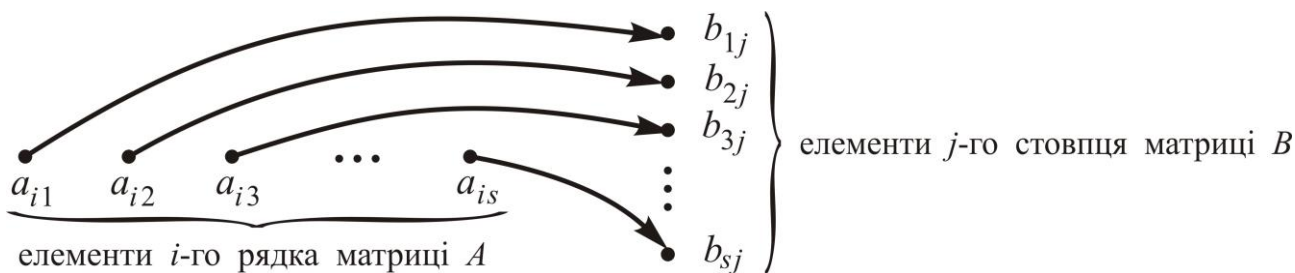


Рис. 1.1. Схема застосування правила множення рядка на стовпець

З означення добутку матриць випливають такі *властивості операції множення матриць*.

1. Для того щоб дві матриці A і B можна було перемножити, необхідно і достатньо, щоб кількість стовпців першої матриці (множника $A = (a_{ij})_{m \times k}$) дорівнювала кількості рядків другої матриці (множника $B = (b_{ij})_{k \times n}$), відповідно, добутком таких матриць буде матриця розміру $m \times n$.

2. Якщо матриці A і B є квадратними матрицями одного порядку, то існують і добуток $A \cdot B$, і добуток $B \cdot A$, але в загальному випадку для добутку матриць не є виконаним переставний закон, отже, зазвичай, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Однак є винятки. Так добутки одиничної матриці E на матрицю A того самого порядку зліва і справа є рівними між собою і дорівнюють матриці A , тобто: $A \cdot E = E \cdot A = A$.

3. Для добутку матриць має місце асоціативний закон, а саме:

$$(A \cdot B)C = A(B \cdot C).$$



Визначмо добуток $C = A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Зауважмо, що кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B ($k = 3$), отже, матрицю A можна помножити на матрицю B .

Оскільки матриця A має розмір 2×3 , а матриця B – розмір 3×1 , то добутком матриць A і B буде матриця $C = A \cdot B$ розміру 2×1 :

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 + (-2) \cdot (-2) + 4 \cdot (-5) \\ 0 \cdot 12 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що для наведених матриць не існує добутку $B \cdot A$, оскільки кількість стовпців матриці B не дорівнює кількості рядків матриці A .

Узагальнімо *властивості* операцій над матрицями:

- | | |
|---|--|
| 1) $A + B = B + A$; | 6) $\lambda(A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$; |
| 2) $A + O = A$; | 7) $(A + B)C = A \cdot C + B \cdot C$; |
| 3) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$; | 8) $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$; |
| 4) $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$; | 9) $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$; |
| 5) $(\lambda + \mu)A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$; | 10) $(A + B)C = A \cdot C + B \cdot C$. |

1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення

Побудова математичних моделей процесів і явищ в усіх сферах діяльності людини потребує розроблення відповідного математичного апарату, і системи лінійних алгебраїчних рівнянь є його важливою складовою. Ці рівняння відіграють провідну роль і під час побудови математичних моделей багатьох економічних процесів, із метою їхньої оптимізації.

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) називають сукупність m рівнянь першого степеня, тобто лінійних рівнянь, щодо n невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, які в кожному рівнянні є числовими характеристиками одного й того самого процесу.

Цю систему можна подати в *розгорнутому вигляді*:

[illegible]

де x_j ($j = \overline{1, n}$) – невідомі характеристики, щодо яких побудовано математичну модель задачі;

a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – коефіцієнти перед невідомими (параметрами моделі),

а індекси i та j указують, відповідно, на номери рівняння і невідомого;

b_i ($i = \overline{1, m}$) – вільні члени (праві частини рівнянь), які теж є параметрами математичної моделі.

Стислий запис системи рівнянь (1.6) можна подати за допомогою символу $\sum$, який означає почленне підсумовування:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.7)$$

Повернімося до прикладу, у якому було побудовано математичну модель задачі про використання ресурсів. Подаймо питомі витрати ресурсів у вигляді прямокутної матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$, запаси ресурсів – у вигляді матриці-стовпця $B = (b_i)_{m \times 1}$, а невідомі компоненти плану виробництва – як матрицю-стовпець $X = (x_j)_{n \times 1}$. Тоді за означенням добутку матриць систему лінійних алгебраїчних рівнянь, подану співвідношенням (1.6), можна записати у вигляді матричного рівняння, яке є *матричною формою* подання СЛАР:

$$A \cdot X = B. \quad (1.8)$$

Наведемо ще один спосіб подання системи рівнянь за допомогою матриць. Розгляньмо збалансоване виробництво продукції, тобто запаси ресурсів у повному обсязі витрачають на виготовлення продукції. Нехай матриця-стовпець A_j ($j = \overline{1, n}$) описує витрати (у грошовому еквіваленті) виробництва на виготовлення одиниці j -ї продукції за кожним з m видів ресурсів. Кожну матрицю A_j утворено з елементів відповідного стовпця матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$,

отже, усі матриці A_j мають однаковий розмір $m \times 1$. Тоді витрати на виготовлення j -ї продукції в обсязі x_j визначають як добуток матриці A_j зі скаляром x_j . Відповідно, загальні витрати за кожним із видів ресурсів на виготовлення продукції всіх видів дорівнюють витратам за видами ресурсів, які описують матрицею-стовпцем $B = (b_i)_{m \times 1}$.

Отже, маємо ще одну форму подання СЛАР:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_j x_j + \dots + A_n x_n = B. \quad (1.9)$$

Матрицю $A = (a_{ij})_{m \times n}$, що складена з коефіцієнтів перед невідомими системи рівнянь (1.6), називають **основною матрицею** системи.

Якщо до матриці A приєднати справа (через вертикальну риску) матрицею-стовпець вільних членів $B = (b_i)_{m \times 1}$, то матимемо матрицю $A|B = (a_{ij} | b_i)_{m \times (n+1)}$, яку називають **розширеною матрицею** системи:

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Зрозуміло, що операції над рядками розширеної матриці є операціями над відповідними рівняннями системи.

Розв'язком системи рівнянь називають такий упорядкований набір чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, підстановка якого в кожне рівняння системи, замість невідомих $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, перетворює ці рівняння на тотожності.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають **сумісною**, якщо вона має принаймні один розв'язок, і **несумісною**, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісну систему рівнянь називають **визначеною**, якщо вона має єдиний розв'язок, і **невизначеною**, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають **неоднорідною**, якщо хоча б один елемент матриці-стовпця вільних членів $B = (b_i)_{m \times 1}$ є відмінним від нуля. Якщо всі елементи b_i ($i = \overline{1, m}$) дорівнюють нулю, то таку систему називають **однорідною**.

Однорідна система рівнянь має такий вигляд:

$$A \cdot X = O, \quad (1.10)$$

де $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – основна матриця системи;

$X = (x_j)_{1 \times n}^T$ – матриця-стовпець невідомих;

$O = (0)_{m \times 1}$ – матриця-стовпець вільних членів, що містить самі нулі.



Ключові терміни

Розмір матриці; матриця (прямокутна, квадратна, нижня (верхня) трикутна, одинична, симетрична, транспонована); головна (побічна) діагональ матриці; сума матриць; добуток матриці зі скаляром; добуток матриць; система лінійних алгебраїчних рівнянь; основна (розширена) матриця системи; матриця-стовпець вільних членів; матриця невідомих; розв'язок системи; система сумісна (несумісна); система однорідна (неоднорідна); система визначена (невизначена).



Запитання для самоперевірки

1. Що називають прямокутною числовою матрицею?
2. Що таке «елементи матриці» та як визначають розмір матриці?
3. Як визначають місце розташування певного елемента матриці?
4. Які матриці називають рівними?
5. Що розуміють під транспонуванням матриці?
6. Яку матрицю називають квадратною?
7. Яку матрицю називають верхньою (нижньою) трикутною?
8. Яку матрицю називають діагональною, а яку – одиничною?
9. Яку матрицю називають сумою (різницею) двох матриць?
10. Яку матрицю називають добутком матриці зі скаляром?
11. Яким законам підпорядковано додавання матриць і множення матриці зі скаляром?
12. За яким правилом визначають елементи матриці, яка є добутком двох матриць? Наведіть схему виконання цієї операції.
13. Що таке «система лінійних алгебраїчних рівнянь»?

14. Як записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь в алгебраїчній і матричній формах? Які складові кожної форми подання такої системи?

15. Які системи називають однорідними (неоднорідними)?

16. Що таке «розв'язок системи рівнянь»?

17. Які системи рівнянь називають сумісними (несумісними)?

18. Які системи рівнянь називають визначеними (невизначеними)?



Тестові завдання до підрозділу 1

1. Укажіть матрицю, яка є транспонованою до матриці $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$:

а) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $C = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $F = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Укажіть матрицю, яка дорівнює матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$:

а) $F = -2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -0,5 \\ -2 & 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$; б) $G = 2 \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; в) $H = -0,5 \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -12 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Укажіть матрицю, яку можна додати до матриці $F = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T$; б) $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; в) $C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; г) $H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

4. Задано матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ та $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Як у символічній формі записати елемент c_{ij} матриці $C = \lambda \cdot A - B$:

а) $c_{ij} = \lambda a_{ij} - b_{ij}$;

б) $c_{ij} = \lambda a_{ik} - b_{kj}$;

в) $c_{ij} = \lambda a_{ki} - b_{kj}$;

г) $c_{ij} = \lambda a_{ik} + (-b_{kj})$?

5. Серед наведених матриць виберіть такі, над якими можна виконати операцію множення $F \cdot G$:

- а) $F = (f_{ij})_{2 \times 3}$, $G = (g_{ij})_{2 \times 3}$; б) $F = (f_{ij})_{2 \times 3}$, $G = (g_{ij})_{3 \times 3}$;
 в) $F = (f_{ij})_{3 \times 3}$, $G = (g_{ij})_{2 \times 3}$; г) $F = (f_{ij})_{2 \times 1}$, $G = (g_{ij})_{2 \times 2}$.

6. У якому наведеному в матричній формі співвідношенні допущено помилку:

- а) $A + B = B + A$; б) $(A + B) - C = A - (C - B)$;
 в) $(\lambda + \mu)A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$; г) $\lambda \cdot \mu(A + B) = \lambda \cdot A + \mu \cdot B$?

7. Серед наведених у матричній формі співвідношень укажіть таке, у якому дії над матрицями виконано правильно:

- а) $A^T \cdot A^T = E^T$; б) $A \cdot E = A$; в) $E \cdot A = A^T$; г) $A \cdot E = A^T$.

8. Якщо $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – основна матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь, $X = (x_j)_{1 \times n}$ – матриця-рядок невідомих, $B = (b_i)_{m \times 1}$ – матриця-стовпець вільних членів, то який із записів такої системи у матричній формі є правильним:

- а) $A \cdot X^T = B$; б) $A^T \cdot X = B$; в) $A \cdot X = B^T$; г) $A \cdot X = B$?

9. Якщо $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – основна матриця СЛАР, то який розмір має матриця-стовпець вільних членів такої системи:

- а) $B = (b_i)_{m \times 1}$; б) $B^T = (b_{ij})_{m \times 1}$; в) $B = (b_{ij})_{m \times n}$; г) $B = (b_{ij})_{n \times 1}$?

10. Якщо $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – основна матриця однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, то який вигляд має нетривіальний розв'язок цієї системи:

- а) $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m)$; б) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$; в) $X^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$; г) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$?

Література: [1 – 4; 10; 11; 14; 15; 17; 20 – 23].

2. Визначники, методи обчислювання

Основні питання:

- 2.1. Означення визначника. Визначники 2-го та 3-го порядків.
- 2.2. Властивості визначників.
- 2.3. Обернена матриця.
- 2.4. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера.
- 2.5. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом оберненої матриці.

2.1. Означення визначника. Визначники 2-го та 3-го порядків

Одним із видів числових матриць, які часто використовують під час побудови математичних моделей економічних задач, є квадратні матриці. Таким матрицям ставлять у відповідність числову характеристику – визначник, або детермінант, який позначають або грецькою літерою Δ з посиланням на відповідну матрицю (наприклад, ΔA), або просто Δ , або як $\det A$ (від латинського *determinans* – «той, що визначає»).

Перш ніж дати означення детермінанта, уведімо до розгляду деякі допоміжні поняття.

Нехай задано скінченну множину з n перших натуральних чисел $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Крім природного розташування чисел (за зростанням), їх можна упорядкувати й багатьма іншими способами.

Будь-яке розташування чисел $1, 2, 3, \dots, n$ у деякому певному порядку називають **переставленням** з n чисел, а самі числа – **елементами** переставлення. Кількість різних переставлень з n чисел дорівнює добутку $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, який позначають через $n!$ і читають «ен-факторіал».

Виберімо два довільні елементи a і b переставлення з n елементів $1, 2, 3, \dots, n$. Кажуть, що має місце *інверсія* (від грецького *inversio* – «перевертання, переставляння»), якщо $a > b$, але в переставленні a передує b , тобто в переставленні порушено порядок розташування чисел за зростанням.

Переставлення називають **парним (непарним)**, якщо воно містить парну (непарну) кількість інверсій. Числа, які утворюють переставлення, зазвичай беруть у круглі дужки.

Наприклад, переставлення $(3, 1, 4, 2)$ містить три інверсії, які утворено такими парами чисел: $(3, 1)$, $(3, 2)$ та $(4, 2)$, тому це переставлення є непарним.

Ще одне переставлення (4, 2, 1, 3), що утворено тими самими чотирма числами, містить чотири інверсії: (4, 2), (4, 1), (4, 3) та (2, 1), отже, воно є парним.

Визначником, або детермінантом n -го порядку квадратної матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$ називають число, яке дорівнює алгебраїчній сумі доданків виду $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$, кожний із яких є добутком n елементів матриці, що вибрані по одному й тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця, водночас добуток беруть зі своїм (із протилежним) знаком, якщо переставлення $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ із других індексів елементів є парним (непарним).

Отже,

$$\Delta A = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^s a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}, \quad (2.1)$$

де s – кількість інверсій у відповідному переставленні $(j_1, j_2, \dots, j_n)$, яке утворено із других індексів елементів матриці за умови, що перші індекси розташовано в порядку зростання.

Доданки алгебраїчної суми (2.1) називають **членами визначника**.

Визначники, як і матрицю, зображають у вигляді таблиці чисел, але на відміну від матриці застосовують прямі дужки, тоді як матрицю записують, застосовуючи круглі або квадратні дужки:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для кращого осмислення наведеного означення розгляньмо детермінанти 2-го та 3-го порядків.

Згідно з означенням (2.1), детермінант 2-го порядку дорівнює сумі добутку елементів головної діагоналі, який треба взяти зі знаком «плюс» (переставлення (1, 2), що утворено із других індексів елементів цього члену визначника, не містить інверсій), і добутку елементів побічної діагоналі, який треба взяти зі знаком «мінус» (переставлення (2, 1), що утворено із других індексів елементів другого члена визначника, містить одну інверсію).

Отже:

$$n = 2: \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} + \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

Праворуч у ф-лі (2.2) наведено геометричну схему, за якою обчислюють визначник 2-го порядку. На цій схемі елементи визначника позначено кружками, а відрізки з'єднують елементи, які розташовані в різних рядках і різних стовпцях і, відповідно, утворюють окремі члени визначника.

Згідно з означенням (2.1) детермінант 3-го порядку має шість членів, оскільки кількість переставлень трьох других індексів елементів матриці дорівнює $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Отже, ф-ла (2.1) набуває такого вигляду:

$$n = 3: \Delta A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right| \quad (2.3)$$

Праворуч у ф-лі (2.3) зображено одну з геометричних схем, за якою зручно обчислювати визначник 3-го порядку. Її називають **правилом трикутників**, або **правилом Саррюса** (П'єр Фредерік Саррюс (1798 – 1861) – відомий французький математик).

На цій схемі, як і для визначника 2-го порядку, елементи визначника позначено кружками, відрізки з'єднують елементи, які розташовані в різних рядках і різних стовпцях, а їхній добуток утворює відповідний член визначника. У першій трійці членів визначника кількість інверсій у переставленнях із других індексів елементів є парною, тому кожен із цих членів беруть зі знаком «плюс», а в другій трійці членів визначника – непарною, тому кожен із них беруть зі знаком «мінус».

Зауваження. Визначником 1-го порядку матриці $A = (a_{ij})_{1 \times 1} = (a_{11})$ є сам елемент, який його становить: $n = 1: \Delta A = |a_{11}| = a_{11}$.



Обчислімо визначник 3-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) \cdot 5 - 5 \cdot 3 \cdot 3 - 0 \cdot (-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot (-4) = -10.$$

Кількість членів детермінанта швидко зростає із підвищенням його порядку. Наприклад, обчислення визначника 4-го порядку потребує підрахунку двадцяти чотирьох його членів: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, а якщо $n = 5$, то $5! = 120$.

Зазначмо, що разом із словосполученням «обчислення визначника» використовують «розкриття визначника» як синонім.

2.2. Властивості визначників

Розгляньмо основні властивості визначників, які доцільно використовувати для спрощення процесу їхнього обчислення.

1 (*про визначник транспонованої матриці*). Визначник транспонованої матриці A^T дорівнює визначнику вихідної матриці A :

$$\Delta A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Ця властивість указує на рівноправність рядків і стовпців визначника, тому в подальшому формулюймо властивості визначника щодо дій над його рядками, адже ті самі властивості поширюють і на дії над стовпцями.

2 (*про зміну знака*). Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки, то матимемо визначник, протилежний за знаком:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\Delta \quad (k \neq s), \quad (2.5)$$

де k і s – номери двох рядків, яких міняють місцями.

3 (*про спільний множник елементів рядка*). Якщо елементи деякого рядка визначника містять спільний множник λ , то його можна винести за знак (символ) визначника.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{k1} & \lambda \cdot a_{k2} & \dots & \lambda \cdot a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Властивість 3 припускає інше формулювання: якщо всі елементи будь-якого рядка визначника помножити на деяке число λ , то вихідний визначник множать на це число λ .

4 (про рівність визначника нулю). Визначник дорівнює нулю, якщо:

а) усі елементи деякого рядка дорівнюють нулю:

$$(\exists i: a_{ij} = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}) \Rightarrow \Delta A = 0; \quad (2.7)$$

б) він містить два або більше рядків з однаковими або пропорційними елементами:

$$(\exists \{i_1, i_2\}: a_{i_1 j} = a_{i_2 j} \quad \text{або} \quad a_{i_1 j} = \lambda \cdot a_{i_2 j} \quad \forall j = \overline{1, n}) \Rightarrow \Delta A = 0. \quad (2.8)$$

5 (про подання визначника як суми двох визначників). Якщо елементи будь-якого рядка визначника (хай це буде i -й рядок) є сумою двох доданків, то цей визначник можна подати у вигляді суми двох визначників того самого порядку, у яких елементи всіх рядків, окрім i -го рядка, є елементами вихідного визначника, а елементами їхніх i -х рядків є доданки, які складають з елементів i -го рядка вихідного визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

6 (про інваріантність (незмінність) визначника). Визначник не змінить значення, якщо до елементів будь-якого його рядка додати відповідні (за номером) елементи іншого рядка, помножені на одне й те саме число k :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{m1} & a_{i2} + ka_{m2} & \cdots & a_{in} + ka_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Дійсно, за властивістю 5 маємо, що вихідний визначник є сумою двох визначників, перший із яких дорівнює вихідному визначникові Δ , а другий містить два рядки із пропорційними елементами a_{mj} і ka_{mj} ($\forall j = \overline{1, n}$), тому за властивістю 4б другий визначник дорівнює нулю.

Як ще одну із властивостей визначників наведемо *теорему Лапласа*. Вона має важливе теоретичне значення і її застосовують під час обчислення визначників, порядок яких є вищим від трьох. Але перш ніж її сформулювати, слід увести означення нових понять.

Мінором елемента a_{ij} визначника n -го порядку (від лат. *minor* – «менший») називають визначник $(n-1)$ -го порядку, який мають із вихідного визначника через вилученням i -го рядка і j -го стовпця, на перетині яких розташований цей елемент, і позначають M_{ij} .

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника n -го порядку називають мінор цього елемента, знак якого збігається зі знаком мінора, якщо сума його індексів $(i+j)$ є парним числом, і з протилежним знаком, якщо ця сума індексів є непарним числом. Алгебраїчне доповнення позначають A_{ij} .

Отже:

$$A_{ij} = \begin{cases} + M_{ij}, & \text{якщо } (i+j) \text{ є парним,} \\ - M_{ij}, & \text{якщо } (i+j) \text{ є непарним,} \end{cases} \quad \text{або} \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (2.11)$$



Обчислимо мінор і алгебраїчне доповнення елемента a_{12} визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вилучаймо з вихідного визначника перший рядок і другий стовпець, на перетині яких розташований елемент a_{12} , тоді визначник 2-го порядку, який у результаті утворено, і є мінором цього елемента. Оскільки для елемента a_{12} сума його індексів є непарною, то алгебраїчне доповнення цього елемента буде мати знак, протилежний знаку його мінора:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ -1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 - 4 \cdot 4 = -21, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 21.$$

Уведені поняття використовують для встановлення важливих тверджень щодо обґрунтування запроваджень матриць і визначників до розв'язання прикладних задач.

Теорема 2.1 (теорема Лапласа про розкриття визначника). Визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця з їхніми алгебраїчними доповненнями:

$$\Delta = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} & \forall i = \overline{1, n}; \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} & \forall j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Доведення виконаймо для $n=3$. З огляду на ф-лу (2.3), маємо:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Згрупуємо попарно члени визначника відносно елементів першого рядка:

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Вирази в круглих дужках, зважаючи на знаки доданків, є алгебраїчними доповненнями, що відповідають елементам a_{11} , a_{12} , a_{13} :

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{33} \\ a_{23} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Аналогічно виконують доведення співвідношення (2.12) для довільного n , будь-яких рядків і стовпців. ■

Наслідок. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) з алгебраїчними доповненнями відповідних (за номером) елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю:

$$\begin{cases} a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0 & \forall i = \overline{1, n}, \text{ якщо } k \neq i; \\ a_{1j}A_{1l} + a_{2j}A_{2l} + \dots + a_{nj}A_{nl} = 0 & \forall j = \overline{1, n}, \text{ якщо } l \neq j. \end{cases} \quad (2.13)$$

Розгляньмо на прикладах способи обчислення визначників, спираючись на властивості визначників і застосовуючи теорему Лапласа. Хоча ці способи доцільно використовувати під час обчислення визначників, порядок яких є вищим за 3-й, але вони спрощують обчислення і визначників нижчого порядку.

1. Застосування теореми Лапласа.



Повернімося до прикладу, що розглядали раніше, і обчислимо визначник 3-го порядку за теоремою Лапласа.

Звернімо увагу на те, що $a_{12} = 0$, тому доцільно розкласти визначник за елементами або першого рядка, або другого стовпця, оскільки в цих випадках буде лише два доданки.

Отже, застосуємо теорему Лапласа до першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = \\ = 1 \cdot (-9 + 4) + 5 \cdot (8 - 9) = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot (-1) = -10.$$

Результати обчислень за означенням (2.3) і теоремою Лапласа (2.12) збіглися.



За теоремою Лапласа обчислення визначника n -го порядку можна завжди звести до обчислення n визначників $(n-1)$ -го порядку, якими є алгебраїчні доповнення елементів вибраного рядка чи стовпця.

Аналогічно розкриття кожного з визначників $(n-1)$ -го порядку зводять до обчислення визначників $(n-2)$ -го порядку, кількість яких становить $(n-1)$, і далі, поки не дійдемо до визначників 1-го порядку – елементів вихідного визначника.

2. Застосування теореми Лапласа із залученням властивості про інваріантність визначника.

Зрозуміло, що обсяг обчислень за ф-лою (2.12) буде меншим, якщо деякі з елементів вибраного рядка дорівнюють нулю, оскільки відповідні їм алгебраїчні доповнення немає потреби обчислювати.

Властивість **6** (про інваріантність визначника) дозволяє зробити такі перетворення, у результаті яких усі елементи довільного рядка чи стовпця, окрім одного, будуть дорівнювати нулю. Елемент a_{rs} , який залишають відмінним від нуля, називають **провідним** елементом, а відповідний рядок із номером r (або стовпець s), у якому стоїть елемент a_{rs} , за допомогою саме якого і здійснюють перетворення, теж називають **провідним**.



Обчислімо визначник 4-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Другий стовпець визначника вже містить нуль ($a_{32} = 0$), отже, візьмімо за провідний елемент $a_{12} = 1$ і зробимо нулями всі інші елементи другого стовпця. Оскільки перший рядок є провідним, то його елементи залишімо без змін, а до елементів другого рядка додаймо відповідні елементи першого, помноживши їх на (-2) . До елементів четвертого рядка додаймо відповідні елементи першого, помноживши їх на (-4) . У результаті маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\cdot(-2) \quad \cdot(-4) \\ \leftarrow \quad \leftarrow}} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -14 & 0 & -5 & -7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -18 & 0 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Тепер розкриваймо визначник за елементами другого стовпця:

$$\Delta = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -14 & -5 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \\ -18 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Отже, замість визначника 4-го порядку слід обчислити один визначник 3-го порядку. Із першого рядка цього визначника винесімо множник (-1) і тоді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ -18 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

За допомогою аналогічних перетворень зводьмо обчислення останнього визначника 3-го порядку до обчислення визначника 2-го порядку. Для цього візьмімо елемент $a_{23} = 1$ за провідний, тоді провідним буде другий рядок, отже, його елементи залишімо без змін. До елементів першого рядка додаймо

відповідні елементи другого, помноживши їх на (-7) , а до елементів третього рядка – елементи другого, помноживши їх на 19:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ -18 & -5 & -19 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow (-7) \cdot 19 \\ \leftarrow 1 \cdot 19 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} -14 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 58 & 33 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тепер розкриваймо цей визначник за елементами третього стовпця, у результаті чого маємо визначник 2-го порядку, який обчислюємо за означенням:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -14 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 58 & 33 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -14 & -9 \\ 58 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 9 \\ 58 & 33 \end{vmatrix} = 14 \cdot 33 - 58 \cdot 9 = -60.$$

3. Застосування теореми Лапласа до обчислення визначника трикутної матриці.

Визначник верхньої трикутної матриці послідовно розкривають за елементами першого стовпця кожного з n визначників, які для такої матриці є алгебраїчними доповненнями елементів головної діагоналі. Тоді вихідний визначник буде подано у вигляді добутку елементів його головної діагоналі:

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \dots = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}. \end{aligned}$$

Таку саму формулу можна записати в разі обчислення визначника нижньої трикутної матриці, якщо послідовно на кожному кроці розкривати визначники (алгебраїчні доповнення) за елементами їхнього першого рядка, які є елементами головної діагоналі вихідного визначника.



Розгляньмо цей спосіб на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow 2 \cdot (-3) \\ \leftarrow 1 \cdot 1 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 12 \end{vmatrix} \xrightarrow{\leftarrow 2 \cdot (-5)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4.$$

Отже, для обчислення визначника n -го порядку можна застосовувати декілька способів, що дозволяє суттєво спростити обчислення. Усі ці способи використовують властивості визначника, а вибір того чи того способу залежить від дослідника.

2.3. Обернена матриця

Квадратну матрицю A називають **неособливою**, або **невиродженою**, якщо її визначник не дорівнює нулю ($\Delta = \det A \neq 0$). Інакше її називають **особливою**, або **виродженою**.

Матрицю A^* , що є транспонованою до матриці, елементами якої є алгебраїчні доповнення елементів матриці A , називають **приєднаною**, або **союзною**, до матриці A :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елементу a_{ij} ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$).

Матрицю A^{-1} називають **оберненою** до матриці A , якщо добуток цієї матриці з матрицею A як зліва, так і справа дорівнює одиничній матриці:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Теорема 2.2 (існування і єдиності оберненої матриці). Будь-яка неособлива матриця A має обернену матрицю A^{-1} , і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$ є невивродженою. Поділімо кожен елемент союзної матриці A^* на визначник Δ матриці A (це можна зробити, оскільки $\Delta \neq 0$):

$$\frac{1}{\Delta} \cdot A^*. \quad (2.14)$$

Доведімо, що матриця, яку визначає співвідношення (2.14), є оберненою до матриці A . За означенням для неї має бути виконано рівність:

$$\frac{A^*}{\Delta} \cdot A = A \cdot \frac{A^*}{\Delta} = E.$$

Для цього розглянемо добуток матриць:

$$A \cdot \frac{A^*}{\Delta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Дійсно, сума добутків елементів i -го рядка матриці A та відповідних елементів j -го стовпця матриці A^* , згідно з теоремою Лапласа, дорівнює визначнику матриці A , якщо $i = j$, а якщо $i \neq j$, то цей добуток дорівнює нулю.

Отже, добуток матриці A з матрицею $\frac{1}{\Delta} \cdot A^*$ дає одиничну матрицю.

Аналогічний результат маємо, якщо розглянемо добуток $\frac{A^*}{\Delta} \cdot A$.

Припустімо тепер, що існує матриця C , яка є відмінною від матриці A^{-1} , але для якої теж є справедливим співвідношення $A \cdot C = C \cdot A = E$. На підставі асоціативності множення матриць приходимо до суперечності:

$$\left. \begin{aligned} C \cdot A \cdot A^{-1} &= C(A \cdot A^{-1}) = C \cdot E = C \\ C \cdot A \cdot A^{-1} &= (C \cdot A)A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1} \end{aligned} \right] \Rightarrow C = A^{-1},$$

тому, матриця C не може бути відмінною від матриці A^{-1} .

Отже, обернена матриця A^{-1} існує лише для невиродженої матриці A , і вона є єдиною. ■

Обернені матриці використовують як у теоретичних дослідженнях, що пов'язані із властивостями матриць, так і під час розв'язання прикладних задач.



Визначмо матрицю, що є оберненою до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

З'ясуємо, чи є матриця A невиродженою. Для цього обчислимо її визначник:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 17.$$

Оскільки $\Delta A \neq 0$, то для матриці A є невиродженою і для неї існує єдина обернена матриця.

Визначмо алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів a_{ij} ($i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3}$) вихідної матриці за ф-лою (2.11):

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Напишімо союзну та обернену матриці:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{17} & \frac{-2}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{2}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{7}{17} \end{pmatrix}.$$

Виконаймо перевірку матриці A^{-1} за її означенням:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2.4. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера

Визначники n -го порядку застосовують під час розв'язання систем n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.15)$$

Теорема 2.3 (правило Крамера). Якщо визначник n -го порядку основної матриці системи є відмінним від нуля ($\Delta \neq 0$), то така система має єдиний розв'язок, який визначають за такою формулою:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Lambda}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \text{тобто} \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Lambda}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Lambda}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Lambda}, \quad (2.16)$$

де Δ_j – визначник, який маємо з визначника основної матриці системи заміною її j -го стовпця на стовпець вільних членів $(b_i)_{n \times 1}$.

Доведення. Покажімо справедливність ф-ли (2.16) для $j=1$. Для цього помножмо ліву і праву частини i -го рівняння ($i=\overline{1, n}$) системи (2.15) на алгебраїчне доповнення A_{i1} елемента першого стовпця визначника Δ основної матриці системи й напишімо суму цих перетворених таким способом рівнянь:

[illegible]

У рівнянні (2.17) коефіцієнт перед невідомим x_1 є розкладом визначника основної матриці системи за елементами першого стовпця, коефіцієнти перед невідомими $x_2, \dots, x_n$ дорівнюють нулю (згідно з наслідком із теореми Лапласа), а вільний член рівняння є розкладом визначника Δ_1 за елементами першого стовпця.

Отже, рівняння (2.17) має такий вигляд:

$$x_1 \cdot \Delta = \Delta_1.$$

Звідси $x_1 = \Delta_1 / \Delta$.

Виконуємо аналогічні перетворення для визначення інших невідомих, у результаті чого маємо:

$$x_j \cdot \Delta = \Delta_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.18)$$

Звідси, поділивши на $\Delta \neq 0$, будемо мати співвідношення (2.16). ■

Зауваження. Правило Крамера вилучає з розгляду випадок, коли $\Delta = 0$.

Із ф-ли (2.18) випливає:

1) якщо основна матриця системи є виродженою, тобто $\Delta = 0$, але хоча б один із визначників Δ_j ($j = \overline{1, n}$) є відмінним від нуля, то система (2.15) є несутімсною, бо принаймні одне з рівнянь у ф-лі (2.16) утрачає сенс: $0 \cdot x_j \neq 0$;

2) якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_j = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}$, то всі рівняння системи мають такий вигляд: $0 \cdot x_j = 0$, отже, система (2.15) є сумісною, але невизначеною, тобто має безліч розв'язків.



Розгляньмо розв'язання СЛАР за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Обчислимо визначник основної матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Оскільки основна матриця системи є невиродженою, то задана система рівнянь має єдиний розв'язок і для його визначення можна застосовувати формули Крамера.

Обчислімо визначники, що відповідають невідомим x_1, x_2, x_3 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 33 & 3 & 2 \\ 23 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 3 & 23 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 33 \\ 3 & 2 & 23 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix} = -2.$$

За ф-лою (2.16) визначмо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

Отже, розв'язком системи є трійка чисел: $x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = 2$. Також можна подати його в матричній формі: $X^T = (5 \ 3 \ 2)$.

2.5. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом оберненої матриці

Нехай систему лінійних алгебраїчних рівнянь (2.15) задано в матричній формі (1.8):

$$A \cdot X = B.$$

Розв'яжімо це матричне рівняння відносно матриці невідомих X . Розгляньмо випадок, коли основна матриця системи є невиродженою, а отже, для неї існує обернена матриця. Виконаймо такі перетворення (зміст перетворень описано в прямих дужках):

$$\begin{aligned} A \cdot X = B &\Rightarrow \left| \text{помножмо обидві частини рівняння зліва на } A^{-1} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \left| \text{застосуємо сполучний закон} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow (A^{-1} \cdot A) X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \left| \text{застосуємо означення оберненої матриці} \right. \\ &\quad \left. \text{та властивість одиничної: } A^{-1} \cdot A = E, E \cdot X = X \right| \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B. \end{aligned}$$

Отже, якщо для основної матриці системи існує обернена матриця, то розв'язок СЛАР, що містить n рівнянь відносно n невідомих, можна визначити за допомогою оберненої матриці за таким співвідношенням:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2.19}$$



Розв'яжімо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь із трьома невідомими за методом оберненої матриці:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Випишімо основну матрицю системи A , матрицю-стовпець невідомих X і матрицю-стовпець вільних членів B :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 33 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця для матриці A існує, оскільки, як було показано раніше, матриця A є невинродженою: $\Delta = -1 \neq 0$.

Визначмо алгебраїчні доповнення елементів матриці A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, & A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \end{aligned}$$

Запишімо союзну матрицю A^* та обернену матрицю A^{-1} :

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -5 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірмо правильність обчислень за означенням оберненої матриці:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, обернену матрицю визначено правильно.

Тепер обчислімо розв'язок системи за ф-лою (2.19):

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язком системи, розглянутої в прикладі, буде єдина трійка чисел: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.



Ключові терміни

Визначник матриці; порядок визначника; парне і непарне переставлення; інверсія; правило трикутників; мінор та алгебраїчне доповнення елемента визначника; властивості визначників; правило Крамера; невинроджена та винроджена матриці; союзна матриця; обернена матриця.



Запитання для самоперевірки

1. Для яких матриць уводять поняття визначника?
2. Що розуміють під визначником 2-го порядку?
3. Як обчислити визначник 3-го порядку за правилом трикутників?
4. Що таке «переставлення з n чисел», або інверсія?
5. Що таке визначник n -го порядку?
6. Що називають мінором елемента визначника?
7. Що називають алгебраїчним доповненням елемента визначника?
8. Яким співвідношенням пов'язано між собою мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника?
9. Чому дорівнює визначник матриці, транспонованої до заданої матриці?
10. У яких випадках визначник дорівнює нулю?
11. Як формулюють властивість визначника про спільний множник елементів рядка (або стовпця)?
12. Як зміниться значення визначника, якщо поміняти місцями два його рядки (або стовпці)?
13. Як формулюють властивість про незмінність значення визначника?
14. Що визначає теорема Лапласа і які є наслідки з неї?

15. Які є способи обчислення визначника?
16. Яким способом обчислюють визначники n -го порядку?
17. Чому дорівнює визначник діагональної матриці?
18. Як розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера?
19. Яку матрицю називають виродженою (невиродженою)?
20. Яку матрицю називають оберненою до заданої матриці?
21. У чому полягає достатня умова існування оберненої матриці?
22. Яку матрицю називають приєднаною, або союзною, матрицею?
23. Як визначити матрицю, що є оберненою до заданої?
24. Як перевірити, що обернену матрицю визначено правильно?
25. Які системи лінійних рівнянь можна розв'язати за допомогою оберненої матриці?
26. За якою формулою визначають розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, заданої в матричній формі?



Тестові завдання до підрозділу 2

1. Укажіть серед наведених далі матриць таку, що має визначник:

а) $F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{pmatrix}$; б) $G = (g_{11} \quad g_{12})^T$; в) $H = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix}$; г) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Укажіть, яку кількість відмінних від нуля мінорів має одинична матриця 3-го порядку:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 7.

3. Для матриці $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ укажіть кількість елементів, для яких знак алгебраїчного доповнення є протилежним знаку його мінора:

а) 2; б) 4; в) 6; г) 8.

4. Задано матрицю $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$. Яке співвідношення визначає алгебраїчне доповнення елемента a_{12} цієї матриці:

а) $a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$; б) $a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$; в) $a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$; г) $a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$?

5. Укажіть серед наведених далі матриць таку, що має обернену:

$$\text{а) } F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. СЛАР задано в матричній формі $A \cdot X = B$, де $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$. Як записати матрицю невідомих такої системи:

$$\text{а) } X = (x_1 \ x_2 \ x_3); \quad \text{б) } X = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T; \quad \text{в) } X^T = (x_{ij})_{3 \times 3}?$$

7. СЛАР задано в матричній формі: $A \cdot X = B$. За якою формулою визначають розв'язок цієї системи:

$$\text{а) } X = B \setminus A; \quad \text{б) } X = B \cdot A^{-1}; \quad \text{в) } X = A^{-1} \cdot B; \quad \text{г) } X = (A \cdot B)^{-1}?$$

8. СЛАР задано в матричній формі $A \cdot X = B$, основна матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$ якої є невиродженою. Скільки розв'язків має така система, якщо серед визначників Δ_j ($j = \overline{1, n}$) є один, який дорівнює нулю:

$$\text{а) один;} \quad \text{б) жодного;} \quad \text{в) } n-1; \quad \text{г) } n?$$

9. Однорідну СЛАР задано в матричній формі $A \cdot X = O$, основна матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$ якої така, що $\Delta A = 0$. Визначте кількість розв'язків, які має така система, якщо один із визначників Δ_j ($j = \overline{1, n}$) не дорівнює нулю:

$$\text{а) єдиний розв'язок;} \quad \text{б) розв'язків немає;} \quad \text{в) } n-1; \quad \text{г) таке неможливо.}$$

10. Не виконуючи обчислень, а спираючись лише на властивості визначників, укажіть серед наведених далі визначників ті, які є рівними між собою,

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta C = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta F = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{а) } \Delta A = \Delta B; \quad \text{б) } \Delta B = \Delta C; \quad \text{в) } \Delta A = \Delta C; \quad \text{г) } \Delta A = \Delta F.$$

Література: [1 – 4; 10; 11; 14; 15; 17; 20 – 23].

3. Системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими: дослідження на сумісність та розв'язання

Основні питання:

3.1. Ранг матриці: означення, способи визначення.

3.2. Дослідження систем m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими.

Теорема Кронекера – Капеллі.

3.3. Загальний і частинні розв'язки системи. Базисні й опорні розв'язки.

3.4. Дослідження та розв'язання системи лінійних рівнянь за методами Гаусса та Жордана – Гаусса.

3.5. Лінійна балансова модель (модель Леонтьєва).

3.1. Ранг матриці: означення, способи визначення

Під час моделювання реальних процесів за допомогою математичного апарату лінійної алгебри загальна кількість невідомих може бути як меншою, так і більшою, порівняно з кількістю рівнянь (залежно від природи явища та умов, у яких воно відбулося). Тому в прикладних задачах виникає потреба в дослідженні систем лінійних алгебраїчних рівнянь, основна матриця яких може бути не лише квадратною, але й прямокутною.

Крім того, може статися, що не всі рівняння системи, що описують певне явище, є незалежними одне від одного. Наприклад, процес виробництва за всіма назвами продукції можна охарактеризувати за обсягом продукції, що вироблена за перший рік (перше рівняння), другий рік (друге рівняння) та за обидва роки одночасно (третє рівняння). Кожне з пари перших рівнянь є носієм інформації, що є незалежною від тієї, яку описує інше, а третє рівняння містить відомості, які є сумою перших двох рівнянь.

У зв'язку із цим виникає потреба у виявленні таких рівнянь, що містять інформацію, яка є незалежною від інформації, що містять інші рівняння, і в подальшому досліджувати саме таку систему рівнянь. Перш ніж перейти до розгляду цього питання, уведемо поняття рангу матриці.

Виберімо в прямокутній матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ довільним чином k рядків і k стовпців, де число k не може перевищувати менше з чисел m і n : $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$. Визначник k -го порядку, який утворено з елементів матриці A , що належать цим k рядкам і k стовпцям, називають **мінором k -го порядку** матриці A і позначають $M^{(k)}$.



Розгляньмо мінори різних порядків матриці A :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця має розмір 3×4 , тому найбільший порядок мінора, який можна утворити з елементів цієї матриці, дорівнює 3 (для побудови мінора 4-го порядку не вистачає ще одного рядка). Можна записати чотири різні мінори 3-го порядку, оскільки є чотири способи вибрати три стовпці матриці із чотирьох. Наприклад, один із мінорів 3-го порядку маємо з елементів, які стоять на перетині трьох рядків і перших трьох стовпців матриці A , тобто відкидаємо останній стовпець:

$$M^{(3)} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Кількість мінорів 2-го порядку для цієї матриці становить 18 (спробуйте самостійно їх визначити), а кількість мінорів 1-го порядку дорівнює кількості елементів матриці, тобто їх 12.

Оскільки за означенням мінор матриці – це визначник, то він може дорівнювати або не дорівнювати нулю. У розглянутому прикладі $M^{(3)} = 32$. Однак якщо вилучити третій стовпець, то для цієї самої матриці маємо мінор 3-го порядку, який дорівнює нулю, оскільки його третій рядок містить самі нулі. Зрозуміло, що всі мінори нульової матриці дорівнюють нулю.

У прикладних задачах інтерес становлять мінори що відмінні від нуля, оскільки саме з такими мінорами пов'язано поняття рангу матриці.

Рангом матриці A називають число r , яке дорівнює найвищому порядку відмінного від нуля мінора цієї матриці, і позначають так:

$$\text{rang} A = r, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Це означає, що матриця має ранг r , якщо є хоча б один мінор порядку r , який не дорівнює нулю, а всі мінори $(r+1)$ -го порядку, якщо вони є, дорівнюють нулю.



Не слід плутати ранг матриці з мінором, за яким визначають її ранг.

Будь-який відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці, називають **базисним мінором**:

$$M^{(k)} - \text{базисний мінор} : \Leftrightarrow M^{(k)} \neq 0, k = \text{rang } A. \quad (3.2)$$

Для визначення рангу матриці над нею зазвичай виконують так звані елементарні перетворення, завдяки яким значно спрощують визначення її базисних мінорів.



Повернімося до попереднього прикладу і визначмо ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для цієї матриці не існує мінорів 4-го порядку, однак є чотири мінори 3-го порядку. Для того щоб визначити ранг матриці, не треба обчислювати всі мінори найвищого з можливих порядку. Достатньо вказати один, який є відмінним від нуля:

$$M^{(3)} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 \cdot 1 = 32 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3.$$

Під *елементарними перетвореннями рядків матриць* розуміють:

- 1) переставлення (взаємне) двох рядків матриці;
- 2) множення елементів будь-якого рядка на константу за умови, що вона не дорівнює нулю $\lambda \neq 0$;
- 3) вилучення (або включення) рядка, який складають лише нулі, а також рядка, елементи якого є пропорційними або рівними елементам будь-якого іншого рядка матриці;
- 4) додавання до елементів будь-якого рядка відповідних (за номером) елементів іншого рядка, помножених на число $\lambda = \text{const}$.

Матриці A і B називають **еквівалентними** ($A \sim B$), якщо кожен з них можна одержати з іншої за допомогою скінченної кількості елементарних перетворень.

Теорема 3.1 (про ранги еквівалентних матриць). Ранги еквівалентних матриць є рівними між собою:

$$A \sim B \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } B. \quad (3.3)$$

Теорему наводьмо без доведення.

Застосування цієї теореми до визначення рангу матриці здійснюють за таким алгоритмом: виконують елементарні перетворення, метою яких є зведення матриці до верхньої трикутної або до утворення в ній діагональної матриці (можливо, із точністю до розташування рядків). Це дозволяє виділити мінор найвищого порядку, що є відмінним від нуля, тобто той, порядок якого визначає ранг матриці. Тоді ранг останньої матриці дорівнює рангу вихідної матриці.



Визначмо ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Оскільки елементи другого стовпця є пропорційними відповідним елементам третього стовпця, то один із цих стовпців можна вилучити, водночас ранг матриці не змінить значення.

Виконаймо еквівалентні перетворення матриці A , із метою зведення її до верхньої трикутної:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, усі мінори 3-го порядку матриці A дорівнюють нулю.

Тепер можна вибрати мінор 2-го порядку, щодо якого й без підрахунку видно, що він є відмінним від нуля:

$$M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rang} A = 2.$$

Нагадаймо, що розширена матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь містить усі числові параметри системи, тому виконувати операції над рядками розширеної матриці все одно, що виконувати ті самі операції над рівняннями системи. Результатом елементарних перетворень вихідної системи алгебраїчних рівнянь S_1 є система S_2 , яка має ті самі розв'язки, що й вихідна система, та не має інших.

Дві системи рівнянь S_1 та S_2 називають **еквівалентними** ($S_1 \sim S_2$), якщо всі розв'язки однієї із систем є розв'язками іншої й навпаки. За цим означенням несумісні системи також вважають еквівалентними.

Теорема 3.2 (*критерій еквівалентності*). Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь S_1 і S_2 є еквівалентними тоді й тільки тоді, якщо є еквівалентними розширені матриці $A_1 | B_1$ і $A_2 | B_2$ цих систем:

$$S_1 \sim S_2 \iff A_1 | B_1 \sim A_2 | B_2. \quad (3.4)$$

Теорему наводьмо без доведення.



Здійснивши елементарні перетворення розширеної матриці заданої системи лінійних алгебраїчних рівнянь, маємо розширену матрицю еквівалентної системи.

3.2. Дослідження систем m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими.

Теорема Кронекера – Капеллі

У підрозд. 1 та 2 цього розділу було розглянуто методи розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), у яких кількість рівнянь збігалася з кількістю невідомих ($m = n$), а визначник основної матриці системи був відмінним від нуля. Такі системи рівнянь мають єдиний розв'язок, а можливість його визначення за правилом Крамера або методом оберненої матриці є гарантованою умовою невиродженості основної матриці системи. Це означає, що для такої системи ранг основної матриці дорівнює кількості невідомих і кількості рівнянь цієї системи.

Розгляньмо загальний випадок, коли кількість рівнянь m може збігатися, а може й не збігатися з кількістю невідомих n , тобто числа m і n можуть бути пов'язаними будь-яким зі співвідношень ($m < n$, $m = n$ або $m > n$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{\scriptsize} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow A \cdot X = B, \quad (3.5)$$

де $A=(a_{ij})_{m \times n}$ – основна матриця системи;

$X = (x_j)$ – матриця-стовпець невідомих ($j = \overline{1, n}$);

$B = (b_i)$ – матриця-стовпець вільних членів ($i = \overline{1, m}$).

Для дослідження системи на сумісність і визначеність використовують теорему Кронекера – Капеллі.

Теорема 3.3 (Кронекера – Капеллі, або критерій сумісності системи). Система лінійних алгебраїчних рівнянь є сумісною тоді й тільки тоді, якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангу її розширеної матриці:

$$\text{СЛАР сумісна} \Leftrightarrow \text{rang } A = \text{rang } A|B.$$

Теорему наводьмо без доведення.

Зауваження. Із теореми Кронекера – Капеллі й означення рангу випливають такі твердження:

1) система є *несумісною* тоді й тільки тоді, якщо ранг основної матриці системи не дорівнює рангу її розширеної матриці;

2) якщо ранги матриць збігаються і дорівнюють кількості невідомих ($\text{rang } A = \text{rang } A|B = n$), то система має *єдиний розв'язок*;

3) якщо ранги матриць є рівними між собою, але меншими за кількість невідомих ($\text{rang } A = \text{rang } A|B < n$), то система має *безліч розв'язків*.

Основна матриця системи $A = (a_{ij})_{m \times n}$ є частиною розширеної матриці $A|B = (a_{ij} \mid b_i)_{m \times (n+1)}$, тому для визначення рангів матриць A і $A|B$ виконують елементарні перетворення не окремо для кожної з матриць, а досліджують розширену матрицю системи. Зрозуміло, що ранг основної матриці системи не може бути вищим за ранг розширеної матриці.

Розгляньмо особливості розв'язку однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Нагадаймо, що систему рівнянь називають однорідною, якщо в системі (3.5) стовпець вільних членів є нульовим стовпцем ($b_i = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$):

1) однорідна система рівнянь *завжди є сумісною*, оскільки розв'язок $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ перетворює кожне рівняння системи на тотожність. Такого самого висновку можна дійти за теоремою Кронекера – Капеллі, оскільки ранг основної матриці системи не зміниться, якщо до неї приєднати нульовий стовпець вільних членів.

Розв'язок однорідної СЛАР, за яким $x_j = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}$, називають **нульовим**, або **тривіальним**;

2) якщо однорідна система має *ненульовий* розв'язок, тобто існує хоча б один елемент матриці X , який не дорівнює нулю ($\exists j = \overline{1, n} : x_j = \alpha_j \neq 0$), то ця система має безліч розв'язків, що містять елемент такого вигляду: $x_j = c \cdot \alpha_j$, де c – довільна стала. Тобто така система є невизначеною;

3) якщо $X_1^T = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ і $X_2^T = (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n)$ є розв'язками системи (1.10), тобто $A \cdot X_1 = O$ і $A \cdot X_2 = O$, то їхня лінійна комбінація $X = c_1 X_1 + c_2 X_2$, де c_1 та c_2 – довільні сталі, теж є розв'язком цієї системи.

Дійсно, зважаючи на властивості операцій над матрицями, маємо:

$$A \cdot X = A(c_1 X_1 + c_2 X_2) = A(c_1 X_1) + A(c_2 X_2) = c_1 A \cdot X_1 + c_2 A \cdot X_2 = O.$$

Проведімо дослідження СЛАР на прикладі.



До трьох будівельних майданчиків потрібно привезти пісок, що зберігають на двох складах. Запаси піску на складах задано матрицею $A = (250 \ 170)$, а потреби кожного будівельного майданчика – матрицею $B = (200 \ 100 \ 120)$. Дослідімо, чи можна скласти такий план перевезень, щоб задовольнити всіх споживачів. І якщо це можливо, то скільки є способів, якими це можна зробити.

Подаймо вихідні дані у вигляді табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Вихідні дані задачі

Постачальники	Будівельні майданчики			Запаси
	1	2	3	
Склад 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	250
Склад 2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	170
Потреби	200	100	120	420

Елементи матриці невідомих $X = (x_{ij})_{2 \times 3}$ визначають обсяги піску x_{ij} , що потрібно перевезти з i -го складу ($i = 1, 2$) до j -го будмайданчика ($j = 1, 2, 3$).

Оскільки загальні запаси піску $250 + 170 = 420$ дорівнюють загальним потребам $200 + 100 + 120 = 420$, то задача є збалансованою, а її математичну модель можна подати у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 200, \\ x_{12} + x_{22} = 100, \\ x_{13} + x_{23} = 120, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 250, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 170. \end{cases}$$

Отже, маємо систему п'яти лінійних алгебраїчних рівнянь із шістьма невідомими.

Кожне з рівнянь системи має певну економічну інтерпретацію, а саме: перші три рівняння, що містять суми за стовпцями матриці невідомих, означають, що потреби в піску кожного із трьох будівельних майданчиків задовольняють у повному обсязі, а останні два рівняння, які містять суми за рядками, означають, що запаси піску, які є на кожному із двох складів, повністю вивезено (див. табл. 3.1).

Для відповіді на запитання задачі потрібно дослідити систему рівнянь на сумісність, визначити ранги основної й розширеної матриць, порівняти їх між собою та з кількістю невідомих.

Напишімо розширену матрицю системи та виконаймо елементарні перетворення, із метою зведення її до верхньої трикутної матриці:

$$\begin{aligned}
 A|B &= \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 120 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 170 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 170 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 170 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -170 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 170 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -170 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow M^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \end{array} \right) \neq 0.
 \end{aligned}$$

Отже, ранги основної матриці системи й розширеної матриці є рівними між собою і дорівнюють чотирьом, що менше за кількість невідомих:

$$\text{rang } A = \text{rang } A|B = 4 < n = 6.$$

За теоремою Кронекера – Капеллі така система є сумісною, але невизначеною. Це означає, що є нескінченна множина планів перевезень, за якими здійснюють постачання піску для забезпечення потреб усіх споживачів і водночас вивезення всіх запасів.

3.3. Загальний і частинні розв'язки системи.

Базисні й опорні розв'язки

Особливо важливим під час дослідження систем, які описують реальні економічні процеси, є випадок, коли система має безліч розв'язків, тобто ранги основної та розширеної матриць системи є рівними, але нижчими за кількість невідомих:

$$\text{rang } A = \text{rang } A|_{B < n}.$$

Це дає змогу порівнювати розв'язки системи за певним критерієм (наприклад, різні плани постачання однорідної продукції можна порівняти за критерієм витрат на перевезення або за критерієм часу) і вибрати найкращий.

Розгляньмо систему рівнянь, для якої кількість рівнянь є меншою за кількість невідомих ($m < n$). Виберімо в основній матриці системи базисний мінор r -го порядку (r – ранг основної матриці системи й розширеної матриці водночас і $r < n$). Будьмо вважати, що базисний мінор утворюють елементи, що розташовані в лівому верхньому куті основної матриці. Це не порушує загальності, оскільки якщо така умова не є виконаною, то рівняння можна поміняти місцями, а номери невідомих змінити, щоб досягти бажаного результату. Тоді r перших рівнянь системи є лінійно незалежними, тобто вони містять усю потрібну інформацію, а решту рівнянь можна отримати з перших r через елементарні перетворення розширеної матриці. Тому доцільно залишити лише ті r рівнянь, які відповідають базисному мінору. У цих рівняннях невідомі x_j ($j = \overline{1, r}$), коефіцієнти перед якими утворюють базисний мінор, залишаймо в лівих частинах рівнянь, а решту невідомих x_j ($j = \overline{r+1, n}$) перенесімо в праві частини рівнянь.

Отже, система набуває такого вигляду:

[illegible]

Невідомі x_j ($j = \overline{1, r}$), коефіцієнти перед якими є елементами базисного мінору, називають **базисними**, а інші невідомі – **вільними**. Якщо систему рівнянь (3.6) розв'язати відносно базисних невідомих, то розв'язок системи буде мати такий вигляд:

[illegible]

де $f_1, f_2, \dots, f_r$ – лінійні функції від вільних невідомих $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ і параметрів $b_1, b_2, \dots, b_r$, які є вільними членами перших r рівнянь системи.

Розв'язок (3.7) можна отримати будь-яким із відомих методів, наприклад, за правилом Крамера або методом оберненої матриці, оскільки визначником основної матриці системи є базисний мінор.

Розв'язок невизначеної системи рівнянь, за яким базисні невідомі виражають через вільні невідомі, називають **загальним розв'язком** системи.

Частинним розв’язком системи називають розв’язок, який отримують із загального за конкретних (фіксованих) значень вільних невідомих. Частинний розв’язок системи, у якому всім вільним невідомим надано нульові значення, називають **базисним розв’язком**.

Якщо в базисному розв'язку всі змінні набувають невід'ємних значень, то такий розв'язок називають **опорним**. Оскільки в економічних дослідженнях застосовують показники, що можуть набувати лише невід'ємних значень, то опорні розв'язки становлять найбільший інтерес, отже, виникає потреба в методах їхнього визначення.

3.4. Дослідження та розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методами Гаусса та Жордана – Гаусса

Серед методів лінійної алгебри, що застосовують до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, найбільш відомими є *метод послідовного виключення невідомих (метод Гаусса)* та його модифікація – *метод повного виключення невідомих (метод Жордана – Гаусса)*. Перевагою цих методів є те, що дослідження системи рівнянь на сумісність здійснюють у поєднанні з визначенням її розв'язку.

Алгоритм прямого ходу методу Гаусса передбачає таку послідовність дій:

1. Записують розширену матрицю системи:

Серед елементів a_{i1} ($i = \overline{1, m}$) матриці A існує хоча б один, що не дорівнює нулю, бо інакше система не містила б невідоме x_1 . Якщо $a_{11} = 0$, то першим у системі записують те рівняння, у якому коефіцієнт перед x_1 не дорівнює нулю, і вважають, що умова $a_{11} \neq 0$ є виконаною. Далі ділять перший рядок розширеної матриці на a_{11} , дістаючи нове значення цього елемента: $a_{11}^{(1)} = 1$. Тепер елементи нового першого рядка послідовно множать на числа $-a_{i1}$, де $i = \overline{2, m}$, і додають результат до кожного елемента рядків, що розташовані нижче, відповідно до їхнього номера i . У результаті цих перетворень маємо матрицю, яка є еквівалентною вихідній. У першому стовпці цієї матриці перший елемент дорівнює одиниці, а всі інші – нулю, тобто невідоме x_1 виключено з усіх рівнянь, за винятком першого. Результатом виконаних перетворень є система рівнянь, що має такий вигляд:

2. Якщо $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то другий рядок розширеної матриці системи (3.9) ділять на це число і отримують перед невідомим x_2 коефіцієнт, що дорівнює одиниці. Далі за допомогою другого рядка через елементарні перетворення змінюють рядки розширеної матриці, що розташовані нижче за другий, так, щоб усі вони містили в другому стовпчику самі нулі.

Отже, виключають невідоме x_2 з усіх рівнянь системи, окрім першого та другого.

3. За допомогою послідовного виконання аналогічних операцій (ітерацій) щодо решти невідомих зводять основну матрицю системи (за умови, що $\text{rang } A = \text{rang } A|B = n$) до верхньої трикутної:

[illegible]

або до трапецієподібного вигляду, якщо $\text{rang } A = \text{rang } A|B < n$:

[illegible]

4. Невідоме x_n визначають з останнього рівняння системи (3.10) (для системи (3.11) це невідоме x_r) і підставляють його в попереднє рівняння системи, із якого дістають значення невідомого x_{n-1} (або x_{r-1} , відповідно). Цей ланцюг послідовного визначення невідомих виконують доти, доки з першого рівняння не дістануть значення x_1 . Визначення невідомих за системою рівнянь (3.10) або (3.11) через послідовну підстановку вже визначених значень невідомих у рівняння з меншим номером називають **зворотним ходом** методу Гаусса. Під час застосування методу Гаусса прямий хід виконують на розширеній матриці або в спеціальній таблиці, де записано елементи розширеної матриці, тоді як зворотний хід виконують на системі рівнянь.

Якщо внаслідок елементарних перетворень основна матриця системи набуває трикутного вигляду (це можливо, якщо її ранг дорівнює кількості невідомих), то система рівнянь має єдиний розв'язок. У разі трапецієподібної матриці система є сумісною, але невизначеною.

Зауваження. Якщо під час виконання прямого ходу методу Гаусса було отримано суперечливе рівняння: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$, де $b_i \neq 0$, то така система є несумісною.



Проведімо дослідження системи рівнянь на сумісність і в разі її сумісності визначмо розв'язок цієї системи:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Напишімо розширену матрицю системи та виконаймо прямий хід методу Гаусса:

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & -4 & -3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & -4 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Звідси маємо:

$$M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отже, $\text{rang } A = \text{rang } A|B = 2 < n = 4$. За теоремою Кронекера – Капеллі ця система рівнянь є сумісною, але невизначеною, тобто має безліч розв'язків. У такому разі розв'язати систему означає визначити її загальний розв'язок.

За трапецієподібною розширеною матрицею відновімо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + x_3 + 0,5x_4 = 5, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Оскільки коефіцієнти перед невідомими x_1 і x_2 утворюють базисний міnor, то саме ці невідомі вибираймо як базисні, тоді як невідомі x_3 і x_4 є вільними.

Тепер виконаймо зворотний хід методу Гаусса:

$$x_2 = 3 - 3x_3 - 2x_4,$$

$$x_1 = 5 - x_3 - 0,5x_4 - 0,5(3 - 3x_3 - 2x_4) = 3,5 + 0,5x_3 + 0,5x_4.$$

Записуймо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = 3,5 + 0,5x_3 + 0,5x_4, \\ x_2 = 3 - 3x_3 - 2x_4, \\ x_3 \in \mathbf{R}, \\ x_4 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Звідси можна визначити будь-який частинний розв'язок, надавши вільним невідомим довільні значення. Наприклад, якщо у загальному розв'язку покласти $x_3 = x_4 = 0$, то базисні невідомі набувають значень $x_1 = 3,5$ та $x_2 = 3$.

Отже, маємо базисний розв'язок: $X = (3,5 \ 3 \ 0 \ 0)^T$. Оскільки серед компонентів цього розв'язку немає від'ємних, то він є опорним.

Виконання зворотного ходу за методом Гаусса, якщо його розглядати як подальше перетворення розширеної матриці системи, є еквівалентним зведенню основної матриці системи до одиничної. Саме в цьому полягає сутність методу *повного виключення невідомих*, або *методу Жордана – Гаусса*.

Якщо за допомогою елементарних перетворень звести основну матрицю системи (3.10) до одиничної матриці n -го порядку (у цьому разі $\text{rang } A = \text{rang } A|B = n$), тобто:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = b_1^{(n)}, \\ x_2 = b_2^{(n)}, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = b_n^{(n)}, \end{array} \right. \quad (3.12)$$

то звідси маємо такий єдиний розв'язок системи: $X = \left(b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \dots, b_n^{(n)} \right)^T$.

Якщо ж $\text{rang } A = \text{rang } A|B < n$, то в результаті елементарних перетворень розширеної матриці системи за методом Жордана – Гаусса на місці основної матриці системи (3.11) буде одинична матриця r -го порядку:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} + a_{1r+1}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{1n}^{(r)} x_n = b_1^{(r)}, \\ + a_{2r+1}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(r)} x_n = b_2^{(r)}, \\ \dots \\ x_r + a_{rr+1}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r)} x_n = b_r^{(r)}. \end{array} \quad (3.13)$$

Такий вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь дає змогу легко визначити базисні невідомі через вільні.



Повернімося до попереднього прикладу і продовжуймо перетворення розширеної матриці, щоб отримати в основній матриці системи одиничну:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0,5 & -0,5 & 3,5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

За останньою матрицею запишімо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0,5x_3 - 0,5x_4 = 3,5, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Одиничну матрицю утворюють коефіцієнти перед невідомими x_1 та x_2 , тому ці невідомі беруть за базисні, а невідомі x_3 та x_4 є вільними. Тоді загальний розв'язок системи має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 3,5 + 0,5x_3 + 0,5x_4, \\ x_2 = 3 - 3x_3 - 2x_4, \\ x_3 \in \mathbf{R}, \\ x_4 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Загальний розв'язок можна визначити, якщо вибрати як базисні невідомі будь-яку іншу пару невідомих. Наприклад, будьмо вважати базисними невідомі x_1 та x_4 , тоді еквівалентні перетворення розширеної матриці потрібно виконати так, щоб саме коефіцієнти перед цими невідомими утворювали одиничну матрицю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,25 & 0,25 & 0 & 4,25 \\ 0 & 0,5 & 1,5 & 1 & 1,5 \end{array} \right).$$

У цьому разі буде ще один загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = 4,25 - 0,25x_2 - 0,25x_3, \\ x_4 = 1,5 - 0,5x_2 - 1,5x_3, \\ x_2 \in \mathbf{R}, \\ x_3 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$



Кількість загальних розв'язків сумісної СЛАР, ранг основної матриці якої дорівнює r , визначають за кількістю ненульових мінорів r -го порядку в основній матриці системи.



Повернімося до задачі про визначення плану постачання піску до трьох будівельних майданчиків.

Під час дослідження системи рівнянь на сумісність за теоремою Кронекера – Капеллі на місці розширеної матриці системи маємо трапецієвидну матрицю. Продовжуймо елементарні перетворення матриці, щоб отримати в основній матриці системи одиничну матрицю:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 170 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 170 \end{array} \right).$$

Одиничну матрицю утворюють перші чотири стовпці, тому як базисні невідомі берімо x_{11} , x_{12} , x_{13} , x_{21} , тоді невідомі x_{22} , x_{23} є вільними. Згідно з формулюванням задачі вільні невідомі, як і базисні, не можуть набувати від'ємних значень. Відповідно, загальний розв'язок має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} = 30 + x_{22} + x_{23}, \\ x_{12} = 100 - x_{22}, \\ x_{13} = 120 - x_{23}, \\ x_{21} = 170 - x_{22} - x_{23}, \\ x_{22} \geq 0, \quad x_{23} \geq 0. \end{cases}$$

Надамо вільним невідомим нульових значень, тоді маємо базисний розв'язок, який подано у вигляді матриці:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 100 & 120 \\ 170 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цей розв'язок є опорним, оскільки всі його елементи є невід'ємними.

Порівняймо суми за рядками матриці X із запасами на складах, а суми за стовпцями – із потребами будівельних майданчиків (див. табл. 3.1). Отже,

визначено план постачання, за яким усі запаси зі складів будуть вивезеними та всі споживачі зможуть задовольнити свої потреби.

Елементарні перетворення розширеної матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь доцільно виконувати в таблиці, що містить, окрім елементів розширеної матриці, ще додатковий стовпець, елементами якого є суми елементів за кожним рядком матриці. Такі суми називають **контрольними сумами**. Над контрольними сумами кожного рядка виконують ті самі операції, що й над усіма іншими елементами цього рядка, а отриманий результат порівнюють із сумою елементів у рядку після перетворення. Якщо помилок в обчислюваннях немає, то після перетворення значення елементів стовпця контрольних сум дорівнюють сумі елементів відповідних рядків. Така перевірка дає змогу контролювати правильність обчислень під час виконання кожного перетворення.



Розгляньмо розв'язання СЛАР за методом Жордана – Гаусса, реалізацію якого подано таблицею, на прикладі системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Напишімо коефіцієнти перед невідомими та вільні члени рівнянь у таблицю (табл. 3.2). Стовпець «Примітки» містить інформацію про те, унаслідок яких саме елементарних перетворень було визначено рядок, поряд із яким записано цю примітку.

Таблиця 3.2

Схема Жордана – Гаусса

№ з/п	x_1	x_2	x_3	Вільні члени	Контрольні суми	Примітки
I	4	3	2	33	42	–
II	3	2	1	23	29	
III	1	1	2	12	16	
IV	1	1	2	12	16	III
V	0	–1	–5	–13	–19	IV · (–3) + II
VI	0	–1	–6	–15	–22	IV · (–4) + I
VII	1	0	–3	–1	–3	IV + V
VIII	0	1	5	13	19	V · (–1)
IX	0	0	–1	–2	–3	VI – V
X	1	0	0	5	6	VII + IX · (–3)
XI	0	1	0	3	4	VIII + IX · (5)
XII	0	0	1	2	3	IX · (–1)

На місці основної матриці системи через елементарні перетворення отримано одиничну матрицю 3-го порядку. Це означає, що ранги основної матриці системи та розширеної матриці дорівнюють трьом і дорівнюють кількості невідомих, тому за теоремою Кронекера – Капеллі система є сумісною і має єдиний розв’язок. Згідно з останньою ітерацією, розв’язок системи є таким:

$$X = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T = (5 \ 3 \ 2)^T.$$



Повернімося до математичної моделі задачі про використання ресурсів, що наведена в підрозд. 1 цього розділу:

$$\begin{cases} 176,00x_1 + 236,70x_2 + 279,90x_3 + 144,50x_4 = 17\,039, \\ 11,45x_1 + 15,22x_2 + 12,91x_3 + 34,63x_4 = 1183, \\ 6,00x_1 + 7,00x_2 + 7,00x_3 + 6,50x_4 = 513, \\ 3,75x_1 + 5,04x_2 + 5,86x_3 + 3,58x_4 = 365. \end{cases}$$

Для розв’язання цієї системи можна застосувати будь-який із розглянутих методів, тому що визначник основної матриці системи є відмінним від нуля ($\Delta = -4,739$), відповідно, система має єдиний розв’язок:

$$x_1 = 20,30; \ x_2 = 32,4; \ x_3 = 17,2; \ x_4 = 6,8.$$

Згідно з економічним змістом задачі, значення невідомих мають бути цілими числами, тому остаточною відповіддю буде наближений розв’язок.

Отже, для найбільш повного використання матеріальних ресурсів, що є в наявності, підприємство має виготовляти: $x_1 = 20$ електродвигунів АІР80, $x_2 = 32$ електродвигуни АІР90, $x_3 = 17$ електродвигунів АІР100 та $x_4 = 6$ електронасосів БЦ 1,1-20.

Зауваження. Для розв’язання реальних економічних задач, математичними моделями яких є СЛАР із довільними дійсними коефіцієнтами та довільною кількістю рівнянь і невідомих, використовують пакети таких прикладних програм, як MS Excel, MATLAB, Mathcad, Mathematica, Maple та ін.

Метод Жордана – Гаусса можна також застосовувати для визначення матриці, що є оберненою до заданої, якщо вона існує.

Нехай матриця X є матрицею, оберненою до матриці A , тобто $X = A^{-1}$, однак її елементи є невідомими. Згідно з означенням оберненої матриці, має місце матрична рівність:

$$A \cdot X = E. \tag{3.14}$$

Позначмо j -й стовпець оберненої матриці X через X_j , $j = \overline{1, n}$, а матриці E – через E_j і вважаймо їх елементами відповідних матриць.

Тоді ці матриці можна записати в такому вигляді:

$$X = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n), \quad E = (E_1 \ E_2 \ \dots \ E_n).$$

З огляду на правило множення матриць, рівність (3.14) можна розглядати як n систем лінійних алгебраїчних рівнянь $A \cdot X_j = E_j$ ($j = \overline{1, n}$) для визначення стовпців матриці A^{-1} . Для всіх цих систем основною матрицею є матриця A , а відрізняють їх тільки стовпець вільних членів E_j , тому процес перетворення розширених матриць цих систем $A | E_j$ ($j = \overline{1, n}$) можна виконувати для всіх матриць одночасно.

Помножмо зліва обидві частини рівності (3.14) на матрицю A^{-1} , яка є оберненою до матриці A , тоді: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot E$. Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, то отримуймо нову рівність: $E \cdot X = A^{-1} \cdot E$, або

$$X = A^{-1} \cdot E. \quad (3.15)$$

Звідси випливає спосіб визначення оберненої матриці за методом Жордана – Гаусса: до заданої матриці A справа дописують одиничну матрицю E , порядок якої дорівнює порядку матриці A , а далі через елементарні перетворення матриці $A | E$ на місці вихідної матриці A отримують одиничну, тоді на місці одиничної буде матриця A^{-1} :

$$A | E \sim E | A^{-1}.$$



Застосуємо метод Жордана – Гаусса для визначення матриці, що є оберненою до матриці A :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Допишімо до матриці A справа одиничну матрицю E та виконаймо елементарні перетворення так, щоб на місці матриці A утворилася одинична матриця.

Отже,

$$A|E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & 0 & -4 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Звідси

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислення також можна виконувати в таблиці з використанням контрольних сум. Якщо в процесі елементарних перетворень матриці контроль не здійснювали, то після визначення оберненої матриці слід перевірити, чи виконано співвідношення $A^{-1} \cdot A = E$:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -12+12+1 & -9+8+1 & -6+4+2 \\ 20-18-2 & 15-12-2 & 10-6-4 \\ -4+3+1 & -3+2+1 & -2+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, перевірка підтвердила, що ця матриця дійсно є оберненою до вихідної матриці.

3.5. Лінійна балансова модель (модель Леонтьєва)

Одним із відомих прикладів застосування апарату лінійної алгебри в економічних дослідженнях є побудована Василем Леонтьєвим (1906 – 1999) модель міжгалузевого балансу, яка характеризує міжгалузеві виробничі зв'язки економіки країни. Цю модель також називають **статичною моделлю Леонтьєва багатогалузевої економіки**, або моделлю **витрати-випуск**. Модель Леонтьєва

є основою планування і прогнозування міжгалузевих виробничих зв'язків як у грошовій, так і в натуральній формах. За розроблення моделі «витрати-випуск» та її застосування до розв'язання важливих економічних проблем Леонт'єву 1973 року було присуджено Нобелівську премію з економіки.

Розгляньмо принципи побудови моделі міжгалузевого балансу.

Нехай є n галузей промисловості, кожна з яких виробляє свій вид продукції. Уведемо такі позначення:

a_{ij} – технологічні коефіцієнти внутрішньогалузевого споживання, або прямі (внутрішні) витрати, тобто величини, які вказують на кількість одиниць продукції i -ї галузі ($i = \overline{1, n}$), що використовують для виробництва однієї одиниці продукції j -ї галузі ($j = \overline{1, n}$);

x_{ij} – внутрішнє споживання, тобто обсяг продукції i -ї галузі, що використовують у виробництві продукції j -ї галузі, зокрема, і всередині самої галузі ($j = \overline{1, n}$);

x_i – валовий випуск кожної з галузей, тобто загальний обсяг продукції, що виробляє i -та галузь ($i = \overline{1, n}$). Відповідно,

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}; \quad (3.16)$$

y_i – кінцевий продукт i -ї галузі, або попит, тобто кількість одиниць готової продукції i -ї галузі, яку споживають зовні n галузей-виробників; це може бути експорт, споживання населенням країни або на поповнення (з тією чи тією метою) товарних запасів та ін.

Валовий обсяг продукції i -ї галузі дорівнює сумі обсягів продукції, яку споживають n галузей у процесі виробництва, та кінцевого продукту, тобто

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.17)$$

Рівняння виду (3.17) називають **співвідношеннями балансу**.

Зважаючи на економічний зміст задачі, маємо такі обмеження: $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$ та $a_{ij} \geq 0$.

Уведемо позначення: X – матриця-стовпець валового випуску всіх видів продукції; A – матриця прямих витрат (технологічні коефіцієнти); Y – матриця-стовпець кінцевого попиту.

Тоді співвідношення балансу (3.17) набуде вигляду матричного рівняння:

$$X = A \cdot X + Y, \quad (3.18)$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Матричне рівняння (3.18) називають **балансовою моделлю виробництва**, або **моделлю міжгалузевого балансу виробництва**.

Основним завданням міжгалузевого балансу є визначення такої матриці валової продукції X , яка за відомої матриці прямих витрат A визначає задану матрицю кінцевої продукції Y .

Рівняння (3.18) можна переписати в такому вигляді:

$$(E - A)X = Y. \quad (3.19)$$

Якщо $\Delta(E - A) \neq 0$, то за методом оберненої матриці маємо розв'язок системи:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y = S \cdot Y. \quad (3.20)$$

Матрицю $S = (E - A)^{-1}$ називають **матрицею повних витрат**, а різницю матриць повних і прямих витрат, тобто матрицю $K = S - A$ називають **матрицею непрямих**, або **опосередкованих витрат**.

За співвідношенням (3.20) можна розглядати валовий випуск продукції x_i як функцію від запланованих значень кінцевого попиту y_j :

$$x_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} y_j.$$

Матриця $S = (E - A)^{-1}$ дозволяє досліджувати зміни валового продукту, залежно від кінцевого попиту, тому її ще називають **матричним мультиплікатором**.



Розгляньмо приклад побудови міжгалузевого балансу.

Нехай задано матрицю прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ і матрицю $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$,

що описує кінцеву продукцію на плановий період (потреби). Установімо планові обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві постачання та чисту продукцію галузей.

Спочатку визначмо матрицю $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,5 \\ -0,3 & 0,8 \end{pmatrix},$$

та її визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,9 & -0,5 \\ -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,9 \cdot 0,8 - (-0,3) \cdot (-0,5) = 0,57.$$

Оскільки матриця $E - A$ є невиродженою, то для неї існує обернена матриця $(E - A)^{-1}$, яка є матрицею повних витрат:

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,57} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,404 & 0,877 \\ 0,526 & 1,579 \end{pmatrix}.$$

За ф-лою (3.20) обчислімо матрицю X валової продукції:

$$X = \begin{pmatrix} 1,404 & 0,877 \\ 0,526 & 1,579 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Із ф-ли (3.16) випливає, що $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$.

Отже, можна визначити міжгалузеві постачання x_{ij} :

$$\begin{pmatrix} 0,1 \cdot 1000 & 0,5 \cdot 1000 \\ 0,3 \cdot 1000 & 0,2 \cdot 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 500 \\ 300 & 200 \end{pmatrix}.$$

Чиста продукція є різницею між валовою продукцією галузі та витратами всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Отримані результати можна записати в таблицю міжгалузевого балансу (табл. 3.3).

Таблиця міжгалузевого балансу

Галузі	I	II	Кінцевий продукт	Валовий продукт
I	100	500	400	1000
II	300	200	500	1000
Чиста продукція	600	300		
Валова продукція	1000	1000		

Зауваження. Однією з вимог, на яку потрібно зважати під час аналізу балансових рівнянь, є *продуктивність матриці міжгалузевого балансу*. Це пов'язано з тим, що для визначення плану виробництва, згідно із яким кожна галузь виробляє певний обсяг кінцевого продукту, система балансових рівнянь (3.18) повинна мати невід'ємний розв'язок.

Матрицю прямих витрат $A = (a_{ij})_{m \times n}$, усі елементи якої є невід'ємними, називають **продуктивною**, якщо для довільної матриці кінцевого попиту Y із невід'ємними елементами існує хоча б один розв'язок системи (3.19), тобто така матриця X валового випуску всіх видів продукції, усі елементи якої є додатними. У такому разі й модель Леонтьєва називають **продуктивною**.

Окрім терміна «продуктивна матриця міжгалузевого балансу», використовують також терміни «продуктивна економіка», «продуктивна економічна модель».



Ключові терміни

Міnor матриці; ранг матриці; базисний міnor; елементарні перетворення матриць; еквівалентні матриці; теорема Кронекера – Капеллі (критерій сумісності СЛАР); визначена та невизначена системи рівнянь; сумісна та несумісна системи рівнянь; загальний і частинний розв'язки; базисні та вільні змінні; базисний розв'язок; опорний розв'язок; метод Гаусса; метод Жордана – Гаусса; однорідна система рівнянь; тривіальний розв'язок; модель міжгалузевого балансу (модель «витрати-випуск», модель Леонтьєва); балансова модель виробництва; продуктивна матриця прямих витрат; продуктивна економічна модель; матричний мультиплікатор.



Запитання для самоперевірки

1. Як записати систему m лінійних рівнянь з n невідомими в стислій формі з використанням знака $\sum$ та в матричній формі?
2. Що називають мінором k -го порядку матриці?
3. Що називають рангом матриці?
4. Який мінор називають базисним?
5. Скільки базисних мінорів має матриця рангу r ?
6. Які невідомі називають базисними, а які – вільними?
7. У чому полягає теорема Кронекера – Капеллі?
8. Яку систему рівнянь називають сумісною (несумісною)?
9. Яку систему рівнянь називають визначеною (невизначеною)?
10. Який розв'язок невизначеної системи називають загальним, частинним, базисним, опорним?
11. Якщо система є сумісною, але невизначеною, то скільки існує загальних розв'язків цієї системи та як їх визначити?
12. У чому полягає метод Гаусса?
13. Яка відмінність між прямим і зворотним ходом методу Гаусса?
14. У чому полягає метод Жордана – Гаусса?
15. Яка відмінність між методом Гаусса і методом Жордана – Гаусса?
16. Як за методом Жордана – Гаусса визначити обернену матрицю?
17. Яку систему лінійних рівнянь називають однорідною?
18. Що називають тривіальним розв'язком однорідної системи рівнянь?



Тестові завдання до підрозділу 3

1. Серед наведених далі матриць A , B , C , D та E виберіть таку, ранг якої дорівнює 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

- а) A , C та E ; б) B та E ; в) C та D ; г) E .

2. Укажіть усі мінори елементів визначника $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, що є відмінними від нуля:

- а) M_{11} , M_{22} та M_{33} ; б) M_{21} , M_{23} , M_{31} та M_{33} ;
в) M_{11} , M_{13} , M_{21} та M_{31} ; г) M_{12} , M_{22} та M_{32} .

3. Для визначника матриці $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ укажіть усі алгебраїчні доповнення його елементів, знак кожного з яких за означенням є протилежним знаку мінора цього самого елемента:

- а) $A_{12} = -M_{12}$, $A_{21} = -M_{21}$; б) $A_{11} = -M_{11}$, $A_{22} = -M_{22}$;
в) немає; г) усі.

4. Укажіть, яке співвідношення має місце між рангом основної матриці A і рангом розширеної матриці $A|B$ СЛАР:

- а) завжди $\text{rang} A = \text{rang} A|B$; б) $\text{rang} A = 1 + \text{rang} A|B$;
в) $\text{rang} A \leq \text{rang} A|B$; г) $\text{rang} A \geq \text{rang} A|B$.

5. Укажіть, яке співвідношення має місце між рангами основної матриці A системи, розширеної матриці $A|B$ та кількістю невідомих n , якщо СЛАР є сумісною, але невизначеною (m – кількість рівнянь):

- а) $\text{rang} A = \text{rang} A|B = m < n$; б) $\text{rang} A < \text{rang} A|B = m = n$;
в) $\text{rang} A = m > \text{rang} A|B = n$; г) $\text{rang} A = \text{rang} A|B = m = n$.

6. Задано СЛАР, для якої виконано умову: $\text{rang} A = \text{rang} A|B = 2 < 3$. Укажіть, у якому вигляді можна подати один із загальних розв'язків цієї системи:

- а) $\begin{cases} x_1 = a, \\ x_2 = b, \\ x_3 = c; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = a + k \cdot x_3, \\ x_2 = b + l \cdot x_3, \\ x_3 \in \mathbf{R}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 = a, \\ x_2 = b, \\ x_3 = 0. \end{cases}$

7. Задано систему рівнянь, для якої щодо рангів основної матриці системи, розширеної матриці та кількості невідомих виконано співвідношення: $\text{rang}A = \text{rang}A|B = 3 < n = 5$. Укажіть, яку загальну кількість базисних розв'язків має така система:

- а) 2; б) 4; в) 5; г) 10.

8. Закінчіть речення, щоб утворилося правильне твердження.

«Метою прямого ходу методу Гаусса є перетворення основної матриці системи до вигляду ...»:

- а) матриці, яка є оберненою до основної матриці системи;
б) матриці невідомих, що відповідає розв'язку системи;
в) одиничної матриці;
г) верхньої трикутної матриці.

9. Закінчіть речення, щоб утворилося правильне твердження.

«У результаті реалізації методу Жордана – Гаусса на місці основної матриці системи маємо ...»:

- а) матрицю, яка є оберненою до основної матриці системи;
б) матрицю невідомих, що відповідає розв'язку системи;
в) одиничну матрицю;
г) верхню трикутну матрицю.

10. Закінчіть речення, щоб утворилося правильне твердження.

«Унаслідок елементарних перетворень під час реалізації методу Жордана – Гаусса ...»:

- а) не змінюють множину розв'язків СЛАР, якій відповідає ця матриця;
б) не змінюють визначник основної матриці СЛАР;
в) знижують ранги основної й розширеної матриць;
г) завжди мають єдиний розв'язок СЛАР.

Література: [1 – 4; 10; 11; 14; 15; 17; 20 – 23].

4. Лінійні (векторні) n -вимірні простори

Основні питання:

- 4.1. Лінійні n -вимірні простори: основні означення.
- 4.2. Лінійна залежність і незалежність системи векторів.
- 4.3. Базис n -вимірного простору. Розкладання вектора за базисом.

4.1. Лінійні n -вимірні простори: основні означення

У шкільному курсі математики поняття вектора означали як напрямлений відрізок. Положення (розташування) вектора на прямій ($\mathbf{R}^1$), площині ($\mathbf{R}^2$) чи в просторі ($\mathbf{R}^3$) описували, відповідно, одним, двома чи трьома числами, які є координатами вектора.

Математичний підхід до вивчення різних явищ (процесів) навколишнього світу, зокрема й економічних, потребує узагальнення поняття вектора. Це пов'язано зі збільшенням кількості його координат. Таке узагальнення вже не припускає геометричної інтерпретації, але є зручним для математичного моделювання.

Вектором вимірності n , або **n -вимірним вектором $\bar{a}$** , називають сукупність n дійсних чисел a_i , $i = \overline{1, n}$, що впорядковані за номером i . Відповідно, числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ називають **координатами вектора**. Позначають n -вимірні вектори малими літерами латинського алфавіту зі значком вектора – рискою (стрілкою) – згори, або виділяють їх жирним шрифтом, а координати вектора записують у круглих дужках у стовпець або в рядок:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n). \quad (4.1)$$

Згідно з означенням, n -вимірний вектор можна розглядати як матрицю-стовпець розміру $n \times 1$ або як матрицю-рядок розміру $1 \times n$ і, навпаки, названі матриці розглядати як вектори.

Отже, для n -вимірних векторів залишають чинними введені для матриць означення і дії над матрицями.

Нульовим вектором $\bar{0}$, або **нуль-вектором**, називають n -вимірний вектор, усі координати якого дорівнюють нулю: $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Два вектори $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ однієї вимірності називають **рівними**, якщо збіжними є їхні координати з однаковими індексами:

$$\bar{a} = \bar{b} \quad :\Leftrightarrow \quad a_i = b_i \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (4.2)$$

Розгляньмо *лінійні операції над n -вимірними векторами*. До них належать додавання векторів та множення вектора на скаляр.

1. Сумою n -вимірних векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ та $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ називають вектор $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ тієї самої вимірності, кожену координату якого визначають як суму координат векторів-доданків, що мають однакові індекси:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} \quad :\Leftrightarrow \quad c_i = a_i + b_i \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (4.3)$$

Отже, $\bar{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.

Наслідок. Для будь-якого вектора $\bar{a}$ маємо: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.

2. Добутком вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ **зі скаляром** $\lambda \in \mathbf{R}$ називають вектор $\bar{c} = \lambda \cdot \bar{a}$, кожна координата якого є добутком координати вектора $\bar{a}$ зі скаляром λ :

$$\bar{c} = \lambda \cdot \bar{a} \quad :\Leftrightarrow \quad \bar{c} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (4.4)$$

Наслідок. Якщо $\bar{a} = \bar{0}$ і скаляр $\lambda \in \mathbf{R}$, то $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$. Для будь-якого вектора $\bar{a}$ і скаляра $\lambda = 0$ маємо: $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

Вектори $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ називають **протилежними** один одному, або **взаємно протилежними**, якщо їхні відповідні координати відрізняє множник (-1) , тобто

$$\begin{aligned} \bar{b} = -\bar{a} & :\Leftrightarrow \quad b_i = -a_i \quad \forall i = \overline{1, n}, \\ \bar{a} = -\bar{b} & :\Leftrightarrow \quad a_i = -b_i \quad \forall i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Сумою взаємно протилежних векторів є нульовий вектор тієї самої вимірності: $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$.

Різницю векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ розглядають як суму вектора $\bar{a}$ і вектора $-\bar{b}$, що є протилежним вектору $\bar{b}$:

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}) \quad :\Leftrightarrow \quad c_i = a_i + (-b_i) \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Вектори $\bar{a}$ і $\bar{c}$ називають **колінеарними**, якщо для будь-якого $\lambda \neq 0$ виконано рівність $\bar{c} = \lambda \cdot \bar{a}$. Згідно з означенням, координати колінеарних векторів, що мають однакові індекси, є пропорційними:

$$\frac{c_i}{a_i} = \lambda, \text{ де } \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \text{ або } c_i = \lambda \cdot a_i \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Якщо $n \leq 3$, то геометрично це означає, що вектори лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

У разі, якщо $\lambda = 1$, маємо рівні вектори.

Результатом виконання лінійних операцій над n -вимірними векторами є вектори тієї самої вимірності, що й вихідні вектори. Як і дії над матрицями, лінійні операції над векторами підпорядковано *асоціативному (сполучному), комутативному (переставному) та дистрибутивному (розподільному)* законам:

- 1) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \bar{a} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{a}$;
- 2) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;
- 3) $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$;
- 4) $\lambda_1(\lambda_2 \bar{a}) = \lambda_2(\lambda_1 \bar{a}) = (\lambda_1 \lambda_2) \bar{a}$;
- 5) $\lambda \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \cdot \bar{a} + \lambda \cdot \bar{b}$,

(4.5)

де $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – n -вимірні вектори;

λ_1 , λ_2 – сталі.

Сукупність усіх n -вимірних векторів із дійсними координатами, для яких визначено лінійні операції (4.3) та (4.4), називають **n -вимірним (лінійним) векторним простором** і позначають $\mathbf{R}^n$, де n визначає вимірність простору.

Аналогічно тому, як раніше було введено поняття добутку матриць, для векторів n -вимірного лінійного простору вводять поняття скалярного добутку. Нагадаймо, що умовою існування добутку матриць є рівність кількості стовпців першої матриці й кількості рядків другої матриці. Цю вимогу виконано, якщо

розглядати добуток вектора-рядка $\bar{a}$ на вектор-стовпець $\bar{b}$, які належать простору однієї вимірності.

Скалярним добутком двох n -вимірних векторів називають число, яке дорівнює сумі добутків їхніх однакових за номером координат, і позначають символом $(\bar{a}, \bar{b})$ або $\bar{a} \cdot \bar{b}$:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (4.6)$$

Тобто, скалярний добуток векторів позначають точкою між векторами: $(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

Добуток $(\bar{a}, \bar{a})$ називають **скалярним квадратом** вектора.

Довжиною $|\bar{a}|$, або **модулем**, n -вимірного вектора $\bar{a}$ називають арифметичний квадратний корінь із його скалярного квадрата:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})},$$

тобто

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}. \quad (4.7)$$

Одиничним n -вимірним вектором, або **ортом**, називають вектор $\bar{a}^0$, який є колінеарним заданому вектору $\bar{a}$, а його довжина дорівнює одиниці:

$$\bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}.$$

Зведення будь-якого ненульового вектора до одиничного називають його **нормуванням**.

Серед одиничних векторів виокремлюють вектори, для яких одна з координат дорівнює одиниці, а всі інші – нулю. Такі вектори позначають малою літерою $\bar{e}$ з індексом, що вказує на номер координати, яка дорівнює одиниці.

У просторі $\mathbf{R}^n$ існує n різних n -вимірних одиничних векторів:

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \bar{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1). \quad (4.8)$$

Зокрема, у тривимірному просторі такі вектори називають **ортами координатних осей** і позначають:

$$\bar{i} = (1, 0, 0), \quad \bar{j} = (0, 1, 0), \quad \bar{k} = (0, 0, 1).$$

Кутом між двома векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають кут $\varphi = \bar{a} \wedge \bar{b}$, що визначають таким співвідношенням:

$$\varphi = \arccos \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}. \quad (4.9)$$

Згідно із (4.9), скалярний добуток можна розглядати як спільну числову характеристику двох векторів.

Властивості скалярного добутку:

- 1) $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$;
- 2) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$;
- 3) $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$;
- 4) $(\lambda \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \lambda \bar{b}) = \lambda (\bar{a}, \bar{b})$, де $\lambda \in \mathbf{R}$;
- 5) $(\lambda \bar{a} + \mu \bar{b}, \bar{c}) = \lambda (\bar{a}, \bar{c}) + \mu (\bar{b}, \bar{c})$, де $\lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}$.

Лінійний векторний простір, для якого визначено скалярний добуток векторів із властивостями (4.10), називають **евклідовим простором**.

У теорії лінійних просторів будь-яку множину векторів однакової вимірності називають **системою векторів**.

Нехай є система, яку складають n векторів, що належать простору $\mathbf{R}^m$. У такому разі вимірність простору позначають через m , а через n – кількість векторів системи. Систему з n векторів, що мають вимірність m , можна розглядати як матрицю розміру $m \times n$, стовпцями якої є m -вимірні вектори, і навпаки:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

де $\bar{a}_j = (a_{ij})_{m \times 1}$, $j = \overline{1, n}$.

За допомогою системи векторів (4.11) систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими можна подати у *векторній формі*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

або стисло:

$$x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots + x_n \bar{a}_n = \bar{b}.$$

Дійсно, якщо за правилами додавання векторів і множення на скаляр помножити кожний вектор $\bar{a}_j$ на x_j ($j = \overline{1, n}$), а потім записати суму результатів і прирівняти відповідні координати векторів у лівій і правій частинах рівності, то отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1.6). Розв'язком такої системи буде n -вимірний вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Зауваження. На основі теорії n -вимірних лінійних просторів можна побудувати всю теорію матриць, зокрема матричну алгебру, теорію систем лінійних алгебраїчних рівнянь тощо. Тому **лінійною алгеброю**, основи якої ми розглядаємо, називають розділ математики, об'єктом вивчення якого є лінійні (векторні) простори, а предметом – розроблення відповідних алгебраїчних методів для встановлення властивостей таких просторів загалом та їхніх елементів зокрема.

4.2. Лінійна залежність і незалежність системи векторів

Нехай є система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$, які належать простору $\mathbf{R}^m$, та дійсні числа (скаляри) k_j , $j = \overline{1, n}$. Довільний m -вимірний вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$, називають **лінійною комбінацією** векторів системи, якщо його можна подати у вигляді суми добутків чисел k_j на вектори $\bar{a}_j$:

$$\bar{b} = k_1 \bar{a}_1 + k_2 \bar{a}_2 + \dots + k_n \bar{a}_n = \sum_{j=1}^n k_j \bar{a}_j. \quad (4.13)$$

Систему векторів називають **лінійно залежною**, якщо хоча б один із її векторів є лінійною комбінацією інших. Інакше, якщо в системі векторів немає жодного, який би був лінійною комбінацією інших, то систему векторів називають **лінійно незалежною**.

Теорема 4.1 (про лінійну залежність системи векторів). Якщо серед чисел k_j ($j = \overline{1, n}$) існує хоча б одне, що не дорівнює нулю, і виконано таку рівність:

$$k_1 \bar{a}_1 + k_2 \bar{a}_2 + \dots + k_n \bar{a}_n = \bar{0} \quad \text{або} \quad \sum_{j=1}^n k_j \bar{a}_j = \bar{0}, \quad (4.14)$$

то система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ є лінійно залежною.

Доведення. Нехай у рівності (4.14) серед чисел k_j ($j = \overline{1, n}$) існують числа, що є відмінними від нуля. Виберімо одне з них, неважливо, яке саме. Нехай цим числом буде k_1 .

Помножмо ліву і праву частини рівності (4.14) на дріб $\frac{1}{k_1} \neq 0$:

$$\frac{1}{k_1} (k_1 \bar{a}_1 + k_2 \bar{a}_2 + \dots + k_n \bar{a}_n) = \frac{1}{k_1} \bar{0} \Rightarrow \bar{a}_1 + \frac{k_2}{k_1} \bar{a}_2 + \dots + \frac{k_n}{k_1} \bar{a}_n = \bar{0}.$$

Звідси маємо:

$$\bar{a}_1 = -\frac{k_2}{k_1} \bar{a}_2 - \dots - \frac{k_n}{k_1} \bar{a}_n,$$

а згідно з означенням (4.13) це означає, що система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ є лінійно залежною, оскільки вектор $\bar{a}_1$ є лінійною комбінацією інших векторів системи. ■

Наслідок із теореми 4.1. Система векторів є лінійно незалежною, якщо векторна рівність $\sum_{j=1}^n k_j \bar{a}_j = \bar{0}$ є виконаною тільки в разі, якщо всі числа k_j у цій рівності дорівнюють нулю, тобто: $k_j = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}$.

Доведення. Припустімо, що система векторів є лінійно незалежною і водночас існують $k_j \neq 0$ ($j = \overline{1, n}$). Тоді за теоремою 4.1 маємо вектори $\bar{a}_j$, які є лінійною комбінацією інших векторів системи, отже, має місце лінійна залежність векторів, а це суперечить умові. ■

Розв'язання задачі про дослідження системи векторів на лінійну незалежність зводять до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$k_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + k_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
[illegible]
$$\bar{a}_1 = (1, 2, 3)^T, \bar{a}_2 = (4, 5, 6)^T, \bar{a}_3 = (7, 8, 9)^T.$$
$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \bar{0}.$$

Звідси маємо таку систему рівнянь відносно коефіцієнтів k_j ($j=1, 2, 3$):

$$\begin{cases} k_1 + 4k_2 + 7k_3 = 0, \\ 2k_1 + 5k_2 + 8k_3 = 0, \\ 3k_1 + 6k_2 + 9k_3 = 0. \end{cases}$$

Обчислимо визначник основної матриці системи:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0.$$

Оскільки $\Delta A = 0$, то це означає, що однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має безліч розв'язків.

Перетворення основної матриці системи за методом Жордана – Гаусса дозволяє визначити кількість лінійно незалежних векторів у заданій системі векторів:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Ранг основної матриці системи $r = 2 < 3$ є меншим ніж кількість векторів, тому система містить лише два лінійно незалежні вектори. За останнім перетворенням є такі співвідношення щодо коефіцієнтів:

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0, \\ k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_3, \\ k_2 = -2k_3. \end{cases}$$

Підставивши ці коефіцієнти у векторну рівність (4.14), маємо:

$$k_3 \bar{a}_1 - 2k_3 \bar{a}_2 + k_3 \bar{a}_3 = \bar{0}.$$

Отже, вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ та $\bar{a}_3$ є лінійно залежними, і будь-який один із цих векторів можна подати у вигляді лінійної комбінації двох інших. Наприклад, поділивши останню рівність на $k_3 \neq 0$, визначмо вектор $\bar{a}_1$ як лінійну комбінацію векторів $\bar{a}_2$ та $\bar{a}_3$:

$$\bar{a}_1 = 2\bar{a}_2 - \bar{a}_3.$$

Розгляньмо питання про найбільшу кількість лінійно незалежних векторів, яку може містити система n -вимірних векторів.

$$\bar{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^T, \quad j = \overline{1, m}.$$
$$k_1 \bar{a}_1 + k_2 \bar{a}_2 + \dots + k_m \bar{a}_m = \bar{0}.$$
[illegible]

1. Якщо кількість векторів є більшою за вимірність простору ($m > n$), то ранг основної матриці однорідної системи рівнянь не буде перевищувати кількість рядків, а також і кількість невідомих: $r \leq n < m$. У цьому разі система має безліч розв'язків, серед яких є і нетривіальні, тобто серед чисел k_j ($j = \overline{1, m}$) існують такі, що є відмінними від нуля. Отже, за теоремою 4.1 така система векторів є лінійно залежною.

Із здійсненого аналізу випливає, що найбільша кількість лінійно незалежних векторів дорівнює вимірності лінійного простору.

4.3. Базис n -вимірного простору. Розкладання вектора за базисом

Поняття «базис» (від грецького *basis* – «основа») є одним із фундаментальних понять теорії векторних просторів. Будь-яку систему n лінійно незалежних n -вимірних векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ називають **базисом** лінійного простору $\mathbf{R}^n$. Визначник, утворений із координат векторів базису, є відмінним від нуля, тому що сукупність векторів містить n лінійно незалежних векторів і будь-який інший вектор є лінійною комбінацією базисних векторів.

Теорема 4.2 (про розкладання n -вимірного вектора за базисом). Довільний вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ простору $\mathbf{R}^n$ можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів базису $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ і до того ж єдиним способом.

Доведення. Згідно з означенням лінійної комбінації системи векторів (4.13), треба показати існування єдиного набору чисел k_j ($j = \overline{1, n}$), таких, що сума добутків цих чисел із векторами базису дає вектор $\bar{b}$:

$$k_1 \bar{a}_1 + k_2 \bar{a}_2 + \dots + k_n \bar{a}_n = \bar{b}. \quad (4.16)$$

У рівнянні (4.16) подаймо вектори $\bar{a}_j$ ($j = \overline{1, n}$) та вектор $\bar{b}$ через їхні координати:

$$k_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + k_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

і напишімо відповідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

[illegible]

Оскільки визначник основної матриці системи (4.18) є відмінним від нуля (за умовою вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ утворюють базис простору), то система рівнянь є сумісною і має єдиний розв'язок, яким є набір чисел $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, що є координатами вектора $\bar{b}$ за цим базисом. ■

Подання вектора $\bar{b}$ у вигляді лінійної комбінації векторів базису (4.16) називають **розкладом вектора за базисом**, а числа k_j ($j = \overline{1, n}$) – **коефіцієнтами розкладу**, або **координатами вектора $\bar{b}$** в цьому базисі.

Систему n -вимірних одиничних векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ називають **одиничним базисом простору $\mathbf{R}^n$** . Одиничний базис є окремим випадком так званих **ортогональних базисів**, тобто таких, для яких скалярний добуток довільних двох базисних векторів дорівнює нулю: $\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j = 0 \quad \forall i \neq j$. Ортогональний базис із нормованих векторів називають **ортонормованим**.

Запис n -вимірного вектора у вигляді $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, тобто подання його в координатній формі, можна розглядати як розклад вектора $\bar{a}$ за ортонормованим базисом.



Визначення базису простору і розкладання вектора за базисом можна виконувати одночасно аналогічно тому, як вибір базисних невідомих і визначення загальних розв'язків СЛАР здійснюють під час застосування методів Гаусса та Жордана – Гаусса.



Здійснімо розкладання вектора $\bar{b} = (5, 13, 6)^T$ за векторами $\bar{a}_1 = (1, 3, 2)^T$, $\bar{a}_2 = (1, -1, 3)^T$, $\bar{a}_3 = (2, 0, 1)^T$, якщо вони утворюють базис.

Перевірмо, чи утворюють вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ та $\bar{a}_3$ базис простору. Якщо так, то визначмо координати вектора $\bar{b}$ в цьому базисі.

Оскільки векторів чотири, а вимірність простору дорівнює трьом, то кількість лінійно незалежних векторів не буде перевищувати трьох.

Для розв'язання задачі запишімо вектор $\bar{b}$ як лінійну комбінацію векторів $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ та $\bar{a}_3$:

$$\bar{b} = x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + x_3 \bar{a}_3,$$

де x_1, x_2, x_3 – невідомі коефіцієнти розкладу – координати вектора $\bar{b}$ за умови, що вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ утворюють базис.

Подаймо вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ та вектор $\bar{b}$ через їхні координати (див. ф-лу (4.17)), у результаті чого маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (4.18) відносно координат вектора $\bar{b}$:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 = x_1 + x_2 + 2x_3, \\ 13 = 3x_1 - x_2 + 0x_3, \\ 6 = 2x_1 + 3x_2 + x_3. \end{cases}$$

Перевірку векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ на лінійну незалежність та визначення координат вектора $\bar{b}$ у базисі $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ можна виконувати одночасно. Для цього запишімо розширену матрицю системи та виконаймо її перетворення за методом Жордана – Гаусса:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 13 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & \textcircled{18} & 18 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Завдяки елементарним перетворюванням над рядками розширеної матриці на місці основної матриці системи отримано одиничну матрицю 3-го порядку, тому визначник вихідної матриці є відмінним від нуля. Отже, система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ є лінійно незалежною, тому вона утворює базис простору $\mathbf{R}^3$. Розклад вектора $\bar{b}$ за цим базисом має такий вигляд: $\bar{b} = 4\bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3$.

Отже, у базисі $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ вектор $\bar{b}$ має такі координати: $\bar{b} = (4, -1, 1)^T$.

В іншому базисі координати вектора $\bar{b}$ будуть іншими. До речі, в умові задачі всі вектори було задано їхніми координатами в ортонормованому базисі. Наприклад, $\bar{b} = (5, 13, 6)^T$ означає, що $\bar{b} = 5\bar{i} + 13\bar{j} + 6\bar{k}$.



Координати будь-якого вектора з $\mathbf{R}^n$ можна розглядати як коефіцієнти його розкладу за ортонормованим базисом.

Перехід до нового базису. Визначення базисних розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Подамо довільний вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ простору $\mathbf{R}^n$ у вигляді лінійної комбінації векторів базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$:

$$\bar{b} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + \dots + b_n\bar{e}_n,$$

де b_j ($j = \overline{1, n}$) – координати вектора $\bar{b}$ в цьому базисі.

З'ясуймо, як можна виконати перехід від одного базису лінійного простору до іншого і визначити координати вектора $\bar{b}$ в новому базисі за відомими координатами цього вектора у вихідному ортонормованому базисі.

Нехай у просторі $\mathbf{R}^n$ є два базиси: вихідний $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ і новий $\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \dots, \bar{e}_n^*$. Кожен із векторів нового базису можна подати як лінійну комбінацію векторів вихідного базису:

[illegible]

Напишімо систему (4.19) у матричному вигляді:

$$E^* = A \cdot E,$$

де

$$E = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad E^* = \begin{pmatrix} \bar{e}_1^* \\ \bar{e}_2^* \\ \vdots \\ \bar{e}_n^* \end{pmatrix}.$$

Неособливу матрицю A називають **матрицею переходу** від вихідного базису E до нового E^* . Перехід від нового базису до вихідного виконують за такою формулою: $E = A^{-1} \cdot E^*$.

Можна показати, що зв'язок між координатами вектора в різних базисах визначають такими співвідношеннями:

$$\bar{b} = A^T \cdot \bar{b}^*, \quad \bar{b}^* = (A^T)^{-1} \cdot \bar{b}, \quad (4.20)$$

де $\bar{b}^* = (b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*)^T$ – вектор $\bar{b}$ з координатами в новому базисі E^* .

Перехід до нового базису широко використовують у задачах лінійного програмування, а також інших задачах математичних методів в економіці.



Ⓒ Нехай вектор $\bar{b} = (5, 13, 6)^T$ задано в ортонормованому базисі векторів $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)^T$. Визначмо координати вектора $\bar{b}$ у базисі з векторів $\bar{a}_1 = (1, 3, 2)^T$, $\bar{a}_2 = (1, -1, 3)^T$, $\bar{a}_3 = (2, 0, 1)^T$ за допомогою матриці переходу.

У попередньому прикладі було показано, що вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ утворюють базис. Опишімо зв'язок між базисом із векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ та ортонормованим базисом за допомогою системи векторних рівнянь:

$$\begin{cases} \bar{a}_1 = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3, \\ \bar{a}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3, \\ \bar{a}_3 = 2\bar{e}_1 \quad + \bar{e}_3. \end{cases}$$

Матриця переходу від базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ та $\bar{e}_3$ до базису $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ є основною матрицею системи векторних рівнянь.

Отже,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначмо для цієї матриці транспоновану матрицю A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Delta A^T = 18 \neq 0$, то для неї існує обернена матриця. Визначмо її:

$$(A^T)^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 11 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

За співвідношенням (4.20) визначмо координати вектора $\bar{b}$ в базисі векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ та $\bar{a}_3$:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 11 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 72 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо розкладання вектора за новим базисом для визначення базисних розв'язків СЛАР.

Запишімо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у векторній формі:

$$x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots + x_n \bar{a}_n = \bar{b}, \quad (4.21)$$

де x_j – невідомі системи, або коефіцієнти розкладу вектора $\bar{b}$ за векторами $\bar{a}_j$;

$\bar{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$ ($j = \overline{1, n}$) – коефіцієнти перед невідомими – вектори, які утворюють основну матрицю системи;

$\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ – вектор-стовпець вільних членів.

Систему лінійних рівнянь називають **зведеною до одиничного базису**, якщо серед векторів $\bar{a}_j$ є одиничний базис.

Система має єдиний розв'язок тільки в разі, якщо кількість невідомих системи дорівнює вимірності векторів $\bar{a}_j$ ($n = m$), тоді ранг основної матриці системи дорівнює вимірності простору, тобто всі вектори $\bar{a}_j$ ($j = \overline{1, n}$) системи в сукупності утворюють базис.

У разі, якщо кількість векторів, що утворюють базис, є меншою за кількість векторів системи, то система лінійних рівнянь має безліч розв'язків, серед яких потрібно визначити всі базисні.

Для визначення всіх базисних розв'язків системи можна запропонувати такий **алгоритм**:

1) *виконуймо* елементарні перетворення, метою яких є зведення системи лінійних алгебраїчних рівнянь до одиничного базису;

2) *визначаємо* значення невідомих, що відповідають цьому базису, тобто координати вектора $\bar{b}$ в цьому базисі, для чого вільні невідомі покладемо такими, що дорівнюють нулю;

3) *виконуймо* елементарні перетворення системи рівнянь для введення до базису інших векторів системи. Тоді координати вектора $\bar{b}$ дорівнюють відповідним невідомим системи лінійних рівнянь у новому базисному розв'язку;

4) *повторюємо* ці ітерації доти, доки не будуть визначеними всі загальні розв'язки системи, а за кожним із них – базисний розв'язок.

Зауважмо, що максимальна кількість базисних розв'язків дорівнює кількості сполучень з n по m , де n – кількість векторів системи, а m – вимірність простору.



Визначмо всі базисні розв'язки системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

У векторній формі ця система має такий вигляд:

$$x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + x_3 \bar{a}_3 + x_4 \bar{a}_4 = \bar{b},$$

де $\bar{a}_1 = (1, 4)^T$, $\bar{a}_2 = (2, 1)^T$, $\bar{a}_3 = (-1, 3)^T$, $\bar{a}_4 = (3, -2)^T$, $\bar{b} = (5, 6)$.

Визначмо всі можливі базиси, які можна побудувати, використовуючи вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$, і розклад вектора $\bar{b}$ в кожному із цих базисів.

Отже, у двовимірному просторі є чотири вектори, серед яких потрібно визначити базисні. Найбільша кількість лінійно незалежних векторів у цьому просторі дорівнює двом, тому всі чотири вектори не можуть бути лінійно незалежними.

Для визначення загального розв'язку зведемо систему лінійних рівнянь до одиничного базису в таблиці. Напишімо матрицю коефіцієнтів системи (табл. 4.1) і виконаймо елементарні перетворення цієї системи за методом Жордана – Гаусса.

Таблиця 4.1

Зведення системи рівнянь до одиничного базису

№ рядків	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{b}$	Контрольні суми	Примітки
I	1	2	-1	3	5	10	Вихідні
II	4	1	3	-2	6	12	рівняння
III	1	2	-1	3	5	10	(I)
IV	0	-7	7	-14	-14	-28	(I) (-4)+II
V	1	0	1	-1	1	2	(VI) (-2)+ III
VI	0	1	-1	2	2	4	(IV):(-7)

За результатами останньої ітерації маємо одиничну матрицю.

Отже, базис простору утворюють вектори $\bar{a}_1$ та $\bar{a}_2$. Координати вектора $\bar{b}$ в цьому базисі: $x_1 = 1, x_2 = 2$.

За базисом з векторів $\bar{a}_1$ та $\bar{a}_2$ можна розкласти не тільки вектор $\bar{b}$, але і всі інші вектори:

$$\bar{a}_3 = \bar{a}_1 - \bar{a}_2, \quad \bar{a}_4 = -\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2, \quad \bar{b} = \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2.$$

Кількість базисів для цього прикладу визначають кількістю сполучень із чотирьох векторів ($n = 4$) по два ($m = 2$), тобто дорівнює шести.

Отже, визначено один із базисних розв'язків: $X = (1, 2, 0, 0)^T$.

Для визначення інших базисних розв'язків перетворення системи за методом Жордана – Гаусса виконаймо в таблиці (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Визначення базисних розв'язків

№ з/П	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{b}$	Контрольні суми	Базисні розв'язки
1	1 0	0 1	1 -1	-1 2	1 2	2 4	$X_1 = (1, 2, 0, 0)^T$
2	1 1	0 1	1 0	-1 1	1 3	2 6	$X_2 = (0, 3, 1, 0)^T$
3	1 2	1 1	0 1	1 0	3 4	6 8	$X_3 = (0, 0, 4, 3)^T$
4	1 0	1 -1	0 1	1 -2	3 -2	6 -4	$X_4 = (3, 0, -2, 0)^T$
5	0 1	0,5 0,5	-0,5 0,5	1 0	1 2	2 4	$X_5 = (2, 0, 0, 1)^T$
6	2 -1	1 0	1 -1	0 1	4 -1	8 -2	$X_6 = (0, 4, 0, -1)^T$

У табл. 4.2 першим із базисних розв'язків системи наведено саме той, який було визначено в табл. 4.1.

Зауважмо, що серед шести базисних розв'язків заданої системи лінійних алгебраїчних рівнянь тільки X_4 і X_6 мають серед своїх координат від'ємні числа, а всі інші розв'язки є опорними.

У межах навчальної дисципліни «Дослідження операцій» викладають спеціальний алгоритм відбору тільки опорних розв'язків системи, за яким до базису не вводять вектори, які під час переходу до нового базису перетворюють вектор $\bar{b}$, усі координати якого є невід'ємними, на такий, у якого хоча б одна з координат стає від'ємною.

Однорідна система рівнянь. Особливості розв'язання. Розгляньмо векторний підхід до визначення загального розв'язку однорідних систем лінійних

алгебраїчних рівнянь. Нагадаймо, що в матричній формі однорідна СЛАР має такий вигляд (1.10):

$$A \cdot X = O,$$

де $A=(a_{ij})_{m \times n}$ – основна матриця системи;

$$X = (x_j)_{1 \times n}^T - \text{матриця-стовпець невідомих};$$

$$O = (0)_{m \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m \times 1} \quad - \text{нульова матриця-стовпець.}$$

У векторній формі однорідна СЛАР має такий вигляд:

$$A \cdot \bar{x} = \bar{0}, \quad \text{або} \quad \bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \dots + \bar{a}_n x_n = \bar{0}, \quad (4.22)$$

де $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – основна матриця системи;

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$
 – вектор-стовпець невідомих коефіцієнтів;

$\bar{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_m^T$ – нульовий вектор-стовпець m -вимірного простору;

$$\bar{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T \quad (j = \overline{1, n}) - m\text{-вимірні вектори (стовпці матриці } A).$$

Якщо ранг основної матриці є меншим за кількість невідомих ($r < n$), то однорідна система рівнянь має безліч розв'язків.

Нехай коефіцієнти перед невідомими x_j ($j = \overline{1, r}$) утворюють базисний мінор, а інші невідомі є вільними. Якщо систему (4.22) розв'язати відносно базисних невідомих, то, за аналогією із (3.7), її загальний розв'язок буде мати такий вигляд:

[illegible]

де $f_1, f_2, \dots, f_r$ – лінійні функції, що відображають закони залежності базисних невідомих x_j ($j = \overline{1, r}$) від вільних невідомих x_j ($j = \overline{r+1, n}$).

За властивістю 3 (див. п. 3.2) будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідної системи також є розв'язком цієї системи.

Фундаментальною системою розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають таку систему лінійно незалежних векторів $\bar{x}_j$ ($j = \overline{1, n-r}$, де r – ранг основної матриці системи), що їхні лінійні комбінації визначають усю нескінченну множину розв'язків системи.

Теорема 4.3 (про фундаментальну систему розв'язків). Однорідна система рівнянь (4.22) має фундаментальну систему розв'язків, кількість векторів якої дорівнює $n-r$, де r – ранг основної матриці системи ($r < n$).

Доведення. Надамо вільним невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ послідовно $n-r$ значень, які є елементами стовпців одиничної матриці.

Отже,

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

У разі $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n = 0$ маємо тривіальний розв'язок.

За системою (4.23) визначмо базисні невідомі $x_1, x_2, \dots, x_r$ через вільні, водночас є $n-r$ частинних розв'язків системи: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-r}$. Ці розв'язки є лінійно незалежними, адже матриця, яку складено з координат усіх векторів, містить одиничну матрицю (4.24) порядку $n-r$.

Вектор

$$\bar{x} = k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_{n-r} \bar{x}_{n-r}, \quad (4.25)$$

де $\forall k_j \in \mathbf{R}$ ($j = \overline{1, n-r}$), який є лінійною комбінацією розв'язків системи (4.24), теж буде її розв'язком.

Якщо числа $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ брати рівними координатам вектора $\bar{x}$, які відповідають вільним невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ системи рівнянь, то цей вектор опише (відобразить) загальний розв'язок системи. ■

Отже, для визначення загального розв'язку однорідної системи рівнянь застосуємо такий **алгоритм**:

1. *Виразимо* базисні невідомі системи (4.22) через вільні.

2. *Надаймо* вільним невідомим системи, кількість яких становить $n-r$, значення, згідно із (4.23).

3. Підставляймо в (4.23) послідовно значення вільних невідомих (4.24) і визначаймо базисні невідомі, дістаючи таким способом фундаментальну систему розв'язків: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-r}$.

4. Записуймо загальний розв'язок системи як лінійну комбінацію фундаментальних розв'язків (4.25).



Визначмо фундаментальну систему розв'язків однорідної СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

Щоб визначити базисні невідомі системи через вільні, використаємо метод Жордана – Гаусса.

Виконуймо елементарні перетворення основної матриці системи для отримання в ній одиничної матриці:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 13 & 9 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 14 & 10 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1,4 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вибираймо x_1 та x_4 як базисні невідомі, тоді x_2 та x_3 є вільними невідомими.

Отже, загальний розв'язок системи (4.26) запишимо в такому вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 0,4x_3, \\ x_4 = -1,4x_3, \\ x_2 \in \mathbf{R}, \\ x_3 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Якщо вільним невідомим спочатку надати значень $x_2 = 1$ та $x_3 = 0$, а потім $x_2 = 0$ та $x_3 = 1$, то дістаньмо відповідні частинні розв'язки системи: $\bar{x}_1 = (2, 1, 0, 0)$ та $\bar{x}_2 = (-0,4; 0; 1; -1,4)$. Система векторів $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ є фундаментальною системою розв'язків.

Загальний розв'язок системи рівнянь у векторній формі визначмо як лінійну комбінацію фундаментальних розв'язків, а саме:

$$\bar{x}_0 = k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2,$$

де $k_1 \in \mathbf{R}$, $k_2 \in \mathbf{R}$.

Тоді загальний розв'язок однорідної системи рівнянь, який складено з фундаментальних розв'язків системи, має такий вигляд:

$$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0 \\ 1 \\ -1,4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -0,4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad k_1 \in \mathbf{R}, \quad k_2 \in \mathbf{R}.$$

Зауваження. Аналогічно можна подати загальний розв'язок і неоднорідної системи рівнянь, що має безліч розв'язків.

Нехай неоднорідна система рівнянь, яку задано у векторній формі,

$$\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \dots + \bar{a}_n x_n = \bar{b} \quad (4.27)$$

є сумісною, але ранг r її основної матриці є меншим за кількість невідомих ($r < n$).

Тоді загальний розв'язок системи (4.27) визначають за такою формулою:

$$\bar{x} = \bar{x}^* + k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_{n-r} \bar{x}_{n-r}, \quad (4.28)$$

де $\bar{x}^*$ – довільний частинний розв'язок неоднорідної системи (4.27);

$k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_{n-r} \bar{x}_{n-r}$ – загальний розв'язок (4.24) відповідної однорідної системи рівнянь (4.22).



Визначмо загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 21. \end{cases} \quad (4.29)$$

Якщо праві частини всіх рівнянь покласти рівними нулю, то отримаємо однорідну систему рівнянь (4.26), загальний розв'язок якої визначено в попередньому прикладі:

$$\bar{x}_0 = k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 \quad (k_1 \in \mathbf{R}, \quad k_2 \in \mathbf{R}),$$

де $\bar{x}_1 = (2, 1, 0, 0)$ та $\bar{x}_2 = (-0,4; 0; 1; -1,4)$.

Визначмо довільний частинний розв'язок неоднорідної системи. Наприклад, візьмімо вільні невідомі рівними нулю $x_2 = x_3 = 0$ і визначмо x_1 та x_4 :

$$x_1 = -0,6; x_4 = 2,4, \text{ тоді } \bar{x}^* = (-0,6; 0; 0; 2,4).$$

Отже, загальним розв'язком системи (4.29) є такий вектор:

$$\bar{x} = \bar{x}^* + k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 \quad (k_1 \in \mathbf{R}, k_2 \in \mathbf{R}),$$

де $\bar{x}^* = (-0,6; 0; 0; 2,4)$, $\bar{x}_1 = (2, 1, 0, 0)$, $\bar{x}_2 = (-0,4; 0; 1; -1,4)$,

або

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 \\ 0 \\ 0 \\ 2,4 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0 \\ 1 \\ -1,4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 \\ 0 \\ 0 \\ 2,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -0,4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$(k_1 \in \mathbf{R}, k_2 \in \mathbf{R}).$$

У такій формі подають загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має безліч розв'язків.



Ключові терміни

n -вимірний вектор; координатна форма подання вектора; нуль-вектор; одиничний вектор; лінійні операції над векторами; колінеарність векторів; лінійний (векторний) простір; скалярний добуток векторів; евклідів простір; модуль вектора; лінійна незалежність векторів; базис простору; розкладання вектора за базисом; ортогональні вектори; ортонормований базис; фундаментальна система векторів.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають n -вимірним вектором, його координатами?
2. Які n -вимірні вектори називають колінеарними, рівними?
3. Які операції над векторами називають лійними та які їхні властивості?

4. Що таке «нуль-вектор», «протилежний вектор», «одичний вектор»?
5. Що таке «лінійний n -вимірний простір»?
6. Що називають довжиною вектора, скалярним добутком векторів?
7. Що розуміють під системою n -вимірних векторів?
8. Що таке «евклідов простір»?
9. Як у векторній формі подати систему лінійних алгебраїчних рівнянь?
10. Що розуміють під лінійною комбінацією системи векторів?
11. Що таке «лінійно залежна (незалежна)» система n -вимірних векторів?
12. У чому полягає теорема про лінійну залежність векторів та її наслідок?
13. Що називають базисом простору $\mathbf{R}^n$?
14. Що розуміють під задачею дослідження системи векторів на лінійну незалежність? Який порядок дій під час її розв'язування?
15. Яку найбільшу кількість лінійно незалежних векторів може містити система векторів?
16. Який базис називають ортогональним, а який ортонормованим?
17. Як здійснюють процес розкладання вектора за заданим базисом?
18. Як визначити базис серед заданої системи векторів?
19. Як виконати перехід від одного базису до іншого?
20. Як у векторній формі подати загальні розв'язки однорідної та неоднорідної систем лінійних рівнянь?



Тестові завдання до підрозділу 4

1. Укажіть, які з наведених далі операцій над векторами є лійними:
 - 1) додавання векторів;
 - 2) добуток вектора на скаляр;
 - 3) скалярний добуток векторів;
 - 4) векторний добуток векторів:
- а) 1; б) 1 та 2; в) 1, 2 та 3; г) 1, 2, 3 та 4.

2. Задано вектори $\bar{a} = (0, 2, a_3, 4, -2)$ і $\bar{b} = (b_1, -1, 2, b_4, b_5)$, частина координат яких є невідомою. Визначте всі координати вектора $\bar{b}$ за умови, що ці вектори є колінеарними:

- а) $\bar{b} = (0, -1, 2, -2, 1)$; б) $\bar{b} = (0, -1, 2, 1, 2)$;
 в) $\bar{b} = (0, 2, 4, -1, 2)$; г) $\bar{b} = (0, -1, 2, 2, -1)$.

3. У просторі $\mathbf{R}^4$ задано два колінеарні вектори: $\bar{a} = \lambda \cdot \bar{b}$. Укажіть, чому дорівнює модуль вектора $\bar{a}$, якщо $|\bar{b}| = 1$:

- а) $|\bar{a}| = |\lambda|$; б) $|\bar{a}| = 2|\lambda|$; в) $|\bar{a}| = 4|\lambda|$; г) $|\bar{a}| = \lambda^4$.

4. Серед запропонованих варіантів укажіть таку трійку векторів, які не утворюють базис простору:

- а) $\bar{a} = (2, 1, 0)$, $\bar{b} = (-1, 0, 1)$, $\bar{c} = (1, 1, 1)$;
 б) $\bar{a} = (2, 1, 0)$, $\bar{c} = (1, 1, 1)$, $\bar{d} = (0, 0, 1)$;
 в) $\bar{a} = (2, 1, 0)$, $\bar{b} = (-1, 0, 1)$, $\bar{d} = (0, 0, 1)$;
 г) $\bar{b} = (-1, 0, 1)$, $\bar{c} = (1, 1, 1)$, $\bar{d} = (0, 0, 1)$.

5. Задано систему векторів: $\bar{a} = (-1, 0, 1)$, $\bar{b} = (-1, -1, 0)$, $\bar{c} = (0, 1, -1)$, що утворюють базис простору. Виберіть твердження, яке є правильним:

- а) базис простору утворюють одиничні вектори;
 б) базис простору утворюють ортогональні вектори;
 в) базис простору, що утворено цими векторами, є ортонормованим;
 г) вектори базису є рівними за модулем.

6. Задано вектори $\bar{a} = (1, 1, 1)$, $\bar{b} = (0, 1, 0)$, $\bar{c} = (0, 0, 1)$, $\bar{d} = (3, 2, 5)$, координати яких визначено в одиничному базисі. Як новий базис простору вибрано вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Які координати буде мати вектор $\bar{d}$ в цьому базисі:

- а) $\bar{d} = (2, 1, -1)$; б) $\bar{d} = (3, 2, 5)$; в) $\bar{d} = (3, -1, 3)$; г) $\bar{d} = (3, -1, 2)$?

7. Виберіть систему векторів, які утворюють ортогональний базис:

а) $\bar{a} = (1, 1, 1)$, $\bar{b} = (2, -1, -1)$, $\bar{c} = (-3, -2, 5)$;

б) $\bar{a} = (1, 1, 1)$, $\bar{c} = (-3, -2, 5)$, $\bar{d} = (3, -1, -2)$;

в) $\bar{a} = (1, 1, 1)$, $\bar{d} = (3, -1, -2)$, $\bar{f} = (-2, -1, 3)$;

г) $\bar{a} = (1, 1, 1)$, $\bar{f} = (-2, -1, 3)$, $g = (4, -5, 1)$.

8. У просторі $\mathbf{R}^n$ задано n лінійно незалежних векторів, до яких додано ще один вектор. Укажіть, яку максимальну кількість відмінних від нуля координат може мати такий вектор:

а) 0; б) 1; в) n ; г) $n+1$; д) $n-1$.

9. У просторі $\mathbf{R}^n$ задано $n+1$ вектор, серед яких є n лінійно незалежних векторів. Укажіть, скільки є способів побудувати базис простору, якщо серед цих векторів немає колінеарних:

а) 1; б) $n-1$; в) n ; г) $n+1$.

10. Укажіть, яке з наведених далі означень фундаментальної системи розв'язків є правильним:

а) система лінійно незалежних векторів, лінійні комбінації яких визначають усю множину розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь;

б) сукупність будь-яких $n - \text{rang} A$ частинних лінійно незалежних розв'язків однорідної системи, що відповідає системі лінійних алгебраїчних рівнянь: $A \cdot X = B$;

в) лінійна комбінація всіх загальних розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь;

г) лінійна комбінація всіх загальних розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Література: [1 – 4; 10; 11; 14; 15; 17; 20 – 23].

5. Лінійні перетворення. Власні вектори і власні числа лінійного оператора

Основні питання:

- 5.1. Лінійні перетворення (лінійні оператори). Матриця лінійного перетворення.
- 5.2. Власні вектори та власні числа лінійного оператора: означення, властивості.
- 5.3. Власні вектори і власні числа лінійного оператора.
- 5.4. Базис простору із власних векторів лінійного оператора.
- 5.5. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі).

5.1. Лінійні перетворення (лінійні оператори). Матриця лінійного перетворення

Нехай задано n -вимірний векторний простір $\mathbf{R}^n$. Якщо кожному вектору $\bar{x}$, що належить цьому простору, поставлено у відповідність єдиний вектор

$$\bar{y} = \mathcal{A}\bar{x} \quad (5.1)$$

цього самого простору, то кажуть, що у просторі $\mathbf{R}^n$ задано *перетворення* $\mathcal{A}$, або *оператор* $\mathcal{A}$.

Вектор $\bar{y}$, який є результатом перетворення (5.1), називають **образом** вектора $\bar{x}$, а вихідний вектор $\bar{x}$ – **прообразом** вектора $\bar{y} = \mathcal{A}\bar{x}$.

На відміну від матриць, оператори такого перетворення записують «каліграфічним» шрифтом.

Перетворення $\mathcal{A}$ називають **лінійним перетворенням**, або **лінійним оператором**, якщо для довільних векторів $\bar{x}_1 \in \mathbf{R}^n$, $\bar{x}_2 \in \mathbf{R}^n$ і довільного дійсного скаляра λ виконано такі умови:

$$1. \mathcal{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \mathcal{A}\bar{x}_1 + \mathcal{A}\bar{x}_2 \text{ (властивість адитивності);} \quad (5.2)$$

$$2. \mathcal{A}(\lambda\bar{x}) = \lambda\mathcal{A}\bar{x} \text{ (властивість однорідності).} \quad (5.3)$$

Тобто лінійний оператор перетворює простір $\mathbf{R}^n$ на той самий простір. Це записують у такому вигляді:

$$\mathcal{A}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

Прикладами найпростіших лінійних перетворень є такі лінійні оператори:

тотожне перетворення: $\mathcal{E}\bar{x} = \bar{x} \quad (\forall \bar{x} \in \mathbf{R}^n)$, якщо кожний n -вимірний вектор простору $\mathbf{R}^n$ перетворюється на себе самого, тобто залишає цей вектор без зміни. Оператор $\mathcal{E}$ ще називають **одиничним оператором**;

нульовий оператор: $\mathcal{O}\bar{x} = \bar{0} \quad (\forall \bar{x} \in \mathbf{R}^n)$, якщо кожний n -вимірний вектор простору $\mathbf{R}^n$ перетворюють на нуль-вектор того самого простору $\mathbf{R}^n$, тобто маємо: $\mathcal{O}\bar{x} = \underbrace{(0, 0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ координат}}$.

Лінійне перетворення $\mathcal{A}^{-1}$, за допомогою якого виконують відновлення вектора $\bar{x}$ за його образом $\bar{y} = \mathcal{A}\bar{x}$, називають **оберненим до $\mathcal{A}$ лінійним перетворенням**.

Розгляньмо задачу про визначення координат образу вектора $\bar{y} = \mathcal{A}\bar{x}$.

Нехай у просторі $\mathbf{R}^n$ вибрано базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ (не обов'язково ортонормований) і $x_1, x_2, \dots, x_n$ є координатами вектора $\bar{x}$ у цьому базисі: $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n$. Позначмо через $y_1, y_2, \dots, y_n$ координати вектора $\bar{y}$ у вибраному базисі. Тоді, згідно з лінійністю оператора $\mathcal{A}$, можна записати:

$$\bar{y} = \mathcal{A}\bar{x} = x_1\mathcal{A}\bar{e}_1 + x_2\mathcal{A}\bar{e}_2 + \dots + x_n\mathcal{A}\bar{e}_n. \quad (5.4)$$

Але образи $\mathcal{A}\bar{e}_j \quad (j = \overline{1, n})$ теж є векторами із простору $\mathbf{R}^n$, тому їх можна розкласти за тим самим базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

Отже, для образу будь-якого базисного вектора маємо:

$$\mathcal{A}\bar{e}_j = a_{1j}\bar{e}_1 + a_{2j}\bar{e}_2 + \dots + a_{nj}\bar{e}_n \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5.5)$$

де a_{ij} – коефіцієнти розкладу вектора $\mathcal{A}\bar{e}_j$ за базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

З огляду на ф-лу (5.5), співвідношення (5.4) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} \bar{y} = \mathcal{A}\bar{x} = & x_1(a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \dots + a_{n1}\bar{e}_n) + x_2(a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{n2}\bar{e}_n) + \dots + \\ & + x_n(a_{1n}\bar{e}_1 + a_{2n}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Після групування членів правої частини співвідношення (5.6) відносно векторів базису маємо:

$$\begin{aligned}\bar{y} = \mathcal{A} \bar{x} = & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)\bar{e}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)\bar{e}_2 + \dots + \\ & + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)\bar{e}_n.\end{aligned}\quad (5.7)$$

З іншого боку, оскільки $y_1, y_2, \dots, y_n$ є координатами вектора $\bar{y}$ у базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, то його можна подати так:

$$\bar{y} = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + \dots + y_n \bar{e}_n. \quad (5.8)$$

Порівнюючи між собою вирази (5.8) та (5.7), визначаймо координати вектора $\bar{y}$:

[illegible]

Отже, під час лінійного перетворення $\mathcal{A}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ координати образу вектора $\bar{y}$ є лінійними комбінаціями координат його прообразу $\bar{x}$, коефіцієнти за якими утворюють матрицю n -го порядку (позначмо її через A):

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{y} = \mathcal{A} \bar{x}. \quad (5.10)$$

Матрицю A , що в добутку (зліва) із вектором $\bar{x}$ із простору $\mathbf{R}^n$ визначає координати його образу $\bar{y}$ під час лінійного перетворення $\mathcal{A}$, називають **матрицею лінійного перетворення $\mathcal{A}$** в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

Отже, має місце таке співвідношення:

$$\mathcal{A}\bar{x} = A \cdot \bar{x}. \quad (5.11)$$

Елементами кожного (j -го) стовпця матриці A є коефіцієнти розкладу вектора $\mathcal{A}\bar{e}_j$ за базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, а елементи кожного (i -го) її рядка визначають коефіцієнти розкладу вектора $\bar{y} = \mathcal{A}\bar{x}$ за координатами вектора $\bar{x}$.

Зверніть увагу, що $\mathcal{A}\bar{x}$ (позначення вектора-образу) записують як нероздільний символ, а $A \cdot \bar{x}$ є добутком матриці A з вектором $\bar{x}$ (прообразом).

У лінійній алгебрі багато співвідношень, що пов'язані з лінійними операторами, мають більш простий вигляд у системі координат, базисом якої є власні вектори цього оператора.



Кожному лінійному операторові n -вимірного простору відповідає матриця n -го порядку. І навпаки, кожній матриці n -го порядку відповідає лінійний оператор n -вимірного простору.

За допомогою оператора лінійних перетворень опишімо поворот довільного вектора із простору $\mathbf{R}^2$ навколо початку координат на кут φ проти руху годинникової стрілки.

Формули повороту осей координат (формули переходу від вихідних координат x та y до нових x' та y' і навпаки) визначають *алгебраїчну форму* зображення лінійного оператора повороту осей:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$
(5.12)

де $\mathcal{A}$ – оператор переходу від вихідних координат до нових;

$\mathcal{A}^{-1}$ – оператор переходу від нових координат до вихідних;

$(x, y)^T$, $(x', y')^T$ – вектори, початком яких є точка $O(0, 0)$, а кінцями – точки (x, y) і (x', y') , відповідно.

Якщо скористатися співвідношенням (5.12), то матриця A лінійного перетворення $\mathcal{A}$, що описує поворот довільного вектора із простору $\mathbf{R}^2$ навколо початку координат на кут φ проти руху годинникової стрілки, має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

а матриця A^{-1} оберненого лінійного перетворення $\mathcal{A}^{-1}$, тобто такого, що описує поворот довільного вектора, який належить простору $\mathbf{R}^2$, навколо початку координат на кут φ за рухом годинникової стрілки, має такий вигляд:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.1 (про зв'язок між матрицями оператора в різних базисах). Матриці A та A' лінійного оператора $\mathcal{A}$ в базисах $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ та, відповідно, $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n$ є пов'язаними між собою таким співвідношенням:

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C, \quad (5.13)$$

де C – матриця переходу від вихідного до нового базису.

Доведення. Нехай лінійний оператор $\mathcal{A}$ перетворює вектор $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ на вектор $\bar{y} \in \mathbf{R}^n$ того самого простору. Тоді в матричній формі зв'язок між вектором $\bar{x}$ і його образом $\mathcal{A}\bar{x}$ у вихідному базисі можна записати як $\bar{y} = A \cdot \bar{x}$, а в новому – як $\bar{y}' = A' \cdot \bar{x}$.

Оскільки матриця C є матрицею переходу від вихідного базису до нового, то, відповідно до співвідношення (4.18), маємо:

$$\bar{x} = C \cdot \bar{x}'; \quad (5.14)$$

$$\bar{y} = C \cdot \bar{y}'. \quad (5.15)$$

Помножмо обидві частини рівності (5.14) зліва на матрицю A :

$$A \cdot \bar{x} = A \cdot C \cdot \bar{x}'.$$

Звідси, за означенням лінійного оператора, можна записати:

$$\bar{y} = A \cdot C \cdot \bar{x}'.$$

З огляду на рівність (5.15), маємо:

$$C \cdot \bar{y}' = A \cdot C \cdot \bar{x}' \Rightarrow \bar{y}' = C^{-1} \cdot A \cdot C \cdot \bar{x}'.$$

За порівнянням співвідношень $\bar{y}' = A' \cdot \bar{x}'$ та $\bar{y}' = C^{-1} \cdot A \cdot C \cdot \bar{x}'$ зробимо висновки, що $A' = C^{-1} \cdot A \cdot C$. ■

Дві квадратні матриці A та A' називають **подібними**, якщо існує така не-вироджена матриця C , що матриці A та A' є пов'язаними між собою такими співвідношеннями:

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C \quad \text{та} \quad A = C \cdot A' \cdot C^{-1}.$$

Відповідні лінійні оператори називають **перетвореннями подібності**.

Подібні матриці описують те саме лінійне перетворення, але в різних базисах, а матриця C є матрицею переходу від одного базису до іншого.

Якщо матриці є подібними, то вони мають однакові ранги, суми елементів головної діагоналі та визначники.



У базисі $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$ та $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ задано матрицю лінійного оператора $\mathcal{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначмо матрицю A' , яка відповідає тому самому оператору, але в базисі векторів $\bar{e}'_1 = (1, 2, 1)$, $\bar{e}'_2 = (1, -1, 1)$ та $\bar{e}'_3 = (-1, 0, 1)$, тобто матрицю A' , яка є подібною до матриці A .

Подаймо розкладання векторів нового базису за вихідним базисом:

$$\bar{e}'_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \quad \bar{e}'_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \quad \bar{e}'_3 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_3.$$

Отже, матриця переходу від вихідного до нового базису має такий вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Delta C = -36 \neq 0$, то матриця C є невиродженою і має обернену:

$$C^{-1} = \frac{-1}{36} \begin{pmatrix} -6 & -12 & -6 \\ -12 & 12 & -12 \\ 18 & 0 & -18 \end{pmatrix}.$$

За теоремою 5.1 визначмо матрицю оператора $\mathcal{A}$ в новому базисі:

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C = \frac{-1}{36} \begin{pmatrix} -6 & -12 & -6 \\ -12 & 12 & -12 \\ 18 & 0 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Зверніть увагу, що в новому базисі матриця оператора $\mathcal{A}$ є діагональною.

5.2. Власні вектори та власні числа лінійного оператора: означення, властивості

Розгляньмо n -вимірний лінійний простір $\mathbf{R}^n$ із певним базисом і матрицю $A = (a_{ij})_{n \times n}$ деякого лінійного оператора $\mathcal{A}$ цього простору.

Ненульовий вектор $\bar{x} \neq \bar{0}$ називають **власним**, або **характеристичним, вектором** лінійного оператора $\mathcal{A}$ (або матриці A), якщо існує таке дійсне число $\lambda \in \mathbf{R}$, що має місце рівність:

$$A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x}. \quad (5.16)$$

Скаляр λ називають **власним**, або **характеристичним, числом** матриці A , або її **власним значенням**, що відповідає власному вектору $\bar{x}$.

Згідно з означеннями власного числа і власного вектора, справедливими є такі твердження:

1) якщо $A = E$, то кожний ненульовий вектор із $\mathbf{R}^n$ є власним вектором матриці A і водночас йому відповідає власне число $\lambda = 1$, адже за властивістю одиничної матриці $E \cdot \bar{x} = \bar{x}$;

2) будь-який ненульовий n -вимірний вектор є власним вектором нульової матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$ і водночас $\lambda = 0$, оскільки $A \cdot \bar{x} = \bar{0} = O \cdot \bar{x}$.

Розгляньмо задачу про визначення власних чисел і власних векторів заданої матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Спираючись на означення (5.16) і властивості операцій над матрицями, маємо:

$$\begin{aligned} A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x} &\Rightarrow \text{ | за властивістю одиничної матриці | } \Rightarrow A \cdot \bar{x} = \lambda(E \cdot \bar{x}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{ | за асоціативним законом | } \Rightarrow A \cdot \bar{x} = (\lambda E) \cdot \bar{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{ | за властивістю дистрибутивності й означенням рівності матриць | } \Rightarrow \\ &\Rightarrow (A - \lambda E) \cdot \bar{x} = \bar{0}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Напишімо матричне рівняння (5.17) у розгорнутому вигляді:

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Отже, задачу зведено до розв'язання однорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. Нас цікавлять (за означенням власного вектора) тільки ненульові вектори, тобто нетривіальні розв'язки системи (5.18), тому визначник цієї системи має дорівнювати нулю:

$$\Delta(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.19)$$

Розкривши визначник у співвідношенні (5.19), будемо мати многочлен степеня n відносно λ : $P_n(\lambda) = \Delta(A - \lambda E)$, який називають **характеристичним многочленом** матриці A , а співвідношення (5.19), яке можна також подати у вигляді $P_n(\lambda) = 0$, визначає рівняння для обчислення власних чисел і його називають **характеристичним рівнянням** матриці A .

За основною теоремою алгебри характеристичне рівняння $P_n(\lambda) = 0$ будь-якої матриці A має n коренів, якщо кожний із них урахувати стільки разів, якою є його кратність.

Характеристичне рівняння (5.19) може мати не тільки дійсні, а й комплексні корені, тобто числа виду $\lambda = a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$ дійсними числами, а величину $i = \sqrt{-1}$ називають **уявною одиницею**.

Множину всіх власних чисел матриці називають **спектром матриці**. Якщо в спектрі матриці одне й те саме власне число повторюється k разів, то говорять, що **кратність** цього власного числа дорівнює k .

Теорема 5.2 (про єдиність власного числа, що відповідає власному вектору). Якщо $\bar{x}$ є власним вектором матриці A , то існує єдиний скаляр λ , який задовольняє умову $A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x}$.

Доведення. Припустімо, що, крім власного числа λ , існує ще один скаляр λ_1 , який задовольняє умову $A \cdot \bar{x} = \lambda_1 \bar{x}$. Тоді має виконуватися рівність $\lambda_1 \bar{x} = \lambda \bar{x}$. Оскільки за означенням власний вектор є ненульовим, тобто $\bar{x} \neq \bar{0}$, то $\lambda_1 = \lambda$. ■

Згідно з теоремою 5.2, кажуть, що власний вектор $\bar{x}$ матриці A *належить власному числу λ* .

Теорема 5.3 (про множину власних векторів, що належать власному числу). Якщо матриця має власний вектор, що належить власному числу λ , то таких векторів є нескінченно багато.

Доведення ґрунтується на означенні власного вектора та властивостях асоціативності й комутативності операції множення матриці на скаляр.

Справді, нехай вектор $\bar{x}$ є власним вектором матриці A , тоді $A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x}$. Залучімо до розгляду вектор $\bar{y}$, який є колінеарним вектору $\bar{x}$, отже, маємо: $\bar{y} = \alpha \bar{x}$, де $\alpha \in (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$.

Покажімо, що вектор $\bar{y}$ також є власним вектором матриці A :

$$A \cdot \bar{y} = A \cdot (\alpha \bar{x}) = \alpha \cdot (A \cdot \bar{x}) = |A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x}| = \alpha(\lambda \bar{x}) = \lambda(\alpha \bar{x}) = \lambda \bar{y}. \quad (5.20)$$

Оскільки рівність (5.20) виконується для будь-якого $\alpha \in (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$, то існує безліч власних векторів, що належать цьому власному числу. ■

Теорема 5.4 (критерій існування власного вектора $\bar{x}$, що відповідає власному числу λ). Вектор $\bar{x}$ тоді й тільки тоді є власним вектором матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$, що відповідає власному числу λ , якщо координати $x_1, x_2, \dots, x_n$ цього вектора утворюють ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $(A - \lambda E) \cdot \bar{x} = \bar{0}$:

$$A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x} \Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot \bar{x} = \bar{0}, \text{ або } \Delta(A - \lambda E) = 0. \quad (5.21)$$

Доведення зводять до тотожних перетворень матричних рівнянь.

Необхідність уже доведено переходом від співвідношення $A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x}$ до однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь: $(A - \lambda E) \cdot \bar{x} = \bar{0}$, яку подано в розгорнутому вигляді (5.18).

Достатність. На підставі властивостей дій над матрицями, з огляду на умову $\Delta(A - \lambda E) = 0$, виконаймо перехід від однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку надано в матричній формі, до співвідношення $A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x}$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda E) \cdot \bar{x} = \bar{0} &\Rightarrow A \cdot \bar{x} - \lambda E \cdot \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow A \cdot \bar{x} - \lambda(E \cdot \bar{x}) = \bar{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A \cdot \bar{x} - \lambda \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow (A \cdot \bar{x} - \lambda \bar{x}) + \lambda \bar{x} = \bar{0} + \lambda \bar{x} \Rightarrow A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x}. \blacksquare \end{aligned} \quad (5.22)$$

Теорема 5.5 (*про лінійну незалежність власних векторів*). Власні вектори, що належать різним власним числам, є лінійно незалежними.

Доведення виконаймо методом від супротивного. Нехай $\bar{x}^{(1)}$ і $\bar{x}^{(2)}$ – два довільні власні вектори, що належать, відповідно, власним числам λ_1 і λ_2 , водночас цьому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Потрібно показати, що лінійна комбінація цих власних векторів $\alpha_1 \bar{x}^{(1)} + \alpha_2 \bar{x}^{(2)}$ дорівнює нуль-вектору тільки тоді, якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, тобто:

$$\alpha_1 \bar{x}^{(1)} + \alpha_2 \bar{x}^{(2)} = \bar{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \quad (5.23)$$

Припустімо протилежне, тобто нехай лінійна комбінація власних векторів, що відповідають різним власним числам, дорівнює нуль-вектору за умови, що одне із чисел α_1 , α_2 не є нулем. Наприклад, $\alpha_1 \neq 0$.

Помножмо ліву і праву частини (5.23) на власне число λ_2 . Тоді:

$$\alpha_1 \lambda_2 \bar{x}^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2 \bar{x}^{(2)} = \bar{0}. \quad (5.24)$$

Тепер помножмо ліву і праву частини рівності (5.23) на матрицю A зліва і, зважаючи на властивості операцій над матрицями, дістаньмо:

$$A \cdot (\alpha_1 \bar{x}^{(1)} + \alpha_2 \bar{x}^{(2)}) = A \cdot \bar{0} \Rightarrow \alpha_1 (A \cdot \bar{x}^{(1)}) + \alpha_2 (A \cdot \bar{x}^{(2)}) = \bar{0}.$$

Оскільки $A \cdot \bar{x}^{(1)} = \lambda_1 \bar{x}^{(1)}$ та $A \cdot \bar{x}^{(2)} = \lambda_2 \bar{x}^{(2)}$, то має місце рівність:

$$\alpha_1 \lambda_1 \bar{x}^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2 \bar{x}^{(2)} = \bar{0}. \quad (5.25)$$

Порівняймо рівності (5.25) і (5.24):

$$\alpha_1 \lambda_1 \bar{x}^{(1)} - \alpha_1 \lambda_2 \bar{x}^{(1)} = \bar{0} \Rightarrow \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \bar{x}^{(1)} = \bar{0}. \quad (5.26)$$

За умовою теореми, маємо: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Оскільки за означенням вектор $\bar{x}^{(1)}$ є ненульовим, тому рівність (5.26) може виконуватися тільки за умови, що $\alpha_1 = 0$.

Отже, припущення про лінійну залежність векторів $\bar{x}^{(1)}$ і $\bar{x}^{(2)}$ є хибним.

Якщо є більше ніж два власні вектори, які належать попарно різним власним числам, то доведення є аналогічним (із використанням методу математичної індукції). ■

Зауважмо, що власні вектори, які належать різним власним числам, можна використовувати як базисні вектори простору $\mathbf{R}^n$.

Теорема 5.6 (про суму і добуток власних чисел). Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ є власними числами матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$, то:

1) сума власних чисел дорівнює сумі елементів головної діагоналі матриці A :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}; \quad (5.27)$$

2) добуток власних чисел дорівнює визначнику матриці A :

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \Delta A. \quad (5.28)$$

Доведення має підґрунтям формули Вієта, які описують співвідношення між коренями й коефіцієнтами многочлена n -го степеня в разі, якщо його старший коефіцієнт дорівнює одиниці.

Розгляньмо найпростіший випадок $n = 2$. Напишімо характеристичне рівняння в розгорнутому вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} = 0.$$

Отже,

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (5.29)$$

Із рівності (5.29), за теоремою Вієта (для квадратного рівняння), маємо:

$$1) \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}; \quad 2) \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \Delta A. \quad \blacksquare$$

Суму всіх діагональних елементів матриці називають **слідом** цієї матриці (від нім. *Spur* – «слід») й позначають $\text{Sp}A$.

Для квадратної матриці довільного порядку $A = (a_{ij})_{n \times n}$ теорему 5.6 у символічному вигляді можна записати так:

$$1) \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Sp}A; \quad 2) \prod_{i=1}^n \lambda_i = \Delta A,$$

водночас власне число λ_i ($i = \overline{1, n}$) берімо таку кількість разів, яка дорівнює його кратності як кореня характеристичного рівняння (5.19).

5.3. Визначення власних чисел і власних векторів

Розгляньмо алгоритм визначення власних чисел матриці A та власних векторів, що їм належать.

Згідно із співвідношеннями (5.18) і (5.19), запропоновано такий порядок визначення власних чисел та власних векторів матриці:

1) *складаймо* за вихідною матрицею $A = (a_{ij})_{n \times n}$ характеристичне рівняння (5.19) і розв'язуймо його, тобто визначаймо спектр власних чисел;

2) *підставляймо* по черзі кожне власне число в систему (5.18) і визначаймо всі її нетривіальні розв'язки, що й дає множину власних векторів, кожен із яких відповідає певному власному числу.

Зауваження. Множину всіх власних векторів, що відповідають певному власному числу, можна подати як лінійну комбінацію фундаментальних розв'язків однорідної системи рівнянь (див. ф-лу (4.19), підрозд. 4).



Визначмо власні числа і власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Характеристичним рівнянням заданої матриці A є таке квадратне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(5-\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Розв'язавши його, маємо власні числа: $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = 4$.

Тепер опишемо множини $\bar{x}^{(1)}$ і $\bar{x}^{(2)}$ усіх власних векторів, що відповідають визначеним власним числам. Для цього в матрицю $A - \lambda E$, замість λ , підставмо по черзі значення власних чисел, запишемо відповідну однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (5.18) і визначмо її розв'язок:

$$\lambda_1 = 2: \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = t \end{cases} \Rightarrow \bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{0\};$$

$$\lambda_1 = 4: \begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 3t \end{cases} \Rightarrow \bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Надаючи параметру t довільних значень, для кожного власного числа λ маємо сукупність колінеарних між собою власних векторів.

Теорема 5.7 (про власні числа і власні вектори симетричної матриці). Симетрична матриця $(a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad \forall j = \overline{1, n})$ має тільки дійсні власні числа. Власні вектори, що належать різним власним числам, є ортогональними та лінійно незалежними.

Теорему наводьмо без доведення.

Проілюструймо слушність висновків цієї теореми на прикладі.



Нехай задано симетричну матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Визначмо її власні числа і власні вектори й доведемо ортогональність власних векторів, що відповідають різним власним числам.

Виконаймо такі кроки:

1. *Складімо* характеристичне рівняння:

$$\Delta(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5 - \lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0. \quad (5.30)$$

2. *Обчислімо* корені кубічного рівняння (5.30), які є власними числами матриці A . З елементарної алгебри відомо: якщо многочлен, старший коефіцієнт якого є рівним одиниці, має цілі корені, то вони містяться серед дільників вільного члена рівняння. Перебираймо дільники числа 36 і переконуємося, що $\lambda_1 = 3$ є коренем рівняння (5.30).

Визначення інших двох коренів зводять до розв'язання квадратного рівняння, яке утворюється після виділення двочлена $(\lambda - 3)$:

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 6, \\ \lambda_3 = -2. \end{cases}$$

3. *Опишімо* множини $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}$ і $\bar{x}^{(3)}$ власних векторів, що відповідають визначеним власним числам.

Для цього в матрицю $A - \lambda E$, замість λ , підставляймо по черзі значення кожного із власних чисел і записуймо відповідну однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (5.18). Для розв'язання такої системи зручно застосовувати метод Жордана-Гаусса.

Отже, маємо:

$$\lambda_1 = 3: \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = -t, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

Звідси

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \quad (5.31)$$

Аналогічно визначмо власні вектори $\bar{x}^{(2)}$ і $\bar{x}^{(3)}$:

$$\lambda_2 = 6: \begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}; \quad (5.32)$$

$$\lambda_3 = -2: \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \quad (5.33)$$

Вектори $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}$ і $\bar{x}^{(3)}$ є лінійно незалежними, оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} t & t & -t \\ -t & 2t & 0 \\ t & t & t \end{vmatrix} \neq 0.$$

Переконаймося, що вектори $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}$ і $\bar{x}^{(3)}$ є попарно ортогональними. Для цього обчислимо їхні скалярні добутки:

$$(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = t^2 - 2t^2 + t^2 = 0;$$

$$(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(3)}) = -t^2 + 0 + t^2 = 0;$$

$$(\bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)}) = -t^2 + 0 + t^2 = 0.$$

Оскільки скалярні добутки векторів дорівнюють нулю, то ці вектори є попарно ортогональними.

Якщо у виразах (5.31) – (5.33) покласти $t=1$, то дістанемо таку систему векторів:

$$\bar{x}^{(1)}|_{t=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^{(2)}|_{t=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^{(3)}|_{t=1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ці вектори було використано як базис простору $\mathbf{R}^3$ в прикладі, який наведено після теореми 5.1:

$$\bar{e}'_1 = (1, 2, 1), \quad \bar{e}'_2 = (1, -1, 1), \quad \bar{e}'_3 = (-1, 0, 1).$$

У такому базисі, тобто базисі із власних векторів, матриця оператора $\mathcal{A}$ є діагональною, а її ненульовими елементами є власні числа матриці A .

Теорема 5.8 (про перетворення матриці до діагонального вигляду). Матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ має діагональний вигляд тоді й тільки тоді, якщо всі вектори базису є власними векторами матриці A .

Теорему наводьмо без доведення.

Зауважмо, що під час визначення власних чисел для заданої матриці найважчою задачею є розв'язання алгебраїчного рівняння n -го степеня, що здебільшого зробити неможливо без використання наближених методів, вивчення яких виходить за межі програми. Тому пропонуємо скористатися відомими пакетами прикладних програм MatLab, MathCad, Maple тощо.

Наступний приклад було розв'язано в пакеті MatLab, у якому кінцевий результат обчислень надають без проміжних викладок.



Визначмо власні числа та відповідні їм власні вектори такої матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Складімо характеристичне рівняння для визначення власних чисел цієї матриці:

$$\Delta(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 5 - \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 65\lambda - 80 = 0.$$

Його коренями є числа $\lambda_1 = 8,388$; $\lambda_2 = 4,486$; $\lambda_3 = 2,126$, а відповідні їм власні вектори мають такий вигляд:

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,808t \\ 0,772t \\ t \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -0,228t \\ -1,056t \\ t \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -2,704t \\ 1,534t \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Власні числа та власні вектори матриць мають широкий спектр використання, зокрема, в аналітичній геометрії, у задачах різних галузей природничих наук та економетрики.

5.4. Базис простору із власних векторів лінійного оператора

За теоремою 5.5, власні вектори, що належать різним власним числам, є лінійно незалежними. З'ясуємо, за яких умов існує базис лінійного простору $\mathbf{R}^n$, який побудовано із власних векторів матриці лінійного оператора.

Лема. Якщо λ є власним числом матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$, то множина власних векторів цієї матриці містить $n - r$ лінійно незалежних векторів, де r – ранг матриці $A - \lambda E$.

Доведення. Згідно з теоремою 5.4, множина власних векторів є збіжною із множиною всіх розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$(A - \lambda E) \cdot \bar{x} = \bar{0},$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – власний вектор матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$, що відповідає власному числу λ .

За теоремою 4.4, така система має фундаментальну систему розв'язків, кількість векторів якої дорівнює $n - r$, тобто містить $n - r$ лінійно незалежних векторів. ■

Теорема 5.9 (про існування базису із власних векторів матриці). Нехай числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ утворюють множину всіх різних власних чисел матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Якщо сума рангів матриць $A - \lambda_1 E, A - \lambda_2 E, \dots, A - \lambda_m E$ дорівнює $n \cdot (m - 1)$, то в просторі $\mathbf{R}^n$ існує базис із власних векторів матриці A .

Доведення. Згідно з лемою, кожна множина власних векторів, що відповідає рівнянню $(A - \lambda_i E) \cdot \bar{x} = \bar{0}$ ($i = \overline{1, m}$), містить незалежні вектори в кількості $k_i = n - \text{rang}(A - \lambda_i E)$. За теоремою 5.5, власні вектори, що належать різним власним числам, є лінійно незалежними. Тоді для матриці A загальна кількість лінійно незалежних власних векторів становить:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \dots + k_m &= n - \text{rang}(A - \lambda_1 E) + n - \text{rang}(A - \lambda_2 E) + \dots + n - \text{rang}(A - \lambda_m E) = \\ &= n \cdot m - \underbrace{(\text{rang}(A - \lambda_1 E) + \text{rang}(A - \lambda_2 E) + \dots + \text{rang}(A - \lambda_m E))}_{n(m-1)} = \\ &= n \cdot m - n \cdot (m - 1) = n. \end{aligned}$$

Оскільки власні вектори матриці A в сукупності складають систему n лінійно незалежних векторів, то вони утворюють базис простору $\mathbf{R}^n$. ■

Теорема 5.10 (про існування базису із власних векторів симетричної матриці). Якщо матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$ лінійного оператора $\mathcal{A}$ є симетричною, то в просторі $\mathbf{R}^n$ існує базис, який утворено із власних векторів матриці A .

Теорему наводьмо без доведення.



Побудуємо ортонормований базис простору $\mathbf{R}^3$, що становлять власні вектори такої матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

лінійного перетворення $\mathcal{A}$, і визначмо матрицю A' заданого перетворення в цьому базисі.

Згідно з теоремою 5.9, такий базис існує, оскільки матриця A є симетричною матрицею. Складімо характеристичне рівняння матриці A :

$$\Delta(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0.$$

Розв'язками цього рівняння є власне число $\lambda_1 = 1$ (кратності $k = 2$) та власне число $\lambda_2 = -1$. Для кожного з двох різних власних чисел матриці визначмо фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь: $(A - \lambda_i E) \cdot \bar{x} = \bar{0}$, $i = \overline{1, 2}$.

Якщо $\lambda_1 = 1$, то в результаті елементарних перетворень основної матриці системи маємо:

$$A - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 0-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_3 = 0.$$

За останнім кроком елементарних перетворень матриці запишимо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 \in \mathbf{R}, \\ x_3 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Визначмо фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь $(A - E) \cdot \bar{x} = \bar{0}$:

$$\begin{cases} x_2 = 1, x_3 = 0; \\ x_2 = 0, x_3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = (0, 1, 0), \\ \bar{x}_2 = (1, 0, 1). \end{cases}$$

Власні вектори $\bar{x}_1 = (0, 1, 0)$ і $\bar{x}_2 = (1, 0, 1)$ є ортогональними, оскільки їхній скалярний добуток дорівнює нулю: $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

Якщо $\lambda_2 = -1$, то в результаті елементарних перетворень основної матриці системи маємо:

$$A - (-1) \cdot E = \begin{pmatrix} 0+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ 1 & 0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

За останнім кроком елементарних перетворень матриці запишемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Покладаймо $x_3 = 1$ і дістанемо фундаментальний розв'язок однорідної системи рівнянь $(A + E) \cdot \bar{x} = \bar{0}$:

$$x_3 = 1 \Rightarrow \bar{x}_3 = (-1, 0, 1).$$

Оскільки $(\bar{x}_1, \bar{x}_3) = 0$ та $(\bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0$, то вектори $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ є попарно ортогональними. Об'єднавши фундаментальні системи розв'язків, маємо систему власних векторів матриці A : $\bar{x}_1 = (0, 1, 0)$, $\bar{x}_2 = (1, 0, 1)$ і $\bar{x}_3 = (-1, 0, 1)$. Ці вектори утворюють ортогональний базис простору $\mathbf{R}^3$.

Після нормування вектори набувають такого вигляду:

$$\bar{x}_1^0 = (0, 1, 0), \quad \bar{x}_2^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \bar{x}_3^0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Це і є ортонормований базис простору $\mathbf{R}^3$, який складено із власних векторів матриці A .

Визначмо матрицю A' , що відповідає оператору $\mathcal{A}$ в базисі із власних векторів. Згідно з теоремою 5.8, ця матриця буде діагональною, а елементами її головної діагоналі будуть власні числа матриці A . За власними векторами $\bar{x}_1 = (0, 1, 0)$, $\bar{x}_2 = (1, 0, 1)$ і $\bar{x}_3 = (-1, 0, 1)$ складімо матрицю C переходу до нового базису та визначмо обернену до неї матрицю C^{-1} :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

За співвідношенням (5.13), визначмо матрицю A' , що відповідає оператору $\mathcal{A}$ в базисі із власних векторів:

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, ми визначили діагональну матрицю 3-го порядку, елементами головної діагоналі якої є власні числа матриці A .

Далі наведено приклад застосування власних векторів і власних чисел в одній із багатьох задач економіки.

5.5. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)



Практично всі країни, окрім внутрішнього товарообміну, здійснюють також зовнішній товарообмін, тобто розвивають зовнішню торгівлю. Торгівлю вважають **збалансованою**, або **бездефіцитною**, якщо для кожної країни прибуток від торгівлі є не нижчим за обсяг коштів, які вона вкладає в товарообіг.

Постановка задачі. Декілька країн здійснюють взаємний товарообмін. Відома частка бюджетних коштів, що витрачає кожна країна на закупівлю товарів іншої країни, зважаючи на свій внутрішній товарообіг.

Визначте, яким має бути співвідношення бюджетів партнерів для того, щоб забезпечити бездефіцитність торгівлі.

Побудова математичної моделі. Уведемо позначення кількісних характеристик, які описують торгівлю між країнами, і визначмо зв'язок між цими характеристиками.

Нехай $K_1, K_2, \dots, K_n$ – це країни, які беруть участь у міжнародній торгівлі. Частки коштів, які витрачає країна K_j на закупівлю товарів країни K_i , зважаючи на свій внутрішній товарообіг ($j = i$), позначмо через a_{ij} , де $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (5.34)$$

Матрицю A , елементами якої є числа a_{ij} , називають **структурною матрицею торгівлі**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ця матриця описує взаємодію країн у процесі міжнародної торгівлі.

Уведемо до розгляду вектор (бюджетних) коштів $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ і подаймо систему (5.39) у матричній формі:

$$A \cdot \bar{x} = \bar{x}. \quad (5.40)$$

Із рівності (5.40) випливає, що за умови збалансованої торгівлі між країнами вектор коштів $\bar{x}$ має бути власним вектором структурної матриці торгівлі A , який відповідає власному числу $\lambda = 1$.

Отже, розв'язання задачі зводять до визначення власного вектора $\bar{x}$, компоненти якого встановлюють співвідношення між бюджетами країн, що беруть участь у товарообміні.



Розгляньмо товарообмін між трьома країнами. Нехай структурна матриця торгівлі трьох країн K_1, K_2, K_3 має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначмо вектор коштів, компонентами якого є частки від загального обсягу торгівлі, які має вкладати кожна із країн у зовнішній товарообіг для того, щоб торгівля була збалансованою.

Вектор коштів є власним вектором структурної матриці, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$. Його компоненти утворюють ненульовий розв'язок однорідної СЛАР:

$$(A - E) \cdot \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3/4 & 1/3 \\ 1/2 & -1 & 2/3 \\ 1/2 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки система рівнянь є однорідною, то її розширена матриця є еквівалентною основній матриці системи. Виконаймо елементарні перетворення основної матриці цієї системи, із метою зведення її до трикутного або трапецеїдного вигляду:

$$A - E \sim \begin{pmatrix} -12 & 9 & 4 \\ 3 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -30 & 0 & 40 \\ 15 & 0 & -20 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3/4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3/4 x_1 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Визначмо загальний розв'язок системи, у якому змінні x_2, x_3 є базисними, а x_1 є вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 3/4 t \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = (t, t, 3/4 t)^T \quad \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Звідси випливає, що для збалансованої торгівлі потрібно, щоб кошти, які вкладає в зовнішній товарообіг кожна із країн-учасниць, співвідносилися б як $x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 4 : 3$.



Ключові терміни

Лінійне перетворення (оператор); образ вектора; прообраз вектора; матриця лінійного оператора; обернений оператор; власний вектор матриці; власне число матриці; спектр матриці; слід матриці; характеристичний многочлен; характеристичне рівняння; власні числа і власні вектори симетричних матриць.



Запитання для самоперевірки

1. Що таке «лінійне перетворення (оператор) n -вимірного простору»?
2. Що є образом n -вимірного вектора та прообразом n -вимірного вектора?
3. Яку матрицю називають матрицею лінійного перетворення $\mathbf{R}^n$?
4. Яке лінійне перетворення називають оберненим до заданого?
5. На якому співвідношенні ґрунтуються означення власних векторів і власних чисел матриці?
6. Чому до множини власних векторів матриці не зараховують нуль-вектор?
7. Чи може власному векторові матриці відповідати кілька власних чисел?
8. Чи може власному числу матриці відповідати кілька власних векторів?
9. До аналізу чого зводять задачу визначення власних чисел і власних векторів матриці, та в чому полягає цей аналіз?

10. Із якою числовою характеристикою матриці є збіжною кількість її власних чисел?

11. У якій послідовності виконують визначення власних векторів і власних чисел матриці: спочатку власні вектори, а потім власні числа чи навпаки?

12. У чому полягають необхідна і достатня умови існування власного вектора, що належить певному власному числу та в чому відмінність між цими умовами?

13. Множині яких чисел належать власні числа симетричної матриці?

14. Чому n власних векторів, що належать різним власним числам, можна взяти як базис n -вимірного простору?

15. Чому дорівнює визначник матриці, якщо всі її власні числа є відомими?

16. Що таке «слід матриці» та як перевірити правильність визначення її власних чисел?



Тестові завдання до підрозділу 5

1. Лінійні перетворення виконують за допомогою оператора $\bar{y} = \mathcal{A}\bar{x}$. Виберіть співвідношення, за яким визначають власні числа матриці A :

а) $(\lambda A - E) \cdot \bar{x} = \bar{0}$; б) $(A - \lambda E) \cdot \bar{x} = \bar{0}$; в) $A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x}$; г) $\mathcal{A}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

2. Визначте власні числа матриці A , якщо характеристичне рівняння цієї матриці після того, як його згорнути за коренями, набуває такого вигляду

$$(\lambda + 3)(\lambda - 2)^2 = 0:$$

а) $\lambda = 2$; б) $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$; в) $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$; г) $\lambda = 3$.

3. Визначте власні числа матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$:

а) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -9$; б) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 8$; в) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 8$; г) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 9$.

4. Задано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Відомо, що $\lambda_1 = -1$ і $\lambda_2 = 6$ є власними

числами цієї матриці. Які з наведених векторів є її власними векторами:

а) $\bar{x}_1 = (1, -1), \bar{x}_2 = (2, 5)$; б) $\bar{x}_1 = (1, 1), \bar{x}_2 = (2, -5)$;

в) $\bar{x}_1 = (1, 4), \bar{x}_2 = (-2, 5)$; г) $\bar{x}_1 = (6, 6), \bar{x}_2 = (3, 9)$?

5. Задано матрицю A лінійного оператора $\mathcal{A}$, для якої всі вектори базису простору є власними векторами цієї матриці. Яке твердження щодо цієї матриці є правильним:

- а) вона є діагональною; б) вона є верхньою трикутною;
в) вона є симетричною; г) вона є одиничною?

6. Яку найбільшу кількість власних чисел має матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$:

- а) безліч; б) n ; в) $2n$; г) $n \times n$?

7. Якщо λ_i є власним числом матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$, то скільки лінійно незалежних розв'язків має система $(A - \lambda_i E) \cdot \bar{x} = \bar{0}$:

- а) $1 \leq m_i \leq n$; б) $m_i = n$; в) $m_i = 2n$; г) $m_i = n \times n$?

8. Матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$ і $B = (b_{ij})_{n \times n}$ є подібними. Укажіть, як у матричній формі записати відношення їхньої подібності:

- а) $B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$; б) $B = E^{-1} \cdot A \cdot E$;
в) $B \cdot E^{-1} = A \cdot E$; г) $B = E \cdot A \cdot E^{-1}$.

9. Як у символічній формі записати, що лінійний оператор $\mathcal{A}$ перетворює простір $\mathbf{R}^n$ на той самий простір:

- а) $\mathcal{A}: \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \mathbf{R}^n$; б) $\mathcal{A}: \mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{R}$;
в) $\mathcal{A}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$; г) $\mathcal{A}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$?

10. Якщо матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$ є одиничною, то кожний ненульовий вектор із $\mathbf{R}^n$ є власним вектором матриці $A = E$. Укажіть, чому дорівнює власне число λ :

- а) $\lambda = 0$; б) $\lambda = 1$; в) $\lambda = n$; г) $\lambda = \pm 1$.

Література: [1 – 4; 7 – 9; 15; 18; 21; 22].

Практичні завдання за розділом 1

Розв'язання задач економічного змісту

1.1. Три меблеві комбінати – Харківський, Дніпровський та Ужгородський – виробляють 5 видів продукції: кухні, передні, вітальні, спальні, кутки з м'якими меблями. До бухгалтерії цих комбінатів надходять відомості про обсяги виробництва, які заносять в облікову документацію і там накопичують. Ці дані подають у вигляді матриці. На перше червня матриця виробленої продукції мала такий вигляд:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 5} = \begin{pmatrix} 102 & 103 & 240 & 520 & 134 \\ 203 & 370 & 270 & 185 & 243 \\ 150 & 88 & 106 & 72 & 78 \end{pmatrix},$$

де $i = \overline{1, 3}$ – меблеві комбінати;

$j = \overline{1, 5}$ – види продукції: кухні, передні, вітальні, спальні, кутки з м'якими меблями.

На кінець червня аналогічна матриця мала такий вигляд:

$$B = (b_{ij})_{3 \times 5} = \begin{pmatrix} 117 & 109 & 242 & 525 & 156 \\ 223 & 385 & 279 & 188 & 258 \\ 166 & 108 & 116 & 73 & 82 \end{pmatrix}.$$

Визначте обсяг кожного виду продукції, який вироблено протягом червня.

Розв'язання. Обсяг продукції, який було вироблено протягом червня, визначають матрицею $C = B - A$.

Отже,

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 2 & 5 & 22 \\ 20 & 15 & 9 & 3 & 15 \\ 16 & 20 & 10 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.2. Будівельна фірма «Надійний дах» виготовляє металочерепицю трьох видів: кольорову, стійку, екологічну. Процес виробництва відбувається із застосуванням різних технологічних операцій, що відповідають робочим місцям № 1 – 5.

Зробіть розрахунок заробітної плати, що припадає на кожне замовлення під час виготовлення виробів кожного виду, якщо є така інформація:

а) витрати часу (у годинах) на кожному робочому місці на виготовлення одиниці продукції відповідного виду (наведено в таблиці):

Види металочерепиці	Витрати часу на робочому місці, год				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Кольорова	2	1	4	5	0
Стійка	1	4	2	5	2
Екологічна	0	1	0	3	4

б) кількість виробів (в одиницях) у кожному замовленні:

Замовники	Обсяги замовлень за кожним видом металочерепиці, од.		
	кольорова	стійка	екологічна
Завада І. І.	0	4	2
Петренко П. В.	0	2	4
Сидорчук С. І.	5	1	0

в) заробітна плата за одну годину (у гривнях) на кожному робочому місці:

Робочі місця	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Заробітна плата, грн/год	12,5	15,0	14,0	14,0	12,5

Розв'язання. Витрати часу на кожному робочому місці, кількість виробів, а також заробітну плату на кожному робочому місці за одну годину можна розглядати як елементи матриць A , B і P , відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 12,5 \\ 15,0 \\ 14,0 \\ 14,0 \\ 12,5 \end{pmatrix}.$$

Матриця P задає лінійну залежність між розміром заробітної плати та витратами робочого часу на кожному робочому місці, а матриця A – між витратами часу на цьому робочому місці й одиницею виробу, що випускають.

Отже, матрицю C , що характеризує нарахування заробітної плати, що припадає на одиницю кожного з видів виробів, визначають як добуток матриць $C = A \cdot P$:

$$C = A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12,5 \\ 15,0 \\ 14,0 \\ 14,0 \\ 12,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 166,0 \\ 195,5 \\ 107,0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця B визначає кількість виробів за кожним замовленням, то добуток $B \cdot C = X$ визначає розмір заробітної плати, яка припадає на виконання кожного замовлення.

Отже,

$$X = B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 166,0 \\ 195,5 \\ 107,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 996,0 \\ 819,0 \\ 1025,5 \end{pmatrix},$$

тобто на виконання замовлення Завади І. І. нарахування заробітної плати становить 996,0 грн, замовлення Петренка П. В. – 819,0 грн, а на виконання замовлення Сидорчука С. І. – 1025,5 грн.

1.3. Машинобудівний завод «Дормаш» випускає трактори трьох видів: ДМТ-100, ДМТ-300 та ДМТ-500, де використовують сталь трьох марок: Ст4пс, Ст2кп і Ст20кп. Норми витрат кожної марки сталі на один трактор, а також запаси сталі наведено в таблиці:

Марки сталі	Норми витрат сталі на один трактор, т			Запаси сталі, т
	ДМТ-100	ДМТ-300	ДМТ-500	
Ст4пс	4	1	1	7
Ст2кп	2	1	2	7
Ст20кп	3	2	1	7

Визначте кількість тракторів кожного виду, яку випустив завод, якщо відомо, що на це було використано весь запасу сталі.

Розв'язання. Позначмо кількість тракторів кожного виду через x_1 , x_2 , x_3 , відповідно до переліку, що наведений у таблиці. Очевидно, що $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Витрати сталі кожної марки за умови повного використання запасів на-
даймо у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'яжімо цю систему трьома способами: за формулами Крамера, за до-
помогою оберненої матриці, а також за методом Жордана – Гаусса.

1. Правило Крамера. Обчислимо визначник системи Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система є визначеною, тобто має єдиний розв'язок.

Обчислимо визначники Δ_1 , Δ_2 і Δ_3 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -14.$$

За формулами Крамера, маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

Отже, у матричній формі маємо: $X = (1, 1, 2)^T$.

2. Матричний спосіб. Для розв'язання системи за допомогою оберненої
матриці введемо в розгляд матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

У матричній формі систему записують так: $A \cdot X = B$. Звідси маємо її розв'язок: $X = A^{-1} \cdot B$, де A^{-1} – матриця, що є оберненою до матриці A .

Визначник матриці A вже обчислено і з'ясовано, що він не дорівнює нулю.

Отже, матриця A є невинродженою і для неї існує обернена матриця A^{-1} . Згідно з ф-лою (2.14), для побудови оберненої матриці треба обчислити алгебраїчні доповнення A_{ij} ($i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3}$) усіх елементів вихідної матриці A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Отже, матриця A^{-1} має такий вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Виконаймо перевірку оберненої матриці за її означенням:

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Обчислимо розв'язок СЛАР за співвідношенням (2.19):

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо той самий розв'язок, що обчислено за формулами Крамера:

$$X = (1, 1, 2)^T.$$

3. Метод Жордана – Гаусса. Розв’язання системи рівнянь подаймо в таблиці, виконуючи в ній і прямий, і зворотний хід методу Гаусса, тобто реалізуємо схему Жордана – Гаусса.

№ з/п	x_1	x_2	x_3	Вільні члени	Σ	Примітки
I	4	1	1	7	13	
II	2	1	2	7	12	
III	3	2	1	7	13	
IV	4	1	1	7	13	I
V	-2	0	1	0	-1	IV $\cdot (-1) + II$
VI	-5	0	-1	-7	-13	IV $\cdot (-2) + III$
VII	6	1	0	7	14	V $\cdot (-1) + IV$
VIII	-2	0	1	0	-1	V
IX	-7	0	0	-7	-14	V + VI
X	0	1	0	1	2	XII $\cdot (-6) + VII$
XI	0	0	1	2	3	XII $\cdot 2 + VIII$
XII	1	0	0	1	2	IX $\cdot (-1/7)$

За останньою ітерацією визначаймо, що $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Отже, машинобудівний завод, використавши запаси сталі в повному обсязі, виготовив один трактор виду ДМТ-100, один трактор виду ДМТ-300 і два трактори виду ДМТ-500.

1.4. Сімейна фірма виробляє напої «Черемош» і «Водограй». Для виробництва 1 л напою «Черемош» потрібно 0,02 год роботи обладнання, а для 1 л напою «Водограй» – 0,04 год. Витрати основних речовин напоїв дорівнюють 0,01 і 0,04 кг на 1 л напоїв «Черемош» і «Водограй», відповідно. Протягом дня фірма може використати 16 кг основних складових речовин і 24 год роботи обладнання. Прибуток фірми від продажу 1 л напоїв «Черемош» і «Водограй» становить 0,10 і 0,40 грн, відповідно. Прибуток за один робочий день становить 160 грн.

Визначте, скільки напоїв кожного типу виробляє фірма щоденно, якщо відомо, що всі ресурси використовують повністю.

Розв'язання. Запишімо умову задачі у вигляді такої таблиці:

Ресурси	Напої		Запаси ресурсів, кг
	«Черемош»	«Водограй»	
Основні складові речовини, кг	0,01	0,04	16,00
Фонд часу обладнання, год	0,02	0,04	24,00
Прибуток, грн	0,10	0,40	160,00

Позначмо через $x_1 \geq 0$ кількість літрів напою «Черемош», через $x_2 \geq 0$ – напою «Водограй», що виробляють щоденно, а через x_3 – залишок робочого часу обладнання, який фірма використовує для його ремонту.

Складімо математичну модель задачі. Це така система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 0,04x_2 = 16,00, \\ 0,02x_1 + 0,04x_2 + x_3 = 24,00, \\ 0,10x_1 + 0,40x_2 = 160,00. \end{cases}$$

Розв'яжімо систему за методом Жордана – Гаусса. Виконаймо елементарні перетворення розширеної матриці системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,01 & 0,04 & 0 & 16,00 \\ 0,02 & 0,04 & 1 & 24,00 \\ 0,10 & 0,40 & 0 & 160,00 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0,01 & 0,04 & 0 & 16,00 \\ 0,01 & 0 & 1 & 8,00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0,25 & 1 & 0 & 400,00 \\ 0,01 & 0 & 1 & 8,00 \end{array} \right).$$

Ранги основної матриці системи й розширеної матриці дорівнюють 2, а кількість змінних – 3. Це означає, що система є сумісною і має безліч розв'язків.

За перетвореною матрицею система рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{cases} 0,25x_1 + x_2 = 400,00, \\ 0,01x_1 + x_3 = 8,00, \end{cases}$$

де x_2 і x_3 – базисні невідомі, а x_1 – вільна невідома.

Запишімо загальний розв'язок системи, для цього визначмо базисні невідомі через вільну:

$$\begin{cases} x_2 = 400,00 - 0,25x_1, \\ x_3 = 8,00 - 0,01x_1, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Цей розв'язок можна надати і в матричній формі:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -0,25x_1 + 400,00 \\ -0,01x_1 + 8,00 \end{pmatrix}.$$

Система має безліч розв'язків, залежно від того, яких значень набуває вільна невідома x_1 .

Оскільки $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, визначмо, у яких межах може змінюватися вільна невідома x_1 :

$$\begin{cases} -0,25x_1 + 400,00 \geq 0, \\ -0,01x_1 + 8,00 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 1600,00, \\ x_1 \leq 800,00, \end{cases}$$

тобто $0 \leq x_1 \leq 800$.

Отже, для будь-якого x_1 , що належить відрізку $[0, 800]$, маємо невід'ємні частинні розв'язки системи рівнянь.

Проаналізуємо визначений результат.

Нехай фірма виробляє 800 л напою «Черемош» ($x_1 = 800$), але тоді вона має виробляти 200 л напою «Водограй» ($x_2 = 200$), щоб у повному обсязі використати робочий час обладнання: $x_3 = 0$.

Отже, $X_1 = (800, 200, 0)^T$ – частинний розв'язок системи. За цих умов щоденний прибуток фірми буде становити $800 \cdot 0,1 + 200 \cdot 0,4 = 160$ грн.

Однак, якщо фірмі потрібно мати резерв часу для технічного огляду обладнання, то вона може перепланувати випуск продукції. Наприклад, якщо $x_3 = 2$ год, то за умовою $x_3 = -0,01x_1 + 8,00$ установлюймо, що фірма має випускати 600 л напою «Черемош» ($x_1 = 600$), а з рівняння $x_2 = -0,25x_1 + 400,00$ випливає, що напою «Водограй» слід випускати 250 л ($x_2 = 250$).

Отже, за таким припущенням було визначено ще один частинний розв'язок системи: $X_2 = (600, 250, 2)^T$. Водночас прибуток за цим планом буде той самий: $600 \cdot 0,1 + 250 \cdot 0,4 = 160$ (грн).

Якщо фірма планує максимально скоротити час роботи обладнання, то в загальному розв'язку слід покласти $x_1 = 0$, тобто недоцільно випускати напій «Черемош». Тоді маємо, що $x_3 = 8$, а $x_2 = 400$.

Отже, $X_3 = (0, 400, 8)^T$ – це базисний розв'язок системи. Він є опорним, оскільки матриця X_3 не містить від'ємних елементів. До речі, водночас прибуток фірми не зміниться.

Підсумовуючи розглянуте, зауважмо, що з огляду на свої інтереси, фірма може вибрати той чи той частинний розв'язок із безлічі можливих. Таким способом вона може забезпечити найбільш ефективне використання ресурсів.

1.5. У наданій далі таблиці в умовних грошових одиницях наведено міжгалузевий баланс за звітний період:

Галузі виробництва	Споживання		Кінцевий попит	Валовий випуск
	енергетика	машинобудування		
Енергетика	7	21	72	100
Машинобудування	12	15	63	100

Обчисліть потрібний обсяг валового випуску продукції кожною галуззю, якщо кінцеве споживання енергетичної галузі слід збільшити вдвічі, а машинобудування – залишити на попередньому рівні.

Розв'язання. Позначмо через x_1 валовий випуск продукції енергетичної галузі; через x_2 – валовий випуск машинобудування; через a_{11} – обсяг продукції енергетичної галузі, що споживає сама енергетична галузь під час виробництва одиниці продукції своєї галузі; a_{12} – обсяг продукції енергетичної галузі, що йде на виробництво одиниці продукції машинобудування; через a_{21} і a_{22} – обсяги продукції машинобудування, що використовують під час виробництва одиниці продукції енергетичною й машинобудівною галузями, відповідно, а через y_1 і y_2 – кінцевий попит на продукцію енергетичної та машинобудівної галузей, відповідно.

Для цієї задачі модель Леонтьєва «витрати-випуск» має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2. \end{cases}$$

За умовою задачі: $x_1 = 100$, $x_2 = 100$.

Відповідно, маємо: $a_{11}x_1 = 7$; $a_{12}x_2 = 21$; $a_{21}x_1 = 12$; $a_{22}x_2 = 15$.

Також: $y_1 = 72$, $y_2 = 63$.

Поділивши на обсяг валового випуску, визначмо коефіцієнти прямих витрат. Тоді: $a_{11} = 0,07$; $a_{12} = 0,21$; $a_{21} = 0,12$; $a_{22} = 0,15$.

Отже, матриця прямих витрат має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,21 \\ 0,12 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Усі елементи матриці A є невід'ємними. Перевірмо, чи є ця матриця продуктивною.

Визначмо власні значення матриці за характеристичним рівнянням:

$$|A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0,07 - \lambda & 0,21 \\ 0,12 & 0,15 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристичний многочлен цієї матриці має такий вигляд:

$$(0,07 - \lambda)(0,15 - \lambda) - 0,12 \cdot 0,21 = 0.$$

Після перетворення маємо таке квадратне рівняння:

$$\lambda^2 - 0,22\lambda - 0,0047 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 0,24$, $\lambda_2 = -0,02$.

Власне число λ_1 є додатним, також $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, тобто λ_1 – простий корінь характеристичного многочлена.

Оскільки $\lambda_1 = 0,24 < 1$, це означає, що матриця A є продуктивною, тобто для довільної матриці кінцевого попиту Y із невід'ємними компонентами існує матриця валового випуску X , усі компоненти якої є невід'ємними.

Для визначення обсягу валового випуску застосуємо таку формулу:

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Розгляньмо випадок, якщо кінцеве споживання в енергетичній галузі підвищити вдвічі, а в машинобудуванні – залишити на попередньому рівні. У цьому разі маємо:

$$Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 63 \end{pmatrix}, \quad E - A = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,21 \\ -0,12 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник:

$$|E - A| = 0,7653 \neq 0.$$

Оскільки цей визначник є відмінним від нуля, то існує обернена матриця. Вона має такий вигляд:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,7653} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,21 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

Тоді:

$$X = \frac{1}{0,7653} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,21 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 144 \\ 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 177,2 \\ 99,1 \end{pmatrix}.$$

Отже, валовий випуск продукції енергетичної галузі потрібно збільшити до 177,2 у. о., а машинобудівної – до 99,1 у. о.

1.6. Визначте співвідношення національних прибутків Казахстану, України та Польщі в умовах збалансованої торгівлі, якщо структурна матриця має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складемо матричне рівняння:

$$(A - E)X = O,$$

де $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ – матриця-стовпець, що визначає національні прибутки кожної країни.

Отже, маємо таке матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Це матричне рівняння можна подати у вигляді такої однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0. \end{cases}$$

Після еквівалентних перетворень система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{3}x_3 = 0, \\ x_2 - \frac{4}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_3 \\ \frac{4}{3}x_3 \\ x_3 \geq 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $x_3 = 3$, тоді $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Отже, збалансованості торгівлі між Казахстаном, Україною та Польщею досягають, якщо національні прибутки цих країн визначають за таким співвідношенням 2:4:3.

Завдання для самостійного розв'язання

Визначте такі матричні добутки:

$$1.7. \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.8. \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.9. \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.10. \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3).$$

$$1.11. (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.12. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.13. (1 \ 2 \ -3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.14. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.15. Визначте матрицю $C = A \cdot B - B \cdot A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.16. Визначте матрицю $C = A^2 - (A + B)(A - 3B)$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначте матрицю, що є оберненою до матриці A , і перевірте правильність розрахунків за її означенням:

$$1.17. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad 1.18. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.19.} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{1.20.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжіть такі матричні рівняння:

$$\mathbf{1.21.} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{1.22.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжіть методом оберненої матриці такі системи рівнянь:

$$\mathbf{1.23.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases} \quad \mathbf{1.24.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Визначте за допомогою елементарних перетворень ранги таких матриць:

$$\mathbf{1.25.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{1.26.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.27.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{1.28.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 11 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 17 & 12 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчисліть такі визначники:

$$\mathbf{1.29.} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}. \quad \mathbf{1.30.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.31.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}. \quad \mathbf{1.32.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'яжіть такі рівняння:

$$1.33. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & x+5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0. \quad 1.34. \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'яжіть за формулами Крамера такі системи рівнянь:

$$1.35. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 11, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 11. \end{cases} \quad 1.36. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$$

Дослідіть та розв'яжіть такі системи рівнянь, якщо вони є сумісними:

$$1.37. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases} \quad 1.38. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -2. \end{cases}$$

$$1.39. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases} \quad 1.40. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$1.41. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 7, \\ -4x_1 + 2x_2 = -2, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

Розв'яжіть такі однорідні системи рівнянь:

$$1.42. \begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 1.43. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжіть за методом Жордана – Гаусса такі системи рівнянь:

$$1.44. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.45. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.46. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

$$1.47. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

1.48. У базисі із векторів $\bar{e}_1$ та $\bar{e}_2$ оператор лінійного перетворення має матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Визначте матрицю C переходу до базису із векторів $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$ та $\bar{e}'_2 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.

1.49. У базисі $\bar{e}_1$ та $\bar{e}_2$ оператор лінійного перетворення має матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Визначте власні числа і власні вектори цієї матриці. Визначте матрицю лінійного перетворення в базисі із власних векторів.

1.50. Кондитерська фірма «Марципан» накопичує відомості про обсяг продажу своїх виробів щомісячно. Цю інформацію наведено за типом виробів (шоколадні цукерки, мармелад, зефір) та за районами реалізації продукції (Харківський, Барвінківський, Лозівський) у вигляді такої таблиці:

Типи виробів	Райони реалізації продукції		
	Харківський	Барвінківський	Лозівський
Шоколадні цукерки, кг	98	24	42
Мармелад, кг	39	15	22
Зефір, кг	22	15	17

Визначте обсяг реалізації продукції в кожному районі за два місяці, якщо обсяг продажу за другий місяць подано у вигляді такої матриці:

$$\begin{pmatrix} 55 & 19 & 44 \\ 43 & 53 & 38 \\ 11 & 40 & 20 \end{pmatrix}.$$

1.51. Раціон здорового харчування передбачає вживання ізюму, яблук та кураги. Уміст вітамінів А, С і Р в розрахунку на 1 г продукту наведено в такій таблиці:

Харчові продукти	Вітаміни, мг		
	А	С	Р
Ізюм	0,1	0,3	0,4
Яблука	0,2	0,3	0,5
Курага	0,3	0,0	0,3

Визначте вміст вітамінів кожного виду, що містить раціон, за яким передбачено вживання 110 г ізюму, 90 г яблук та 200 г кураги.

1.52. Під час виготовлення деталей чотирьох видів, кількість яких становить 10, 2, 8 та 4 одиниці, відповідно, використовують як матеріальні ресурси сировину, робочу силу та електроенергію. Відповідні питомі витрати наведено у вигляді такої таблиці:

Матеріальні ресурси	Норми витрат на одну деталь кожного виду			
	1	2	3	4
Сировина, кг	1,0	3,0	0,5	2,0
Робоча сила, люд.-год	1,5	2,0	3,0	1,0
Електроенергія, кВт/год	2,0	1,0	1,0	0,5
Кількість деталей, од.	10	2	8	4

Обчисліть загальні потреби в сировині, робочій силі та електроенергії для виготовлення заданої кількості деталей.

Указівка. Позначте через A матрицю норм витрат матеріальних ресурсів, через X – матрицю кількості виробів, через Y – матрицю загальних потреб у ресурсах і розв’яжіть таке матричне рівняння: $Y = A \cdot X$.

1.53. Компанія постачає тротуарне покриття для фірм «БудІнвест», «ДорБуд» і «Шлях». Запаси ресурсів та норми витрат на виготовлення 1 м² покриття, згідно з вимогами кожного зі споживачів, наведено в такій таблиці:

Ресурси	Витрати на виготовлення 1 м ² покриття			Запаси
	«БудІнвест»	«ДорБуд»	«Шлях»	
Сировина, кг	5	7	4	24
Допоміжні матеріали, кг	10	5	20	75
Обладнання, год	5	2	1	10

Визначте план виготовлення продукції за умови, що всі ресурси буде використано.

1.54. Задано матрицю коефіцієнтів прямих витрат A і матрицю кінцевої продукції Y на плановий термін:

$$A = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,15 \\ 0,25 & 0,12 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Визначте плановий обсяг валової продукції.

1.55. Задано матрицю A коефіцієнтів витрат у сільському господарстві промисловості та будівництві, а також матрицю Y кінцевого попиту на продукцію цих галузей:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,0 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 40 \\ 200 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Визначте валовий випуск продукції кожної галузі (із точністю до першого знака після десяткової коми).



Відповіді

1.7. $\begin{pmatrix} 5 & 22 \\ -2 & 28 \end{pmatrix}$.

1.8. $\begin{pmatrix} 2 & 41 \\ 11 & 30 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}$.

1.9. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.10. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

1.11. (13).

1.12. $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.13. (5, -19, 5).

1.14. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

1.15. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.16. $\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$.

1.17. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.18. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.19. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

1.20. $\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

1.21. $\begin{pmatrix} -8 & -14 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

1.22. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 13 & -11 & 13 \\ 21 & 3 & 16 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1.23. $(1, 1, -1)^T$.

1.24. $(1, 2, 3)^T$.

1.25. $r = 2$.

1.26. $r = 3$.

1.27. $r = 2$.

1.28. $r = 3$.

1.29. 9.

1.30. 10.

1.31. 180.

1.32. -72.

1.33. 3, 5.

1.34. $\{2, 3\}$.

1.35. $(2, 1, -1)^T$.

1.36. $(-1, 1, -2)^T$.

1.37. $(1, 2, -2)^T$.

1.38. Несумісна.

$$1.39. x_1 = -3 + 9x_2, x_3 = 1 - 3x_2, x_2 \in \mathbf{R}.$$

$$1.40. (1, 2, 3)^T.$$

$$1.41. x_2 = 2x_1 - 1, x_3 = -6, x_1 \in \mathbf{R}.$$

$$1.42. (0, 0, 0)^T.$$

$$1.43. x_1 = 8x_3 - 7x_4, x_2 = -6x_3 + 5x_4, x_3 \in \mathbf{R}, x_4 \in \mathbf{R}. \quad 1.44. (-1, 3, 1)^T.$$

$$1.45. \text{Несумісна.} \quad 1.46. x_2 = 24 - 6x_1 + x_4, x_3 = -7 + 2x_1 - x_4, x_1 \in \mathbf{R}, x_4 \in \mathbf{R}.$$

$$1.47. (2, -1, 2, 1)^T. \quad 1.48. C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 1.49. A' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

$$1.50. \begin{pmatrix} 153 & 43 & 86 \\ 82 & 68 & 60 \\ 33 & 55 & 37 \end{pmatrix}. \quad 1.51. (89, 60, 149). \quad 1.52. (28, 47, 32).$$

$$1.53. (1, 1, 3).$$

$$1.54. (482, 3; 250, 6)^T. \quad 1.55. (111, 3; 379, 0; 51, 4)^T.$$

Відповіді до тестових завдань

Номери підрозділів	Номери тестових завдань									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	б	в	а	а	б	г	б	а	а	г
2	г	г	г	б	в	б	в	а	г	в
3	г	б	а	в	а	б	г	г	в	а
4	б	а	б	а	г	г	г	в	г	в
5	б	в	г	а	а	б	а	а	в	б

Розділ 2. Векторна алгебра й аналітична геометрія



Поняття «вектор» (від лат. *vector* – «носій») як відрізка, що має певну

довжину та певний напрямок, уперше маємо в роботах ірландського математика Вільяма Гамільтона (1805 – 1865) щодо побудови числових систем. Це поняття пов'язано з об'єктами, які характеризують як величиною, так і напрямком, наприклад, швидкість, сила, прискорення. Водночас швидкість можна розуміти в широкому сенсі: швидкість зміни витрат виробництва, доходів, попиту, споживання і пропозиції та ін. Вектор може вказувати напрямок найбільшого зростання або спадання функції, яка описує різноманітні економічні процеси. Вектори, розглянуті в цьому розділі, є окремим випадком n -вимірних векторів і передбачають геометричну інтерпретацію, бо належать до векторних лінійних просторів вимірності 1, 2, 3: $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$.

Для графічного зображення розв'язків економічних задач на площині або в просторі застосовують засоби аналітичної геометрії. **Аналітична геометрія** – математична наука, *об'єктом* вивчення якої є геометричні фігури, а *предметом* – установлення їхніх властивостей засобами алгебри за допомогою координатного методу. Теоретичною базою цієї науки є частково відома зі школи векторна алгебра.

Засновником методу координат і разом із тим аналітичної геометрії є Рене Декарт (1596 – 1650) – французький філософ, математик, фізик і фізіолог. Саме його ім'ям названо відому декартову прямокутну систему координат, яка дає змогу визначити розташування фігури на площині та тіла в просторі.



Після вивчення цього розділу ви зможете:

- використовувати інструмент векторної алгебри для геометричного зображення й аналізу об'єктів економічних процесів;
- застосовувати рівняння прямої лінії на площині для геометричної інтерпретації залежності між функціональною ознакою й аргументом, що на неї впливає;
- застосовувати рівняння кривих 2-го порядку в разі побудови нелінійних математичних моделей економічних задач;
- здійснювати геометричну інтерпретацію розв'язків економічних задач за допомогою поверхонь та площин.

6. Елементи векторної алгебри

Основні питання:

- 6.1. Вектори: основні означення, лінійні операції.
- 6.2. Прямокутна система координат у просторі. Координатна й алгебраїчна форми задання векторів.
- 6.3. Нелінійні операції над векторами.
- 6.4. Найпростіші задачі аналітичної геометрії.

6.1. Вектори: основні означення, лінійні операції

Розгляньмо на довільній прямій (у $\mathbf{R}^2$ або $\mathbf{R}^3$) відрізок AB і визначмо, яку з точок A чи B вважати початком відрізка, а яку – його кінцем. Позначмо кінець відрізка стрілкою, тим самим задавши на ньому *напрямок*. Відрізок AB із заданим на ньому напрямком, або коротко – напрямлений відрізок, називають **вектором** (рис. 6.1). Вектор позначають символом $\overline{AB}$ або малими буквами латинського алфавіту з рискою: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ та ін.

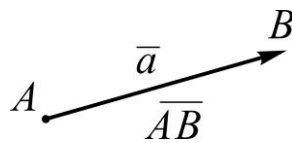


Рис. 6.1. Вектор

У застосовних задачах природничих наук суттєвою є обставина – де, у якій точці розташовано початок вектора. Наприклад, результат дії сили залежить не тільки від її величини й напрямку дії, а й від того, у якій точці цю силу прикладено.

Вектор, для якого є фіксованою (нефіксованою) початкова точка, називають **зв'язаним (вільним)**. Вектори, які застосовують в економічних задачах, зазвичай, не є зв'язаними, тому в подальшому будемо розглядати переважно вільні вектори.

Довжиною, або **модулем**, вектора називають довжину відповідного відрізка і позначають одним із символів: $|\bar{a}|$, a , $|\overline{AB}|$, AB .

Нульовим вектором $\bar{0}$, або **нуль-вектором**, називають вектор, довжина якого дорівнює нулю, а напрямок його вважають довільним (невизначеним).

Одиничним вектором $\vec{e}$ називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці.

Рівними називають вектори, які належать одній прямій або паралельним прямим, є однаково напрямленими та мають рівні довжини.

Взаємно протилежними називають вектори, які належать одній прямій або паралельним прямим, мають рівні довжини, але є протилежно напрямленими. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають символом $-\vec{a}$.

Колінеарними називають вектори, які належать одній прямій або паралельним прямим.

Компланарними називають вектори, які належать одній площині або паралельним площинам.

Лінійні операції над векторами. Будемо вважати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ належать одній площині. Виконуючи паралельне перенесення одного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, сумістімо початок вектора $\vec{b}$ з кінцем вектора $\vec{a}$ (або навпаки) і за відрізками, що відповідають векторам за двома сторонами, побудуємо трикутник (рис. 6.2а).

1. **Сумою** векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який визначають третьою стороною трикутника з початком у початку вектора $\vec{a}$. Порядок побудови суми двох векторів за цим означенням називають **правилом трикутника**.



Рис. 6.2. Сума векторів:

а) правило трикутника; б) правило паралелограма

Сумістімо початки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і за відрізками, що відповідають векторам за двома сторонами, побудуємо паралелограм (рис. 6.2б), тоді **сумою** векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який визначають діагоналлю паралелограма з початком у початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Таке правило визначення суми векторів називають **правилом паралелограма**.

Правило трикутника можна узагальнити на довільну скінченну кількість векторів: якщо паралельним перенесенням розташувати вектори так, що кінець попереднього вектора (починаючи з першого) є початком наступного,

то результативним буде вектор, який з'єднає початок першого вектора-доданка з кінцем останнього (рис. 6.3):

$$\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}. \quad (6.1)$$

Відповідне правило називають **правилом многокутника**.

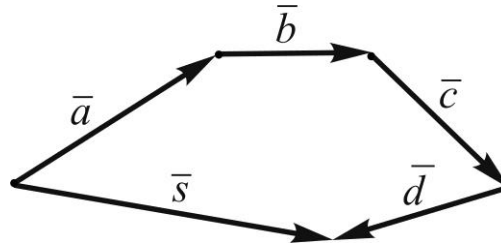


Рис. 6.3. Правило многокутника

Властивості суми векторів:

- 1) *переставна (комутативна)*: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;
- 2) *сполучна (асоціативна)*: $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$;
- 3) $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$;
- 4) $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.

Різницю $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ можна розглядати як суму вектора $\bar{a}$ з вектором, протилежним вектору $\bar{b}$:

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}).$$

2. Множення вектора на скаляр. Нехай λ – деяке дійсне число ($\lambda \neq 0$). Добутком вектора $\bar{a}$ зі скаляром λ називають вектор $\bar{b}$, модуль якого дорівнює добутку модулів $|\bar{a}|$ і $|\lambda|$, а напрямок $\bar{b}$ збігається з напрямком $\bar{a}$, якщо $\lambda > 0$, або є протилежним напрямку $\bar{a}$, якщо $\lambda < 0$ (рис. 6.4):

$$\bar{b} = \lambda \bar{a}. \quad (6.2)$$

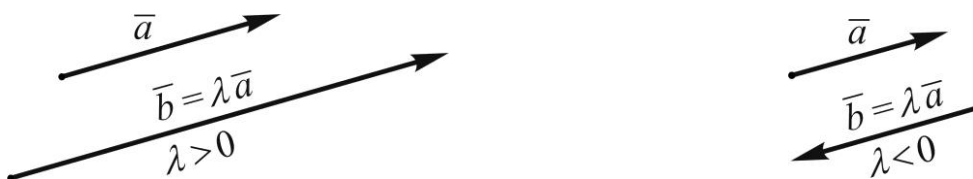


Рис. 6.4. Добуток вектора $\bar{a}$ зі скаляром λ

Якщо $\lambda = 0$, то вектор $\bar{b} = \lambda \bar{a}$ перетворюється на нуль-вектор ($\bar{b} = \bar{0}$).

Властивості множення вектора на скаляр:

- 1) *переставна (комутативна)*: $\lambda \bar{a} = \bar{a} \lambda$ ($\lambda = \text{const}$);
- 2) *сполучна (асоціативна)*: $\lambda(\mu \bar{a}) = \mu(\lambda \bar{a})$ ($\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$);
- 3) *розподільна (дистрибутивна)*:
$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}, \quad (\lambda + \mu) \bar{a} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{a} \quad (\lambda = \text{const}, \mu = \text{const});$$
- 4) $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$, $-1 \cdot \bar{a} = -\bar{a}$;
- 5) $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

З означення множення вектора на скаляр випливає *необхідна і достатня умова колінеарності* двох векторів: вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ є колінеарними тоді й тільки тоді, коли кожний із них є добутком другого зі скаляром:

$$\bar{b} = \lambda \bar{a} \Leftrightarrow \bar{a} = \frac{1}{\lambda} \cdot \bar{b} \quad (\lambda = \text{const}, \lambda \neq 0).$$

Відомо, що три ненульові вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ є компланарними тоді й тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією двох інших:

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ — компланарними} \Leftrightarrow \bar{c} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{b} \quad (\lambda = \text{const}, \mu = \text{const}).$$

Розгляньмо поняття, яке відіграє важливу роль у векторній алгебрі, — проєкції вектора на вісь (пряму, що має напрямок, причому заданий напрямок будемо вважати додатним, протилежний напрямок — від’ємним).

Компонентою вектора $\bar{a}$ відносно осі l називають вектор $\bar{a}_1$, початок якого є проєкцією початку вектора $\overline{AB}$ на вісь l , а кінець — проєкцією кінця вектора $\overline{AB}$ на вісь l : $\bar{a}_1 = \overline{A_1B_1}$ (рис. 6.5).

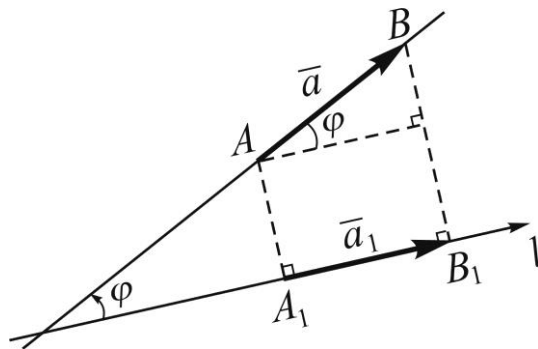


Рис. 6.5. Компонента вектора

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь l називають скаляр, який дорівнює довжині вектора $\vec{a}_1 = \overline{A_1B_1}$ зі знаком «+», якщо напрям $\vec{a}_1$ збігається з напрямком осі l , або зі знаком «-», якщо напрямок $\vec{a}_1$ є протилежним напрямку осі l :

$$np_l \vec{a} = \pm |\overline{A_1B_1}|.$$

Основні властивості проєкції вектора на вісь:

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ з косинусом кута між вектором та віссю:

$$np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi, \quad \varphi = \angle(\vec{a}, l). \quad (6.3)$$

2. Проекція суми двох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ на вісь l дорівнює сумі проєкцій векторів на цю вісь:

$$np_l (\vec{a} + \vec{b}) = np_l \vec{a} + np_l \vec{b}.$$

Цю властивість можна узагальнити на будь-яку скінченну кількість векторів.

3. Проекція на вісь l добутку вектора $\vec{a}$ зі скаляром дорівнює добутку скаляра із проєкцією вектора $\vec{a}$ на цю вісь:

$$np_l (k\vec{a}) = k \cdot np_l \vec{a}, \quad k = \text{const}.$$

6.2. Прямокутна система координат у просторі.

Координатна й алгебраїчна форми задання векторів

Нехай у тривимірному векторному просторі $\mathbf{R}^3$ задано *прямокутну декартову систему координат* $xOyz$, яку визначають за трьома взаємно перпендикулярними **числовими осями** – осями, на яких указано масштаб (одiniцю вимірювання довжини) – зі спільною точкою O – **початком координат** (рис. 6.6).

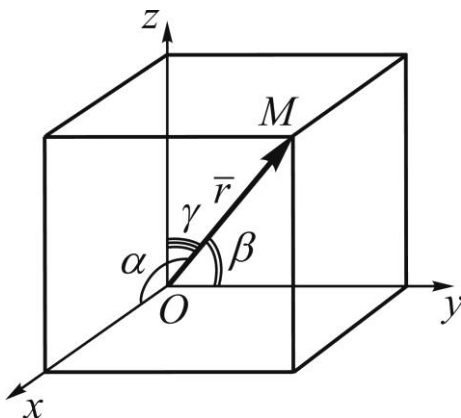


Рис. 6.6. Декартова система координат, радіус-вектор точки M та його напрямні кути

Виберімо в просторі довільну точку M і з'єднаймо її відрізком прямої з початком координат O . Вектор $\vec{r} = \overline{OM}$, початком якого є початок координат O , а кінцем є ця точка M , називають **радіусом-вектором** точки M . Зазначмо, що радіуси-вектори точок простору є зв'язаними векторами.

Декартовими прямокутними координатами точки M називають проєкції її радіуса-вектора $\vec{r}$ на осі Ox, Oy, Oz :

$$x = np_{Ox}\vec{r}, \quad y = np_{Oy}\vec{r}, \quad z = np_{Oz}\vec{r}.$$

Точку M із координатами x, y, z позначають через $M(x, y, z)$. Радіус-вектор $\vec{r}$ кожної точки простору (крім точки O) визначає прямокутний паралелепіпед, діагоналлю якого є відрізок, що відповідає вектору $\vec{r}$ (див. рис. 6.6), а його вимірами – модулі координат точки M .

Отже, довжину діагоналі паралелепіпеда визначмо за такою формулою:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Кути α, β, γ , які утворені радіусом-вектором $\vec{r}$ із координатними осями Ox, Oy, Oz , називають його **напрямними кутами** (див. рис. 6.6).

За властивістю проєкцій вектора (6.3), маємо: $x = |\vec{r}| \cos \alpha$, $y = |\vec{r}| \cos \beta$, $z = |\vec{r}| \cos \gamma$, звідси:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{r}|}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}. \quad (6.4)$$

Косинуси напрямних кутів називають **напрямними косинусами** радіуса-вектора $\vec{r}$.

Із ф-ли (6.4) маємо **властивості** напрямних косинусів:

1) напрямні косинуси є координатами одиничного радіус-вектора:

$$|\vec{r}| = 1 \Leftrightarrow \vec{r} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma);$$

2) сума квадратів напрямних косинусів вектора $\vec{r}$ ($\vec{r} \neq \vec{0}$) дорівнює одиниці:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Поняття «координата», «напрямні кути», «напрямні косинуси» без змін можна перенести на будь-які вільні вектори, бо початок кожного з них паралельним перенесенням можна помістити в точці O , що дає радіус-вектор певної точки.

Координатами будь-якого вектора $\vec{a}$ у просторі називають його проєкції на координатні осі Ox , Oy , Oz :

$$a_x = np_{Ox}\vec{a}, \quad a_y = np_{Oy}\vec{a}, \quad a_z = np_{Oz}\vec{a}$$

і пишуть: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ або $\vec{a} = \vec{a}(a_x, a_y, a_z)$.

Зображення вектора трійкою його координат $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ називають **координатною формою** задання цього вектора.

Для одиничних векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, розташованих, відповідно, на осях Ox , Oy , Oz , маємо: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Довжину довільного вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і його напрямні косинуси обчислюють за такими формулами:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \quad (6.5)$$



Визначмо довжину та напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (1, 2, -2)$.

За ф-лами (6.5), маємо:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3;$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{3}.$$

Установімо зв'язок між координатами вектора – *числами* – і його компонентами – *векторами*.

Компонентами вектора $\vec{a}$ відносно координатних осей є вектори $\vec{OC}$, $\vec{CB}$, $\vec{BA}$ (рис. 6.7). Тоді, за правилом многокутника визначення суми векторів, маємо: $\vec{a} = \vec{OC} + \vec{CB} + \vec{BA}$.

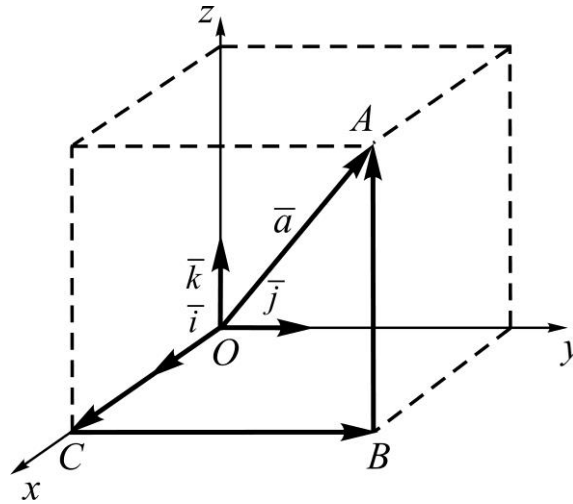


Рис. 6.7. Подання вектора $\bar{a}$ як суми його компонент

Отже, будь-який вектор $\bar{a}$ в тривимірному просторі є сумою трьох його компонент відносно координатних осей:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z) \Rightarrow \bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}. \quad (6.6)$$

Зображення вектора з $\mathbf{R}^3$ у вигляді суми добутків координат з одиничними векторами (ортами) називають **алгебраїчною формою** задання вектора.

Згідно із властивостями операцій над векторами, алгебраїчна форма задання дає змогу установити результати дій над векторами, заданими в координатній формі.

1. Під час додавання (віднімання) двох векторів з $\mathbf{R}^3$: $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, їхні відповідні за номером координати додають (віднімають):

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z).$$

Дійсно, за властивостями асоціативності й дистрибутивності, маємо:

$$\begin{aligned} \bar{a} \pm \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \pm (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \\ &= (a_x \pm b_x) \bar{i} + (a_y \pm b_y) \bar{j} + (a_z \pm b_z) \bar{k}. \end{aligned}$$

2. Під час множення вектора $\bar{a}$ на скаляр λ всі його координати треба помножити на цей скаляр:

$$\lambda \bar{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Справді, відповідно до розподільної властивості множення скаляра на суму векторів, маємо:

$$\lambda \bar{a} = \lambda \cdot (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) = \lambda a_x \bar{i} + \lambda a_y \bar{j} + \lambda a_z \bar{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

6.3. Нелінійні операції над векторами

До нелінійних дій над векторами належать скалярний, векторний і мішаний добутки.

Скалярним добутком двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають число (скаляр), що дорівнює добутку їхніх модулів із косинусом кута між ними $\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$ і позначають $\bar{a} \cdot \bar{b}$:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (6.7)$$

Замість $\bar{a} \cdot \bar{b}$, часто пишуть $\bar{a} \bar{b}$ або $(\bar{a}, \bar{b})$. Назву цієї операції цілком погоджено з її сутністю: скалярний добуток векторів є скаляром, тобто числом.

Для визначення кута φ між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ суміщають їхні початки й розглядають кут між двома променями l_1 і l_2 , які виходять зі спільної точки T і $l_1 \uparrow \bar{a}$, $l_2 \uparrow \bar{b}$ (рис. 6.8).

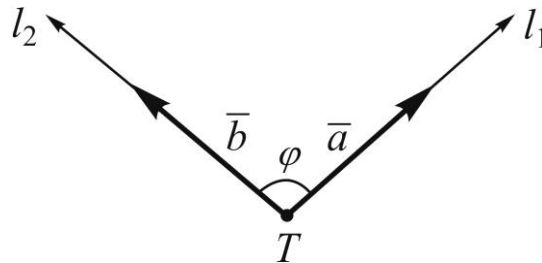


Рис. 6.8. Кут між векторами

Основні властивості скалярного добутку векторів випливають із його означення (6.7).

1. Скалярний добуток $\bar{a} \cdot \bar{b}$ двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли вектори є взаємно перпендикулярними (ортогональними):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow (\varphi = \pi/2). \quad (6.8)$$

2. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos \angle(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2. \quad (6.9)$$

3. Скалярний добуток векторів підпорядковано всім законам арифметики чисел щодо лінійних операцій:

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{b} &= \bar{b} \cdot \bar{a}; \\ \bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) &= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}; \\ (\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} &= \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b}) \quad (\lambda = \text{const}).\end{aligned}\tag{6.10}$$

4. Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку модуля одного з них із проекцією другого на вісь, напрямком якої визначають першим вектором:

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{b} &= |\bar{a}| \cdot (|\bar{b}| \cdot \cos \varphi) = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}} \bar{b}; \\ \bar{a} \cdot \bar{b} &= |\bar{b}| \cdot (|\bar{a}| \cdot \cos \varphi) = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}} \bar{a}.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Доведення цієї властивості ґрунтується на означенні (6.3).

Скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, заданих у координатній формі. Нехай маємо два вектори $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

1. Обчислимо скалярні добутки одиничних векторів $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. За властивістю **2**, установлюймо: $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$. Для інших пар, на підставі властивості **1**, маємо:

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{i} = \bar{i} \cdot \bar{k} = 0.$$

2. Обчислимо добуток $\bar{a} \cdot \bar{b}$, задаючи вектори в алгебраїчній формі (6.6) і використовуючи розподільний закон:

$$\begin{cases} \bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \\ \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k} \end{cases} \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \cdot (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}).$$

Розкриваймо дужки й маємо:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.\tag{6.12}$$



Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат. Це збігається з означенням скалярного добутку n-вимірних векторів.

Як наслідок із ф-ли (6.12) за $\bar{a} = \bar{b}$ маємо ф-лу (6.5) визначення модуля вектора через його координати:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Визначмо кут між двома ненульовими векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, що задані в координатній формі. За означенням скалярного добутку векторів (6.7), маємо:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}.$$

З огляду на співвідношення (6.12) і (6.5), формула для визначення косинуса кута між двома векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ набуде такого вигляду:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (6.13)$$

Звідси $\varphi = \arccos(\cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

Зазначмо, що якщо кут φ є гострим ($0 \leq \varphi < \pi/2$), то $\bar{a} \cdot \bar{b} > 0$; якщо ж кут φ є тупим ($\pi/2 < \varphi \leq \pi$), то $\bar{a} \cdot \bar{b} < 0$.

Як наслідок зі співвідношення (6.13) маємо *критерій ортогональності* двох векторів, заданих у координатній формі:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (6.14)$$

Критерієм колінеарності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, заданих у координатній формі, є пропорційність їхніх координат:

$$\bar{a} = \lambda \bar{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda. \quad (6.15)$$

Векторний добуток двох векторів. Нехай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ – вектори простору $\mathbf{R}^3$ ($\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$), що визначають деяку площину ρ . **Векторним добутком** векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають вектор $\bar{s}$, який задовольняє такі умови:

1) модуль його чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, як на сторонах;

2) напрямлений він перпендикулярно площині цього паралелограма і якщо дивитися з його кінця, то суміщення (поворот) $\bar{a}$ з $\bar{b}$ найкоротшим шляхом відбувається проти руху годинникової стрілки (рис. 6.9).

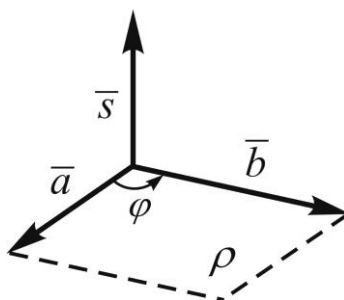


Рис. 6.9. Векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$

Векторний добуток позначають символами: $\bar{a} \times \bar{b}$, або $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Отже,

$$\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}, \bar{b}] \Leftrightarrow (|\bar{s}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \varphi \text{ і } \bar{s} \perp \rho),$$

де $\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$ – є найменшим із кутів ($0 < \varphi < \pi$), що відповідає суміщенню $\bar{a}$ з $\bar{b}$ рухом проти годинникової стрілки.

Основні властивості векторного добутку випливають із його означення.

1. Векторний добуток ненульових векторів дорівнює нуль-вектору тоді й тільки тоді, якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ є колінеарними:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a} = \lambda \bar{b}. \quad (6.16)$$

Отже, ще одним *критерієм колінеарності* векторів є рівність нульовому вектору їхнього векторного добутку.

2. Векторні добутки з різним порядком множників є взаємно протилежними векторами:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}). \quad (6.17)$$

Це означає, що векторний добуток не підпорядковано переставному (комутативному) закону.

3. Векторний добуток підпорядковано асоціативному закону відносно скалярного множника і дистрибутивному закону щодо додавання:

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{a} \times \bar{b}) &= (\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \bar{b}), \quad \lambda = \text{const}; \\ \bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) &= \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, заданих у координатній формі.
Нехай маємо два ненульові вектори: $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

1. Визначаймо векторні добутки ортів $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (рис. 6.10).

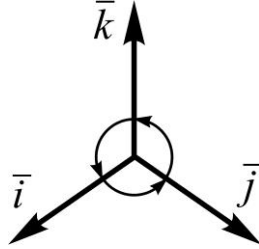


Рис. 6.10. Координатні орти

Векторний добуток однойменних векторів, за властивістю 1, дає нуль-вектор:

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}.$$

Однак усі векторні добутки різнойменних одиничних векторів будуть давати одиничні вектори:

$$\begin{aligned} \bar{i} \times \bar{j} &= \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}, \\ \bar{j} \times \bar{i} &= -\bar{k}, \quad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}, \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Розгляньмо, наприклад, добуток $\bar{i} \times \bar{j}$. Суміщення $\bar{i}$ із $\bar{j}$ найкоротшим шляхом (указано дугою зі стрілкою на рис. 6.10) відбувається проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора $\bar{k}$, отже, $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$. Тоді, за властивістю 2: $\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$.

2. Обчислімо добуток $\bar{a} \times \bar{b}$, задаючи вектори в алгебраїчній формі та використовуючи арифметичні властивості (6.18) та співвідношення (6.19):

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \bar{a} \times \bar{b} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = a_x b_y (\bar{i} \times \bar{j}) + \\ &+ a_x b_z (\bar{i} \times \bar{k}) + a_y b_x (\bar{j} \times \bar{i}) + a_y b_z (\bar{j} \times \bar{k}) + a_z b_x (\bar{k} \times \bar{i}) + a_z b_y (\bar{k} \times \bar{j}) = \\ &= a_x b_y \bar{k} - a_x b_z \bar{j} - a_y b_x \bar{k} + a_y b_z \bar{i} + a_z b_x \bar{j} - a_z b_y \bar{i} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k}. \end{aligned}$$

Аналізуючи вирази в дужках, зробимо висновок, що множники при $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – це розкриті визначники 2-го порядку, тому:

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k}. \quad (6.20)$$

Коефіцієнти при одиничних векторах у співвідношенні (6.20) є координатами вектора $\bar{s}$ як векторного добутку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Якщо символи $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ у співвідношенні (6.20) уважати елементами першого рядка визначника 3-го порядку, то остаточно отримаємо подання $\bar{a} \times \bar{b}$ у вигляді такого визначника:

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (6.21)$$



Обчислімо векторний добуток векторів $\bar{a} = (1, -2, 3)$ і $\bar{b} = (2, 0, -3)$:

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow \left(s_x = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6, \quad s_y = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 9, \quad s_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} = (6, 9, 4).$$

Модуль такого векторного добутку:

$$|\bar{s}| = \sqrt{6^2 + 9^2 + 4^2} = \sqrt{133}$$

визначає площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, як на сторонах.

Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називають векторний добуток двох із них, помножений скалярно на третій вектор, тобто: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$, $(\bar{a} \times \bar{c}) \cdot \bar{b}$, $(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a}$ тощо.

Мішаний добуток називають також **векторно-скалярним** і позначають трійкою векторів $\bar{a} \bar{b} \bar{c}$, у якій перші два елементи вважають пов'язаними векторним добутком, а результат векторного добутку домножають на третій вектор скалярно, тобто $\bar{a} \bar{b} \bar{c}$ – це все одно, що $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$.

Зрозуміло, що результатом мішаного добутку є скаляр, оскільки векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$ є вектором (позначмо його через $\bar{s}$), а добуток $\bar{s} \cdot \bar{c}$ дає скаляр.

Геометрична інтерпретація мішаного добутку. Нехай $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ – некопланарні вектори. Побудуємо на цих векторах, як на ребрах, паралелепіпед (рис. 6.11).

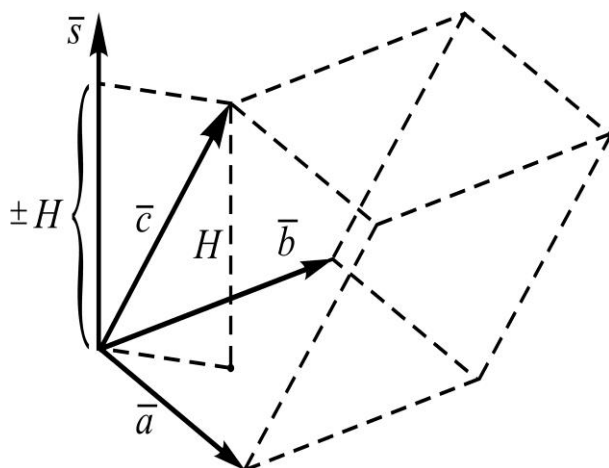


Рис. 6.11. Геометричний зміст мішаного добутку

Вектор $\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b}$ за довжиною чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, як на сторонах, і є напрямленим перпендикулярно площині паралелограма. Згідно з ф-лою (6.11), скалярний добуток $\bar{s} \cdot \bar{c}$ можна подати як добуток модуля $|\bar{s}|$ із проєкцією вектора $\bar{c}$ на вісь, що визначають вектором $\bar{s}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{s} \cdot \bar{c} = |\bar{s}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos \angle(\bar{s}, \bar{c}) = |\bar{s}| \cdot pr_{\bar{s}} \bar{c}, \quad (6.22)$$

де $pr_{\bar{s}} \bar{c} = \pm H$ (див. рис. 6.11).

Проекція $pr_{\bar{s}} \bar{c}$ є додатним числом, якщо кут між векторами $\bar{s}$ і $\bar{c}$ є гострим, і від'ємним, якщо цей кут є тупим. За модулем ця проекція дорівнює висоті паралелепіпеда H .



Модуль мішаного добутку трьох векторів чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда V , побудованого на цих векторах, як на ребрах:

$$|(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}| = |\bar{s}| \cdot H = V. \quad (6.23)$$

Основні властивості мішаного добутку випливають із його означення і геометричної інтерпретації.

1. Мішаний добуток ненульових векторів дорівнює нулю, якщо принаймні два із трьох векторів є колінеарними або всі три – компланарними, і навпаки.

Отже, *критерієм компланарності* трьох ненульових векторів є рівність нулю їхнього мішаного добутку:

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ – компланарні} \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0.$$

Пов'яжімо із зображеними на площині векторами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ коло (рис. 6.12).

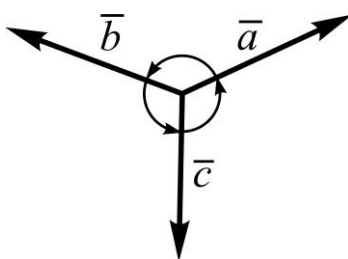


Рис. 6.12. Переставлення трьох векторів

Перелічення векторів, починаючи з будь-якого, проти руху годинникової стрілки назвімо **додатним, або циклічним, переставленням** векторів, інакше – **від'ємним переставленням**.

2. Циклічне переставлення трьох співмножників мішаного добутку не змінює його величини, а від'ємне переставлення змінює його знак на протилежний:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}. \quad (6.24)$$

Мішаний добуток векторів, заданих у координатній формі. Нехай три ненульові вектори задано своїми координатами: $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$. За означенням мішаного добутку та поданням векторного і скалярного добутків у координатній формі, маємо:

$$\begin{aligned} (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} &= \bar{s} \cdot \bar{c} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) \cdot (c_x, c_y, c_z) = \\ &= c_x \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Обчислена сума добутоків є розкладом визначника 3-го порядку, складеного з координат векторів, за елементами його третього рядка, тобто:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (6.25)$$

З огляду на співвідношення (6.25), можна дещо інакше записати *критерій компланарності* векторів (властивість 1): три ненульові вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ є компланарними тоді й тільки тоді, коли визначник 3-го порядку, елементами рядків якого є координати цих векторів, дорівнює нулю:

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} - \text{компланарні} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (6.26)$$

За допомогою мішаного добутку векторів також можна з'ясувати, чи належать чотири точки одній площині, для цього слід перевірити виконання умови компланарності трьох векторів зі спільним початком в одній із точок.

6.4. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

Задача про визначення довжини відрізка. Обчислимо довжину відрізка A_1A_2 , якщо відомо координати його кінців: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Цю задачу можна також розглядати як задачу про визначення відстані між двома точками.

1. Уведемо на розгляд вектор $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$ і радіуси-вектори точок A_1 і A_2 : $\bar{r}_1 = \overline{OA_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{r}_2 = \overline{OA_2} = (x_2, y_2, z_2)$ (рис. 6.13).

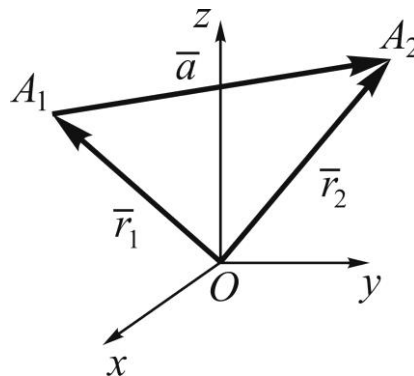


Рис. 6.13. Визначення довжини відрізка A_1A_2

2. Визначмо координати вектора $\bar{a}$, який є різницею векторів $\bar{r}_2$ і $\bar{r}_1$:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z) = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

3. Визначмо модуль вектора $\bar{a}$, який дорівнює довжині відрізка A_1A_2 :

$$|\bar{a}| = |\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (6.27)$$

Задача про визначення площі трикутника. Обчислімо площу трикутника, заданого координатами вершин: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ (рис. 6.14). За аксіомою стереометрії відомо, що три точки в просторі визначають площину й до того ж тільки одну. Для спрощення викладу, яке не порушує загального підходу до розв'язання задачі, домовмося розглядати трикутник $A_1A_2A_3$, що належить площині xOy : $A_1(x_1, y_1, 0)$, $A_2(x_2, y_2, 0)$ та $A_3(x_3, y_3, 0)$.

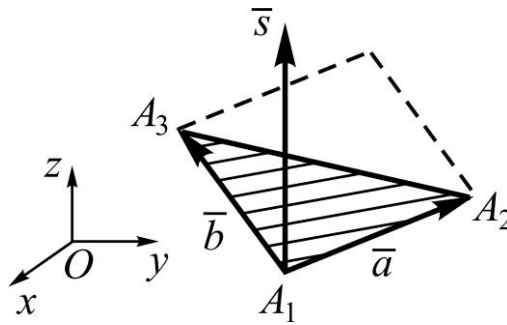


Рис. 6.14. Обчислення площі трикутника

1. Уведімо на розгляд вектори:

$$\bar{a} = \overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0), \quad \bar{b} = \overline{A_1A_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$$

й обчислімо їхній векторний добуток $\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b}$. За співвідношенням (6.20), маємо:

$$\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right) = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \bar{k}.$$

2. Обчислюймо модуль вектора $\bar{s}$, який чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, як на сторонах (див. рис. 6.14):

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2} = \pm \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Тоді для площі трикутника S_{Δ} маємо таке:

$$S_{\Delta} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \quad (6.28)$$

Знак «+» чи «-» беруть, залежно від того, яким буде визначник – додатним чи від’ємним.

Ф-лу (6.28) можна подати через визначник 3-го порядку:

$$S_{\Delta} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \text{ або } S_{\Delta} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо трикутник належить не площині xOy , а будь-якій іншій площині в просторі, то все одно його площу можна обчислити за такою формулою:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|.$$



Обчислімо площу трикутника з вершинами $A_1(-3, 5, 1)$, $A_2(2, 0, -3)$, $A_3(4, -1, 5)$.

Уведемо на розгляд вектори: $\bar{a} = \overline{A_1A_2} = (5, -5, -4)$ і $\bar{b} = \overline{A_1A_3} = (7, -6, 4)$, і визначмо їхній векторний добуток:

$$\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -5 & -4 \\ 7 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (-44, -48, 5).$$

Тоді

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{(-44)^2 + (-48)^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4265} \approx 32,65 \text{ (кв. од.)}.$$

Задача про поділ відрізка в заданому відношенні. Розгляньмо в просторі дві точки A_1 , A_2 і пов’яжімо з відрізком A_1A_2 вісь l , напрямком якої визначає напрямок на відрізку A_1A_2 , що перетворює його на вектор (рис. 6.15). Візьмімо на прямій l точку A_0 , яка поділяє відрізок A_1A_2 в деякому відношенні λ . Водночас, якщо точка A_0 належить відрізку (рис. 6.15а), то кажуть, що вона здійснює *внутрішній поділ* відрізка на частини, якщо не належить – то *зовнішній* (рис. 6.15б).

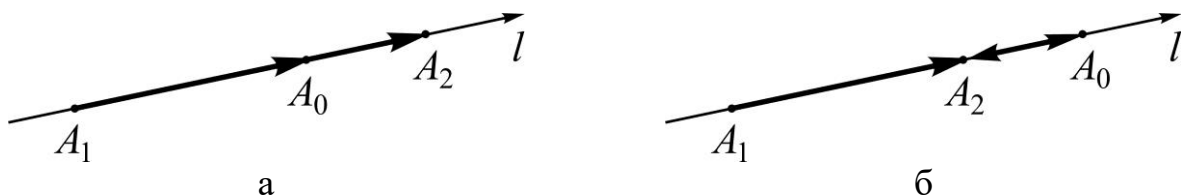


Рис. 6.15. Поділ відрізка на частини:

а) внутрішній; б) зовнішній

Число λ , яке визначають за такою формулою:

$$\lambda = \frac{np \overline{A_1 A_2} \overline{A_1 A_0}}{np \overline{A_1 A_2} \overline{A_0 A_2}}, \quad (6.29)$$

називають **відношенням**, у якому точка A_0 поділяє напрямлений відрізок $\overline{A_1 A_2}$. Якщо $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$), то A_0 здійснює внутрішній (зовнішній) поділ відрізка на частини.

Задачу про поділ відрізка в заданому відношенні формують так: визначте координати точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$, що поділяє напрямлений відрізок $\overline{A_1 A_2}$ у відношенні λ , якщо відрізок $A_1 A_2$ задано координатами його початку $A_1(x_1, y_1, z_1)$ і кінця $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

Нехай точкам A_1, A_0, A_2 відповідають радіуси-вектори $\bar{r}_1, \bar{r}_0, \bar{r}_2$ (рис. 6.16).

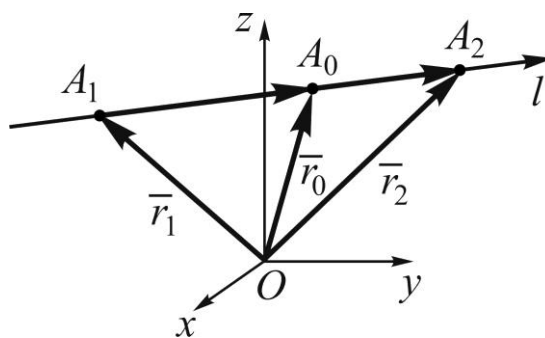


Рис. 6.16. Визначення координат точки A_0

Із ф-ли (6.29), випливає, що вектори $\overline{A_1 A_0}$ і $\overline{A_0 A_2}$ є колінеарними, тобто $\overline{A_1 A_0} = \lambda \cdot \overline{A_0 A_2}$, тоді $\bar{r}_0 - \bar{r}_1 = \lambda \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_0)$. Із цієї векторної рівності визначмо вектор $\bar{r}_0$:

$$\bar{r}_0 = \frac{\bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2}{1 + \lambda},$$

або в координатах:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (6.30)$$

Зокрема, координати точки A_0 , яка поділяє відрізок A_1A_2 навпіл ($\lambda = 1$), визначають за такими формулами:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (6.31)$$

Можна довести, що координати точки перетину медіан трикутника, заданого координатами його вершин $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, обчислюють за такими формулами:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}. \quad (6.32)$$



Ключові терміни

Вектор (зв'язаний, вільний, одиничний, нульовий); форми задання вектора (геометрична, координатна, алгебраїчна); напрямні косинуси; модуль вектора; компонента вектора; проєкція вектора на вісь; координати вектора; орт; вектори (рівні, протилежні, колінеарні, компланарні); лінійні операції над векторами (сума, різниця, добуток вектора зі скаляром); нелінійні операції над векторами (скалярний, векторний та мішаний добуток векторів); критерій колінеарності (компланарності) векторів; визначення довжини відрізка; поділ відрізка в заданому відношенні; площа трикутника; об'єм паралелепіпеда.



Запитання для самоперевірки

1. Що є об'єктом і предметом вивчення векторної алгебри?
2. Яку форму задання вектора називають геометричною?
3. Що називають модулем вектора?
4. Яким умовам, згідно з означенням, мають відповідати рівні, протилежні, колінеарні, компланарні вектори?

5. Які операції над векторами називають лінійними?
6. Що розуміють під сумою векторів, різницею векторів, добутком вектора зі скаляром?
7. Які властивості лінійних операцій над векторами ви знаєте?
8. Яку форму задання вектора називають координатною?
9. Як визначають модуль вектора, заданого своїми координатами?
10. Яку форму задання вектора називають алгебраїчною?
11. Які операції над векторами називають нелінійними?
12. Що називають скалярним добутком двох векторів і якими властивостями він володіє?
13. Як за допомогою скалярного добутку визначити кут між векторами?
14. Як обчислити скалярний добуток векторів за їхніми координатами?
15. Що називають векторним добутком двох векторів і якими властивостями він володіє?
16. Як обчислити векторний добуток векторів за їхніми координатами?
17. У чому полягає геометричний зміст векторного добутку векторів?
18. Що називають мішаним добутком трьох векторів і якими властивостями він володіє?
19. Як обчислити мішаний добуток векторів за їхніми координатами?
20. У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку векторів?
21. Як обчислити довжину відрізка, заданого координатами його кінців?
22. За якою формулою обчислюють площу трикутника, заданого координатами його вершин?
23. Як визначити координати точки, що поділяє відрізок, заданий координатами його кінців, у заданому відношенні?



Тестові завдання до підрозділу 6

1. Укажіть, у якій із формул допущено помилку:

а) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарні $\Leftrightarrow (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = 0$;

б) $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \quad (\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0})$;

$$\text{в) } \bar{a}^0 = \frac{|\bar{a}|}{\bar{a}};$$

$$\text{г) } \bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{b} = \lambda \cdot \bar{a} \quad (\lambda = \text{const}).$$

2. Укажіть, яка з формул є правильною:

$$\text{а) } \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|};$$

$$\text{б) } \cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|};$$

$$\text{в) } S_{\Delta} = \frac{1}{2}(\overline{AB} \times \overline{AC}), \text{ де } A, B, C - \text{вершини трикутника};$$

$$\text{г) } V_{\text{паралелепіпеда}} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}, \text{ де } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} - \text{вектори, на яких, як на ребрах, побудовано паралелепіпед.}$$

3. Укажіть, у якій із формул допущено помилку:

$$\text{а) } \text{пр}_{\bar{c}} \bar{b} = \frac{\bar{b} \cdot \bar{c}}{|\bar{c}|};$$

$$\text{б) } V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6}(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}, \text{ де } A, B, C, D - \text{вершини піраміди};$$

$$\text{в) } \sin(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|};$$

$$\text{г) } S_{\text{паралелограма}} = |\bar{a} \times \bar{b}|, \text{ де } \bar{a} \text{ і } \bar{b} - \text{вектори, на яких, як на сторонах, побудовано паралелограм.}$$

4. Вектори $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$ задано своїми координатами. Укажіть, у якій формулі допущено помилку:

$$\text{а) } (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}; \quad \text{б) } |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\text{в) } \bar{b} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

5. Укажіть, яка з формул є правильною:

а) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$; б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні $\Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0$;

в) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; г) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

6. Установіть, у якому разі результат виконання операцій над векторами є числом:

а) $\vec{a} \times \vec{b}$; б) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$; в) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$; г) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$.

7. Установіть, у якому разі результат виконання операцій над векторами є вектором:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$; в) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$; г) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$.

8. Укажіть значення параметрів α і β , за яких вектори $\vec{a} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + \alpha\vec{k}$ і $\vec{b} = \beta\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k}$ є колінеарними:

а) $\alpha = 2, \beta = -15$;

б) $\alpha = -12, \beta = 6$;

в) $\alpha = -3, \beta = -4$;

г) $\alpha = -15, \beta = 2$.

9. Укажіть значення параметра α , за якого вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \alpha\vec{k}$ і $\vec{b} = 20\vec{i} + 2\alpha\vec{j} - 4\vec{k}$ є перпендикулярними:

а) $\alpha = -15$; б) $\alpha = -6$; в) $\alpha = 5$; г) $\alpha = 4$.

10. Обчисліть значення параметра λ , за якого вектори $\vec{a} = \lambda\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ є компланарними:

а) $\lambda = 3$; б) $\lambda = 5$; в) $\lambda = -2$; г) $\lambda = 6$.

Література: [1 – 3; 8; 16; 20 – 25].

7. Пряма на площині

Основні питання:

- 7.1. Поняття про рівняння лінії на площині. Основні задачі аналітичної геометрії.
- 7.2. Різновиди рівнянь прямої на площині.
- 7.3. Основні задачі про пряму лінію на площині.
- 7.4. Використання рівняння прямої під час розв'язання економічних задач.

7.1. Поняття про рівняння лінії на площині.

Основні задачі аналітичної геометрії

Будь-яку лінію L на площині xOy в аналітичній геометрії розглядають як сукупність точок, які володіють деякою спільною властивістю. На підставі цієї властивості між координатами x, y точок лінії установлюють співвідношення, яке буде містити дві змінні величини й, можливо, деякі числові параметри та константи.

Рівняння $\Phi(x, y) = 0$ називають **рівнянням лінії L** , якщо координати будь-якої точки $M(x, y)$, що належить цій лінії, задовольняють таке рівняння, і навпаки, якщо пара чисел (x, y) задовольняє рівняння, то x і y є координатами точки, яка належить лінії:

$$\Phi(x, y) = 0 \text{ – рівняння } L : \Leftrightarrow (M(x, y) \in L \Leftrightarrow \Phi(x, y) = 0), \quad (7.1)$$

де Φ – закон, який відображає властивість точок лінії.

Змінні x і y , що входять до рівняння лінії, називають **поточними координатами** її точок, тобто x, y – це координати будь-якої точки лінії.



Складімо рівняння кола радіуса R із центром у точці $C(x_0, y_0)$ (рис. 7.1).

Колом називають лінію, усі точки якої розташовано на однаковій відстані R , яку називають **радіусом** кола, від заданої точки площини $C(x_0, y_0)$ – **центра** кола.

З означення випливає геометрична властивість точок, що належать цій лінії.

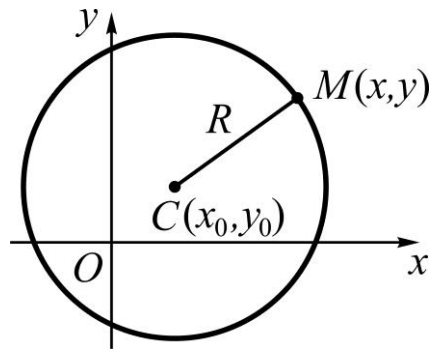


Рис. 7.1. Коло

Застосуємо **стандартну схему** розв'язання таких задач:

1) *вибираймо* на координатній площині xOy довільну точку $M(x, y)$, яка належить лінії L ;

2) *записуймо* засобами алгебри в аналітичному вигляді умову, яку задовольняє будь-яка точка лінії.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка кола з поточними координатами, тоді, за властивістю точок кола і формулою відстані між двома точками, маємо:

$$CM = R \Rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

звідси

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (7.2)$$

Рівняння (7.2) називають **канонічним рівнянням кола**.

Якщо центр кола лежить у початку координат, то його канонічне рівняння набуває такого вигляду:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (7.3)$$



Визначмо рівняння лінії, усі точки якої є рівновіддаленими від двох точок $A_1(1, 5)$ і $A_2(5, 1)$.

Вибираймо довільну точку $M(x, y)$, яка належить лінії (рис. 7.2).

За властивістю точок, лінії $A_1M = A_2M$ і формулою відстані між двома точками, маємо:

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 5)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 1)^2}.$$

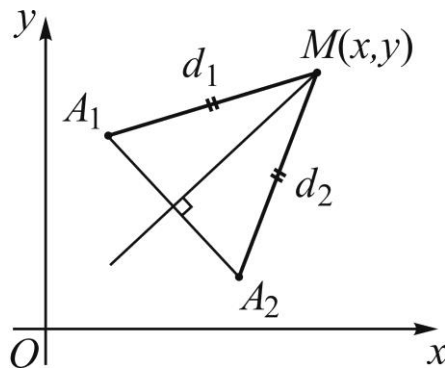


Рис. 7.2. Геометричне місце точок, рівновіддалених від A_1 і A_2

Спростімо визначене рівняння, для чого піднесімо до квадрата обидві його частини:

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = (x-5)^2 + (y-1)^2,$$

розкриймо дужки і зведемо подібні члени:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 &= x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 8x - 8y &= 0 \Rightarrow y = x. \end{aligned}$$

Рівняння $y = x$ є рівнянням прямої лінії, яка є перпендикулярною відрізка A_1A_2 , поділяє його навпіл і є бісектрисою першого і третього координатних кутів.

До **основних задач** аналітичної геометрії на площині належать такі:

1. Складіть рівняння кривої за заданою геометричною властивістю її точок. Прикладом такої задачі є задача на складання канонічного рівняння кола. Аналогічним способом визначають рівняння інших відомих ліній: прямої, гіперболи, параболи, еліпса. Вивчення таких ліній є однією із задач цього розділу.

2. Побудуйте лінію за заданим її рівнянням. Ця задача в загальному випадку не дає відповіді на питання щодо геометричних властивостей точок лінії та є задачею математичного аналізу.

7.2. Різновиди рівнянь прямої на площині

Поняття «пряма лінія», або просто «пряма», є первинним у геометрії й тому неозначуваним через інші математичні поняття. З аксіом елементарної геометрії відомо: через дві точки можна провести пряму й до того ж тільки одну; через точку, яка не належить заданій прямій, можна провести паралельну (перпендикулярну) їй пряму й до того ж тільки одну та ін.

Залежно від того, які вихідні дані, що визначають єдину пряму, покладено в основу побудови її аналітичного образу – рівняння, – одну й ту саму пряму можна описувати рівняннями різного вигляду. Розгляньмо основні їхні різновиди.

Задаймо на площині систему координат xOy і деяку пряму l .

1. Рівняння прямої із заданим нормальним вектором. Будь-який ненульовий вектор $\vec{N} = (A, B)$, перпендикулярний до прямої, називають **нормальним вектором** цієї прямої (рис. 7.3).

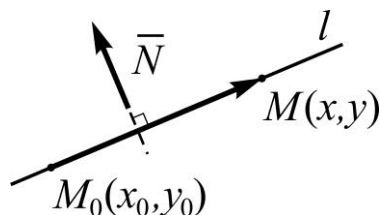


Рис. 7.3. Пряма та її нормальний вектор

Визначмо рівняння прямої l , що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має нормальний вектор $\vec{N} = (A, B)$. Для цього візьмімо на прямій довільну точку $M(x, y)$, яка є відмінною від $M_0(x_0, y_0)$, і введемо на розгляд вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$.

З умови ортогональності векторів $\vec{N}$ і $\overrightarrow{M_0M}$, маємо:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (7.4)$$

Рівняння (7.4) називають **рівнянням прямої із заданим нормальним вектором**.

Якщо в рівнянні (7.4) розкрити дужки:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Rightarrow Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0,$$

то маємо стандартний запис лінійного рівняння із двома змінними:

$$Ax + By + C = 0,$$

де $C = -Ax_0 - By_0$ – вільний член рівняння (деяке число).

2. Загальне рівняння прямої та його дослідження. Рівняння

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0), \quad (7.5)$$

лінійне щодо змінних x і y , називають **загальним рівнянням** прямої на площині, або рівнянням прямої в **загальному вигляді**.

Теорема 7.1 (про загальне рівняння прямої):

- 1) будь-яку пряму описують рівнянням $Ax + By + C = 0$;
- 2) кожне рівняння вигляду $Ax + By + C = 0$ визначає пряму лінію.

Доведення ґрунтується на рівнянні (7.4).

1. Довільну пряму можна описати рівнянням $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Звідси (див. рівняння (7.5)) маємо: $Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої.

2. Нехай задано рівняння (7.5), де $\bar{N} = (A, B)$ – ненульовий вектор, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$, у якого $B \neq 0$.

Тоді

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow A(x - 0) + B\left(y - \frac{-C}{B}\right) = 0. \quad (7.6)$$

Рівняння (7.6) визначає пряму, яка проходить через точку $M_0(0, -C/B)$ і має нормальний вектор $\bar{N} = (A, B)$. ■

Дослідження загального рівняння прямої передбачає з'ясування особливостей розташування прямої відносно координатних осей, залежно від значення тих чи тих із чисел A, B, C – параметрів рівняння (7.7):

1) $(A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0) \Rightarrow Ax + By + C = 0$ – рівняння прямої загального розташування;

2) $(A = 0, B \neq 0, C \neq 0) \Rightarrow \left| \bar{N} = (0, B) \perp O_x \right| \Rightarrow By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B} \Rightarrow l \parallel O_x$ – пряма, паралельна осі O_x ;

3) $(A \neq 0, B = 0, C \neq 0) \Rightarrow \left| \bar{N} = (A, 0) \perp O_y \right| \Rightarrow Ax + C = 0 \Rightarrow (7.7) \Rightarrow x = -\frac{C}{A} \Rightarrow l \parallel O_y$ – пряма, паралельна осі O_y ;

4) $(A \neq 0, B \neq 0, C = 0) \Rightarrow Ax + By = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x \Rightarrow O(0, 0) \in l$ – пряма проходить через початок координат $O(0, 0)$;

5) $(A = C = 0, B \neq 0) \Rightarrow By = 0 \Rightarrow y = 0$ – рівняння осі O_x ;

6) $(B = C = 0, A \neq 0) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ – рівняння осі O_y .

3. Канонічне та параметричне рівняння прямої. Будь-який ненульовий вектор $\vec{s} = (m, n)$, який паралельний прямій l або лежить на ній, називають **напрямним вектором** прямої. Координати напрямного вектора, згідно з означенням, подають так:

$$m = |\vec{s}| \cdot \cos \alpha, \quad n = |\vec{s}| \cdot \cos \beta = |\vec{s}| \cdot \sin \alpha, \quad (7.8)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta$ – напрямні косинуси вектора $\vec{s} = (m, n)$.

Складімо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має напрямний вектор $\vec{s} = (m, n)$.

Для цього виберімо на прямій l довільну точку $M(x, y)$, що не збігається з точкою M_0 , і введемо на розгляд вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ (рис. 7.4).

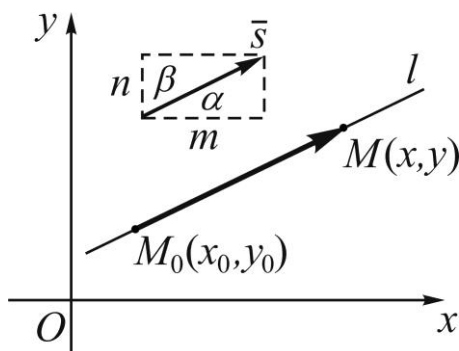


Рис. 7.4. Прямая та її напрямний вектор

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ і напрямний вектор прямої $\vec{s}$ є колінеарними, тому їхні координати є пропорційними:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (7.9)$$

Рівняння (7.9) називають **канонічним** рівнянням прямої.

Якщо за напрямний вектор узяти одиничний вектор $\vec{s}^0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, то $m = \cos \alpha, n = \sin \alpha$, а рівняння (7.9) набуває такого вигляду:

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\sin \alpha}. \quad (7.10)$$

Рівняння (7.10) є канонічним рівнянням прямої з одиничним напрямним вектором.

Якщо в рівнянні (7.9) покласти кожне відношення рівним t , то маємо:

$$\left(\frac{x-x_0}{m} = t, \frac{y-y_0}{n} = t \right) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (7.11)$$

Рівняння (7.11) називають **параметричним рівнянням прямої**.

У разі, якщо одна з координат, m або n , дорівнює нулю, маємо параметричні рівняння прямих, що є паралельними, відповідно, осі Oy або осі Ox .

4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Складімо рівняння прямої, що проходить через задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Для цього виберімо на прямій l довільним чином точку $M(x, y)$, яка є відмінною від точок M_1 і M_2 , та введемо на розгляд вектори $\overline{M_1M}$ і $\overline{M_1M_2}$ (рис. 7.5): $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

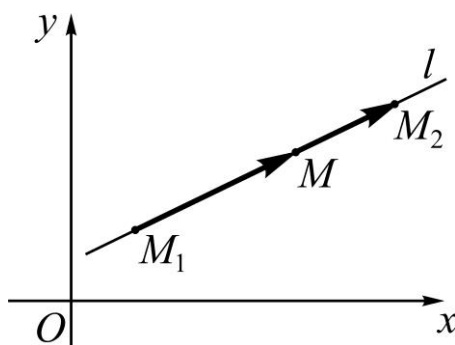


Рис. 7.5. Пряма й задані точки на ній

За умовою колінеарності векторів $\overline{M_1M}$ і $\overline{M_1M_2}$, маємо шукане рівняння прямої:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (7.12)$$

Рівняння (7.12) називають **рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки**.

Зауважмо, що вектор $\overline{M_1M_2}$ є напрямним вектором прямої, як і протилежний йому вектор $\overline{M_2M_1}$.

5. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямку. Складімо рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і є нахиленою до осі Ox під кутом α (рис. 7.6).

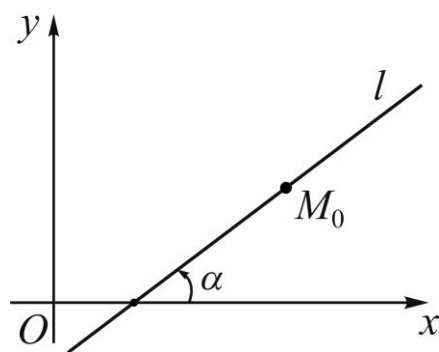


Рис. 7.6. Пряма, точка на ній і кут нахилу

Із канонічного рівняння прямої (7.9) і співвідношення (7.8), отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} \Rightarrow y-y_0 = \frac{n}{m}(x-x_0) \Rightarrow \left| \frac{n}{m} = \frac{|\bar{s}| \sin \alpha}{|\bar{s}| \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-y_0 = \operatorname{tg} \alpha \cdot (x-x_0).$$

Остаточно маємо таке:

$$y-y_0 = k \cdot (x-x_0). \quad (7.13)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$ називають **кутовим коефіцієнтом** прямої.

Рівняння (7.13) називають **рівнянням прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямку**. Змінюючи в рівнянні (7.13) довільним способом значення параметра $k \in \mathbf{R}$, можна дістати будь-яку кількість прямих (навіть нескінченно багато!), тому рівняння (7.13) називають також **рівнянням сім'ї прямих** із центром у точці $M_0(x_0, y_0)$.

6. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Складімо рівняння прямої, яка є нахиленою до осі Ox під кутом α і відтинає на осі Oy відрізок величини b (рис. 7.7).

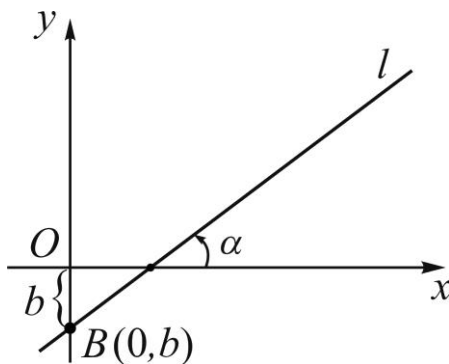


Рис. 7.7. Пряма, кут нахилу і відрізок b

Шукане рівняння маємо як наслідок із рівняння (7.13), якщо за x_0, y_0 узяти координати точки $B(0, b)$:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0) \Rightarrow \left| \begin{matrix} x_0 = 0 \\ y_0 = b \end{matrix} \right| \Rightarrow y - b = k \cdot x \Rightarrow y = k \cdot x + b.$$

Рівняння

$$y = k \cdot x + b \quad (7.14)$$

називають **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**.

7. Рівняння прямої у відрізках на осях. Складімо рівняння прямої, яка перетинає осі координат Ox і Oy , відповідно, у точках $A(a, 0)$ і $B(0, b)$ (рис. 7.8).

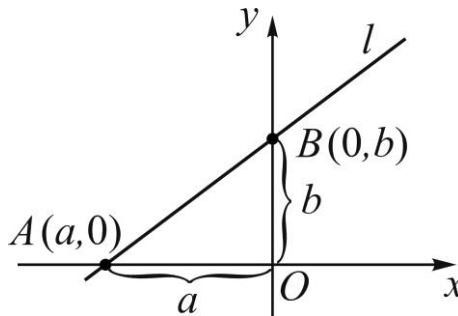


Рис. 7.8. Відрізки, що відтинає пряма на осях

Скористаймося рівнянням (7.12), вибираючи як точки M_1 і M_2 точки $A(a, 0)$ і $B(0, b)$:

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \Rightarrow \frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Рівняння

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (7.15)$$

називають **рівнянням прямої у відрізках на осях**.

8. Нормальне рівняння прямої. Побудуємо рівняння прямої за таких умов: відстань від початку координат до прямої дорівнює p ($p > 0$), а відповідний відстані відрізок нахилено до осі Ox під кутом α (рис. 7.9).

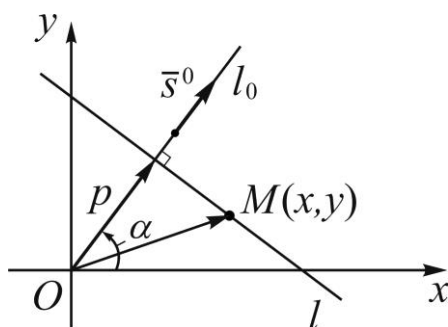


Рис. 7.9. Пряма, відстань p і кут нахилу α

Виберімо на прямій довільну точку $M(x, y)$ і введемо на розгляд вектор $\overline{OM} = (x, y)$. Нехай l_0 – пряма, яка має одиничний напрямний вектор $\bar{s}^0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. На цій прямій відкладемо відрізок довжини p .

Залучаючи скалярний добуток двох векторів, маємо, з одного боку, $\overline{OM} \cdot \bar{s}^0 = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$, а з другого – $\overline{OM} \cdot \bar{s}^0 = |\bar{s}^0| \cdot np_{l_0} \overline{OM} = p$.

Отже, шукане рівняння має такий вигляд:

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha = p,$$

або

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p = 0.$$

(7.16)

Рівняння (7.16) називають **нормальним рівнянням прямої**.

Властивості нормального рівняння прямої:

1) сума квадратів коефіцієнтів при поточних координатах x , y дорівнює одиниці ($\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$);

2) вільний член рівняння завжди є від'ємним ($-p < 0$).

Ці властивості використовують під час зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду.

7.3. Основні задачі про пряму лінію на площині

1. Взаємне розташування двох прямих. Нехай прямі l_1 і l_2 задано такими загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (l_1), \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (l_2).$$

Установімо умови: 1) перетину; 2) паралельності; 3) збігу двох прямих.

Задачу зводять до дослідження системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2, \end{cases}$$

кожне з яких є рівнянням відповідної прямої.

1. Якщо прямі перетинаються, то вони мають спільну точку й до того ж тільки одну. Це означає, що координати цієї точки задовольняють обидва рівняння, отже, система є сумісною і має єдиний розв'язок.

За правилом Крамера визначник цієї системи Δ має бути відмінним від нуля. Ця обставина визначає умову *перетину* двох прямих, заданих загальним рівнянням:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0.$$

Звідси

$$\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}. \quad (7.17)$$

2. Якщо прямі є паралельними, то вони не мають спільних точок. Це означає, що система є несумісною, тобто:

$$\Delta = A_1B_2 - B_1A_2 = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} = -C_1B_2 + C_2B_1 \neq 0 \quad \text{або} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} = -A_1C_2 + A_2C_1 \neq 0.$$

Отже, треба перевірити виконання такої умови:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \quad (7.18)$$

яка і є умовою *паралельності* двох прямих.

3. Якщо прямі збігаються, то вони мають безліч спільних точок. Це означає, що система є сумісною і невизначеною, тобто: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

Отже, маємо умову *збігу* двох прямих:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (7.19)$$

2. Кут між двома прямими. Нехай прямі l_1 і l_2 задано загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (l_1), \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (l_2).$$

Кутом між двома прямими, які описують загальними рівняннями, називають один із суміжних кутів між їхніми нормальними векторами $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$ і $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$ (рис. 7.10).

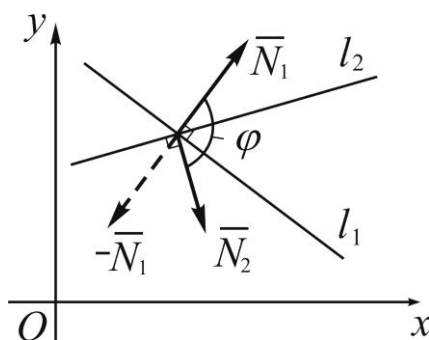


Рис. 7.10. Кут між прямими

За формулою кута між векторами $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$ і $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$, маємо:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \left(\vec{N}_1, \vec{N}_2 \right) = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi &= \arccos(\cos \varphi) = \arccos \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Якщо нормальні вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ утворюють тупий кут (див. рис. 7.10), то й кут між прямими теж є тупим; якщо як нормальний вектор прямої l_1 вибрати вектор $-\vec{N}_1$, то кут між прямими буде гострим.

Із ф-ли (7.20) маємо умову ортогональності прямих:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (7.21)$$

Оскільки кожне з рівнянь (7.4), (7.9) – (7.16), допускає запис у загальному вигляді, то ф-ли (7.17) – (7.21) можна записати через параметри відповідного різновиду рівняння прямої.

Нехай прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами (рис. 7.11):

$$y = k_1 x + b \ (l_1), \quad y = k_2 x + b \ (l_2),$$

де $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $\alpha_1 = \angle(l_1, Ox)$; $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$, $\alpha_2 = \angle(l_2, Ox)$.

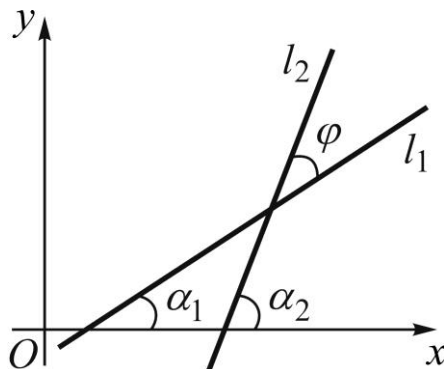


Рис. 7.11. Кут між прямими

За властивістю зовнішнього кута трикутника ($\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$) і формулою тангенса різниці двох кутів, маємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Звідси для двох прямих устанавлюймо:

1) умову паралельності: $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$;

2) умову перпендикулярності: $l_1 \perp l_2 \Rightarrow \operatorname{ctg} \varphi = 0 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

3. Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду. Раніше виведено дев'ять різновидів рівнянь прямих, які відрізняють за формою символічного подання, але всі вони є лінійними рівняннями відносно змінних x , y – поточних координат точок прямої. Кожне з них можна звести до іншого за допомогою тотожних перетворень.

Покажімо, як виконують перехід від рівняння (7.5): $Ax + By + C = 0$ до нормального рівняння (7.16): $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p = 0$.

У нормальному рівнянні коефіцієнти при змінних x і y є координатами одиничного нормального вектора прямої $\bar{N}^0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, а в загальному рівнянні – це параметри A, B , які є координатами нормального вектора $\bar{N} = (A, B)$.

За означенням напрямних косинусів вектора (6.5) для вектора $\bar{N}$, маємо:

$$\cos \alpha = \frac{A}{|\bar{N}|}, \quad \cos \beta = \frac{B}{|\bar{N}|},$$

де $|\bar{N}| = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Це означає, що, для того щоб перейти від довільного вектора $\bar{N}$ до одиничного $\bar{N}^0$, треба помножити вектор $\bar{N}$ на скаляр $1/|\bar{N}|$. Звідси випливає, що для виконання переходу до нормального рівняння прямої треба ліву і праву частини її загального рівняння (7.5) помножити на число $M = \frac{1}{\pm |\bar{N}|}$, знак якого вибирають протилежним знаку вільного члена C (за другою властивістю нормального рівняння, має бути виконано умову: $-p < 0$):

$$\frac{A}{\pm |\bar{N}|}x + \frac{B}{\pm |\bar{N}|}y + \frac{C}{\pm |\bar{N}|} = 0 \Rightarrow \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y - p = 0. \quad (7.23)$$

Число $M = \frac{1}{\pm |\bar{N}|}$, узятє з певним знаком, називають **нормувальним**

множником загального рівняння прямої:

$$M = \begin{cases} 1/|\bar{N}|, & \text{якщо } C < 0; \\ -1/|\bar{N}|, & \text{якщо } C > 0. \end{cases}$$



Нехай пряму задано загальним рівнянням: $2x - 3y + 5 = 0$.

Визначмо відстань від прямої до початку координат.

За заданим рівнянням прямої визначаймо її нормальний вектор: $\bar{N} = (2, -3)$, його модуль та обчислюймо нормувальний множник. Оскільки вільний член $C = 5 > 0$, то маємо:

$$M = \frac{-1}{|\bar{N}|} = \frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{13}}.$$

Виконуймо нормування загального рівняння, помноживши його ліву і праву частини на M :

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{5}{\sqrt{13}} = 0.$$

За нормальним рівнянням установлюємо, що відстань від початку координат до прямої дорівнює $p = 5/\sqrt{13}$.

4. Відстань від точки до прямої. Нехай пряму l задано рівнянням: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$.

Визначмо відстань d від точки $M_0(x_0, y_0)$ до цієї прямої.

Виберімо на прямій довільну точку $M(x, y)$ і введемо на розгляд вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ (рис. 7.12).

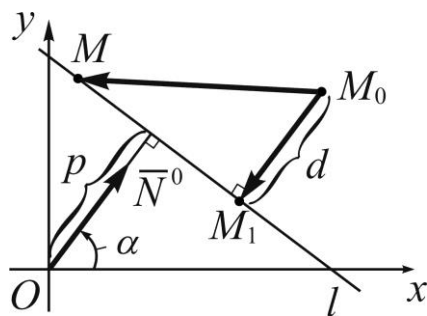


Рис. 7.12. Відстань від точки до прямої

Запишімо скалярний добуток векторів $\overline{M_0M}$ і $\overline{N^0} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$:

$$\overline{M_0M} \cdot \overline{N^0} = |\overline{N^0}| \cdot np_{\overline{N^0}} \overline{M_0M} = np_{\overline{N^0}} \overline{M_0M}, \quad \text{бо } |\overline{N^0}| = 1.$$

Оскільки $|np_{\overline{N^0}} \overline{M_0M}| = |\overline{M_0M}| = d$, то відстань d дорівнює модулю скалярного добутку векторів $\overline{M_0M}$ і $\overline{N^0}$:

$$\begin{aligned} d &= |\overline{M_0M} \cdot \overline{N^0}| = |(x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha| = \\ &= |x \cos \alpha + y \sin \alpha - (x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha)|. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Для будь-якої точки прямої виконують таку рівність: $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, отже, остаточно маємо:

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|. \quad (7.25)$$

Якщо пряму задано загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то, зважаючи на рівняння (7.23), отримуємо:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \quad (7.26)$$

5. Рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими. Нехай прямі l_1 і l_2 задано загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (l_1), \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (l_2).$$

Визначмо рівняння бісектрис кутів, що утворені цими прямими. Нагадаймо, що точки бісектриси є рівновіддаленими від сторін кута (рис. 7.13). Саме на цій властивості із залученням ф-ли (7.26) ґрунтується побудова їхніх рівнянь.

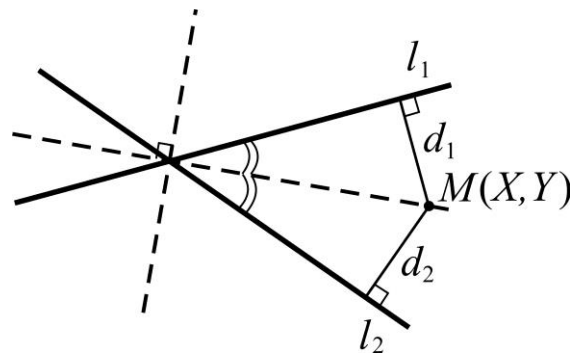


Рис. 7.13. Бісектриси кутів між прямими

Позначмо поточні координати точок бісектриси через X , Y ; виберімо на ній точку $M(X, Y)$. За умовою задачі відстані d_1 і d_2 рівні між собою, тому, за ф-лою (7.26), маємо:

$$\frac{1}{|\bar{N}_1|} |A_1X + B_1Y + C_1| = \frac{1}{|\bar{N}_2|} |A_2X + B_2Y + C_2|,$$

де $|\bar{N}_1| = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$, $|\bar{N}_2| = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$ – модулі нормальних векторів прямих l_1 і l_2 , відповідно.

Знімаймо символи модулів і, повертаючись до позначення поточних координат точок бісектрис малими буквами, маємо такі два рівняння бісектрис:

$$\frac{1}{|\bar{N}_1|} (A_1x + B_1y + C_1) = \frac{1}{|\bar{N}_2|} (A_2x + B_2y + C_2); \quad (7.27)$$

$$\frac{1}{|\bar{N}_1|} (A_1x + B_1y + C_1) = -\frac{1}{|\bar{N}_2|} (A_2x + B_2y + C_2).$$



Запишімо рівняння бісектрис кутів, утворених такими прямими:

$$3x + 2y - 1 = 0 \quad (l_1), \quad 4x - 6y - 19 = 0 \quad (l_2).$$

Згідно з ф-лами (7.27), визначаймо модулі нормальних векторів заданих прямих і запишемо такі рівняння бісектрис:

$$(\bar{N}_1 = (3, 2), \bar{N}_2 = (4, -6)) \Rightarrow (|\bar{N}_1| = \sqrt{13}, |\bar{N}_2| = 2\sqrt{13}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{13}}(3x + 2y - 1) = \frac{1}{2\sqrt{13}}(4x - 6y - 19), \\ \frac{1}{\sqrt{13}}(3x + 2y - 1) = -\frac{1}{2\sqrt{13}}(4x - 6y - 19) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 1 = 2x - 3y - 9,5, \\ 3x + 2y - 1 = -2x + 3y + 9,5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 5y + 8,5 = 0, \\ 5x - y - 10,5 = 0. \end{cases}$$

Підсумок розглянутого подаймо у вигляді таблиці (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Різновиди рівнянь прямої в $\mathbb{R}^2$

№ з/п	Назви	Символічні записи	Описи складових: змінні, параметри, константи
1	2	3	4
1	Канонічне рівняння прямої	$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$	(x_0, y_0) – точка, через яку проходить пряма; m, n – координати напрямного вектора прямої $\bar{s} = (m, n)$
2	Параметричне рівняння прямої	$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$	(x_0, y_0) – точка, через яку проходить пряма; m, n – координати напрямного вектора прямої $\bar{s} = (m, n)$; t – параметр
3	Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ – точки, через які проходить пряма
4	Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямі	$y - y_0 = k(x - x_0)$	(x_0, y_0) – точка, через яку проходить пряма; $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт, де $\alpha = l^{\wedge} O x$

1	2	3	4
5	Рівняння прямої із кутовим коефіцієнтом	$y = kx + b$	k – кутовий коефіцієнт; b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy
6	Рівняння прямої у відрізках на осях	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	a, b – величини відрізків, які пряма відтинає на осях Ox, Oy
7	Нормальне рівняння прямої	$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$	α – кут нахилу відповідного відрізка до осі Ox ; p – відстань від прямої до початку координат
8	Рівняння прямої із заданим нормальним вектором	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	A, B – координати нормального вектора $\vec{N} = (A, B)$; (x_0, y_0) – точка, через яку проходить пряма
9	Загальне рівняння прямої: 1) загального положення; 2) паралельної осі Ox (перпендикулярної Oy); 3) паралельної осі Oy (перпендикулярної Ox); 4) що проходить через початок координат; 5) що збігається з Ox ; 6) що збігається з Oy	$Ax + By + C = 0$ $By + C = 0$ $Ax + C = 0$ $Ax + By = 0$ $y = 0$ $x = 0$	A, B – координати нормального вектора $\vec{N} = (A, B)$ – коефіцієнти при невідомих; C – вільний член

7.4. Використання рівняння прямої під час розв'язання економічних задач

1. Формула простих відсотків. Нехай роблять вклад заощаджень у банк під *прості відсотки* – відсотки, що нараховують лише на початкову суму вкладу. Яка сума підлягає виплаті вкладнику через декілька років?

Уведімо позначення величин, про які йдеться в умові задачі:

S_0 – початкова (вихідна, основна) сума вкладу;

p – відсотки, що нараховують за рік (ставка простих відсотків);

t – кількість років, за які нараховують простий відсоток;

S_t – сума, що підлягає виплаті вкладнику через t років.

За умовою задачі за один рік вклад збільшиться на суму $S_0 \cdot \frac{p}{100}$, тоді через t років нарахування будуть становити суму в t разів більшу.

Отже,

$$S_t = S_0 + S_0 \frac{p}{100} t = S_0 \left(1 + \frac{p}{100} t \right). \quad (7.28)$$

Співвідношення (7.28) називають **формулою простих відсотків**, а множник $\left(1 + \frac{p}{100} t \right)$ – **коефіцієнтом нарощування** суми простих відсотків.

Формула простих відсотків містить дві змінні величини (t і S_t), два числові параметри (S_0 і p) й описує лінійну залежність між часом нарахування простих відсотків t та сумою S_t , яка підлягає виплаті. Її можна записати як рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом ($y = kx + b$), а саме:

$$S_t = \left(S_0 \frac{p}{100} \right) \cdot t + S_0.$$

2. Модель «попит-пропозиція». Наступна задача потребує знань деяких економічних понять, пов'язаних із товарним ринком:

попит – потреба в товарах ринку з боку покупців, а **пропозиція** – подана на ринку змога придбати товар;

закон попиту – закон, згідно із яким зниження ціни зумовлює відповідне зростання величини попиту, і навпаки;

закон попиту та пропозиції – ціну будь-якого товару змінюють, щоб урівноважити попит (обсягу Q_d) і пропозицію (обсягу Q_s);

рівновага товарного ринку – стан ринку, якщо для продажу пропонують таку кількість товару, яку споживач є готовим купити;

рівноважна ціна P^* – ціна, яка врівноважує попит і пропозицію;

рівноважний обсяг Q^* – обсяг пропозиції й обсяг попиту в умовах, якщо врівноважують попит і пропозицію; якщо попит на товар перевищує пропози-

цію товару, виникає **дефіцит пропозиції**, або **надлишковий попит**; якщо попит на товар є нижчим за пропозицію товару, виникає **надлишок пропозиції**, або **дефіцит попиту**.

Економічну модель, що описує процес ціноутворення на ринку, називають **моделлю «попит-пропозиція»**.

Найпростіший випадок математичної моделі маємо в разі лінійної залежності обсягів попиту й пропозиції від ціни товару і навпаки. На рис. 7.14 схематично відтворено пряму попиту d (рис. 7.14а), пряму пропозиції s (рис. 7.14б), точку рівноваги (Q^*, P^*) (рис. 7.14в).

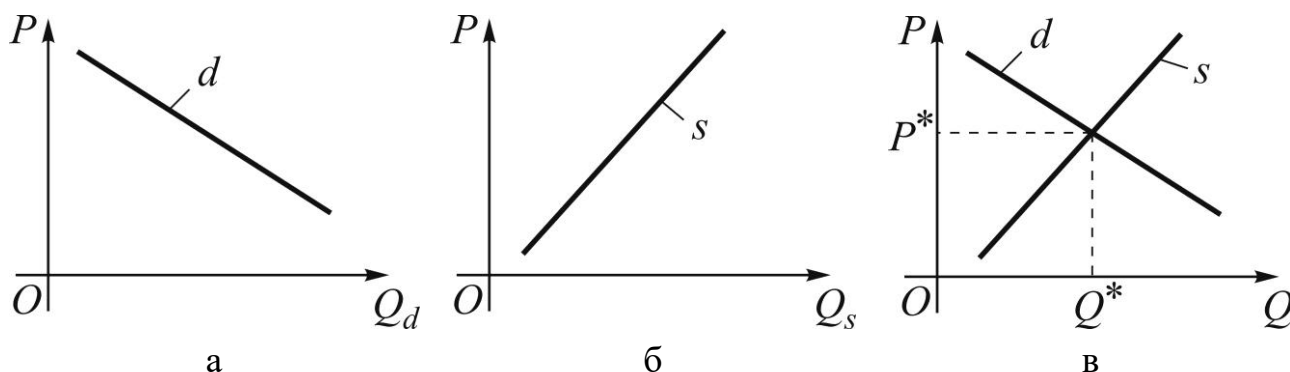


Рис. 7.14. Модель «попит-пропозиція»:

а) пряма попиту; б) пряма пропозиції; в) точка рівноваги



Розгляньмо конкретний приклад задачі про попит і пропозицію.

За даними табл. 7.2 потрібно визначити точку рівноваги товарного ринку.

Таблиця 7.2

Початкові дані для побудови моделі «попит-пропозиція»

Ціни, P , грн	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
Обсяги попиту, Q_d , т	250	230	210	190	170
Обсяги пропозиції, Q_s , т	200	210	220	230	240

Залежність попиту та пропозиції від ціни товару є лінійною (прирости однаковими).

Розв'язання задачі зводять до визначення точки перетину прямих, що описують попит і пропозицію.

Для запису рівнянь прямих попиту та пропозиції скористаймося рівнянням прямої, що проходить через дві точки (див. ф-лу (7.12)).

Рівняння прямої попиту має такий вигляд:

$$\frac{P-2}{4-2} = \frac{Q_d-250}{170-250} \Rightarrow Q_d = -40P + 330,$$

а рівняння прямої пропозиції таке:

$$\frac{P-2}{4-2} = \frac{Q_s-200}{240-200} \Rightarrow Q_s = 20P + 160.$$

Розв'яжемо систему двох рівнянь із двома невідомими за умови, що має місце рівність $Q_d = Q_s = Q$:

$$\begin{cases} Q = -40P + 330, \\ Q = 20P + 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P^* = 2,8(3), \\ Q^* = 216,(6). \end{cases}$$

Обчислено значення рівноважної ціни $P^* = 2,8(3)$ та рівноважного попиту $Q^* = 216,(6)$.

Для $P = 2,5$ попит на товар становить $Q_d = -40 \cdot 2,5 + 330 = 230$, що перевищує пропозицію $Q_s = 20 \cdot 2,5 + 160 = 210$.

Отже, на ринку спостерігають товарний дефіцит.



Ключові терміни

Основні задачі аналітичної геометрії; геометричне місце точок; пряма лінія; загальне рівняння; нормальний вектор; напрямний вектор; канонічне рівняння; параметричне рівняння; нормальне рівняння; нормувальний множник; рівняння прямої, що проходить через дві точки; кутовий коефіцієнт; рівняння у відрізках, які відтинає пряма на координатних осях; умова паралельності (перпендикулярності, збігу, перетину) прямих на площині; відстань від точки до прямої; кут між прямим; рівняння бісектрис кутів.



Запитання для самоперевірки

1. Що розуміють під рівнянням лінії на площині?
2. Який вигляд має канонічне рівняння кола? Які параметри входять до нього та що вони означають?
3. У чому полягають основні задачі аналітичної геометрії на площині?

4. Яким способом складають рівняння прямої на площині, якщо задано:
 - а) точку, через яку проходить пряма і її напрямний вектор;
 - б) дві точки, що належать прямій;
 - в) точку на прямій і кут нахилу прямої до осі абсцис;
 - г) кут нахилу прямої до осі абсцис і величину відрізка, який відтинає пряма на осі ординат;
 - г) величини відрізків, які пряма відтинає на координатних осях;
 - д) відстань від початку координат до прямої й кут нахилу відповідного відрізка до осі абсцис;
 - е) точку на прямій і нормальний вектор прямої?
5. Яке рівняння називають загальним рівнянням прямої та що означають його параметри?
6. Як формулюють теорему про загальне рівняння прямої?
7. Чи можна перетворити кожний із різновидів рівнянь прямої на її загальне рівняння? Якщо «так», то як саме?
8. Що передбачає дослідження загального рівняння прямої?
9. Які особливості розташування прямої відносно координатних осей, залежно від значень параметрів її загального рівняння, ви знаєте?
10. За яких умов дві прямі, задані загальними рівняннями: а) перетинаються; б) є паралельними; в) є перпендикулярними; г) є збіжними?
11. Як визначити точку перетину двох прямих?
12. Як визначити кут між двома прямими, заданими: а) загальними рівняннями; б) рівняннями з кутовими коефіцієнтами?
13. Який вигляд мають умови паралельності й перпендикулярності прямих, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами?
14. Яким способом виконують перехід від загального рівняння прямої до її нормального рівняння?
15. Як визначити відстань: а) від прямої до початку координат; б) від точки до прямої; в) між паралельними прямими?
16. Який вигляд мають рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими, які задано загальними рівняннями?
17. Як виводять формулу простих відсотків?
18. Що розуміють під моделлю «попит-пропозиція»?



Тестові завдання до підрозділу 7

1. Якщо прямі $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ є паралельними, то яке зі співвідношень є правильним:

а) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$; б) $\sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$;

в) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$; г) $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$?

2. Якщо прямі $l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}$ і $l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}$ є перпендикулярними, то яке зі співвідношень є правильним:

а) $\bar{s}_1 \times \bar{s}_2 = \bar{0}$, де $\bar{s}_1 = (m_1, n_1)$, $\bar{s}_2 = (m_2, n_2)$;

б) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$;

в) $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0$;

г) $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 \neq 0$?

3. Якщо прямі $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ є перпендикулярними, то яке зі співвідношень є правильним:

а) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$;

б) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;

в) $\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \bar{0}$, де $\bar{N}_1 = (A_1, B_1)$, $\bar{N}_2 = (A_2, B_2)$;

г) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$?

4. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої, заданої рівнянням $Ax + By + C = 0$, визначають за такою формулою:

$$\text{а) } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{A^2 + B^2}; \quad \text{б) } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\text{в) } d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \text{г) } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

5. Косинус кута між прямими $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ визначають за такою формулою:

$$\text{а) } \cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

$$\text{б) } \cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

$$\text{в) } \cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{(A_1^2 + B_1^2) \cdot (A_2^2 + B_2^2)};$$

$$\text{г) } \cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1 + B_1 + C_1} \cdot \sqrt{A_2 + B_2 + C_2}}.$$

6. Нехай пряму l задано рівнянням $4x - 3y - 7 = 0$. Укажіть рівняння цієї прямої у відрізках, що вона відтинає на координатних осях:

$$\text{а) } \frac{4x}{7} - \frac{3y}{7} = 1;$$

$$\text{б) } \frac{x}{4/7} + \frac{y}{-3/7} = 1;$$

$$\text{в) } \frac{x}{7/4} + \frac{y}{-7/3} = 1;$$

$$\text{г) } y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{4}.$$

7. Яке з рівнянь є рівнянням прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку:

а) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$;

б) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$;

в) $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$;

г) $y - y_0 = k(x - x_0)$?

8. Яке з рівнянь є канонічним рівнянням прямої на площині:

а) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

б) $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$;

в) $Ax + By + C = 0$;

г) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$?

9. У загальному рівнянні прямої $Ax + By + C = 0$ параметри A і B – це:

а) координати точки, через яку проходить пряма;

б) координати напрямного вектора прямої;

в) координати нормального вектора прямої;

г) величини відрізків, які відтинає пряма на осях координат.

10. Що називають кутовим коефіцієнтом k прямої l :

а) тангенс кута нахилу прямої l до осі Ox : $k = \operatorname{tg} \alpha$;

б) кут нахилу прямої l до осі Ox : $k = \alpha$;

в) синус кута нахилу прямої l до осі Ox : $k = \sin \alpha$;

г) косинус кута нахилу прямої l до осі Ox : $k = \cos \alpha$?

Література: [1 – 3; 5; 8; 15; 23].

8. Криві 2-го порядку

Основні питання:

- 8.1. Загальне рівняння кривої 2-го порядку: типи кривих.
- 8.2. Коло та еліпс: означення, канонічні рівняння.
- 8.3. Гіпербола: означення, канонічне рівняння, асимптоти.
- 8.4. Парабола: означення, канонічне рівняння.
- 8.5. Зведення загального рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду.
- 8.6. Квадратичні форми. Застосування до перетворення рівнянь кривої 2-го порядку.

8.1. Загальне рівняння кривої 2-го порядку: типи кривих

Кривою 2-го порядку називають лінію, яку описують таким рівнянням:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (8.1)$$

де x, y – змінні – поточні координати точок лінії;

A, B, C, D, E, F – задані дійсні числа – коефіцієнти при змінних і вільний член F .

Зазначмо, що числа A, B, C одночасно не можуть дорівнювати нулю:
 $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Рівняння (8.1) називають **загальним рівнянням кривої 2-го порядку**. За певних умов щодо значень коефіцієнтів при змінних і вільного члена, воно описує одну із чотирьох відомих зі школи кривих: коло, еліпс, гіперболу, параболу.

Однак може трапитися, що не існує точок (x, y) із дійсними координатами, які б задовольняли рівняння (8.1). У цьому разі криву 2-го порядку називають **уявною** кривою. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 + 5 = 0$, або $x^2 + y^2 = -5$, визначає уявне коло.

Крім того, трапляються випадки виродження кривих 2-го порядку в прямі або точку. Наприклад:

$$x^2 + y^2 = 0 \text{ – рівняння точки } (0, 0);$$

$$x^2 - a^2 = 0 \text{ (} a \geq 0 \text{) – рівняння паралельних або збіжних прямих;}$$

$$x^2 - y^2 = 0 \text{ – рівняння прямих, що перетинаються (} y = x, y = -x \text{).}$$

Відомо, що, залежно від знака величини $4AC - B^2$, рівняння (8.1) описує один із трьох типів ліній 2-го порядку:

1) *еліптичний*, якщо $4AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ рівняння (8.1) описує еліпс (коло за $A = C$ і $B = 0$), уявну криву або криву, яка вироджується в точку;

2) *гіперболічний*, якщо $4AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ рівняння (8.1) описує гіперболу або пару прямих, що перетинаються;

3) *параболічний*, якщо $4AC - B^2 = 0 \Rightarrow$ рівняння (8.1) описує параболу, пару паралельних прямих або уявну криву.

8.2. Коло та еліпс: означення, канонічні рівняння

Колом називають множину точок площини, відстань від яких до однієї фіксованої точки, що називають **центром**, є величиною сталою. Відстань від центра кола до будь-якої його точки називають **радіусом** кола.

Канонічне рівняння кола (7.2) було визначено в підрозд. 7:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (8.2)$$

Якщо в рівнянні (8.2) розкрити дужки, то маємо загальне рівняння кривої 2-го порядку за $A = C = 1$ і $B = 0$, тобто таке рівняння:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

яке називають **загальним рівнянням кола**.

Еліпсом називають множину точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок (**фокусів**) є величиною сталою. Нехай точка $M(x, y)$ є довільною точкою еліпса (рис. 8.1), фокуси еліпса розташовано на осі Ox у точках $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, а сума відстаней точок еліпса до фокусів дорівнює $2a$.

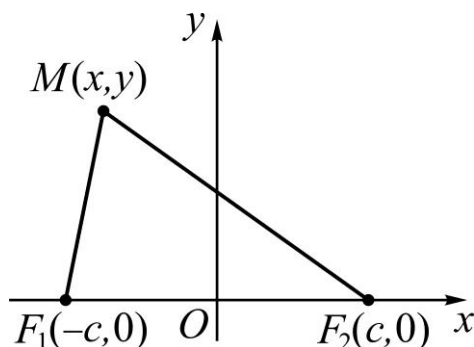


Рис. 8.1. Фокуси й довільна точка еліпса

Тоді, згідно з означенням еліпса, має місце таке співвідношення:
 $F_1M + F_2M = 2a$. Використовуючи формулу відстані між двома точками, маємо:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a, \quad (8.3)$$

або

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \quad (8.4)$$

Далі позбавляймося від ірраціональності піднесенням до квадрата обох частин рівності (8.4) і спростуймо її:

$$\begin{aligned} (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{покладаймо} \\ a^2 - c^2 = b^2 \end{array} \right| \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \end{aligned}$$

або

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (8.5)$$

Рівняння (8.5) називають **канонічним рівнянням еліпса**.

Оскільки $2a > 2c$ (сума двох сторін трикутника є більшою за третю сторону), тому позначення $a^2 - c^2$ через b^2 є коректним.

Аналізуючи рівняння (8.5), зробимо такі *висновки*:

1) точки еліпса не виходять за межі прямокутника, який описують такими нерівностями: $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ (рис. 8.2). Це випливає з рівняння (8.5), розв'язаного відносно змінної y :

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

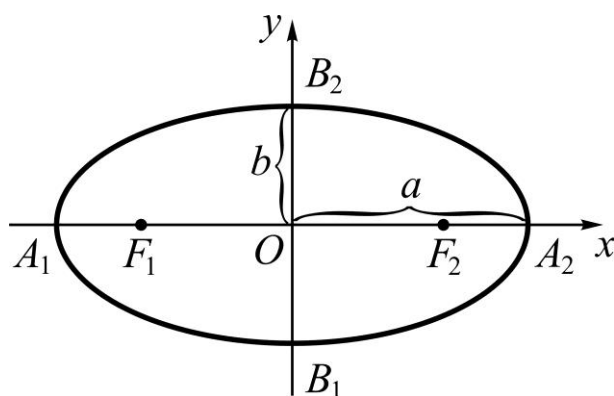


Рис. 8.2. Еліпс

2) еліпс є симетричним відносно осей координат, оскільки рівняння містить тільки квадрати поточних координат x і y , тому координатні осі є осями симетрії еліпса; вісь симетрії, на якій лежать фокуси, називають **фокальною віссю**; точку перетину осей симетрії називають **центром симетрії**, або **центром** еліпса;

3) крива перетинає координатні осі в точках – вершинах еліпса – з абсцисами $x = \pm a$ та з ординатами $y = \pm b$ (див. рис. 8.2): $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$; відрізки A_1A_2 і B_1B_2 , що з'єднують протилежні вершини еліпса, а також їхні довжини $2a$ і $2b$, називають, відповідно, **великою** і **малою осями** еліпса; довжини a і b – **великою** і **малою півосями**.

Форму еліпса відносно осі Ox визначають відношенням відстані між фокусами $2c$ до великої осі $2a$, яке називають **ексцентриситетом** еліпса ε :

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (8.6)$$

За допомогою співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ ексцентриситет ε легко подати через півосі a і b :

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (8.7)$$

Канонічне рівняння кола $x^2 + y^2 = R^2$ (див. ф-лу (7.3)) є частинним випадком канонічного рівняння еліпса (8.5) за умови, що $a = b = R$. Але якщо $a = b$, то $\varepsilon = 0$. Тобто, ексцентриситет кола дорівнює нулю.

Якщо ексцентриситет еліпса ε наближається до нуля ($\varepsilon \rightarrow 0$), то за своєю формою еліпс наближається до кола; якщо ж ε наближається до одиниці ($\varepsilon \rightarrow 1$), то піввісь b еліпса прямує до нуля, а еліпс – до виродження у відрізок.



Відомо, що планети й комети рухаються орбітами, що мають форму еліпса. Орбіти планет є близькими до кіл, а орбіти комет – до витягнутих еліпсів (ексцентриситети орбіти Землі й комети Галлея дорівнюють, відповідно, 0,02 і 0,97).

Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, які є паралельними малій осі еліпса, називають **директрисами еліпса**, а відстані від довільної точки еліпса до його фокусів – **фокальними радіусами еліпса** (див. рис. 8.1):

$$MF_1 = r_1, \quad MF_2 = r_2.$$

Фокальні радіуси пов'язано співвідношенням $r_1 + r_2 = 2a$ (за означенням еліпса), а їхній зв'язок з ексцентриситетом описують такими рівностями:

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x.$$

Зауваження. Канонічне рівняння еліпса можна визначити, вибираючи фокуси на осі Ox , тоді великою буде піввісь b , а малою – піввісь a .



Складімо рівняння еліпса L , який проходить через точку $M_0(5, -3)$, а його ексцентриситет дорівнює 0,8.

Задача полягає у визначенні параметрів рівняння еліпса. Оскільки точка $M_0(5, -3) \in L$, то її координати задовольняють рівняння еліпса. За умовою задачі, $\varepsilon = 0,8$, тому $c = 0,8a$, звідки $b^2 = a^2 - c^2 = 0,36a^2$.

Отже, для обчислення параметрів еліпса маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{25}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1, \\ b^2 = 0,36a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{25}{a^2} + \frac{9}{0,36a^2} = 1, \\ b^2 = 0,36a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{50}{a^2} = 1, \\ b^2 = 0,36a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5\sqrt{2}, \\ b = 3\sqrt{2}. \end{cases}$$

Отже, рівняння еліпса має такий вигляд:

$$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1.$$

8.3. Гіпербола: означення, канонічне рівняння, асимптоти

Гіперболою називають множину точок площини, модуль різниці відстаней яких до двох фіксованих точок, що називають **фокусами**, є величиною сталою, відмінною від нуля.

Виберімо осі координат таким способом, щоб фокуси гіперболи $F_1(-c, 0)$ та $F_2(c, 0)$ було розташовано на осі Ox , а модуль різниці відстаней від точок гіперболи до фокусів позначмо $|F_1M - F_2M| = 2a$ ($a > 0$).

Скористаймося рис. 8.1, на якому тепер $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи. Згідно з означенням, $F_1M - F_2M = \pm 2a$.

Звідси, застосувавши формулу відстані між двома точками, маємо:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

або

(8.8)

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Виконуємо перетворення, аналогічні тим, які виконували під час виведення рівняння еліпса:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{покладаймо} \\ c^2 - a^2 = b^2 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

або

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (8.9)$$

Рівняння (8.9) називають **канонічним рівнянням гіперболи**.

Оскільки $2c > 2a$ (різниця двох сторін трикутника завжди є меншою за третю сторону), тому різниця $c^2 - a^2$ є додатним числом, яке позначили через b^2 .

Аналіз визначеного рівняння дозволяє дійти до таких *висновків*:

1) точки гіперболи виходять (крім двох) за межі вертикальної смуги, яку описують такою нерівністю: $-a \leq x \leq a$ (рис. 8.3). Це впливає з рівняння (8.9), розв'язаного відносно змінної y :

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2};$$

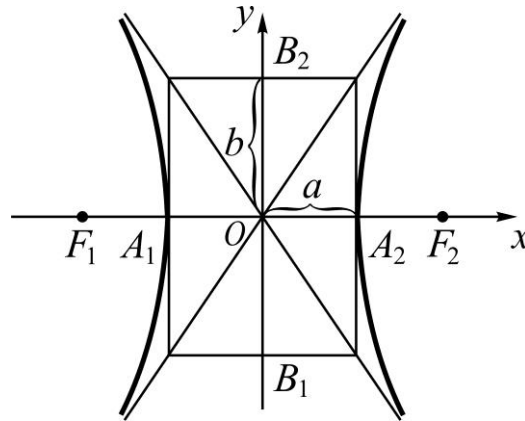


Рис. 8.3. Гіпербола

2) гіпербола є симетричною відносно осей координат, оскільки її рівняння містить тільки квадрати змінних x та y , тому координатні осі є осями симетрії гіперболи; вісь симетрії, на якій лежать фокуси, називають **фокальною**, або **дійсною віссю**; другу – **уявною віссю симетрії**; точка перетину осей симетрії є *центром симетрії* гіперболи, або *центром гіперболи*;

3) крива перетинає вісь Ox у точках – *вершинах* гіперболи – з абсцисами $x = \pm a$: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ (див. рис. 8.3); із віссю Oy крива спільних точок не має; вісь Ox називають **дійсною**, а вісь Oy – **уявною** осями гіперболи. Відрізок $A_1A_2 = 2a$, який з'єднує вершини гіперболи, належить дійсній осі Ox ; відрізок $B_1B_2 = 2b$ – уявній осі гіперболи Oy .

Прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$ та центром симетрії в початку координат називають **основним прямокутником** гіперболи.

Асимптотою гіперболи називають пряму, відстань до якої від точок гіперболи прямує до нуля за необмеженого зростання абсциси x ($x \rightarrow \pm\infty$).

Асимптоти гіперболи описують такими рівняннями прямих:

$$y = -\frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x, \quad (8.10)$$

на яких лежать діагоналі основного прямокутника гіперболи.

Нехай $M(x, y)$ – точка гіперболи, де $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Обчислимо відстань від цієї точки до асимптоти з рівнянням $y = \frac{b}{a}x$ за ф-лою (7.26):

$$d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left| bx - a \cdot \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right| = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left| x - \sqrt{x^2 - a^2} \right|. \quad (8.11)$$

Поділімо і помножмо праву частину ф-ли (8.11) на вираз, спряжений до виразу під знаком модуля, тобто на вираз $x + \sqrt{x^2 - a^2}$, тоді маємо:

$$d = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \quad (8.12)$$

За необмеженого зростання x знаменник дробу необмежено збільшується, а сам дріб зменшується і наближається до нуля.

Аналогічно можна показати, що пряма $y = -\frac{b}{a}x$ також є асимптотою гіперболи.

З огляду на означення асимптот, геометричне зображення гіперболи починають із побудови її основного прямокутника та його діагоналей.

Частини графіка кривої за $x \leq -a$ і $x \geq a$ називають **гілками** гіперболи.

Як і для еліпса, форму гіперболи характеризує відношення фокусної відстані $2c$ до дійсної осі $2a$ і, як і для еліпса, таке відношення називають **ексцентриситетом**:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon > 1. \quad (8.13)$$

Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, які паралельні уявній осі гіперболи, називають **директрисами** гіперболи.

Відстані від довільної точки гіперболи до її фокусів називають **фокальними радіусами** гіперболи: $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$.

Фокальні радіуси (за означенням гіперболи) пов'язано таким співвідношенням: $|r_1 - r_2| = 2a$, а їхній зв'язок з ексцентриситетом описують рівностями:

$$r_1 = \pm(\varepsilon x - a), \quad r_2 = \pm(\varepsilon x + a),$$

де знак $+$ ($-$) відповідає правій (лівій) гілці гіперболи.

Зауваження:

1) канонічне рівняння гіперболи в разі розташування її фокусів на осі Oy має такий вигляд:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8.14)$$

тоді дійсною віссю гіперболи є Oy , а уявною – Ox .

Криві, що описують рівняннями (8.9) та (8.14), називають **взаємно спряженими** гіперболами;

2) якщо в рівняннях (8.9) та (8.14) $a = b$, то маємо:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{або} \quad x^2 - y^2 = -a^2. \quad (8.15)$$

Криві, що описують рівняннями (8.15), називають **рівнобічними гіперболами**.



Нехай задано таке загальне рівняння гіперболи: $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

Обчислимо її параметри, визначмо ексцентриситет, координати вершин та фокусів.

Запишімо рівняння гіперболи в канонічній формі:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 16y^2 - 144 = 0 &\Rightarrow 9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1. \end{aligned}$$

Звідси встановлюємо, що: $a = 4$ – дійсна піввісь, $b = 3$ – уявна піввісь гіперболи.

Вершинами гіперболи є точки $A_1(-4, 0)$ і $A_2(4, 0)$; півфокусна відстань $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$, тому фокуси гіперболи розташовано в точках $F_1(-5, 0)$ і $F_2(5, 0)$.

Ексцентриситет гіперболи обчислимо за ф-лою (8.13):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1,25 > 1.$$

8.4. Парабола: означення, канонічне рівняння

Параболою називають множину точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки (*фокуса*) та фіксованої прямої (*директриси*).

Виберімо на площині систему координат xOy (рис. 8.4).

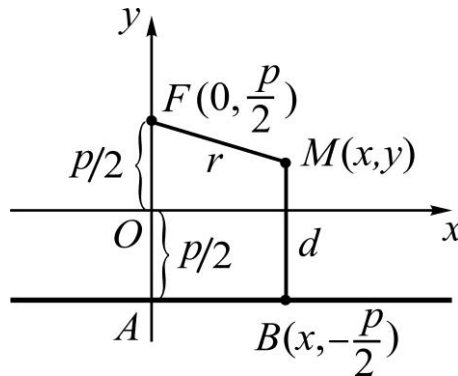


Рис. 8.4. Фокус, директриса і довільна точка параболи

Позначмо відстань від фокуса параболи F до директриси AB через p ($p > 0$). Визначмо рівняння параболи з фокусом у точці $F(0, p/2)$ і директрисою, паралельною осі Ox , із рівнянням $y = -p/2$.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка параболи. Тоді, згідно з означенням параболи, $FM = BM$.

За формулою відстані між двома точками, маємо:

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

або

$$x^2 = 2py.$$

(8.16)

Рівняння (8.16) називають **канонічним рівнянням параболи**.

Число p ($p > 0$) – відстань від фокуса до директриси називають **параметром** параболи.

Аналіз рівняння (8.16) дозволяє дійти таких *висновків*:

1) парабола є симетричною відносно осі Oy , бо змінна x входить до рівняння в другому степені; вісь симетрії (Oy) називають **віссю** параболи (рис. 8.5а); змінна y не може бути від'ємною ($y \geq 0$); точку $O(0, 0)$, яка нале-

жить кривій і є точкою перетину параболи із її віссю, називають **вершиною** параболи;

2) у разі зростання x за модулем від 0 до $+\infty$ змінна y необмежено зростає за законом $y = \frac{1}{2p} x^2$.

Якщо $p = 1/2$, то маємо рівняння параболи $y = x^2$, яке відомо ще зі шкільного курсу математики.

Параболу з фокусом у точці $F(p/2, 0)$ і директрисою $x = -p/2$ (рис. 8.5в) описують такими рівнянням:

$$y^2 = 2px.$$

Інші варіанти канонічного рівняння параболи маємо, вибираючи фокуси й директриси, як показано на рис. 8.5б і 8.5г:

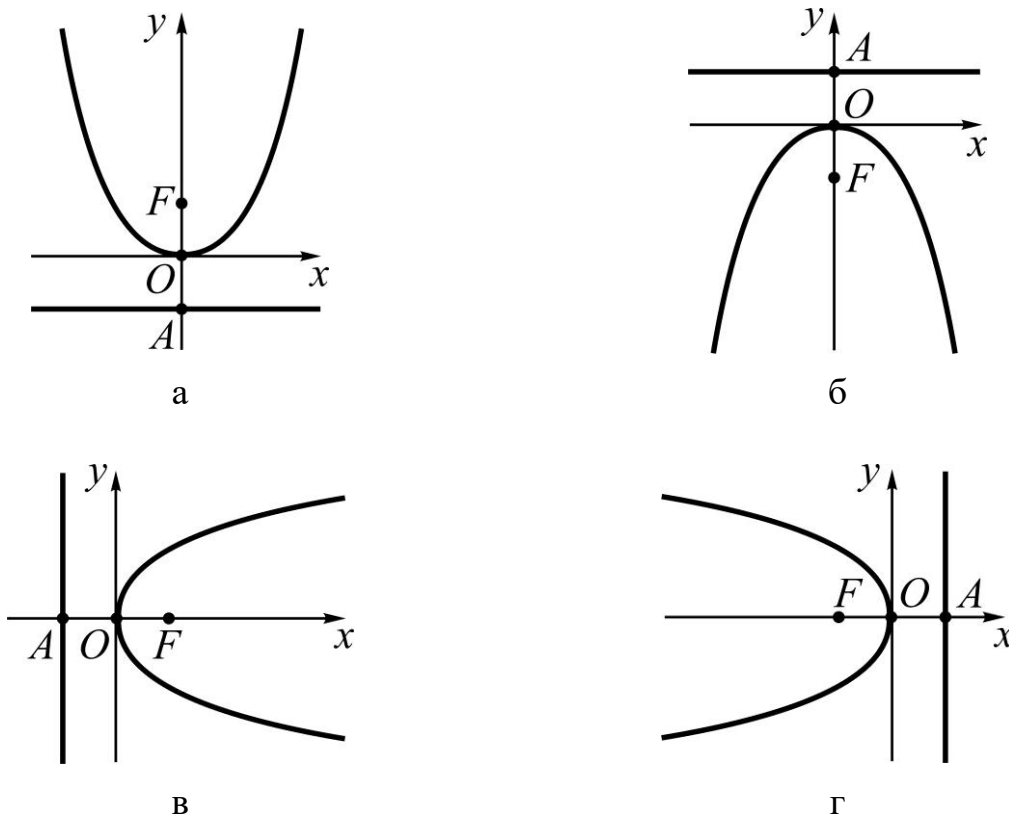


Рис. 8.5. Графіки парабол:

а) $x^2 = 2py$; б) $x^2 = -2py$; в) $y^2 = 2px$; г) $y^2 = -2px$

Задачі на складання канонічних рівнянь параболи зводять до обчислення лише однієї величини – параметра p ($p > 0$).



Складімо канонічне рівняння параболи, яка проходить через точку $M_0(5, -3)$, а її віссю є вісь Ox .

Оскільки точка M_0 лежить у четвертому квадранті та віссю симетрії параболи є вісь Ox , то відповідне рівняння має такий вигляд: $y^2 = 2px$.

Підставляймо координати заданої точки в рівняння й обчислюймо значення p :

$$(-3)^2 = 2p \cdot 5 \Rightarrow p = \frac{9}{10} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{5}x \Rightarrow y = \pm 3 \cdot \sqrt{\frac{x}{5}}.$$

Рівняння $y = 3\sqrt{x/5}$ та $y = -3\sqrt{x/5}$ визначають *гілки* параболи.

Криві коло, еліпс та гіперболу називають **центральними** кривими 2-го порядку, а параболу – **нецентральною**; її **ексцентриситетом** вважають відношення фокального радіуса $FM = r$ довільної точки M параболи до відстані $BM = d$ (див. рис. 8.4) від цієї точки до директриси, тобто $\varepsilon = r/d = 1$.

Задачу виведення рівнянь кривих 2-го порядку ускладнено, якщо центр центральних кривих лежить не в початку координат і (або) осі симетрії не є координатними осями; а для нецентральных кривих – якщо фокус не лежить на координатній осі й (або) директриса не є ортогональною жодній з осей координат.

Для встановлення положення на площині кривих 2-го порядку, які описують загальним рівнянням, через паралельне перенесення і (або) поворот вихідної системи координат переходять до такої системи координат, у якій загальне рівняння набуває канонічного вигляду.

8.5. Зведення загального рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду

Виберімо на площині дві системи координат, тоді координати тієї самої точки в цих системах будуть різними.

Задача перетворення координат полягає в тому, щоб визначити зв'язок між координатами точок у двох системах координат, одну з яких назвімо **вихідною**, другу – **новою**. Будь-яку нову систему координат $x'O_1y'$ (рис. 8.6) можна отримати з вихідної системи xOy *паралельним перенесенням*, тобто переміщенням початку координат у точку O_1 зі збереженням напрямку осей (що дає систему координат XO_1Y), а потім *поворотом* системи XO_1Y на певний кут α навколо точки O_1 .

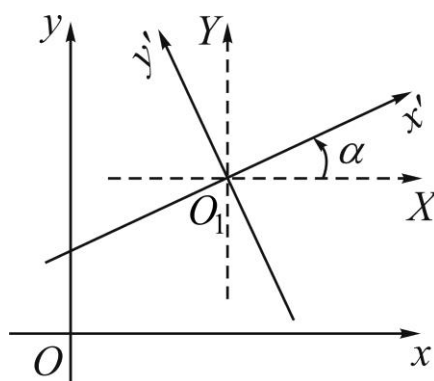


Рис. 8.6. Перетворення координат

Паралельне перенесення. Виберімо на площині довільну точку M . Нехай xOy є вихідною, а XO_1Y – новою системою координат із початком у точці $O_1(x_0, y_0)$ (рис. 8.7). Тоді пара (x, y) визначає координати точки M у вихідній системі координат, а (X, Y) – координати цієї самої точки в новій системі координат.

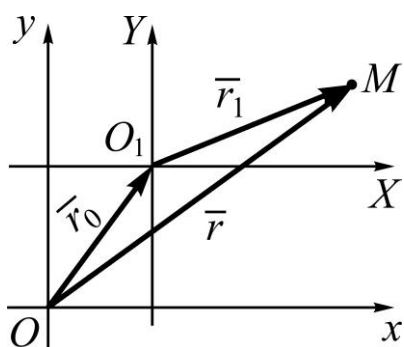


Рис. 8.7. Паралельне перенесення осей

Уведемо на розгляд радіуси-вектори $\vec{r}_0 = \overline{OO_1}$, $\vec{r}_1 = \overline{O_1M}$, $\vec{r} = \overline{OM}$. Вектор $\vec{r}_1$ є різницею векторів $\vec{r}$ і $\vec{r}_0$: $\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_0$, що дозволяє визначити зв'язок між координатами точки в таких системах координат:

$$\begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0. \end{cases} \quad (8.17)$$

Співвідношення (8.17) називають **формулами паралельного перенесення**.

Поворот осей координат. Установімо зв'язок між координатами довільної точки M площини в системах зі спільним початком і різним напрямком осей координат. Нехай xOy є вихідною, а XOY – новою системою координат (рис. 8.8), тоді пара (x, y) визначає координати точки M у вихідній системі координат, а (X, Y) – координати цієї самої точки в новій системі координат.

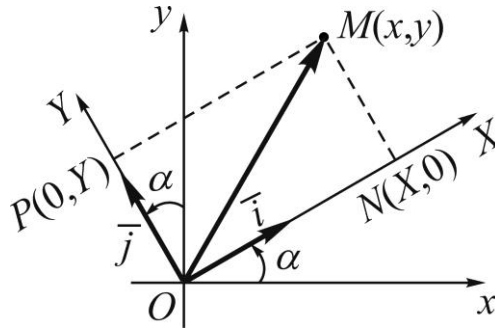


Рис. 8.8. Поворот осей координат

Позначмо через α кут повороту вихідної системи навколо точки O і визначмо напрямні косинуси нових осей OX та OY у вихідній системі, або, що те саме, координати одиничних векторів $\bar{i}$ та $\bar{j}$ нової системи координат у системі xOy : $\bar{i} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\bar{j} = (\cos(\pi/2 + \alpha), \sin(\pi/2 + \alpha)) = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$.

Визначмо проєкції вектора $\overline{OM} = (x, y)$ на нові осі координат як скалярний добуток цього вектора з напрямними векторами $\bar{i}$ та $\bar{j}$, відповідно:

$$\begin{cases} X = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ Y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \end{cases} \quad (8.18)$$

Співвідношення (8.18) називають **формулами повороту осей координат**.

Якщо послідовно виконують паралельне перенесення й поворот осей координат або навпаки, то вихідні координати (x, y) можна визначити через нові (x', y') таким способом:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + x_0, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + y_0. \end{cases} \quad (8.19)$$



Складімо рівняння рівнобічної гіперболи $x^2 - y^2 = a^2$ в системі координат, що визначена з вихідної системи поворотом навколо початку координат на кут $\alpha = -\pi/4$.

За ф-лою (8.18) обчислюймо поточні координати точок вихідної системи через поточні координати нової системи:

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow |\alpha = -\pi/4| \Rightarrow \begin{cases} x = X \frac{\sqrt{2}}{2} + Y \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = -X \frac{\sqrt{2}}{2} + Y \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Підставляймо вирази для x , y у вихідне рівняння й маємо рівняння гіперболи в нових координатах, асимптотами якої є осі нової системи XOY :

$$x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow \frac{(X+Y)^2}{2} - \frac{(-X+Y)^2}{2} = a^2 \Rightarrow 2XY = a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{X} = \frac{k}{X}, \quad k = \frac{a^2}{2}.$$

Розгляньмо застосування формул паралельного перенесення й повороту осей координат до зведення загального рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду.

1. Зведення до канонічного вигляду загального рівняння кривої 2-го порядку, що не містить добутку змінних ($B = 0$):

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (8.20)$$

Перетворення рівняння (8.20) на рівняння канонічного вигляду виконують за допомогою паралельного перенесення системи координат, якому передуює виділення повних квадратів за обома змінними.



Зведемо загальне рівняння кривої $4x^2 - 25y^2 - 24x - 50y - 89 = 0$ до канонічного вигляду, визначмо тип кривої та її параметри.

Розв'язання задачі передбачає такі етапи:

а) *установлюймо* тип кривої:

$(A = 4, B = 0, C = -25) \Rightarrow 4AC - B^2 = -100 < 0 \Rightarrow$ рівняння описує криву гіперболічного типу;

б) *групуймо* в лівій частині рівняння члени зі змінними x , y і *виділяймо* повні квадрати двочленів за кожною змінною:

$$4x^2 - 25y^2 - 24x - 50y - 89 = 0 \Rightarrow 4(x^2 - 6x) - 25(y^2 + 2y) - 89 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4((x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9) - 25((y^2 + 2y + 1) - 1) - 89 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x - 3)^2 - 25(y + 1)^2 = 100 \Rightarrow \frac{(x - 3)^2}{25} - \frac{(y + 1)^2}{4} = 1;$$

в) *уводьмо* нові координати: $X = x - 3$, $Y = y + 1$ – і *записуймо* канонічне рівняння в новій системі з початком у точці $O_1(3, -1)$:

$$\frac{X^2}{5^2} - \frac{Y^2}{2^2} = 1.$$

Отже, задана крива 2-го порядку є гіперболою з півосями $a = 5$, $b = 2$ і центром у точці $(3, -1)$.

2. Зведення загального рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду.

Перетворення загального рівняння кривої 2-го порядку:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

на рівняння канонічного вигляду виконують у два етапи:

1-й етап. За допомогою *повороту осей координат* зводьмо загальне рівняння до рівняння (8.20), яке не містить добутку змінних. Відповідний кут повороту осей α визначають таким співвідношенням (виводити його не будемо):

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{B}, \quad (8.21)$$

Звідси, за формулами тригонометрії, маємо:

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}, \\ \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}, \end{cases}$$

де знак вибирають, залежно від того, якій чверті належить кут α .

За ф-лою (8.18), визначаймо поточні координати точок вихідної системи через поточні координати нової системи:

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha, \end{cases} \quad (8.22)$$

що дає змогу мати рівняння відносно змінних X і Y , яке не містить їхнього добутку.

2-й етап. За допомогою *паралельного перенесення осей координат*, перетворюймо рівняння, що було визначено на 1-му етапі, на рівняння канонічного виду.

Зауваження. Перетворення загального рівняння кривої 2-го порядку можна також починати з паралельного перенесення осей, із метою позбутися членів, які містять змінні в першому степені. У цьому разі мають квадратичну форму, яку приводять до канонічного виду за відомими методами, наприклад, методами Лагранжа, Якобі, Сільвестра.



Проведімо дослідження кривої 2-го порядку, заданої загальним рівнянням:

$$Bxy + Dx + Ey + F = 0. \quad (8.23)$$

Це рівняння можна подати у вигляді дробово-лінійної функції:

$$y(Bx + E) = -Dx - F \Rightarrow y = \frac{-Dx - F}{Bx + E} \quad \left(\frac{D}{B} \neq \frac{F}{E}, B \neq 0 \right). \quad (8.24)$$

Виділімо в чисельнику дробу (8.24) його знаменник та виокремимо цілу частину дробу, а саме:

$$\begin{aligned} y = \frac{-Dx - F}{Bx + E} &= \frac{\frac{-D}{B}(Bx + E) + \frac{DE}{B} - F}{Bx + E} = \frac{-D}{B} + \frac{DE - FB}{B(Bx + E)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y + \frac{D}{B} = \frac{DE - FB}{B^2 \left(x + \frac{E}{B} \right)}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Позначмо:

$$Y = y + \frac{D}{B}, \quad X = x + \frac{E}{B}, \quad \frac{DE - FB}{B^2} = k.$$

Тоді рівняння (8.25) у новій системі координат набуде такого вигляду:

$$Y = \frac{k}{X}.$$

Отже, графіком *дробово-лінійної функції* є гіпербола з асимптотами, паралельними координатним осям, і центром симетрії в точці $\left(-\frac{E}{B}, -\frac{D}{B} \right)$.

8.6. Квадратичні форми. Застосування до перетворення рівнянь кривої 2-го порядку

Нехай x_1, x_2 – змінні величини. **Квадратичною формою** $Q(x_1, x_2)$ називають однорідний многочлен другого степеня відносно змінних x_1, x_2 :

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}x_ix_j, \quad (8.26)$$

де a_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) – коефіцієнти при змінних (числові параметри).

Квадратичну форму $Q(x_1, x_2)$, у якої $a_{ij} = a_{ji} \forall i \neq j$, називають **симетричною**:

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \quad (8.27)$$

Квадратичну форму $Q(x_1, x_2)$, яка містить тільки квадрати змінних, називають **канонічною** (або кажуть, що вона має *канонічний вигляд*):

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2. \quad (8.28)$$

Матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, складену із числових параметрів $Q(x_1, x_2)$, на-

зивають **матрицею квадратичної форми**, а матрицю-стовпець $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – **вектором змінних**.

Теорема 8.6.1 (про матричний запис квадратичної форми). Будь-яку квадратичну форму можна подати в матричному вигляді як добуток двох лінійних перетворень, перше з яких є тотожним ($\mathcal{E}\bar{x} = \bar{x}$), а матрицею другого є матриця A квадратичної форми: $Q(x_1, x_2) = \bar{x}^T \cdot \mathcal{A} \bar{x}$.

Доведення. За допомогою тотожних алгебраїчних перетворень послідовно здобуваймо:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = \\ &= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = \\ &= (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{x}^T \cdot \mathcal{A} \bar{x}. \blacksquare \end{aligned}$$

Цю теорему можна узагальнити на квадратичні форми щодо будь-якої скінченної кількості змінних:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

У разі квадратичної форми двох змінних ($n = 2$) зазвичай змінні позначають буквами без індексів: $Q(x, y)$.

Теорема 8.6.2 (про зведення симетричної квадратичної форми до канонічного вигляду). Якщо вектор змінних $\bar{x}$ є лінійною комбінацією векторів ортонормованого базису $\bar{u}^0, \bar{v}^0$, складеного із власних векторів матриці A , то симетрична квадратична форма набуває канонічного вигляду:

$$\bar{x} = x'_1 \cdot \bar{u}^0 + x'_2 \cdot \bar{v}^0 \Rightarrow Q(x'_1, x'_2) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2, \quad (8.29)$$

де x'_1, x'_2 – коефіцієнти розкладу вектора $\bar{x}$ за базисом $\bar{u}^0, \bar{v}^0$;

λ_1, λ_2 – власні числа матриці симетричної квадратичної форми.

Доведення. Підставо в матричний запис квадратичної форми, замість $\bar{x}$, його вираз через базис із власних векторів $\bar{u}$ і $\bar{v}$ матриці A і розкриємо дужки, відповідно до властивостей лінійного оператора:

$$\begin{aligned} Q(x'_1, x'_2) &= \bar{x}^T \cdot \mathcal{A} \bar{x} = (x'_1 \cdot \bar{u} + x'_2 \cdot \bar{v}) \cdot (A(x'_1 \cdot \bar{u} + x'_2 \cdot \bar{v})) = \\ &= (x'_1 \cdot \bar{u} + x'_2 \cdot \bar{v}) \cdot (x'_1 \lambda_1 \cdot \bar{u} + x'_2 \lambda_2 \cdot \bar{v}) = \\ &= (x'_1)^2 \lambda_1 \cdot \bar{u}^2 + x'_1 x'_2 (\lambda_1 + \lambda_2) (\bar{u} \cdot \bar{v}) + (x'_2)^2 \lambda_2 \cdot \bar{v}^2. \end{aligned}$$

Після переходу до ортонормованого базису, з огляду на властивості: $\bar{u}^0 \cdot \bar{v}^0 = 0, (\bar{u}^0)^2 = (\bar{v}^0)^2 = 1$, маємо (8.29). ■

Якщо за теоремою 8.5.2 зводити до канонічного вигляду рівняння кривих 2-го порядку, то, залежно від того, яким буде визначник матриці квадратичної форми ΔA , порівняно з нулем, можливі такі випадки:

$$\begin{aligned} \Delta A > 0 &\Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow \text{крива еліптичного типу,} \\ \Delta A < 0 &\Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow \text{крива гіперболічного типу,} \\ \Delta A = 0 &\Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 0 \Rightarrow \text{крива параболічного типу.} \end{aligned} \quad (8.30)$$

Покажімо справедливність третього співвідношення:

Нехай $\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, тоді $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, звідси $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$.

Обчислимо власні числа:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda(\lambda - a_{11} - a_{22}) = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = 0, \lambda_2 = a_{11} + a_{22}).$$

Отже, у новому (ортонормованому) базисі рівняння кривої буде мати квадрат лише однієї змінної, а відповідна лінія є кривою параболічного типу.

Аналогічно доводять інші випадки, якщо канонічна форма (8.29) містить доданки, відповідно, з однаковими або різними знаками.

У разі використання квадратичних форм, із метою спрощення рівнянь кривих 2-го порядку, коефіцієнти при змінних позначають малими літерами з індексами:

$$\Phi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$



Зведемо до канонічного вигляду загальне рівняння кривої:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 10x - 4y + a = 0,$$

якщо: а) $a = 6$, б) $a = 5$, в) $a = 4$.

За заданим рівнянням установлюємо: $a_{11} = 5$, $a_{12} = 2$, $a_{22} = 2$, $a_1 = -5$, $a_2 = -2$; для вільного члена a пропонуємо розглянути три значення:

а) $a = 6$. Виконаймо паралельне перенесення так, щоб у новій системі координат рівняння не містило змінних у першому степені. Для цього переходимо до нових координат:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \Rightarrow 5(X + x_0)^2 + 4(X + x_0)(Y + y_0) + 2(Y + y_0)^2 - \\ - 10(X + x_0) - 4(Y + y_0) + 6 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 5X^2 + 4XY + 2Y^2 + 2X(5x_0 + 2y_0 - 5) + 4Y(x_0 + y_0 - 1) + \\ + (5x_0^2 + 4x_0y_0 + 2y_0^2 - 10x_0 - 4y_0 + 6) = 0,$$

розв'язуємо систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_0 + 2y_0 - 5 = 0, \\ x_0 + y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) = (1, 0),$$

у результаті чого визначаймо координати початку нової системи координат XO_1Y : $O_1(x_0, y_0) = O_1(1, 0)$.

У системі XO_1Y криву описують таким рівнянням:

$$5X^2 + 4XY + 2Y^2 + 1 = 0,$$

яке в лівій частині містить квадратичну форму відносно змінних X, Y .

Обчислимо власні числа матриці цієї квадратичної форми:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \Delta(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6). \end{aligned}$$

Оскільки $\lambda_1 \lambda_2 = 6 > 0$, то крива належить до еліптичного типу.

Визначаймо власні вектори, що належать кожному власному числу:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1: & \begin{cases} (5-1)X + 2Y = 0, \\ 2X + (2-1)Y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2X + Y = 0 \Rightarrow \bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \\ \lambda_2 = 6: & \begin{cases} (5-6)X + 2Y = 0, \\ 2X + (2-6)Y = 0 \end{cases} \Rightarrow -X + 2Y = 0 \Rightarrow \bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вектори $\bar{u}$ і $\bar{v}$ утворюють ортогональний базис нової системи координат $x'O_1y'$. Перейдімо від базису з векторів $\bar{u}$ і $\bar{v}$ до ортонормованого базису:

$$\bar{u}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right), \quad \bar{v}^0 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right),$$

у якому канонічна форма заданого рівняння має такий вигляд:

$$(x')^2 + 6(y')^2 + 1 = 0, \text{ або } \frac{(x')^2}{1} + \frac{(y')^2}{1/6} = -1$$

і описує уявний еліпс;

б) $a = 5$. У системі $x'O_1y'$ вихідне рівняння набуває такого вигляду:

$$(x')^2 + 6(y')^2 = 0.$$

Отже, маємо випадок виродження кривої в точку O_1 ;

в) $a = 4$. Канонічна форма заданого рівняння в новій системі буде такою:

$$(x')^2 + 6(y')^2 - 1 = 0, \text{ або } \frac{(x')^2}{1} + \frac{(y')^2}{1/6} = 1,$$

тобто крива є еліпсом із параметрами $a = 1$, $b = \sqrt{6}/6$.

Зауваження. Для кривих параболічного типу спрощення рівняння починають, зазвичай, із повороту осей координат.

Наостанок зазначмо, що існують величини, складені з коефіцієнтів рівняння (і вільного члена), які не змінюються в разі переходу від однієї прямокутної декартової системи координат до іншої такої самої системи. Ці величини називають **інваріантами кривої 2-го порядку**.

До них належать:

1) сума коефіцієнтів при квадратах координат: $s = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$;

2) визначник, утворений із коефіцієнтів при старших членах:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2;$$

3) визначник, складений із числових параметрів такого рівняння:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}.$$

За значеннями інваріантів, зведених у табл. 8.1, установлюють не тільки тип кривої, а й можливі випадки її виродження.

Таблиця 8.1

Класифікація кривих 2-го порядку за інваріантами

Умови, які задовольняють інваріанти		Геометричний образ кривої 2-го порядку (невироджені та вироджені випадки)
$\delta > 0$ Крива еліптичного типу	$\Delta \neq 0$	$s\Delta < 0$. Еліпс
		$s\Delta > 0$. Уявний еліпс
	$\Delta = 0$	Точка (пара уявних прямих, що перетинаються в цій точці)
$\delta < 0$ Крива гіперболічного типу	$\Delta \neq 0$	Гіпербола
	$\Delta = 0$	Пара прямих, що перетинаються
$\delta = 0$ Крива параболічного типу	$\Delta \neq 0$	Парабола
	$\Delta = 0$	Пара паралельних, збіжних або уявних прямих



Установімо, чи вироджену лінію 2-го порядку задано таким рівнянням:

$$\Phi(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + 6y + 4 = 0.$$

Обчислюймо інваріанти кривої й аналізуймо результати:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1,5 \\ 1,5 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1,5 & 2 \\ 1,5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Із табл. 8.1 зробімо висновок, що задане рівняння описує дві прямі, що перетинаються:

$$\Phi(x, y) = (x + y + 2)(x + 2y + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 0, \\ x + 2y + 2 = 0. \end{cases}$$



Ключові терміни

Крива 2-го порядку; загальне рівняння кривої 2-го порядку; канонічне рівняння кривої 2-го порядку; коло; еліпс; гіпербола; парабола; фокус; ексцентриситет; асимптоти; директриса; мала і велика півосі еліпса; дійсна й уявна осі гіперболи; центральні та нецентральні криві 2-го порядку; паралельне перенесення системи координат; поворот системи координат; квадратичні форми; матриця квадратичної форми; вектор змінних.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають кривою 2-го порядку і який вигляд має її загальне рівняння?
2. Які є різновиди кривих 2-го порядку і які умови визначають тип кривої?
3. Яке рівняння називають загальним рівнянням кола і як виконують перехід від нього до рівняння канонічного виду?
4. Який вигляд має канонічне рівняння еліпса?
5. Як визначають півосі еліпса, координати його вершин і фокусів та ексцентриситет?
6. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи?

7. Як визначають півосі гіперболи, координати її вершин і фокусів, рівняння асимптот, ексцентриситет?
8. Який вигляд має канонічне рівняння параболи?
9. Які криві 2-го порядку називають центральними, нецентральними?
10. У чому полягає задача перетворення координат?
11. Який вигляд мають формули паралельного перенесення координат?
12. Який вигляд мають формули повороту осей координат?
13. Який порядок зведення загального рівняння кривої 2-го порядку до канонічного виду?
14. Що називають квадратичною формою від кількох змінних?
15. Які квадратичні форми називають: а) симетричними; б) канонічними?
16. Що називають інваріантами кривої 2-го порядку, як їх визначають і для чого використовують?
17. Який порядок застосування квадратичних форм до зведення загального рівняння кривих 2-го порядку до канонічного вигляду?



Тестові завдання до підрозділу 8

1. Укажіть рівняння геометричного місця точок площини, для кожної із яких сума відстаней до двох заданих точок площини (фокусів) дорівнює одній і тій самій сталій величині:

а) $x^2 = 2py$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) $x^2 + y^2 = R^2$; г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Укажіть рівняння геометричного місця точок площини, для кожної із яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок площини (фокусів) дорівнює одній і тій самій сталій величині:

а) $x^2 = 2py$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) $x^2 + y^2 = R^2$; г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. Укажіть рівняння геометричного місця точок площини, для кожної із яких відстані до заданої прямої (директриси) і заданої точки площини (фокуса) є однаковими між собою:

а) $x^2 = 2py$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; г) $x^2 + y^2 = R^2$.

4. Укажіть рівняння геометричного місця точок площини, для кожної із яких відстань до заданої точки площини є сталою величиною:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) $x^2 + y^2 = R^2$; г) $x^2 = 2py$.

5. Уявна піввісь гіперболи $4x^2 - y^2 + 4 = 0$ дорівнює:

а) 1; б) 2; в) 4; г) -1.

6. Центр кола $x^2 + y^2 + 4x - 14y + 48 = 0$ є розташованим у такій точці:

а) (2, -7); б) (5, 0); в) (0, 0); г) (-2, 7).

7. Ексцентриситет еліпса $4x^2 + 49y^2 - 196 = 0$ дорівнює:

а) $\frac{\sqrt{45}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{45}}{7}$; в) $\frac{\sqrt{53}}{7}$; г) $\frac{\sqrt{53}}{2}$.

8. Фокуси еліпса $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ розташовано в таких точках:

а) (0, -4) і (0, 4); б) (-4, 0) і (4, 0);
в) (-16, 0) і (16, 0); г) (0, -16) і (0, 16).

9. Фокуси гіперболи $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$ розташовано в таких точках:

а) (0, $-\sqrt{34}$) і (0, $\sqrt{34}$); б) ($-\sqrt{34}$, 0) і ($\sqrt{34}$, 0);
в) (-4, 0) і (4, 0); г) (0, -4) і (0, 4).

10. Фокус параболи $y^2 + 2x = 0$ розташовано в такій точці:

а) (-1, 0); б) (1, 0); в) (-1/2, 0); г) (0, 1/2).

Література: [2 – 5; 9; 15; 24 – 27].

9. Площина в просторі

Основні питання:

- 9.1. Поняття про рівняння поверхні.
- 9.2. Різновиди рівнянь площини в просторі.
- 9.3. Основні задачі про площину.

9.1. Поняття про рівняння поверхні

Будь-яку поверхню S в аналітичній геометрії розглядають як сукупність точок простору $xOyz$, які мають деяку спільну властивість. На підставі цієї властивості між координатами x , y , z точок поверхні установлюють співвідношення, яке буде містити три змінні величини і, можливо, деякі числові параметри та константи.

Рівняння $\Phi(x, y, z) = 0$ називають **рівнянням поверхні S** , якщо координати будь-якої точки $M(x, y, z)$, що належить заданій поверхні, задовольняють це рівняння, і навпаки, якщо трійка чисел (x, y, z) задовольняє рівняння, то x , y , z є координатами точки, яка належить поверхні:

$$\Phi(x, y, z) = 0 \text{ – рівняння } S : \Leftrightarrow ((x, y, z) \in S \Leftrightarrow \Phi(x, y, z) = 0), \quad (9.1)$$

де Φ – закон, який відображає властивість точок поверхні.

Змінні x , y , z , що входять до рівняння поверхні, називають **поточними координатами** її точок.

Якщо рівняння поверхні визначено, то вивчення її властивостей зводять до аналізу рівняння, яким її описують.



Складімо рівняння поверхні, усі точки якої розташовано на однаковій відстані R від точки $C(x_0, y_0, z_0)$.

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка поверхні, тоді, за формулою відстані між двома точками, маємо:

$$\begin{aligned} CM &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \Rightarrow \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= R^2. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Рівняння (9.2) має назву **канонічного рівняння сфери**, або **сферичної поверхні**, радіуса R із центром у точці (x_0, y_0, z_0) .

Якщо центром сфери є початок координат $O(0, 0, 0)$, то її канонічне рівняння набуває такого вигляду:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

9.2. Різновиди рівнянь площини в просторі

Поняття «площина», як і поняття «пряма», у геометрії є первинним, а тому неозначуваним. Уявлення про площину як геометричну фігуру дає слід, утворений переміщенням паралельно самій собі однієї із двох прямих, що перетинаються, уздовж другої.

З аксіом елементарної геометрії й наслідків із них відомо, що площину – і до того ж тільки одну – визначають:

- а) дві прямі, що перетинаються;
- б) пряма і точка, яка не належить цій прямій;
- в) три точки, які не належать одній прямій, та ін.

Задаймо в просторі декартову прямокутну систему координат $xOyz$ і деяку площину π (рис. 9.1).

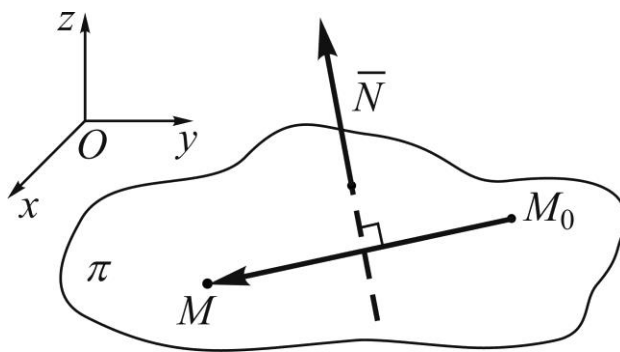


Рис. 9.1. Площина, задана точка на ній і нормальний вектор

1. Рівняння площини, яка проходить через задану точку і має заданий нормальний вектор. Будь-який ненульовий вектор, перпендикулярний площині, називають її **нормальним вектором**, або **вектором нормалі**.

Нехай на площині π задано точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і нормальний вектор $\overline{N} = (A, B, C)$ (див. рис. 9.1). Виберімо на площині довільну точку $M(x, y, z)$ і введемо на розгляд вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

За означенням $\overline{N} \perp \pi$, тоді $\overline{N} \perp \overline{M_0M}$, отже: $\overline{N} \cdot \overline{M_0M} = 0$.

Подаймо скалярний добуток через координати векторів і маємо таке рівняння площини:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (9.3)$$

Рівняння (9.3) називають **рівнянням площини із заданим нормальним вектором**.

2. Загальне рівняння площини та його дослідження. Якщо в співвідношенні (9.3) розкрити дужки, то маємо таке рівняння:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (9.4)$$

де $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ – деяке число (вільний член рівняння).

Рівняння (9.4) називають **загальним рівнянням площини, або рівнянням площини в загальному вигляді**.

Підкреслимо, що загальне рівняння площини є лінійним рівнянням відносно змінних x, y, z – поточних координат точок площини.

Теорема 9.1 (про загальне рівняння площини):

- 1) будь-яку площину можна описати рівнянням (9.4);
- 2) кожне рівняння вигляду (9.4) визначає площину.

Доведення ґрунтується на рівнянні (9.3).

1. Раніше було показано, що площину можна описати рівнянням (9.3), звідси й маємо загальне рівняння (9.4).

2. Нехай задано рівняння (9.4), у якому параметри A, B і C не дорівнюють одночасно нулю ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$). Покладімо, наприклад, $A \neq 0$ і виконаймо тотожні перетворення:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow A\left(x - \frac{-D}{A}\right) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0.$$

Здобуте рівняння є рівнянням площини, що проходить через точку $(-D/A, 0, 0)$ і має нормальний вектор $\vec{N} = (A, B, C)$. ■

Дослідження загального рівняння площини (9.4) передбачає аналіз особливостей розташування площини відносно координатних осей і координатних площин, залежно від того, чи дорівнюють нулю ті чи ті параметри рівняння A, B, C, D . Відповідні висновки зробімо, спираючись на те, як напрямлений нормальний вектор площини. Для стислості записів домовмося вказувати тільки ті параметри, що дорівнюють нулю (решту, за замовчуванням, будемо вважати відмінними від нуля).

Якщо жодне із чисел A, B, C, D не дорівнює нулю, то кажуть, що рівняння (9.4) визначає площину загального положення.

Для інших випадків розташування площини має такі *особливості*:

1) $D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$ – площина проходить через початок координат $O(0, 0, 0)$ ($O \in \pi$);

$$2) \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} By + Cz + D = 0 \Rightarrow \overline{N} \perp Ox \Rightarrow \pi \parallel Ox, \\ Ax + Cz + D = 0 \Rightarrow \overline{N} \perp Oy \Rightarrow \pi \parallel Oy, \\ Ax + By + D = 0 \Rightarrow \overline{N} \perp Oz \Rightarrow \pi \parallel Oz; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} A=D=0 \\ B=D=0 \\ C=D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} By + Cz = 0 \Rightarrow \overline{N} \perp Ox, O \in \pi \Rightarrow Ox \subset \pi, \\ Ax + Cz = 0 \Rightarrow \overline{N} \perp Oy, O \in \pi \Rightarrow Oy \subset \pi, \\ Ax + By = 0 \Rightarrow \overline{N} \perp Oz, O \in \pi \Rightarrow Oz \subset \pi; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} A=B=0 \\ A=C=0 \\ B=C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Cz + D = 0 \Rightarrow \overline{N} \perp Ox, \overline{N} \perp Oy \Rightarrow \pi \parallel xOy, \\ By + D = 0 \Rightarrow \overline{N} \perp Ox, \overline{N} \perp Oz \Rightarrow \pi \parallel xOz, \\ Ax + D = 0 \Rightarrow \overline{N} \perp Oy, \overline{N} \perp Oz \Rightarrow \pi \parallel yOz; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} A=B=D=0 \\ B=C=D=0 \\ A=C=D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Cz = 0 \Rightarrow \overline{N} \perp xOy, O \in \pi \Rightarrow \pi - \text{площина } xOy, \\ Ax = 0 \Rightarrow \overline{N} \perp yOz, O \in \pi \Rightarrow \pi - \text{площина } yOz, \\ By = 0 \Rightarrow \overline{N} \perp xOz, O \in \pi \Rightarrow \pi - \text{площина } xOz. \end{cases}$$

3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки. Складімо рівняння площини, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (рис. 9.2).

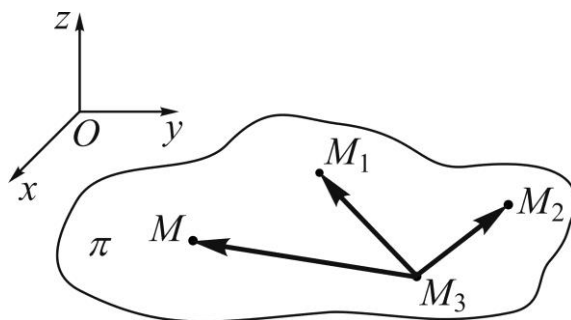


Рис. 9.2. Площина і три задані точки на ній

Виберімо на площині довільну точку $M(x, y, z)$, яка не збігається із жодною із заданих, і введемо на розгляд вектори, початок кожного з яких міститься в одній із заданих точок, наприклад, у точці M_3 :

$$\begin{aligned}\overline{M_3M} &= (x - x_3, y - y_3, z - z_3), \\ \overline{M_3M_1} &= (x_1 - x_3, y_1 - y_3, z_1 - z_3), \\ \overline{M_3M_2} &= (x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3).\end{aligned}$$

Ці вектори є компланарними, бо належать одній площині. За умовою компланарності трьох векторів, визначник 3-го порядку, складений із координат цих векторів, дорівнює нулю, що й визначає шукане рівняння:

$$\begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (9.5)$$

Після розкриття визначника маємо лінійне рівняння відносно поточних координат x, y, z .

Рівняння (9.5) називають **рівнянням площини, що проходить через три задані точки**.



Визначмо рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1, 2, 1)$, $M_2(3, 2, 2)$, $M_3(-2, 0, 1)$.

За співвідношенням (9.5), маємо:

$$\begin{vmatrix} x + 2 & y & z - 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x + 2) \cdot 2 - y \cdot 1 + (z - 1) \cdot (-8) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x - y - 8z + 12 = 0.$$

Зауваження. Якщо точки M_1, M_2, M_3 належать одній прямій, то вектори $\overline{M_3M_1}, \overline{M_3M_2}$ є колінеарними, а, отже, їхні координати є пропорційними:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}. \quad (9.6)$$

Співвідношення (9.6) є **умовою належності трьох точок одній прямій**.

4. Рівняння площини у відрізках на осях. Складімо рівняння площини, яка відтинає на координатних осях Ox , Oy , Oz відрізки a , b , c , відповідно, (рис. 9.3), тобто проходить через точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ і $C(0, 0, c)$.

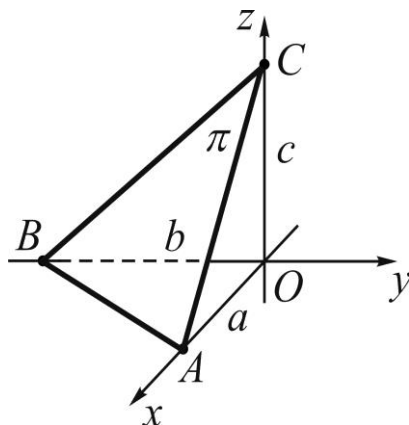


Рис. 9.3. Відрізки, що відтинає площина на осях

Запишімо рівняння площини, що проходить через три задані точки (9.5):

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, дістаньмо:

$$bc(x-a) + acy + abz = 0 \Rightarrow bcx + acy + abz = abc.$$

За умов $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, маємо:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (9.7)$$

Рівняння (9.7) називають **рівнянням площини у відрізках на осях**. Ним зручно користуватися під час побудови площини.

5. Нормальне рівняння площини. Складімо рівняння площини, якщо відомо відстань p від початку координат до площини й кути α , β , γ , які утворює нормальний вектор площини з осями координат (рис. 9.4).

За напрямними косинусами заданих кутів побудуємо одиничний вектор нормалі площини: $\vec{N}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

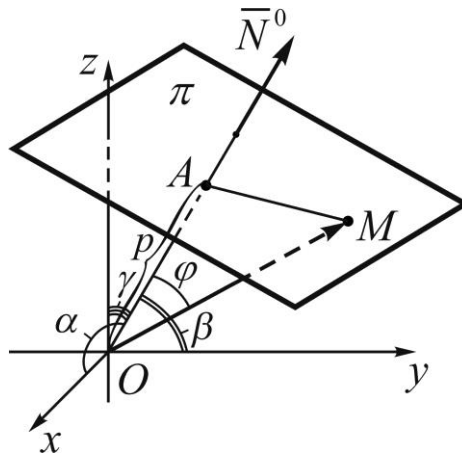


Рис. 9.4. Відрізок p і кути α, β, γ

Виберімо на площині довільну точку $M(x, y, z)$ і розглянемо радіус-вектор цієї точки – вектор $\overline{OM} = (x, y, z)$.

Запишімо скалярний добуток векторів $\overline{OM}$ і $\overline{N}^0$:

$$\overline{OM} \cdot \overline{N}^0 = |\overline{OM}| \cdot |\overline{N}^0| \cdot \cos \varphi.$$

Довжина відрізка $OA = p$ є проєкцією вектора $\overline{OM}$ на напрямок вектора $\overline{N}^0$, тобто $np_{\overline{N}^0} \overline{OM} = p$. З іншого боку, скалярний добуток $\overline{OM} \cdot \overline{N}^0$ теж дає $np_{\overline{N}^0} \overline{OM}$:

$$\overline{OM} \cdot \overline{N}^0 = |\overline{N}^0| \cdot np_{\overline{N}^0} \overline{OM} = p.$$

Звідси

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p,$$

або

(9.8)

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Рівняння (9.8) називають **нормальним рівнянням площини**.

Властивості нормального рівняння площини є аналогічними таким властивостям нормального рівняння прямої на площині:

1. Сума квадратів коефіцієнтів при поточних координатах x, y, z дорівнює одиниці: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

2. Вільний член рівняння є від'ємним ($-p < 0$).

9.3. Основні задачі про площину

1. Взаємне розташування двох площин. Нехай дві площини π_1 і π_2 задано такими загальними рівняннями:

$$\begin{aligned}A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \quad (\pi_1), \\A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \quad (\pi_2).\end{aligned}$$

Тоді вектори $\bar{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ є нормальними векторами площин π_1 і π_2 , відповідно.

Як і для прямої в $\mathbf{R}^2$ (див. п. 7.3), задачу дослідження взаємного розташування двох площин зводять до дослідження системи двох лінійних рівнянь, але із трьома невідомими.

Наведімо умови, за яких площини: 1) є паралельними; 2) збігаються; 3) перерізаються.

1. Якщо площини є *паралельними* ($\pi_1 \parallel \pi_2$), то їхні нормальні вектори є колінеарними, тобто координати цих векторів є пропорційними:

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \right). \quad (9.9)$$

2. Якщо площини *збігаються*, то їх описують еквівалентними рівняннями, тобто рівняннями із пропорційними параметрами:

$$\pi_1 \mid \pi_2 \Leftrightarrow \left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \right), \quad (9.10)$$

де $\mid$ – символ збігу площин.

3. Якщо площини *перерізаються*, то не виконано умову колінеарності нормальних векторів (9.9):

$$\pi_1 \cap \pi_2 = l \Leftrightarrow \left(\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}, \text{ або } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \text{ або } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \right). \quad (9.11)$$

2. Кут між двома площинами. Кутом між двома площинами називають будь-який із двох суміжних кутів між їхніми нормальними векторами (рис. 9.5).

Визначмо кут між двома площинами, які задано рівняннями в загальному вигляді (9.4).

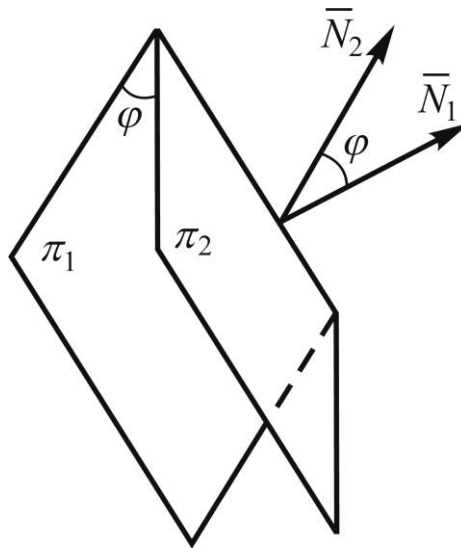


Рис. 9.5. Кут між площинами

За формулою косинуса кута між двома векторами (6.3) для векторів $\bar{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, маємо:

$$\cos \varphi = \cos(\bar{N}_1, \bar{N}_2) = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|}. \quad (9.12)$$

Звідси

$$\varphi = \arccos(\cos \varphi) = \arccos \left(\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right). \quad (9.13)$$

Як наслідок із ф-ли (9.13), маємо умову перпендикулярності площин:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \bar{N}_1 \perp \bar{N}_2 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2 = 0$$

або

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (9.14)$$

У разі розв'язання задач із конкретними даними оперують, зазвичай, рівняннями площини в загальному вигляді, проте здебільшого потрібно виконати перехід до інших видів рівнянь, які складають із загального тотожними перетвореннями.

3. Перехід від загального рівняння площини до рівняння у відрізках.

Нехай усі коефіцієнти загального рівняння площини (9.4) є відмінними від нуля, тобто задано площину загального положення (вона перетинає всі три осі

координат і не проходить через початок координат). Визначмо величини відрізків, які відтинає площина на координатних осях:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 &\Rightarrow Ax + By + Cz = -D \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 &\Rightarrow \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1. \end{aligned}$$

Позначмо: $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$, тоді маємо рівняння площини у такому вигляді (9.7):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

4. Перехід від загального рівняння площини до нормального виконують аналогічно тому, як це робили для прямої в $\mathbf{R}^2$, за допомогою нормувального множника:

$$M = \pm \frac{1}{|\bar{N}|},$$

де $|\bar{N}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ – модуль нормального вектора прямої.

Для рівняння площини структура нормувального множника і його призначення такі самі, як і для прямої:

$$M = \pm \frac{1}{|\bar{N}|}, \text{ де } |\bar{N}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2};$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \frac{A}{\pm |\bar{N}|}x + \frac{B}{\pm |\bar{N}|}y + \frac{C}{\pm |\bar{N}|}z + \frac{D}{\pm |\bar{N}|} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \cos \alpha = \pm \frac{A}{|\bar{N}|}, \cos \beta = \pm \frac{B}{|\bar{N}|}, \cos \gamma = \pm \frac{C}{|\bar{N}|}, p = \mp \frac{D}{|\bar{N}|} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z - p = 0,$$

а знак модуля $|\bar{N}|$ беруть протилежним знаку вільного члена D , бо $p > 0$.

За рівнянням площини в нормальному вигляді можна визначити напрямні косинуси її вектора нормалі та відстань від площини до початку координат.



Розгляньмо на прикладі перехід від рівняння (9.4) до рівняння (9.8):

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z + 14 = 0 &\Rightarrow \left| D > 0 \Rightarrow M = \frac{-1}{\sqrt{4+9+36}} = -\frac{1}{7} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - 2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\cos \alpha = -\frac{2}{7}, \cos \beta = \frac{3}{7}, \cos \gamma = -\frac{6}{7}, p = 2 \right). \end{aligned}$$

Отже, площину розташовано на відстані двох одиниць від початку координат, а її нормальний вектор утворює гострий кут із віссю Oy і тупі кути з осями Ox та Oz , що визначено знаками напрямних косинусів.

5. Відстань від точки до площини. Задача обчислення відстані від довільної фіксованої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини, заданої нормальним рівнянням, є аналогічною (за порядком дій) задачі визначення відстані d від точки до прямої в $\mathbf{R}^2$. Навіть можна скористатися рис. 7.12, вважаючи площину розташованою перпендикулярно площині xOy .

Відповідна формула має такий вигляд:

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|. \quad (9.15)$$

Якщо площину задано загальним рівнянням, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (9.16)$$

Зазначмо, що за ф-лами (9.15) і (9.16) також можна визначити відстань між двома паралельними площинами. Для цього потрібно вибрати будь-яку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на одній із площин і визначити відстань від цієї точки до другої площини.

6. Рівняння бісекторних площин. За аналогією із задачею про побудову рівнянь бісектрис кутів, утворених двома прямими (див. підрозд. 7), розв'яжімо задачу визначення рівнянь *бісекторних площин* – площин, які поділяють навпіл

двогранні кути, утворені заданими площинами. Для цього складімо рівняння площин, точки яких є рівновіддаленими від двох площин π_1 і π_2 , заданих такими загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \quad (\pi_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \quad (\pi_2). \end{aligned}$$

Розв'язання цієї задачі принципово нічим не відрізняється від розв'язання задачі про бісектрису кута між двома прямими на площині.

Нехай $M(X, Y, Z)$ – довільна точка бісекторної площини, а d_1, d_2 – відстані від цієї точки до площин π_1 і π_2 , відповідно, причому $d_1 = d_2$.

За ф-лою (9.16), маємо:

$$\frac{|A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (9.17)$$

Знімаючи в (9.17) символи модулів, маємо рівняння двох бісекторних площин.

У разі розв'язання конкретних задач поточні координати точок площин позначають малими літерами.



Визначмо рівняння бісекторних площин для площин, заданих такими рівняннями: $x + 2y - 2z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 3 = 0$.

Нехай точка $M(x, y, z)$ – довільна точка бісекторної площини, тоді, за ф-лою (9.17), маємо:

$$\frac{|x + 2y - 2z + 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|2x + y + 2z - 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}},$$

звідси дістаньмо рівняння двох бісекторних площин:

$$x + 2y - 2z + 5 = 2x + y + 2z - 3 \Rightarrow x - y + 4z - 8 = 0,$$

$$x + 2y - 2z + 5 = -(2x + y + 2z - 3) \Rightarrow 3x + 3y + 2 = 0.$$

7. Рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно двом неколінеарним векторам. Складімо рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно двом неколінеарним векторам $\bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Сумістімо паралельним перенесенням початки обох векторів у точці M_0 , як показано на рис. 9.6. Тоді вони будуть належати площині π .

Оскільки за аксіомою геометрії через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину й до того ж тільки одну, то задача має єдиний розв'язок.

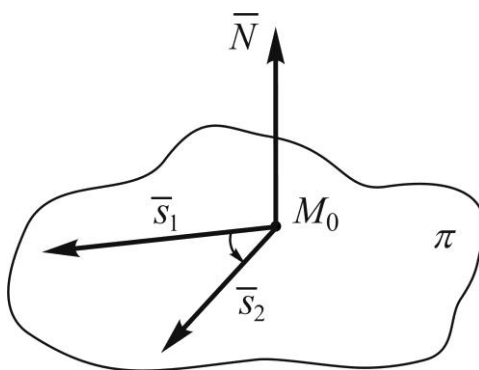


Рис. 9.6. Площина і два неколінеарні вектори

За означенням векторного добутку векторів: $\bar{s}_1 \times \bar{s}_2 \perp \pi$, а це означає, що він визначає один із нормальних векторів площини:

$$\bar{N} = (A, B, C) = \bar{s}_1 \times \bar{s}_2 = \left(\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right). \quad (9.18)$$

Використовуючи рівняння (9.3), запишімо рівняння шуканої площини:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (9.19)$$



Ключові терміни

Рівняння поверхні; рівняння сфери; площина; різновиди рівнянь площини в просторі (із заданим нормальним вектором, загальне, через три точки, у відрізках на осях, нормальне); умова належності трьох точок одній прямій; умова перерізу двох площин (паралельності, збігу, перпендикулярності); кут між площинами; відстань від точки до площини; рівняння бісекторних площин.



Запитання для самоперевірки

1. Що розуміють під рівнянням поверхні в просторі?
2. Яке рівняння називають канонічним рівнянням сфери, які параметри входять до нього та що вони означають?
3. Яке рівняння називають рівнянням площини, що проходить через три задані точки?
4. У чому полягає умова належності трьох точок одній прямій?
5. Яке рівняння називають рівнянням площини у відрізках на осях і що означають його параметри?
6. Який вигляд має нормальне рівняння площини та що означають його параметри?
7. Яке рівняння називають рівнянням площини із заданим нормальним вектором і що означають його параметри?
8. Яке рівняння називають загальним рівнянням площини та що означають його параметри?
9. Як формулюють теорему про рівняння площини в загальному вигляді?
10. Який вигляд має загальне рівняння площини в разі, якщо вона:
 - а) проходить через початок координат;
 - б) є паралельною одній з осей координат;
 - в) проходить через одну з координатних осей;
 - г) є паралельною одній із координатних площин;
 - г) є однією з координатних площин?
11. Як напрямлено відносно осей координат нормальний вектор площини, яка є паралельною координатній площині?
12. За яких умов дві площини, задані загальними рівняннями:
 - а) перерізаються; б) є паралельними; в) збігаються; г) є перпендикулярними?
13. За якою формулою обчислюють кут між двома площинами?
14. Як здійснюють перехід від загального рівняння площини до такого рівняння:
 - а) у відрізках на осях;
 - б) у нормальному вигляді?
15. За якими формулами обчислюють відстань від точки до площини?
16. Що таке «бісекторні площини» та якими рівняннями їх описують?



Тестові завдання до підрозділу 9

1. Площина, задана рівнянням $Ax + By + D = 0$, проходить:

- а) перпендикулярно осі Oz ;
- б) паралельно осі Oz ;
- в) паралельно площині xOy ;
- г) через початок координат.

2. Яке з рівнянь є рівнянням площини, що відтинає на координатних осях Ox , Oy , Oz відрізки $a = 15$, $b = -10$, $c = 6$, відповідно:

- а) $15x - 10y + 6z - 1 = 0$;
- б) $4x - 6y + 5z - 60 = 0$;
- в) $3x - \frac{9}{2}y + 9z - 45 = 0$;
- г) $2x - 3y + 5z - 30 = 0$?

3. Яка пара рівнянь визначає паралельні площини:

- а) $\begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y - 9z + 7 = 0; \end{cases}$
- б) $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0; \end{cases}$
- в) $\begin{cases} 2x + y + z - 6 = 0 \\ 3x - y - z - 2 = 0; \end{cases}$
- г) $\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ 4x - 2y + 2z + 7 = 0? \end{cases}$

4. Яке з наведених рівнянь є рівнянням площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

- а) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$;
- б) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \end{vmatrix} = 0$;
- в) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$;
- г) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$?

5. Площина, задана рівнянням $Ax + D = 0$, проходить:

- а) перпендикулярно осі Oz ;
- б) паралельно площині yOz ;
- в) через початок координат;
- г) паралельно осі Ox .

6. Косинус кута між площинами $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ визначають за такою формулою:

$$\text{а) } \cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) \cdot (A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)};$$

$$\text{б) } \cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 + D_1 \cdot D_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}};$$

$$\text{в) } \cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}};$$

$$\text{г) } \cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{(A_1 + B_1 + C_1) \cdot (A_2 + B_2 + C_2)}.$$

7. Яке з рівнянь є рівнянням площини, що проходить через точку $M(7, -8, 4)$ перпендикулярно осі Oy :

$$\text{а) } y + 8 = 0; \quad \text{б) } 2x - 3z - 2 = 0; \quad \text{в) } 5x + 4y - 3 = 0; \quad \text{г) } y + 2z = 0?$$

8. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначають за такою формулою:

$$\text{а) } d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \text{б) } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\text{в) } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \text{г) } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

9. За якого значення параметра α площини $\pi_1: x - \alpha y + 2z - 5 = 0$ і $\pi_2: 3x - 4y - z + 2 = 0$ є перпендикулярними:

$$\text{а) } \alpha = -0,25; \quad \text{б) } \alpha = 0,25; \quad \text{в) } \alpha = -0,5; \quad \text{г) } \alpha = 0,5?$$

10. Як розташовано вектор $\vec{N}(A, B, C)$ відносно площини, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$:

а) вектор $\vec{N}(A, B, C)$ є паралельним цій площині;

б) вектор $\vec{N}(A, B, C)$ утворює із площиною кут $\varphi = 45^\circ$;

в) вектор $\vec{N}(A, B, C)$ є розташованим у цій площині;

г) вектор $\vec{N}(A, B, C)$ є перпендикулярним до цієї площини?

Література: [2 – 5; 9 – 12; 15; 23].

10. Пряма в просторі.

Взаємне розташування прямої та площини.

Поверхні 2-го порядку

Основні питання:

- 10.1. Різновиди рівнянь прямої.
- 10.2. Основні задачі про пряму в просторі.
- 10.3. Пряма і площина: аналіз взаємного розташування.
- 10.4. Поняття про поверхні 2-го порядку.

10.1. Різновиди рівнянь прямої

1. Загальне рівняння прямої. У стереометрії лінію визначають як множину спільних точок двох поверхонь. Наприклад, пряму в просторі розглядають як лінію перерізу двох площин (рис. 10.1).

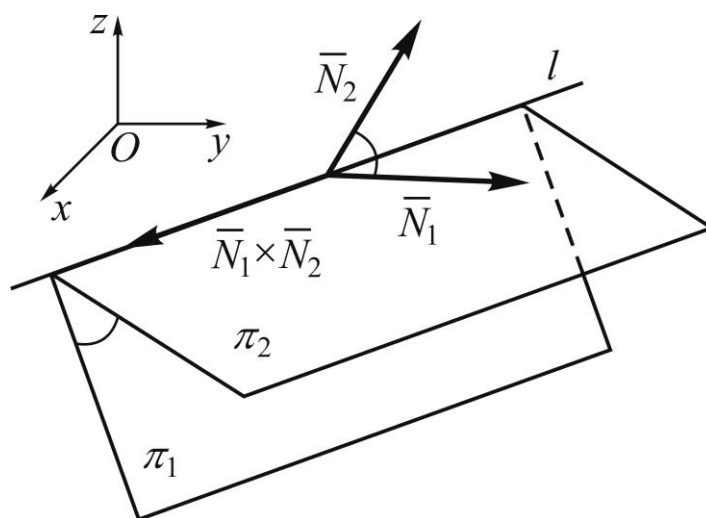


Рис. 10.1. Площини π_1 , π_2 і пряма l

Загальним рівнянням прямої в просторі називають сумісну систему двох рівнянь першого степеня, якими задають такі площини:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\pi_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\pi_2), \end{cases} \quad (10.1)$$

де нормальні вектори площин $\bar{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ не є колінеарними.

Наприклад, можна стверджувати, що така система рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 10 = 0, \\ 3x - 6y + 10z + 10 = 0, \end{cases}$$

описує пряму, оскільки нормальні вектори заданих площин $\bar{N}_1 = (2, -3, 5)$ та $\bar{N}_2 = (3, -6, 10)$ не є колінеарними:

$$\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{-6} = \frac{5}{10}.$$

2. Параметричне і канонічне рівняння прямої. Будь-який ненульовий вектор, колінеарний прямій, називають **напрямним вектором** прямої. Складемо рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямний вектор $\bar{s} = (m, n, p)$. Для цього виберімо на прямій довільну точку $M(x, y, z)$ і пов'яжімо з нею вектор $\overline{M_0M}$ (рис. 10.2): $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

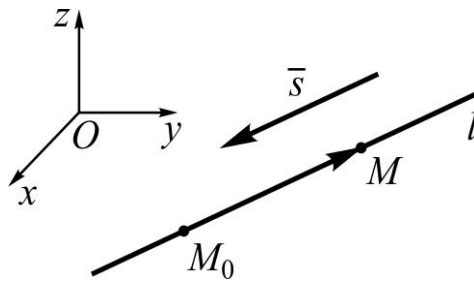


Рис. 10.2. Точка на прямій і напрямний вектор

Вектори $\overline{M_0M}$ і $\bar{s} = (m, n, p)$ є колінеарними, тобто $\overline{M_0M} = t \cdot \bar{s}$, де t – числовий параметр ($t \in \mathbf{R}$), або в координатах:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t \cdot (m, n, p).$$

Звідси

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \quad (10.2)$$

Рівняння (10.2) називають **параметричним рівнянням прямої**.

Визначмо параметр t із (10.2):

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \quad t = \frac{y - y_0}{n}, \quad t = \frac{z - z_0}{p}.$$

Звідси маємо:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (10.3)$$

Рівняння (10.3) називають **канонічним рівнянням** прямої.

Нехай напрямним вектором прямої l є одиничний вектор $\bar{s}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, де $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – напрямні косинуси цього вектора.

Тоді, згідно з рівнянням (10.3), маємо:

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}. \quad (10.4)$$

Якщо в рівнянні (10.3) один зі знаменників дробів дорівнює нулю, то відповідний чисельник теж має дорівнювати нулю (щоб дріб не втрачав сенс). Із геометричного погляду це означає, що напрямний вектор, а отже, і сама пряма є перпендикулярними відповідній осі координат.

Наприклад, якщо пряму l задано рівнянням $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$, то:

$$\bar{s} = (0, n, p) \perp O_x \Rightarrow l \perp O_x \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = 0 & (\pi_1), \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} & (\pi_2). \end{cases} \quad (10.5)$$

Кожне з рівнянь цієї системи визначає площину, а система рівнянь – пряму, яка є перпендикулярною осі O_x .

Якщо ж у рівнянні (10.3) два із трьох знаменників дробів дорівнюють нулю, то напрямний вектор і сама пряма є перпендикулярними двом осям координат, тобто одній із координатних площин.

Наприклад, якщо пряму l задано рівнянням $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{p}$, то:

$$\bar{s} = (0, 0, p) \perp xOy \Rightarrow l \perp xOy \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = 0 & (\pi_1), \\ y - y_0 = 0 & (\pi_2). \end{cases} \quad (10.6)$$

Пряма, яку визначено системою (10.6), є паралельною осі Oz як лінія перерізу двох площин, перпендикулярних до осей O_x та O_y , відповідно, і проходить через точку (x_0, y_0, z_0) .

Інші випадки розташування прямої розглядають аналогічно.



Установімо, як розташовано в просторі пряму, яку описано канонічним

рівнянням: $\frac{x-2}{0} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{0}$, і складімо її параметричне рівняння.

Пряма проходить через точку $(2, -5, 1)$ і має напрямний вектор $\bar{s} = (0, 3, 0)$, тобто вона є перпендикулярною площині xOz (або, що те саме, паралельною осі Oy). Параметричне рівняння цієї прямої запишемо, згідно з рівнянням (10.2):

$$\begin{cases} x = 2 + 0 \cdot t, \\ y = -5 + 3 \cdot t, \\ z = 1 + 0 \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -5 + 3 \cdot t, \\ z = 1. \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Складімо рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 10.3).

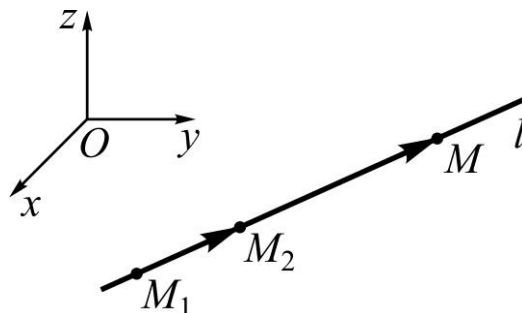


Рис. 10.3. Пряма і дві задані точки на ній

Виберімо на прямій довільну точку $M(x, y, z)$ і пов'яжімо з нею вектор $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. Візьмімо за напрямний вектор прямої l вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, що цілком погоджено з означенням напрямного вектора. Вектори $\overline{M_1M}$ і $\overline{M_1M_2}$ є колінеарними, тому їхні координати є пропорційними:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (10.7)$$

Рівняння (10.7) називають **рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

10.2. Основні задачі про пряму в просторі

1. Зведення загального рівняння прямої до канонічного вигляду.

Нехай пряму лінію l в просторі задано загальним рівнянням (10.1):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 (\pi_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 (\pi_2). \end{cases}$$

Аналізуючи канонічне рівняння прямої (10.3):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

доходимо висновку, що для переходу від загального рівняння прямої до канонічного треба визначити:

- а) координати будь-якої точки (x_0, y_0, z_0) , що належить прямій;
- б) координати напрямного вектора $\bar{s} = (m, n, p)$ прямої.

Оскільки система рівнянь (10.1) визначає пряму, то вона має безліч розв'язків. Виберімо будь-який відмінний від нуля мінор 2-го порядку основної матриці системи, нехай ним буде мінор, складений із коефіцієнтів при невідомих x, y . Надаймо невідомій z довільного значення $z = z_0$, наприклад $z = 0$, визначимо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1, \\ A_2x + B_2y = -D_2, \end{cases} \quad (10.8)$$

розв'язком якої є точка $(x_0, y_0, 0)$.

Для визначення напрямного вектора $\bar{s} = (m, n, p)$ прямої зважаймо на те, що нормальні вектори площин π_1 і π_2 є перпендикулярними до прямої (див. рис. 10.1), тому за вектор $\bar{s}$ візьмімо векторний добуток $\bar{N}_1 \times \bar{N}_2$:

$$\bar{s} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}_m \cdot \bar{i} - \underbrace{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}_n \cdot \bar{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}_p \cdot \bar{k}. \quad (10.9)$$

Отже, канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, 0)$, із напрямним вектором $\bar{s} = (m, n, p)$ має такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z}{p}.$$



Зведемо загальне рівняння прямої:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0, \\ 2x - 4y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

до канонічного вигляду.

Обчислимо мінори 2-го порядку основної матриці системи та виберімо серед них будь-який, відмінний від нуля. Таким є, наприклад, мінор, складений із коефіцієнтів при невідомих y і z :

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 8 = 6 \neq 0.$$

Надаймо вільній невідомій x значення, що дорівнює нулю: $x = x_0 = 0$ – і обчислимо y_0, z_0 як розв’язок системи:

$$\begin{cases} -2y + 2z = 0, \\ -4y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 1/3, \\ z_0 = 1/3. \end{cases}$$

Отже, точка $M_0(0, 1/3, 1/3)$ належить прямій.

Визначмо напрямний вектор такої прямої:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \bar{N}_1 = (1, -2, 2) \\ \bar{N}_2 = (2, -4, 1) \end{matrix} \Rightarrow \bar{s} = (m, n, p) = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (6, 3, 0). \end{aligned}$$

Отже, канонічне рівняння прямої має такий вигляд:

$$\frac{x}{6} = \frac{y - 1/3}{3} = \frac{z - 1/3}{0}.$$

2. Взаємне розташування прямих у просторі. Нехай прямі l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad (l_1), \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \quad (l_2). \quad (10.10)$$

Наведімо умови, за яких ці прямі: а) є паралельними; б) збігаються; в) перетинаються; г) перехрещуються:

а) прямі l_1 та l_2 є *паралельними*, якщо вони не мають спільних точок і їхні напрямні вектори є колінеарними:

$$\left(\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}, \quad l_1 \cap l_2 = \emptyset \right) \Rightarrow l_1 \parallel l_2; \quad (10.11)$$

б) прямі l_1 та l_2 *збігаються*, якщо вони задовольняють умову паралельності та мають спільну точку:

$$\left(\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}, \quad l_1 \cap l_2 \neq \emptyset \right) \Rightarrow l_1 | l_2, \quad (10.12)$$

де $|$ – символ збігу прямих.

Для з'ясування того, чи мають прямі спільну точку, треба перевірити, чи задовольняє точка, яка належить одній із прямих, рівняння іншої прямої;

в) прямі l_1 та l_2 *перетинаються*, якщо вони належать одній площині та їхні напрямні вектори не є колінеарними.

Умовою належності двох прямих одній площині є компланарність трьох векторів (рис. 10.4): напрямних векторів $\bar{s}_1$ і $\bar{s}_2$ заданих прямих та вектора $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$:

$$(\bar{s}_1 \times \bar{s}_2) \cdot \overline{M_1M_2} = 0.$$

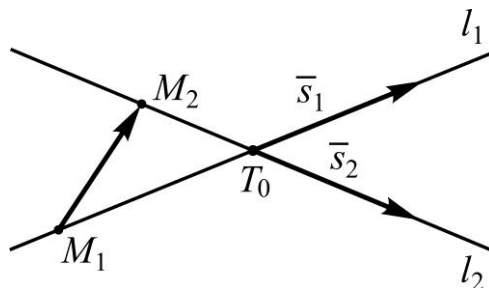


Рис. 10.4. Прямі l_1 , l_2 , їхні напрямні вектори та точка перетину T_0

Отже, маємо умову перетину двох прямих:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \bar{s}_2 \neq \lambda \bar{s}_1 \Rightarrow l_1 \cap l_2 = T_0; \quad (10.13)$$

г) прямі l_1 та l_2 є *перехресними* (такими, через які неможливо провести площину), якщо вектори $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\overline{M_1M_2}$ не є компланарними, тобто визначник в умові (10.13) не дорівнює нулю.



Установімо взаємне розташування прямих, заданих такими рівняннями:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1} \quad (l_1), \quad \frac{x-7}{6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{2} \quad (l_2).$$

За заданими канонічними рівняннями прямих установімо їхні напрямні вектори: $\bar{s}_1 = (3, 2, 1)$, $\bar{s}_2 = (6, 4, 2)$. Координати цих векторів є пропорційними: $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, тому вектори $\bar{s}_1$ і $\bar{s}_2$ є колінеарними.

Перевірмо, чи мають прямі спільну точку. Берімо на прямій l_1 точку $M_1(1, -5, 0)$ і підставмо її координати в рівняння прямої l_2 :

$$\frac{1-7}{6} = \frac{-5+1}{4} = \frac{0-2}{2} = -1.$$

Оскільки умови (10.12) виконано, то задані прямі l_1 і l_2 є збіжними.



З'ясуємо, чи перетинаються такі прямі:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{-1} \quad (l_1), \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{3} \quad (l_2).$$

За канонічним рівнянням кожної прямої встановлюймо її напрямний вектор і точку на ній:

$$l_1: \quad \bar{s}_1 = (3, 2, -1), \quad M_1(x_1, y_1, z_1) = M_1(-1, 5, -2);$$

$$l_2: \quad \bar{s}_2 = (4, 0, 3), \quad M_2(x_2, y_2, z_2) = M_2(1, 0, -2).$$

Оскільки визначник із (10.13) не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 13 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 77 \neq 0,$$

то прямі є перехресними, отже, вони не перетинаються.

3. Кут між двома прямими в просторі. Як і для прямої на площині, **кутом між прямими** у просторі називають будь-який із суміжних кутів між їхніми напрямними векторами.

1. Нехай прямі l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad (l_1), \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \quad (l_2).$$

За формулою косинуса кута між двома векторами (6.13), маємо:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}, \quad (10.14)$$

звідси $\varphi = \arccos(\cos \varphi)$ – кут між прямими l_1 і l_2 .

Як наслідок із (10.14), маємо *критерій перпендикулярності прямих*:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (10.15)$$

2. Обчислімо кут між прямими l_1 і l_2 , заданими загальними рівняннями:

$$\begin{cases} A_1^{(1)}x + B_1^{(1)}y + C_1^{(1)}z + D_1^{(1)} = 0 \\ A_2^{(1)}x + B_2^{(1)}y + C_2^{(1)}z + D_2^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (l_1); \quad \begin{cases} A_1^{(2)}x + B_1^{(2)}y + C_1^{(2)}z + D_1^{(2)} = 0 \\ A_2^{(2)}x + B_2^{(2)}y + C_2^{(2)}z + D_2^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (l_2).$$

Визначмо напрямні вектори обох прямих за ф-лою (10.9):

$$\bar{s}_1 = \bar{N}_1^{(1)} \times \bar{N}_2^{(1)} = (m_1, n_1, p_1), \quad \bar{s}_2 = \bar{N}_1^{(2)} \times \bar{N}_2^{(2)} = (m_2, n_2, p_2),$$

і скористаймося ф-лою (10.14).

Отже,

$$\varphi = \arccos \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|}. \quad (10.16)$$



Обчислімо кут між такими прямими:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0; \\ x + 3y - z + 1 = 0; \end{cases} (l_1); \quad \begin{cases} x - 3y + 5z - 2 = 0; \\ 5x + 3z - 4 = 0. \end{cases} (l_2).$$

Визначмо напрямні вектори прямих:

$$\bar{s}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-13, 8, 11), \quad \bar{s}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-9, 22, 15).$$

За ф-лою (10.14), маємо:

$$\cos \varphi = \frac{13 \cdot 9 + 8 \cdot 22 + 11 \cdot 15}{\sqrt{(-13)^2 + 8^2 + 11^2} \cdot \sqrt{(-9)^2 + 22^2 + 15^2}} = \frac{458}{\sqrt{354} \cdot \sqrt{790}} \approx 0,8661 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos 0,8661 \approx 30^\circ.$$

4. Відстань між паралельними прямими. Обчислімо відстань d між паралельними прямими l_1 і l_2 :

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \quad (l_1); \quad \frac{x - x_2}{m} = \frac{y - y_2}{n} = \frac{z - z_2}{p} \quad (l_2). \quad (10.17)$$

Перенесімо початок напрямного вектора $\bar{s} = (m, n, p)$ прямих у точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і введемо на розгляд вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, як показано на рис. 10.5.

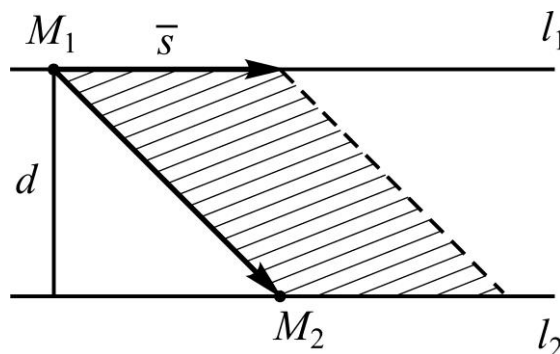


Рис. 10.5. Напрямний вектор і точки на прямих

Тоді, з одного боку, площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{s}$ і $\overline{M_1M_2}$, як на сторонах, дорівнює модулю векторного добутку $\bar{h} = \bar{s} \times \overline{M_1M_2}$, а з іншого – це добуток $|\bar{s}| \cdot d$, тобто $|\bar{h}| = |\bar{s}| \cdot d$.

Звідси визначмо:

$$d = \frac{|\bar{h}|}{|\bar{s}|} = \frac{|\bar{s} \times \overline{M_1M_2}|}{|\bar{s}|}. \quad (10.18)$$

Потім визначмо координати вектора $\bar{h}$ і його модуль:

$$\bar{h} = (h_x, h_y, h_z) = \bar{s} \times \overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ m & n & p \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\bar{s} \times \overline{M_1M_2}| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2},$$

$$\text{де } h_x = \begin{vmatrix} n & p \\ y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}, \quad h_y = -\begin{vmatrix} m & p \\ x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}, \quad h_z = \begin{vmatrix} m & n \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Остаточно ф-ла (10.18) набуває такого вигляду:

$$d = \frac{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (10.19)$$

Зауваження. Формули (10.18) і (10.19) є разом із тим формулами для визначення відстані від точки до прямої в $\mathbf{R}^3$, якщо вважати, що задана точка належить допоміжній прямій, яка є паралельною цій прямій.

5. Кут і відстань між перехресними прямими. Нехай прямі l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} (l_1); \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} (l_2).$$

Для обчислення кута між l_1 і l_2 сумістімо паралельним перенесенням початки напрямних векторів $\bar{s}_1$ та $\bar{s}_2$ і застосуємо ф-лу (10.14).

Далі визначимо відстань між прямими. Як відомо із стереометрії, під **відстанню між двома перехресними прямими** розуміють довжину їхнього спільного перпендикуляра.

Щоб побудувати перпендикуляр, спільний для двох перехресних прямих (його довжину позначмо через d), треба через пряму l_2 провести площину π_2 , паралельну прямій l_1 , після чого з довільної точки прямої l_1 провести перпендикуляр до площини π_2 (рис. 10.6).

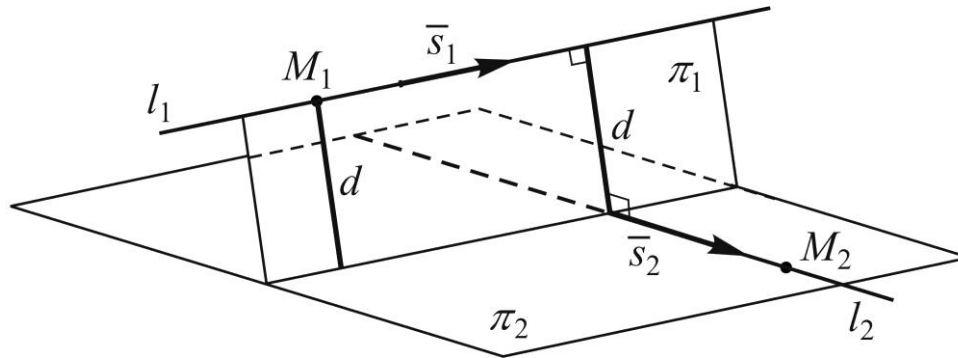


Рис. 10.6. Перехресні прямі l_1 і l_2

Отже, обчислення відстані d між перехресними прямими зведено до реалізації двох кроків:

1) складаймо рівняння (9.19) для площини π_2 за відомими напрямними векторами $\bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ і точкою $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A(x - x_2) - B(y - y_2) + C(z - z_2) = 0, \quad (10.20)$$

$$\text{де } A = \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix};$$

2) обчислюймо відстань від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до площини π_2 :

$$d = \frac{|A(x_1 - x_2) - B(y_1 - y_2) + C(z_1 - z_2)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (10.21)$$

Чисельник у ф-лі (10.21) є модулем мішаного добутку векторів $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ і $\overline{M_1 M_2}$: $\left| (\bar{s}_1 \times \bar{s}_2) \cdot \overline{M_1 M_2} \right|$, а знаменник – модулем векторного добутку напрямних векторів прямих: $\left| \bar{s}_1 \times \bar{s}_2 \right|$.

Отже, маємо стислий запис ф-ли (10.21):

$$d = \frac{\left| (\bar{s}_1 \times \bar{s}_2) \cdot \overline{M_1 M_2} \right|}{\left| \bar{s}_1 \times \bar{s}_2 \right|}. \quad (10.22)$$

10.3. Пряма і площина: аналіз взаємного розташування

1. Взаємне розташування прямої та площини в просторі. Нехай пряму l і площину π задано, відповідно, рівняннями:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (l); \quad Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\pi). \quad (10.23)$$

Існують три можливі випадки їхнього взаємного розташування. Пряма l і площина π мають:

- 1) одну спільну точку T , тобто l і π перетинаються ($l \cap \pi = T$);
- 2) порожню множину спільних точок, тобто l і π є паралельними ($l \parallel \pi$);
- 3) нескінченну множину спільних точок, тобто пряма l належить площині π ($l \subset \pi$).

Опишімо ці випадки в алгебраїчній формі. Для цього виконаймо перехід до параметричної форми задання рівняння прямої та зведемо сумісний аналіз рівнянь l і π до аналізу одного рівняння з однією змінною – параметром t :

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases} \Rightarrow A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0.$$

Звідси маємо рівняння відносно параметра t :

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \quad (10.24)$$

Проаналізуємо рівняння (10.24):

1) якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, то параметр t має єдине значення:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp},$$

тобто пряма l і площина π мають одну спільну точку T ;

2) якщо $Am + Bn + Cp = 0$, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то рівняння (10.24) не має розв'язку, тобто пряма l є паралельною площині π ;

3) якщо $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то рівняння (10.24) має безліч розв'язків і параметр t може бути будь-яким дійсним числом, тобто пряма l належить площині π .

Зауваження. У разі перетину прямої та площини співвідношення (10.24) дає змогу легко визначити координати точки T перетину l з π , а саме:

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \quad (10.25)$$

2. Кут між прямою і площиною. Визначмо кут φ між прямою l і площиною π , які задано рівняннями (10.23).

Кутом між прямою і площиною називають будь-який із суміжних кутів, що утворені прямою і її проєкцією на площину.

На рис. 10.7 показано $\varphi < \pi/2$, тоді $\angle(\bar{N}, \bar{s}) = \pi/2 - \varphi$.

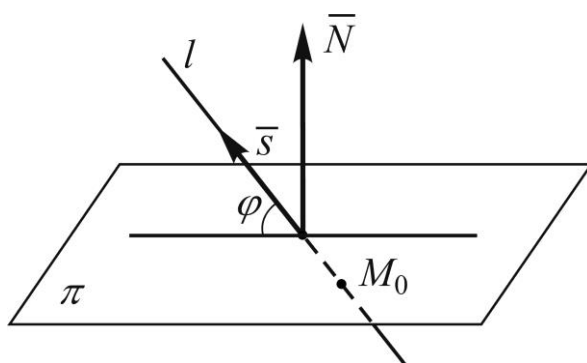


Рис. 10.7. Кут між прямою і площиною

У загальному випадку, залежно від того, який кут вибрано, гострий чи тупий, і як напрямлені вектори $\bar{N}$ (нормальний вектор площини) і $\bar{s}$ (напрямний вектор прямої), кут між ними є одним із кутів: $\pi/2 - \varphi$, $\pi/2 + \varphi$.

Для косинуса кута між двома векторами маємо:

$$\cos(\overline{N}, \overline{s}) = \frac{\overline{N} \cdot \overline{s}}{|\overline{N}| \cdot |\overline{s}|}.$$

За формулою зведення $\cos(\pi/2 \mp \varphi) = \pm \sin \varphi$, тому $|\cos(\pi/2 \mp \varphi)| = \sin \varphi$.

Отже,

$$\sin \varphi = \frac{|\overline{N} \cdot \overline{s}|}{|\overline{N}| \cdot |\overline{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad (10.26)$$

звідси визначаймо шуканий кут: $\varphi = \arcsin(\sin \varphi)$.

Якщо пряму задано рівнянням у загальному вигляді (10.1), то в співвідношення (10.26), замість m, n, p , слід підставити відповідні координати векторного добутку нормальних векторів площин із рівняння (10.1).

3. Умови перпендикулярності й паралельності прямої та площини.

Нехай пряму l і площину π задано рівняннями (10.23).

Відповідно до взаємного розташування нормального вектора площини $\overline{N} = (A, B, C)$ і напрямного вектора прямої $\overline{s} = (m, n, p)$, наведено умови, за яких пряма і площина: 1) є перпендикулярними; 2) є паралельними (рис. 10.8):

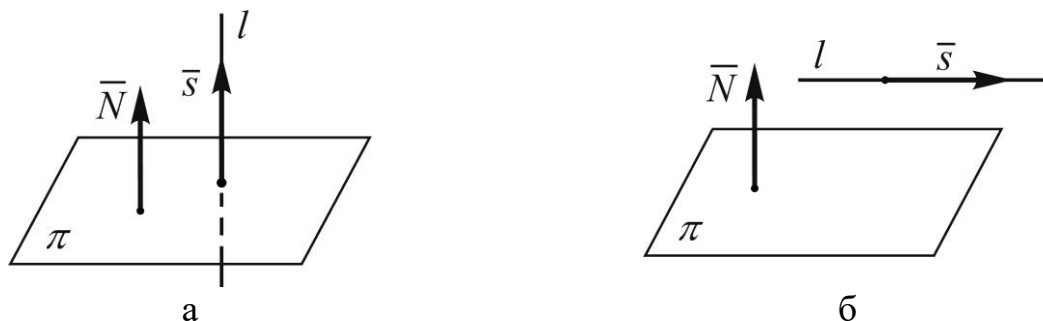


Рис. 10.8. Пряма і площина:

а) є перпендикулярними; б) є паралельними

1) пряма є *перпендикулярною* площині (рис. 10.8а), якщо вектори $\overline{s}$ і $\overline{N}$ є колінеарними:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \Leftrightarrow l \perp \pi;$$

2) пряма є *паралельною* площині (рис. 10.8б), якщо вектори $\overline{s}$ і $\overline{N}$ є перпендикулярними:

$$Am + Bn + Cp = 0 \Leftrightarrow l \parallel \pi.$$

10.4. Поняття про поверхні 2-го порядку

1. Загальне рівняння поверхні другого порядку, основні означення.

Поверхнею 2-го порядку називають множину точок простору $\mathbf{R}^3$, що описують рівнянням $\Phi(x, y, z) = 0$, ліва частина якого є многочленом другого степеня щодо змінних x, y, z :

$$Ax^2 + Bxy + Cxz + Dy^2 + Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0, \quad (10.27)$$

де $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ – коефіцієнти рівняння при поточних змінних x, y, z ;

L – вільний член рівняння,

і принаймні один із коефіцієнтів A, B, C, D, E, F є відмінним від нуля ($A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0$).

Рівняння (10.27) називають **загальним рівнянням** поверхні 2-го порядку. Вигляд поверхні та її розташування відносно координатних площин залежать від значень параметрів у рівнянні (10.27).

Якщо не існує жодної точки $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, яка задовольняє рівняння (10.27), то кажуть, що воно визначає **уявну поверхню**.

Поверхню називають **виродженою**, якщо її загальне рівняння описує точку, одну або дві площини. Наприклад:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \text{ – рівняння точки в } \mathbf{R}^3;$$

$$z^2 - c^2 = 0 \text{ – рівняння двох площин, паралельних } xOy \text{ (якщо } c \neq 0);$$

$$x^2 - y^2 = 0 \text{ – рівняння двох бісекторних площин.}$$

У разі вивчення поверхонь 2-го порядку розв'язують дві взаємно обернені **основні задачі**:

1) за відомими геометричними властивостями точок поверхні потрібно скласти рівняння відповідної поверхні;

2) за відомим рівнянням поверхні потрібно встановити геометричні властивості її точок.

Прикладом розв'язання першої основної задачі є побудова рівняння сфери (9.2). Рівняння інших найважливіших поверхонь розглянуто далі.

2. Циліндричні й конічні поверхні. Циліндричною поверхнею, або просто **циліндром**, називають поверхню, яка утворена рухом прямої, що переміщується паралельно самій собі вздовж фіксованої лінії (кривої). Рухому пряму

називають **твірною**, а фіксовану криву – **напрямною** циліндричної поверхні. Напрямною може бути будь-яка зімкнена чи розімкнена лінія.

Циліндром 2-го порядку називають циліндричну поверхню, напрямною якої є крива 2-го порядку: еліпс (коло), гіпербола, парабола. Назва циліндра походить від назви його напрямної. Якщо твірна є паралельною одній із координатних осей, а напрямна лежить у площині, перпендикулярній цій осі, то рівняння циліндра збігається з рівнянням напрямної. У разі геометричної інтерпретації зображають, зазвичай, частину поверхні між двома площинами, перпендикулярними твірній (рис. 10.9). Наприклад:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – рівняння еліптичного циліндра (рис. 10.9а);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – рівняння гіперболічного циліндра (рис. 10.9б);}$$

$$x^2 = 2py \text{ – рівняння параболічного циліндра (рис. 10.9в).}$$

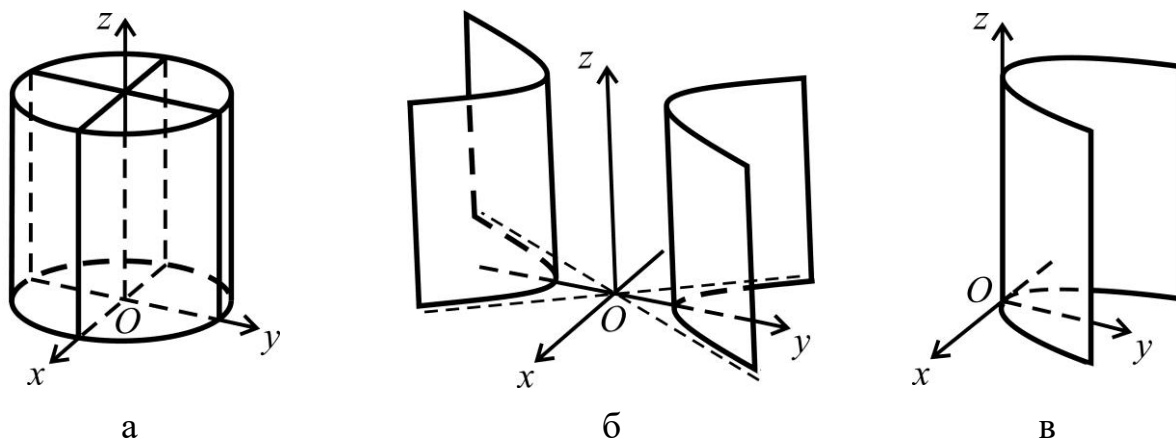


Рис. 10.9. Циліндри 2-го порядку:
а) еліптичний; б) гіперболічний; в) параболічний

Відсутність змінної z у наведених рівняннях означає, що апліката точок поверхні може бути будь-яким дійсним числом, бо коефіцієнт при змінній z у рівняннях слід уважати таким, що дорівнює нулю. Наприклад, рівняння параболічного циліндра можна записати в такому вигляді:

$$x^2 = 2py + 0 \cdot z.$$

Отже, твірна циліндра є паралельною осі, що збігається зі змінною, якої немає в рівнянні поверхні.

Якщо в рівняннях еліпса і гіперболи покласти $a = b$, то маємо, відповідно, *круговий і рівносторонній гіперболічний циліндри*.

Конічною поверхнею, або **конусом**, називають поверхню, утворену рухом прямої, що проходить через задану точку, уздовж фіксованої кривої. Рухому прямую називають **твірною**, задану точку – **вершиною**, а фіксовану криву – **напрямною** конуса. Якщо твірною є крива 2-го порядку, то поверхню називають **конусом 2-го порядку**.

На рис. 10.10 зображено конус 2-го порядку, який описують рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

із вершиною в початку координат, напрямною якого є еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ у площині $z = c$ ($c \neq 0$).

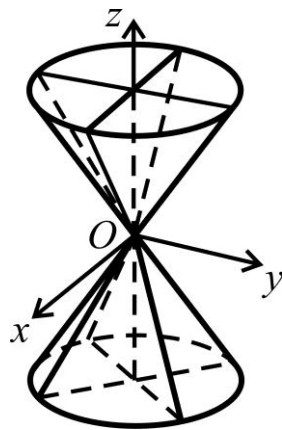


Рис. 10.10. Конус 2-го порядку

Поверхня є симетричною відносно початку координат, а координатні площини є її площинами симетрії. Множину точок поверхні з невід'ємними (недодатними) аплікатами називають **верхньою (нижньою) порожниною** конуса.

Якщо напрямною конуса є коло ($a = b$), то його називають **круговим**.

Еліпс, параболу, гіперболу – криві 2-го порядку – можна створити перерізом прямого кругового конуса площинами, які не проходять через його вершину (рис. 10.11), а саме:

якщо площина перерізає лише одну порожнину конуса і є непаралельною жодній із його твірних, то кривою перерізу є еліпс; у частинному випадку – коло;

якщо січна площина є паралельною одній із твірних конуса, то результатом перерізу є парабола;

якщо площина перерізу перерізає обидві порожнини конуса, то кривою перерізу є гіпербола.

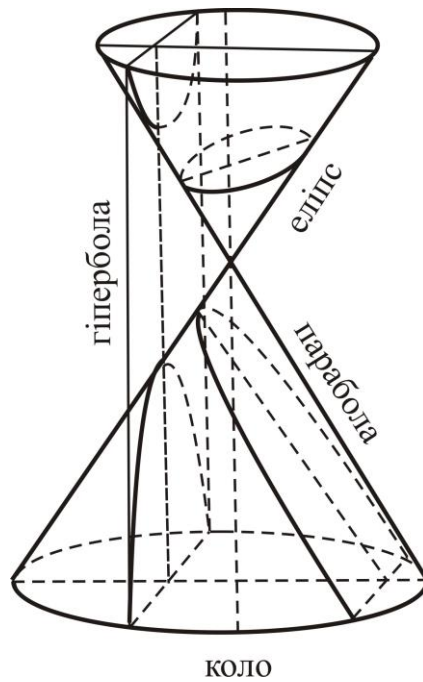


Рис. 10.11. Конічні перерізи

3. Дослідження форми поверхонь 2-го порядку методом перерізів.

Наведені раніше рівняння поверхонь 2-го порядку було складено за геометричними властивостями їхніх точок, відповідно до означень поверхонь. Для розв'язання оберненої задачі (за цим рівнянням поверхні визначити її вигляд) застосовують **метод перерізів**, сенс якого полягає в такому:

1) *аналізують* поверхню, установлюючи за її рівнянням лінії перерізу (перерізи) цієї поверхні координатними площинами та площинами, паралельними їм;

2) *синтезують* визначені на попередньому кроці геометричні властивості поверхні, що дозволяє уявити вигляд поверхні та зобразити її.

Продемонструймо застосування методу перерізів до дослідження рівняння еліптичного параболоїду:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0). \quad (10.28)$$

Дослідження передбачає такі кроки:

1) *визначмо* лінії перерізу поверхні, заданої рівнянням (10.28), із площиною xOy та площинами, паралельними їй ($z = h$, $h = \text{const}$):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ z = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases} \quad (10.29)$$

Якщо:

а) $h = 0$, то рівняння (10.29) задовольняють лише координати точки $(0, 0, 0)$, тобто площина $z = 0$ є дотичною до цієї поверхні;

б) $h < 0$, то маємо уявну лінію, оскільки площини $z = h < 0$ задану поверхню не перерізають;

в) $h > 0$, то рівняння (10.29) можна записати в такому вигляді:

$$\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1 \quad (z = h),$$

тобто перерізами поверхні площинами, паралельними xOy , є еліпси, півосі яких збільшуються разом зі збільшенням h (рис. 10.12);

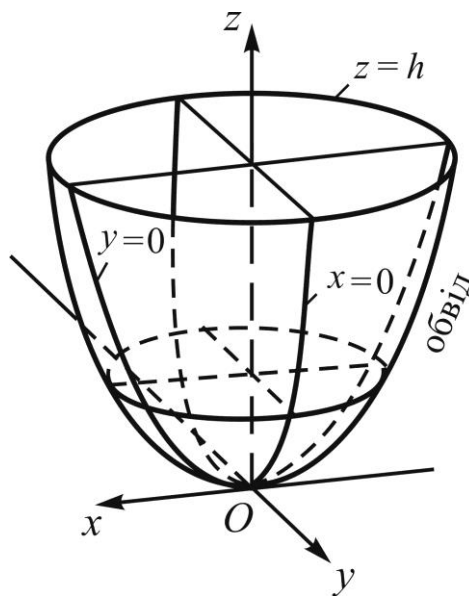


Рис. 10.12. Еліптичний параболоїд

2) *установімо* лінію перерізу поверхні із площиною yOz :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2qz, \\ x = 0. \end{cases}$$

Здобуте рівняння є рівнянням параболі, розташованої в площині yOz , із віссю симетрії Oz ;

3) *визначмо* (аналогічним способом) переріз поверхні площиною $y = 0$: це парабола, яку описують рівнянням $x^2 = 2pz$, що розташована в площині xOz (із віссю симетрії Oz);

4) *зображаймо*, згідно з розглянутим раніше, відповідні лінії (рис. 10.12), що дає змогу скласти уявлення про форму досліджуваної поверхні. Насамкінець накреслюймо **обвід** – лінію, яка є множиною точок дотику до поверхні прямих, паралельних вибраному напрямку проєктування.

Аналогічно виконують побудову параболоїда $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = -2z$, перерізами якого є параболи з гілками, напрямленими донизу, і параболоїдів, осі яких збігаються з координатними осями Ox , Oy . Рівняння таких поверхонь визначають з розглянутого раніше за допомогою циклічного переставлення змінних.

Поверхнею обертання називають поверхню, для якої кожний із її перерізів площиною, перпендикулярною одній із координатних осей або довільній осі l , є колом. Круговий конус і круговий циліндр є прикладами таких поверхонь: конус утворюється обертанням навколо осі Oz прямої, яка проходить через початок координат, а циліндр – прямою, паралельною осі Oz , причому прямі не належать площині, перпендикулярній осі обертання.

Рівняння поверхонь, які симетричні відносно координатних осей або/і координатних площини, називають **канонічними**, або **стандартними**.

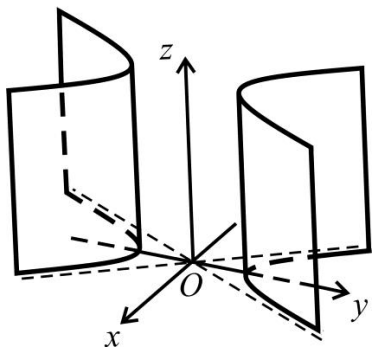
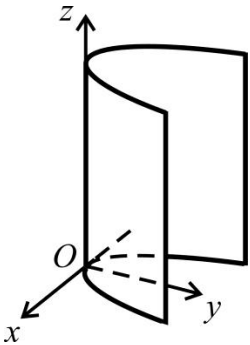
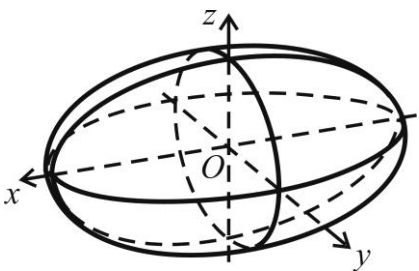
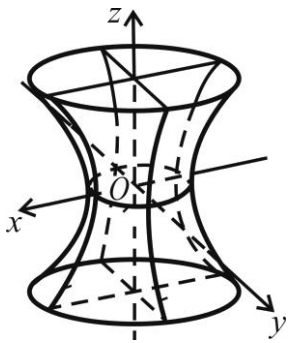
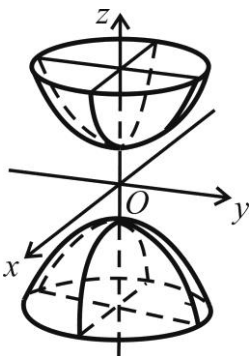
Насамкінець зазначмо, що наведені відомості широко використовують в інтегральному численні функцій двох або більшої кількості змінних, і є фундаментом для більш глибокого вивчення теорії поверхонь 2-го порядку.

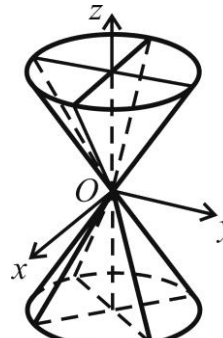
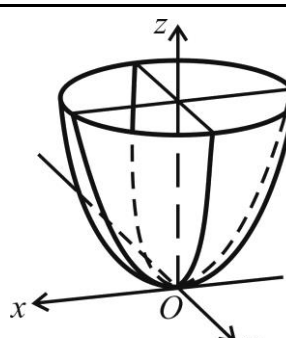
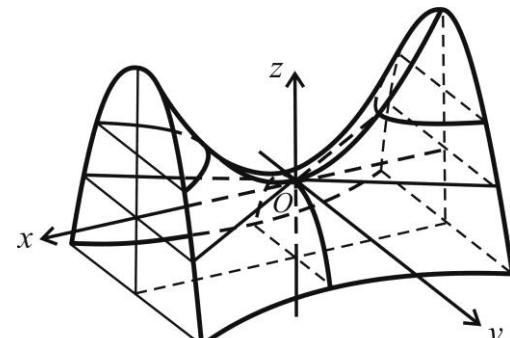
Далі в табл. 10.1 наведено канонічні рівняння та зображення найважливіших поверхонь 2-го порядку.

Таблиця 10.1

Найважливіші поверхні 2-го порядку

№	Канонічні рівняння поверхні	Назви поверхонь	Зображення поверхонь
1	2	3	4
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Еліптичний циліндр (якщо $a = b$ – круговий)	

1	2	3	4
2	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Гіперболічний циліндр	
3	$x^2 = 2py$	Параболічний циліндр	
4	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Тривісний еліпсоїд	
5	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Однопорожнинний гіперболоїд	
6	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	Двопорожнинний гіперболоїд	

1	2	3	4
7	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Конус	
8	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ ($p > 0, q > 0$)	Еліптичний параболоїд	
9	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ ($p > 0, q > 0$)	Гіперболічний параболоїд	



Ключові терміни

Рівняння прямої (канонічне, параметричне, загальне, через дві точки); умова паралельності прямих (збігу, перетину, перехрещування, перпендикулярності, належності одній площині); кут між двома прямими; відстань від точки до прямої (між паралельними прямими); точка перетину прямої та площини; умова паралельності прямої та площини (перпендикулярності, належності, перетину); кут між прямою і площиною; поверхня 2-го порядку; загальне рівняння поверхні; поверхня (уявна, вироджена, циліндрична, конічна, обертання); твірна; напрямна; метод перерізів; канонічне рівняння.



Запитання для самоперевірки

1. Який вигляд має рівняння прямої в просторі: а) загальне; б) канонічне; в) параметричне; г) через дві задані точки?
2. Як виконують перехід від загального рівняння прямої в просторі до канонічного рівняння?
3. Які є можливі випадки розташування прямої відносно координатних осей і координатних площин у просторі?
4. Який вигляд мають умови: а) паралельності; б) збігу; в) перетину; г) перехрещування; г) перпендикулярності двох прямих у просторі?
5. Який вигляд має умова належності двох прямих одній площині в просторі?
6. За якою формулою обчислюють кут між двома прямими в просторі?
7. Як обчислити відстань: а) від точки до прямої; б) між паралельними прямими в просторі?
8. Як визначити відстань і кут між двома перехресними прямими?
9. Які є випадки взаємного розташування прямої та площини в просторі та як їх описати в алгебраїчній формі?
10. Як визначити кут між прямою і площиною в просторі?
11. Який вигляд мають умови: а) паралельності; б) перпендикулярності прямої та площини в просторі?
12. У чому полягає умова належності прямої площині в просторі?
13. Що називають поверхнею 2-го порядку?
14. Яке рівняння називають загальним рівнянням поверхні 2-го порядку?
15. Які поверхні 2-го порядку називають уявними; виродженими?
16. Які поверхні називають: а) поверхнями обертання; б) циліндричними; в) конічними?
17. У чому полягає метод перерізів дослідження форми поверхонь?
18. Перерізами якої поверхні є криві 2-го порядку?
19. Який вигляд має переріз еліпсоїда площиною, яка є паралельною координатній площині?
20. Які з поверхонь 2-го порядку можна уявити як результат обертання параболі або гіперболи?
21. Який вигляд має поверхня 2-го порядку, якщо у її рівнянні відсутня одна зі змінних (наприклад, змінна z)?



Тестові завдання до підрозділу 10

1. Кут між прямими $l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ і $l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$

визначають за такою формулою:

а) $\varphi = \arccos \left(\frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \right);$

б) $\varphi = \arcsin \left(\frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{(m_1^2 + n_1^2 + p_1^2) \cdot (m_2^2 + n_2^2 + p_2^2)} \right);$

в) $\varphi = \arctg(m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2);$

г) $\varphi = \arccos \left(\frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1 + n_1 + p_1} \cdot \sqrt{m_2 + n_2 + p_2}} \right).$

2. Якщо пряма $l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ є перпендикулярною площині

$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, то має місце таке співвідношення:

а) $A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0;$ б) $\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C};$

в) $\frac{Ax_0}{m} = \frac{By_0}{n} = \frac{Cz_0}{p};$ г) $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$

3. Якщо пряма $l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ є паралельною площині

$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, то має місце таке співвідношення:

а) $A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p + D = 0;$ б) $\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C};$

в) $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0;$ г) $A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0.$

4. Рівняння прямої в просторі, що проходить через дві задані точки $M_1(0, -2, 3)$ і $M_2(5, -1, 0)$, має такий вигляд:

а) $\frac{x}{5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$; б) $\frac{x}{5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-3}$;

в) $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-3}$; г) $\frac{x}{5} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{0}$.

5. За якого значення α площина $x+9y-15z-8=0$ є перпендикулярною прямій $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{-5}$:

а) $\alpha = 1/3$; б) $\alpha = 3$; в) $\alpha = -1/2$; г) $\alpha = 5$?

6. За якого значення α пряма $l: \frac{x-1}{\alpha} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}$ є паралельною площині $\pi: x-3y-5z=0$:

а) $\alpha = -7$; б) $\alpha = 3$; в) $\alpha = -1$; г) $\alpha = 34$?

7. Відстань від точки M_1 до прямої l у просторі визначають за такою формулою (де $M_0 \in l$, $\vec{s} \parallel l$):

а) $d = \frac{|\overline{M_0M_1}|}{|\overline{M_0M_1} \times \vec{s}|}$; б) $d = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\overline{M_0M_1}|}$;

в) $d = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$; г) $d = \frac{|\vec{s}|}{|\overline{M_0M_1} \times \vec{s}|}$.

8. Укажіть, у якому з наведених випадків пряма l утворює із площиною π тупий кут:

а) $l: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$, $\pi: x-y-z-18=0$;

б) $l: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{5}$, $\pi: x+y+z-12=0$;

$$\text{в) } l: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{-4}, \quad \pi: x-2y-z-8=0;$$

$$\text{г) } l: \frac{x-3}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{5}, \quad \pi: x-3y+z-8=0.$$

9. Яка пара рівнянь визначає перехресні прямі:

$$\text{а) } \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-2}, \quad \frac{x+1}{0} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1};$$

$$\text{б) } \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-1}, \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0};$$

$$\text{в) } \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-1}, \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{0};$$

$$\text{г) } \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{0}, \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{0}?$$

$$10. \text{ Якщо прямі } l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

є паралельними, то має місце таке співвідношення:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\text{б) } \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} = \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2};$$

$$\text{в) } m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0;$$

$$\text{г) } \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Література: [2 – 6; 13; 15; 20].

Практичні завдання за розділом 2

Розв'язання задач економічного змісту

2.1. За плановий період підприємство виготовило 200 од. продукції першого виду, 150 од. другого і 100 од. третього виду. Прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду становить, відповідно, 3, 5 і 10 грн.

Потрібно обчислити прибуток від реалізації всієї продукції.

Розв'язання. Прибутки від реалізації кожної одиниці продукції можна вважати координатами вектора $\bar{a} = (3, 5, 10)$, а обсяг виготовленої продукції трьох видів опишемо вектором $\bar{b} = (200, 150, 100)$. Тоді прибуток від реалізації всієї продукції можна визначити як скалярний добуток $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

Отже,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (3, 5, 10) \cdot (200, 150, 100) = 600 + 750 + 1\,000 = 2\,350 \text{ (грн)}.$$

2.2. Витрати підприємства на виготовлення 10 од. продукції становлять 1 000 грн, а на 50 од. цієї самої продукції – 2 000 грн.

Визначте витрати підприємства на виготовлення 30 од. продукції за умови, що загальні витрати на виробництво продукції є лінійною функцією від обсягу продукції.

Розв'язання. За умовою задачі витрати на виробництво є лінійною функцією від обсягу продукції. Рівняння відповідної лінії складемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Використовуючи умову задачі, маємо:

$$\frac{y - 1\,000}{2\,000 - 1\,000} = \frac{x - 10}{50 - 10}.$$

Звідси:

$$y - 1\,000 = 25(x - 10) \Rightarrow y = 25x + 750.$$

Ми визначили функцію, що характеризує залежність витрат виробництва від обсягу продукції. Тепер обчислимо значення цієї функції за $x = 30$:

$$y = 25 \cdot 30 + 750 = 1\,500 \text{ (грн)}.$$

Отже, на виробництво 30 од. товару витрачають 1 500 грн.

2.3. Через пункти A і B проходить шосейна дорога. На плані місцевості ці пункти мають координати $(2, 4)$ і $(16, 0)$. Завод C , який на тому самому плані має координати $(11, 9)$, потрібно з'єднати найкоротшою дорогою із цим шосе.

Визначте точку D , яка є точкою входження дороги в шосе.

Розв'язання. Спочатку визначмо рівняння прямої, по якій на плані місцевості проходить шосейна дорога. Для цього складемо рівняння прямої AB як рівняння прямої, що проходить через дві відомі точки $A(2, 4)$ і $B(16, 0)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Отже,

$$\frac{y - 4}{0 - 4} = \frac{x - 2}{16 - 2} \Rightarrow \frac{y - 4}{-2} = \frac{x - 2}{7} \Rightarrow 2x + 7y - 32 = 0.$$

Найкоротший відрізок, проведений через точку C , є відрізком перпендикуляра до прямої AB . Обчислімо кутовий коефіцієнт прямої AB : $k_{AB} = -\frac{2}{7}$.

Умову перпендикулярності прямих можна записати таким способом:

$k_1 \cdot k_2 = -1$. Звідси обчислімо кутовий коефіцієнт прямої CD : $k_{CD} = \frac{7}{2}$. Для того щоб записати рівняння прямої CD , треба використати рівняння прямої, що проходить через точку в заданому напрямку: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Отже, маємо:

$$y - 9 = \frac{7}{2}(x - 11), \text{ або } 7x - 2y - 59 = 0.$$

Тепер визначмо точку перетину прямих AB і CD :

$$\begin{cases} 2x + 7y - 32 = 0, \\ 7x - 2y - 59 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9, \\ y = 2. \end{cases}$$

Отже, точка D має координати $x = 9$, $y = 2$: $D(9, 2)$.

2.4. У попередньому році ціна одиниці деякого товару становила 50 грн, а в поточному – зросла до 60 грн.

Визначте залежність ціни товару від номера року, якщо припустити, що ціна щороку буде зростати на ту саму величину. Складіть прогноз ціни на 3 і 5 років уперед.

Розв'язання. Позначмо номер попереднього року через 1, тоді поточному року буде відповідати номер 2.

Складімо рівняння прямої, що проходить через дві точки, а саме через точки $A(1, 50)$ і $B(2, 60)$:

$$\frac{y-50}{60-50} = \frac{x-1}{2-1} \Rightarrow y = 10x + 40.$$

Через три роки, тобто для року, номер якого буде дорівнювати $x = 2 + 3 = 5$, ціна товару буде становити $y = 10 \cdot 5 + 40 = 90$ (грн), а через 5 років (за $x = 7$) ціна товару досягне $y = 10 \cdot 7 + 40 = 110$ (грн).

2.5. Пропозицію та попит на цукор у деякий період на ринку описували такими функціями:

$$P = 0,6q + 5; \quad S = -0,4q + 13,$$

де q – ціна одного кг цукру у грн, а P і S – вага у кг.

Обчисліть ринкову ціну на цукор у цей період.

Розв'язання. Ринкову ціну визначають умовою $P = S$, а саме:

$$0,6q + 5 = -0,4q + 13,$$

звідси $q = 8$ (грн).

2.6. Підприємство витрачає на виробництво одиниці продукції 20 грн (постійні витрати). Витрати, які не залежать від обсягу продукції, наприклад, зарплатня, амортизаційні відрахування тощо (змінні витрати), дорівнюють 200 грн за тиждень.

Визначте собівартість одиниці продукції.

Розв'язання. Нехай x – кількість одиниць продукції, що виготовлена протягом тижня. Витрати на виробництво цієї продукції становлять $20x + 200$. Витрати (y) на виробництво одиниці продукції:

$$y = \frac{20x + 200}{x} \quad \text{або} \quad y = 20 + \frac{200}{x} \quad (x > 0).$$

Отже, витрати на виробництво одиниці продукції обернено пропорційно залежать від обсягу виробництва, а саме: у разі зростання x собівартість продукції спадає і прямує до $y = 20$.

2.7. Залежність обсягу виробництва від витрат ресурсів двох видів x і y задано такою виробничою функцією:

$$Z = 9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y.$$

Визначте витрати ресурсів на виготовлення 23 од. продукції.

Розв'язання. За умовою задачі $Z = 23$, отже, співвідношення між x та y описано такими рівнянням:

$$9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y = 23.$$

Зведемо це рівняння лінії 2-го порядку до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y = 23 &\Rightarrow (9x^2 - 18x) + (4y^2 - 8y) = 23 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(y^2 - 2y + 1) - 4 = 23 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1. \end{aligned}$$

Отже, ми маємо рівняння, яке визначає еліпс із центром у точці $(1, 1)$, а його півосі дорівнюють $a = 2$, $b = 3$.

Для кожного значення обсягу витрат ресурсу першого виду, що описують значенням x із проміжку $(0, 3)$, обсяг витрат другого ресурсу y набуває значення із проміжку $(0, 4)$. Наприклад, якщо витрати першого ресурсу x дорівнюють 2 од., то витрати y другого ресурсу, які визначають за рівнянням еліпса, дорівнюють $y = \frac{3}{2}\sqrt{3} + 1 \approx 3,6$ (од.).

2.8. Відстань між двома торговельними організаціями дорівнює 8 км.

Визначте множину можливих місць розташування бази таким способом, щоб сума відстаней від бази до цих організацій була сталою величиною і дорівнювала 10 км.

Розв'язання. Виберімо осі координат таким способом: торговельні організації позначмо точками A і B , які лежать на осі OX , а вісь OY проходить через середину відрізка AB . У цій системі координат точки, відповідно, мають координати $A(-4, 0)$ та $B(4, 0)$. Якщо базу розташовано в точці $C(x, y)$, то за умовою задачі, маємо: $AC + CB = 10$.

Визначмо AC та CB як відстань між двома точками:

$$AC = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}, \quad CB = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}.$$

Тоді:

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10$$

або

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2}.$$

Підносимо обидві частини цього співвідношення до квадрата й маємо:

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + x^2 - 8x + 16 + y^2 \Rightarrow$$

$$16x = 100 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} \Rightarrow 5\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 25 - 4x.$$

Піднесімо ще раз обидві частини співвідношення до квадрата:

$$25(x^2 - 8x + 16 + y^2) = 625 - 200x + 16x^2 \Rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225.$$

Поділивши обидві частини цього співвідношення на 225, маємо рівняння еліпса в канонічній формі:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отже, якщо базу розташовано на лінії, яка є еліпсом: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, то сума відстаней від неї до торговельних організацій буде становити 10 км.

Завдання для самостійного розв'язання

2.9. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 120° .

Визначте $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

2.10. Обчисліть $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$ і $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$.

2.11. Визначте $(3\vec{a} - 5\vec{b})(2\vec{a} + 7\vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2.12. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \pi/3$.

Обчисліть довжину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$.

2.13. За якого значення α вектори $\vec{m} = 3\vec{a} + \alpha\vec{b}$ і $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярними, якщо $|\vec{a}| = 7\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \pi/4$.

2.14. Обчисліть кут між векторами $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ і $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = 120^\circ$.

2.15. Обчисліть довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \pi/4$.

2.16. Задано вектори $\vec{a} = (-3, 4, -1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$, $\vec{c} = (-4, -2, 1)$.

Визначте вектор $\vec{d} = -5\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c}$ і його довжину.

2.17. Визначте гострий кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (2, 1, 0)$ і $\vec{b} = (0, -1, 1)$.

2.18. Обчисліть вектор $\vec{x}$, який є колінеарним вектору $\vec{a} = (2, 1, -1)$ і задовольняє умову $\vec{x} \cdot \vec{a} = 6$.

2.19. Обчисліть вектор $\vec{x}$, який є колінеарним вектору $\vec{a} = (-12, 16, 15)$, утворює тупий кут із віссю Oz , а його довжина $|\vec{x}| = 100$.

2.20. Визначте $pr_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a}$, якщо $\vec{a} = (1, -3, 4)$, $\vec{b} = (3, -4, 2)$, $\vec{c} = (-1, 1, 4)$.

2.21. Вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ утворюють кут $\varphi = 45^\circ$. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$ і $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$.

2.22. Обчисліть площу трикутника з вершинами $A(-3, -2, -4)$, $B(-1, -4, -7)$, $C(1, -2, 2)$.

2.23. Обчисліть вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він є перпендикулярним до векторів $\vec{a} = (2, -3, 1)$ і $\vec{b} = (1, -2, 3)$ та задовольняє умову $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

2.24. Обчисліть об'єм трикутної піраміди, вершини якої розташовано в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ і $D(4, 1, 3)$.

2.25. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2, 8)$ і середину відрізка MN , який задано координатами його кінців: $M(6, -5)$, $N(-2, 1)$.

2.26. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $3x + 2y + 7 = 0$ і $4x + 3y + 9 = 0$ паралельно прямій $y = -2x + 3$.

2.27. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2, 3)$ перпендикулярно до прямої, якій належать точки $A(1, 7)$ і $B(-2, -5)$.

2.28. Визначте проєкцію точки $M(3, 4)$ на пряму $2x + 5y + 3 = 0$.

2.29. Визначте точку B , яка є симетричною точці $A(2, -5)$ відносно прямої $2x + 8y - 15 = 0$.

2.30. Точка $A(2, -5)$ є вершиною квадрата, одна зі сторін якого лежить на прямій $x - 2y - 7 = 0$.

Обчисліть площу квадрата.

2.31. Переконайтеся в тому, що точки $A(-4, -3)$, $B(-5, 0)$, $C(5, 6)$ і $D(1, 0)$ є вершинами трапеції.

Визначте висоту трапеції.

2.32. Складіть рівняння бісектрис кутів між прямими $3x + 4y - 5 = 0$ і $5x - 12y + 3 = 0$.

2.33. Складіть рівняння кола, центр якого лежить у точці $C(1, -1)$, а дотичну до нього описано рівнянням $3x - 4y + 3 = 0$.

2.34. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(-1, 3)$, $B(0, 2)$ і $C(1, -1)$.

2.35. Обчисліть відстань між центрами двох кіл: $x^2 + y^2 + 6x - 14y - 6 = 0$ і $x^2 + y^2 - 24x + 2y - 51 = 0$.

2.36. Еліпс проходить через точки $M(1; -1,5)$ і $N(-2, 0)$, а його фокуси лежать на осі Ox .

Складіть канонічне рівняння еліпса і визначте координати його фокусів.

2.37. Еліпс, ексцентриситет якого $\varepsilon = 0,5$, а фокуси лежать на осі Ox , проходить через точку $M(-4, \sqrt{15})$.

Складіть рівняння цього еліпса і визначте відстані його фокусів до точки M .

2.38. Складіть рівняння гіперболи, якщо її вершини розташовано в точках $(-3, 0)$ і $(3, 0)$, а фокуси – у точках $(-3\sqrt{5}, 0)$ і $(3\sqrt{5}, 0)$.

2.39. Складіть рівняння гіперболи, якщо вона проходить через точку $M(10, -3\sqrt{3})$ і має асимптоти, які задано рівняннями $y = \pm \frac{3}{5}x$.

2.40. Складіть рівняння гіперболи, яка має спільні фокуси з еліпсом $7x^2 + 16y^2 = 448$, за умови, що її ексцентриситет $\varepsilon = 1,2$.

2.41. Доведіть, що задане рівняння $x^2 - y^2 + 4x - 10y - 25 = 0$ є рівнянням гіперболи.

2.42. Напишіть рівняння параболи, що проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 4y = 0$, а її фокус розташовано на осі ординат.

2.43. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(3, 4, 5)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = (1, 2, -3)$.

2.44. На осі Oy визначте координати точок, рівновіддалених від площин $3x - 4y + 2z - 9 = 0$ і $4x + 2y - 3z - 21 = 0$.

2.45. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M(-1, -1, 2)$ і перпендикулярно до площин $x + 2y - 2z + 4 = 0$ і $x - 2y + 2z - 4 = 0$.

2.46. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(5, -8, 1)$ паралельно прямій $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+2}{-1}$.

2.47. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2, 0, 6)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-2}{-3}$ і $\frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{-5}$.

2.48. Визначте координати точки перетину прямої $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{5}$ та площини $x + 2y - 3z - 4 = 0$.

2.49. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3, -6, 7)$ перпендикулярно до площини $x + 4y - 8z - 4 = 0$.

2.50. Визначте проєкцію точки $M(4, -3, 1)$ на площину $x + 2y - z - 3 = 0$.

2.51. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M(1, 2, -1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}$.

2.52. Перевезення одиниці вантажу до першого пункту, що розміщений на відстані 150 км, коштує 250 грн, а до другого, відстань до якого 350 км, – 400 грн.

Визначте залежність вартості перевезення (y) від відстані (x), якщо вартість є лінійною функцією від відстані.

2.53. Витрати на перевезення двома видами транспорту обчислюють так: $y_1 = 20x + 150$, $y_2 = 10x + 200$, де x – відстань, на яку виконують перевезення, км; y_1 і y_2 – транспортні витрати на перевезення, грн.

Обчисліть відстань, за якої витрати на перевезення обома видами транспорту будуть однаковими.

Визначте, за яких відстаней краще скористатися іншим видом транспорту.

2.54. Ринкова ціна одиниці деякого товару становить 4 грн. За цією ціною виготовляють 8 000 од. цього товару. За ціною 2 грн недоцільно виробляти цей товар, тобто пропозиція є відсутньою. За ціною 12 грн не будуть продавати жодної одиниці товару через відсутність попиту.

Визначте функцію попиту і функцію пропозиції, вважаючи їх лінійними.

2.55. Відстань між двома заводами, що виготовляють однакову продукцію, становить 200 км. Транспортні витрати на перевезення продукції від заводу A є втричі дорожчими, ніж від заводу B .

Визначте лінію – межу районів, на якій однаково вигідно отримувати продукцію заводів A і B (початок координат узяти посередині між заводами; завод B розташований праворуч від заводу A).

2.56. Два підприємства, які є віддаленими на 100 км одне від одного, виготовляють однакові вироби. Транспортні витрати на 1 км шляху під час перевезення одного виробу від підприємства A і B до споживача є однаковими та становлять 1 грн/км, а ціни реалізації кожного виробу на підприємствах A і B дорівнюють 200 і 250 грн, відповідно.

Для яких споживачів витрати на придбання одиниці виробу підприємств A і B будуть однаковими? (Місце розташування підприємства A збігається з початком координат.)



Відповіді

2.9. $\sqrt{19}$; 7. **2.10.** 20. **2.11.** 19. **2.12.** $\sqrt{661}$. **2.13.** -35 . **2.14.** 120° .

2.15. 15; $\sqrt{593}$. **2.16.** $(7, -14, 18)$; $\sqrt{569}$. **2.17.** $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$.

2.18. $(2, 1, -1)$. **2.19.** $(48, -64, -60)$. **2.20.** 5. **2.21.** $6,5\sqrt{2}$ кв. од.

2.22. 14 кв. од. **2.23.** $(7, 5, 1)$. **2.24.** 3 куб. од. **2.25.** $5x + 2y - 6 = 0$.

2.26. $2x + y + 5 = 0$. 2.27. $x + 4y - 14 = 0$. 2.28. $(1, -1)$. 2.29. $(5, 7)$.

2.30. 5 кв. од. 2.31. $\frac{18}{\sqrt{34}}$. 2.32. $7x + 56y - 40 = 0$; $32x - 4y - 25 = 0$.

2.33. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$. 2.34. $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$. 2.35. 17.

2.36. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; $F_1(-1, 0)$; $F_2(1, 0)$.

2.37. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$; $F_1M = 4$; $F_2M = 8$. 2.38. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$.

2.39. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$. 2.40. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$. 2.41. $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+5)^2}{4} = 1$.

2.42. $x^2 = -2y$. 2.43. $x + 2y - 3z + 4 = 0$. 2.44. $(0, 2, 0)$; $(0, -15, 0)$.

2.45. $2x + 3y + 4z - 3 = 0$. 2.46. $\frac{x-5}{2} = \frac{y+8}{5} = \frac{z-1}{-1}$.

2.47. $\frac{x+2}{13} = \frac{y}{-2} = \frac{z-6}{8}$. 2.48. $(6, 5, 4)$. 2.49. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-7}{-8}$.

2.50. $(5, -1, 0)$. 2.51. $x - 3y + 4z + 9 = 0$. 2.52. $3x - 4y + 550 = 0$.

2.53. а) $x = 5$; б) $x > 5$. 2.54. $P - 4\,000q + 8\,000 = 0$; $S + 1\,000q - 12\,000 = 0$.

2.55. $(x-125)^2 + y^2 = 75^2$. 2.56. $\frac{(x-50)^2}{625} - \frac{y^2}{1875} = 1$.

Відповіді до тестових завдань

Номери підрозділів	Номери тестових завдань									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	в	а	б	в	г	г	б	а	в	б
7	а	в	а	г	б	в	г	б	в	а
8	г	б	а	в	а	г	б	а	б	в
9	б	г	а	в	б	в	а	в	а	г
10	а	б	г	б	а	г	в	а	б	г

Розділ 3. Вступ до математичного аналізу

Під **математичним аналізом** розуміють сукупність розділів математики, що розглядають питання дослідження функцій методами диференціального та інтегрального числення. Завдяки застосуванню апарату математичного аналізу, математика здобула значення інструменту для побудови й дослідження моделей різноманітних процесів та явищ довкілля у їхньому розвитку. Основою математичного аналізу є такі поняття, як змінна, функція, границя. Саме визначення цих понять і розглядають у вступі до математичного аналізу.



Після вивчення цього розділу ви зможете:

- використовувати теоретико-множинний підхід у дослідженнях економічних об'єктів;
- визначати функціональні залежності між ознаками об'єктів в економічних дослідженнях;
- застосовувати функції однієї змінної для аналітичного опису виробничих функцій в економіці;
- інтерпретувати за допомогою графіків функцій зв'язок між числовими характеристиками процесу під час моделювання економічних ситуацій;
- аналізувати співвідношення між сумарними, середніми та граничними величинами в економіці;
- упроваджувати метод границь у процесі здійснення маргінального (граничного) аналізу економічних процесів.

11. Функціональна залежність. Класифікація функцій. Застосування функцій в економіці

Основні питання:

- 11.1. Множини. Абсолютна величина дійсного числа.
- 11.2. Функції: основні означення, способи задання.
- 11.3. Класифікація функцій за їхніми властивостями.
- 11.4. Класифікація функцій за діями над аргументом.
- 11.5. Застосування елементарних функцій в економіці.

11.1. Множини. Абсолютна величина дійсного числа

Теорію множин як математичну дисципліну створено німецьким математиком Георгом Кантором (1845 – 1918). Поняття «множина» є одним із первинних (до того ж фундаментальних) понять математики, яким неможливо дати означення, використовуючи інші математичні поняття. Тому вдаються до описового пояснення поняття множини.

Під **множиною** розуміють сукупність об'єктів, що об'єднані за певною ознакою. Об'єкти, що складають множину, називають її **елементами**. Щодо поняття множини Г. Кантор висловився так: «Множиною є багато чого, яке ми сприймаємо як єдине ціле». Наприклад, можна говорити про множину здобувачів вищої освіти, клієнтів банку, множину країн, які пов'язані певними угодами, тощо.

Множини позначають, зазвичай, великими літерами латинського або грецького алфавітів, а їхні елементи – малими літерами, бажано тими самими. Наприклад, якщо A – це певна множина та a_i є її елементом, то пишуть: $a_i \in A$, тобто « a_i належить A ». Інакше, якщо a_i не є елементом множини A , пишуть: $a_i \notin A$, тобто « a_i не належить A ».

Є два способи задання множин:

1) перелік, згідно із яким указують усі елементи, що складають множину, яка підлягає розгляду;

2) опис, що ґрунтується на заданні так званої **характеристичної властивості** елементів x , де $x \in X$, за якою елементи й об'єднано в множину.

Для символічного запису множини використовують фігурні дужки, між якими через кому або крапку з комою записують елементи цієї множини $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$, якщо множину задано переліком її елементів. Або після позначення елемента через вертикальну риску записують характеристичну властивість елементів множини, де символ « $|$ » означає: «за властивістю», або «що мають властивість». Наприклад, множину $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ задано як перелік елементів. Множину $X = \{x | x^2 - 1 = 0\}$ задано за допомогою опису характеристичної властивості її елементів. Також цю ж множину можна задати переліком її елементів: $X = \{-1; 1\}$.

Слід зазначити, що спосіб переліку зручно застосовувати, якщо треба задати множину, що має порівняно невелику кількість елементів. У разі, якщо

множина має велику кількість елементів або взагалі перелічити їх усі неможливо, застосовують опис як спосіб задання елементів множини.

Розгляньмо основні поняття теорії множин.

Одним із вихідних понять теорії множин є поняття «порожня множина».

Порожньою множиною називають множину, що не містить жодного елемента. Її позначають символом $\emptyset$. Існує лише єдина порожня множина.



Наприклад, множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 10 = 0$ є порожньою, оскільки не існує такого числа із множини дійсних чисел, щоб його квадрат у сумі із числом 10 дорівнював би нулю, тобто $X = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 10 = 0 \} = \emptyset$.

Множини A і B називаються **рівними**, якщо вони містять одні й ті самі елементи, тоді пишуть: $A = B$.

Розгляньмо дві непорожні множини A і B . Множину A називають **підмножиною** множини B , якщо кожний елемент з A належить множині B , це позначають так:

$$A \subset B \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B. \quad (11.1)$$

У тому разі, якщо A не є підмножиною B , то пишуть: $A \not\subset B$ і кажуть: « A не входить до B ».

Співвідношення між множинами, а також операції над множинами зручно ілюструвати за допомогою **діаграм Венна – Ейлера**. Для побудови такої діаграми в межах прямокутника розміщують замкнені фігури, які відповідають множинам. Найчастіше для зображення множини застосовують круг. Точки, що належать кругу (або, у загальному випадку, будь-якій іншій замкненій фігурі, що відображає множину), вважають елементами цієї множини.

Розгляньмо **основні дії** над множинами.

1. Об'єднанням множин A і B називають таку множину C , яка містить усі елементи множини A , а також усі множини B . Об'єднання множин позначають так:

$$C = A \cup B \quad :\Leftrightarrow \quad C \in \{ x \mid x \in A \text{ або } x \in B \}. \quad (11.2)$$

Елементи множини C належать або множині A , або множині B , або є спільними елементами обох множин (якщо такі елементи існують).

На рис. 11.1 наведено приклад об'єднання множин A і B для випадку, коли вони мають спільні елементи. Об'єднанням множин є вся заштрихована фігура. Ті елементи, які є спільними для A і B , позначено подвійною штриховкою. Слід підкреслити, що ці елементи включають до множини $C = A \cup B$ лише один раз.

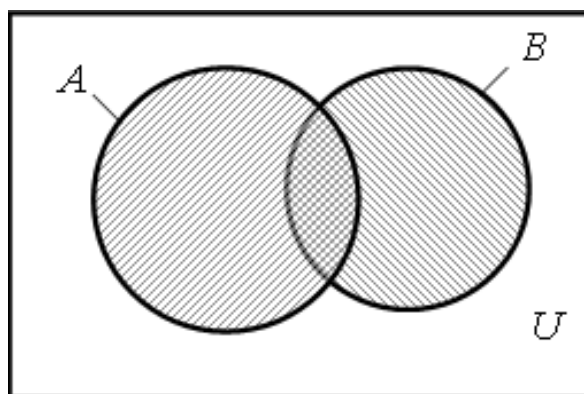


Рис. 11.1. Об'єднання множин

Додавання множин приводить до поняття універсуму. Будь-який елемент, якою б не була його природа, є елементом **універсуму**. Відповідно, будь-яка множина є підмножиною універсуму. Отже, об'єднання універсуму з будь-якою множиною дорівнює універсуму. Універсум позначають символом U .

Для операції об'єднання множин правильними є такі твердження:

$$\forall A: \emptyset \cup A = A; \quad \forall A: A \cup A = A; \quad \forall A: U \cup A = U.$$

2. Перерізом множин A і B називають множину C , яка містить усі елементи, що є спільними для множин A та B . Переріз множин позначають так:

$$C = A \cap B \quad :\Leftrightarrow \quad C \in \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}. \quad (11.3)$$

Якщо множини A і B не мають спільних елементів (на діаграмі Венна – Ейлера відповідні цим множинам фігури зображують окремо, без перерізання), то їхній переріз є порожньою множиною.

Для перерізу множин правильними є такі твердження:

$$\forall A: \emptyset \cap A = \emptyset; \quad \forall A: A \cap A = A; \quad \forall A: U \cap A = A.$$

На рис. 11.2 наведено приклад перерізу множин A і B для випадку, коли вони мають спільні елементи. Переріз множин позначено штриховкою.

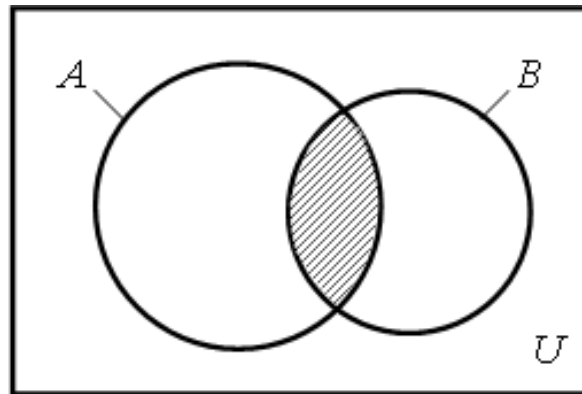


Рис. 11.2. Переріз множин

3. Різницею множин A і B називають множину C , яка містить усі елементи множини A , окрім тих, що належать множині B . Різницю множин позначають так:

$$C = A \setminus B \Leftrightarrow C \in \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}. \quad (11.4)$$

Праву частину запису $C = A \setminus B$ читають як « A без B ».

На рис. 11.3 множину $C = A \setminus B$ позначено штриховкою.

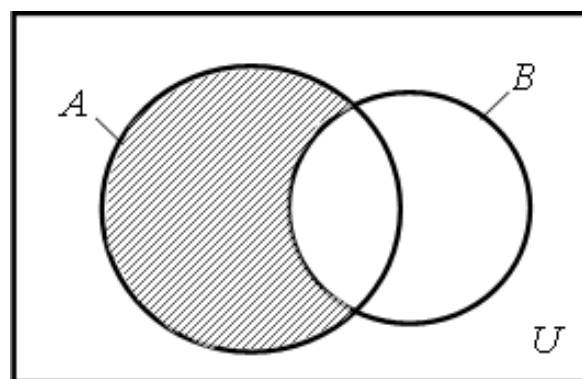


Рис. 11.3. Різниця множин

У тому разі, коли множина B є підмножиною множини A , то різницю $C = A \setminus B$ називають **доповненням** множини B до множини A :

$$B \subset A \Leftrightarrow B \cup (A \setminus B) = A.$$

Різницю між універсумом і множиною A позначають $\overline{A}$, тобто «не A »:

$$U \setminus A = \overline{A}.$$

У математиці переважно розглядають *числові множини*, тобто множини, елементами яких є числа.

Прикладами відомих ще зі шкільного курсу математики числових множин є такі множини:

$\mathbf{N}$ – множина натуральних чисел, тобто $\mathbf{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots\}$;

$\mathbf{Z}$ – множина цілих чисел, тобто $\mathbf{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm n; \dots\}$;

$\mathbf{Q}$ – множина раціональних чисел $\mathbf{Q} = \{x \mid (\exists p \in \mathbf{Z}, \exists q \in \mathbf{N}): x = p/q\}$, тобто множина звичайних дробів;

$\overline{\mathbf{Q}}$ – множина ірраціональних чисел (нескінченних неперіодичних десяткових дробів);

$\mathbf{R}$ – множина дійсних чисел, яка є об'єднанням множин раціональних та ірраціональних чисел. Множина ірраціональних чисел є доповненням множини раціональних чисел до множини дійсних чисел, тобто $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$;

$\mathbf{C}$ – множина комплексних чисел, яка є об'єднанням множин дійсних та уявних чисел, тобто $\mathbf{C} = \{x \mid x = a + i \cdot b; a, b \in \mathbf{R}; i = \sqrt{-1}\}$.

Між указаними множинами має місце таке співвідношення:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Для наочності множину дійсних чисел можна подавати як *числову пряму*, або *числову вісь*, що встановлює взаємно однозначну відповідність між дійсним числом і точкою на цій осі. Числова вісь містить початок координат, який відповідає нулю, а числове значення довільної точки відповідає її відстані до початку координат. На цій осі праворуч від нуля відкладають додатні числа, а ліворуч – від'ємні.

Із числових множин у математичному аналізі часто використовується поняття «проміжок». **Проміжком**, або **проміжком числової прямої**, називають множину дійсних чисел, що має таку властивість: якщо два будь-які числа належать проміжку, то й число, що розташовано між ними, теж належить цьому проміжку. Із використанням символів математичної логіки це означення можна записати так:

$$\forall x \forall y \forall z : ((x \in X) \text{ і } (z \in X) \text{ і } (x < y < z)) \Rightarrow y \in X.$$

Скінченний проміжок є множиною чисел, які розташовані між двома числами a і b , де a – початок, b – кінець проміжку. Якщо кінці проміжку теж належать йому, то такий проміжок називають **відрізком** і позначають $[a; b]$. За означенням:

$$[a; b] :\Leftrightarrow \{ x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b \}.$$

У разі, якщо $a = b$, відрізок складається з однієї точки.

Якщо кінці проміжку a і b не належать цьому проміжку, то такий проміжок називають **інтервалом** і позначають $(a; b)$.

Відповідно,

$$(a; b) :\Leftrightarrow \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x < b \}.$$

Проміжки $[a; b)$ та $(a; b]$ називають **напіввідкритими інтервалами**. Їм відповідають співвідношення: $a \leq x < b$ та $a < x \leq b$.

Довжиною проміжку називають різницю між його кінцем і початком: $b - a$.

Якщо множину дійсних чисел доповнити елементами $+\infty$ та $-\infty$ (це так звані **невласні числа**), то маємо *розширену числову пряму*, яка дозволяє розглядати *нескінченні проміжки*: $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$, $[a; +\infty)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$. Це означає, відповідно: $x \leq b$, $x < b$, $x \geq a$, $x > a$, $-\infty < x < +\infty$. Множина всіх дійсних чисел $\mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$ є нескінченним проміжком.

Розгляньмо ще одне важливе поняття, що є характеристикою елементів числових множин. Це поняття **абсолютної величини числа**.

Модулем, або **абсолютною величиною числа** x , називають саме число x , якщо воно є невід'ємним, і $-x$, якщо x є від'ємним, тобто:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0; \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

За геометричною інтерпретацією модуль числа визначають як відстань на числовій осі від точки, що відповідає цьому числу, до початку координат.

З означення модуля випливає таке:

$$|x| \geq 0, \quad |x| \geq x \quad \text{та} \quad |x| \geq -x. \quad (11.5)$$

Укажімо на важливі **властивості абсолютних величин числа**.

1. Нерівність

$$|x| < \alpha \quad (11.6)$$

є еквівалентною подвійній нерівності:

$$-\alpha < x < \alpha. \quad (11.7)$$

Доведення. Дійсно, із (11.5) маємо дві подвійні нерівності: $x \leq |x| < \alpha$ та $-x \leq |x| < \alpha$. Звідси $x < \alpha$ та $-x < \alpha$, або $x > -\alpha$.

Отже, виходить подвійна нерівність (11.7). Має місце й обернене твердження, тобто з нерівності (11.7) випливає нерівність (11.6). ■

2. Абсолютна величина суми не перевищує суму абсолютних величин доданків, тобто

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Доведення. Нехай x та y – будь-які дійсні числа.

Для них маємо:

$$-|x| \leq x \leq |x|; \quad -|y| \leq y \leq |y|. \quad (11.8)$$

Додаймо почленно ці нерівності:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Звідси, за першою властивістю, маємо:

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad \blacksquare$$

3. Абсолютна величина різниці є не меншою за різницю абсолютних величин:

$$|x - y| \geq |x| - |y|. \quad (11.9)$$

Доведення. Дійсно, із тотожності $x = (x - y) + y$ за другою властивістю, маємо нерівність:

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x - y| \geq |x| - |y|. \blacksquare$$

4. Абсолютна величина добутку дорівнює добутку абсолютних величин множників, тобто

$$|xy| = |x| \cdot |y|. \quad (11.10)$$

Указана властивість випливає з таких понять, як добуток та абсолютна величина.

5. Абсолютна величина частки дорівнює частці абсолютних величин:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \text{якщо } y \neq 0. \quad (11.11)$$

Остання властивість також є очевидною.

Множину A називають **скінченною (нескінченною)**, якщо існує (не існує) невід'ємне ціле число n ($n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$), якому дорівнює кількість елементів множини.

Розгляньмо дві непорожні множини A і B . Якщо кожному елементові x множини A можна поставити у відповідність тільки один елемент y множини B і водночас кожний елемент $y \in B$ відповідає лише одному елементові $x \in A$, то кажуть, що між множинами A і B існує *взаємно однозначна відповідність*.

Будь-яку нескінченну множину, між елементами якої та множиною натуральних чисел $\mathbf{N}$ існує (не існує) взаємно однозначна відповідність, тобто елементи якої можна (не можна) занумерувати за допомогою натуральних чисел, називають **зліченною (незліченною) множиною**.

Нехай a – довільне дійсне число, ε – будь-яке додатне число із множини дійсних чисел. Тоді **ε -околом точки a** називають інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ і позначають $A(a, \varepsilon)$, де a – *центр околу*, ε – *радіус околу* (рис. 11.4). Відповідно:

$$A(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon), \quad \text{або} \quad |x - a| < \varepsilon, \quad A = \{x \mid |x - a| < \varepsilon, a \in \mathbf{R}\}.$$

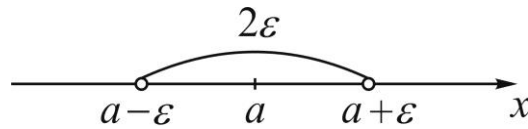


Рис. 11.4. ε -окіл точки a

Числові множини за структурою поділяють на дискретні та неперервні. Точку a деякої множини A називають **ізолюваною точкою** цієї множини, якщо для неї існує окіл, який не містить інших точок множини A .

Множина A , елементами якої є лише ізолювані точки, називають **дискретною** множиною.

Непорожню множину, яка не містить ізолюваних точок, називають **неперервною** множиною.

11.2. Функції: основні означення, способи задання

Дослідження будь-якого процесу або явища зводять здебільшого до вивчення числових характеристик цього процесу й у подальшому до обчислення кількісних співвідношень між ними. Для створення загальних теорій, що застосовують під час вивчення числових характеристик різної природи, у математиці відходять від конкретного змісту цієї числової характеристики, а всі величини поділяють на змінні та сталі.

Змінною величиною, або просто **змінною**, називають величину, що, відповідно до умов експерименту, може набувати різних числових значень. Ту величину, що набуває лише одного значення під час дослідження певного процесу, називають **сталю**. Здебільшого величини позначають літерами латинського алфавіту (з індексами або без них). Зазвичай, значення сталих величин вважають відомими в цьому дослідженні й позначають їх початковими літерами латинського алфавіту (a, b, c тощо), а змінні величини вважають невідомими, тому їх позначають кінцевими літерами латинського алфавіту ($x, y, z, \dots, w$).



Під час дослідження різних процесів і явищ, залежно від формулювання задачі, яку розглядають, одна й та сама величина може відігравати роль як змінної, так і сталої.

Наприклад, питомий прибуток підприємства від реалізації одиниці виробленої продукції можна вважати сталою величиною під час дослідження впливу

обсягу виробництва на загальний прибуток від реалізації. Ту саму величину можна розглядати як змінну під час дослідження впливу продуктивності праці або технологічних показників на загальний прибуток.

Абсолютними, або **універсальними**, сталими називають такі величини, які не змінюються за будь-яких умов. Наприклад, відношення довжини кола до його діаметра є абсолютною константою і становить $\pi = 3,1415\dots$

Параметром у певному дослідженні називають величину, яка характеризує однотипні об'єкти (процеси, стани) у тому сенсі, що кожне її значення є характеристикою деякого конкретного об'єкта. Наприклад, рівняння прямої в такій формі: $y = k \cdot x$ – містить поточні координати точок прямої (змінні x і y) і параметр k , залежно від значення якого рівняння визначає певну пряму серед безліч інших прямих, що проходять через початок координат.

Областю змінювання називають множину всіх числових значень змінної величини, яких вона може набувати. Змінну вважають *заданою*, якщо вказано її область змінювання.

Досвід установлення кількісних співвідношень під час дослідження реальних процесів та явищ показує, що зміна значень числових характеристик того чи того процесу здебільшого відбувається не незалежно одна від одної, а так, що зміна значень одних із них є причиною зміни значень інших.

Якщо кожному елементові x із множини X ($x \in X$) за певним правилом або законом можна поставити у відповідність один і лише один елемент y із множини Y ($y \in Y$), то закон, за яким здійснюється відображення елементів множини X на множину Y , називають **функцією**. Стисло це записують так:

$$f : X \rightarrow Y, \text{ або } y = f(x).$$

У цьому разі говорять, що між змінними x та y існує *функціональна залежність*. Змінну x називають **аргументом**, або **незалежною змінною**, а змінну y – **залежною змінною**, тобто **функцією** від змінної x . Запис $y = f(x)$ означає, що залежна змінна y є *функцією від однієї змінної x* .

Вивчення кількісних співвідношень між величинами, що змінюються, завдяки існуванню такого взаємозв'язку, абстрагуючись від їхнього конкретного змісту, саме і є предметом математичного аналізу.

Отже, функція та функціональна залежність є основними поняттями математичного аналізу.

Якщо множину X розглядати як переріз множин $X_1, X_2, \dots, X_n$, то відображення елементів множини X на множину Y називають **функцією кількох змінних** і записують $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_i \in X_i, i \in \overline{1, n}$.

Множину значень аргументу називають **областю існування функції**, або **областю визначення функції**, і позначають через $D(f)$. Відповідно, множину значень функції $y = f(x)$ називають **областю значень функції** та позначають через $E(f)$.

Слід зауважити, що на поняття функції можна подивитися більш узагальнено, якщо кожному значенню незалежної змінної x поставити у відповідність не одне, а декілька значень y . Таку функцію називають **багато-значною**.

Значення функції $y = f(x)$, яке відповідає окремому значенню аргументу, тобто за умови, що $x = x_0$, позначають символами: $y_0 = f(x_0), f(x)|_{x=x_0}, y = y(x_0)$ або $y|_{x=x_0}$. Треба мати на увазі, що значення $f(x)$, які відповідають різним значенням x , не обов'язково мають бути різними. Функція навіть може набувати єдиного значення на всій області її визначення, і таку функцію називають **сталою**: $y = c$, де $c = \text{const}$.

Закон відповідності між значеннями аргументу і функції можна подавати різними способами.

Існує три основні **способи задання функцій**.

1. Аналітичний спосіб. Функція є заданою *аналітично*, якщо функціональну залежність визначають у вигляді аналітичного виразу, тобто у вигляді формули. У цьому разі вказують, для яких значень аргументу розглядають цю функцію. Якщо множину X не задано, то мають на увазі всі значення аргументу x , за яких функція має скінченне та дійсне значення. У цьому разі область існування функції називають **областю припустимих значень**.



Спроби аналітичного способу задання функції можна побачити ще в книзі «Початки», де Евклід під час побудови перерізів конусу описує «симптоми», тобто словесно формулює рівняння кривих, що визначають їхні класи відповідності. Однак перші приклади застосування алгебраїчних рівнянь до визначення функції з'являються лише в XVII ст. в працях Ферма і Декарта.

Наведемо кілька функцій, що задані аналітично, і запишімо їхню область визначення як область припустимих значень.



Як приклад розгляньмо такі функції:

$$1. y = \frac{1}{x^2 + 1}, D(f) = (-\infty; +\infty);$$

$$2. y = \frac{1}{x^2 - 1}, D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty);$$

$$3. y = \arcsin x, D(f) = [-1; 1].$$

Аналітичний спосіб задання функції передбачає існування аналітичного виразу, який пов'язує значення функції із значенням її аргументу, тобто:

$$F(x, y) = 0. \quad (11.12)$$

Якщо рівняння (11.12) не є розв'язаним відносно функції, то в цьому разі *функцію задано неявно*. Якщо рівняння (11.12) розв'язати відносно y , то маємо функцію у явному вигляді: $y = f(x)$.

2. Графічний спосіб. Множину всіх точок координатної площини (x, y) , координати яких задовольняють рівняння $y = f(x)$, називають **графіком функції**. Якщо $f: X \rightarrow Y$, то множина: $\Gamma = \{(x, f(x)) | x \in X\}$ є графіком функції. Функцію $y = f(x)$ називають **заданою графічно**, якщо побудовано її графік. Така ситуація може виникати під час досліджень, що пов'язані з використанням самописних приладів, які фіксують зміну певних характеристик у часі. У цьому разі відповідність між незалежною змінною x та функцією y надано у вигляді деякої лінії. Недолік такого способу задавання функції полягає в тому, що він дозволяє лише наближено визначати значення функції. А його перевагою є те, що цей спосіб дає наочну ілюстрацію властивостей функції.

3. Табличний спосіб. Функцію називають **заданою таблично**, якщо побудовано таблицю, що містить значення її аргументу і відповідні їм значення функції. Такий підхід практикують у багатьох галузях знань, де залежність між величинами встановлюють експериментально або через спостереження.



Табличний спосіб задання функції був історично першим. Наприклад, ще в IV ст. до н. е. під час вивчення циклічності руху планет вавилонські астрономи побудували таблиці, завдяки яким можна було визначати дати місячних та сонячних затемнень.



Наприклад, у вигляді таблиці можна подати залежність обсягу випуску продукції y_i (млн грн) певного підприємства від строку роботи цього підприємства x_i (роки):

x_i , роки	1	2	3	4	5	6
y_i , млн грн	0,5	1,0	2,0	3,4	6,1	7,8

Серед способів задання функції, які були розглянуті, основним є аналітичний спосіб. Від аналітичного способу задання функції можна легко перейти до табличного та графічного. А для того щоб перейти від табличного або графічного способів задання до аналітичного, треба зробити певні припущення щодо природи явища, яке досліджують, а потім для підтвердження чи спростування правильності цієї формули провести додаткові дослідження. Загалом, маючи таблицю чи графік функції, складно визначити відповідну формулу (аналітичний вираз), хіба що наближено. Методи математичного аналізу, що розроблені для дослідження функцій, передбачають використання аналітичного способу задавання функції, інші ж способи використовують як допоміжні: графічний – для наочності, табличний – для зручності надання інформації.

11.3. Класифікація функцій за їхніми властивостями

Монотонність функції. Функцію $f(x)$ називають **зростаючою**, якщо на деякій множині X , що є областю існування цієї функції, з нерівності $x_1 < x_2$, де $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Тобто, для такої функції зі збільшенням аргументу має місце і збільшення значення функції.

Відповідно, функцію називають **спадною**, якщо на деякій множині X , що є областю існування цієї функції, з нерівності $x_1 < x_2$, де $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, випливає нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Зростаючі та спадні функції називають **монотонними**.

Якщо з нерівності $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$, $x_2 \in X$) випливає $f(x_1) \leq f(x_2)$, то таку функцію називають **неспадною**, а якщо випливає нерівність $f(x_1) \geq f(x_2)$, то таку функцію називають **незростаючою**.

Графічну інтерпретацію монотонних функцій показано на рис. 11.5.

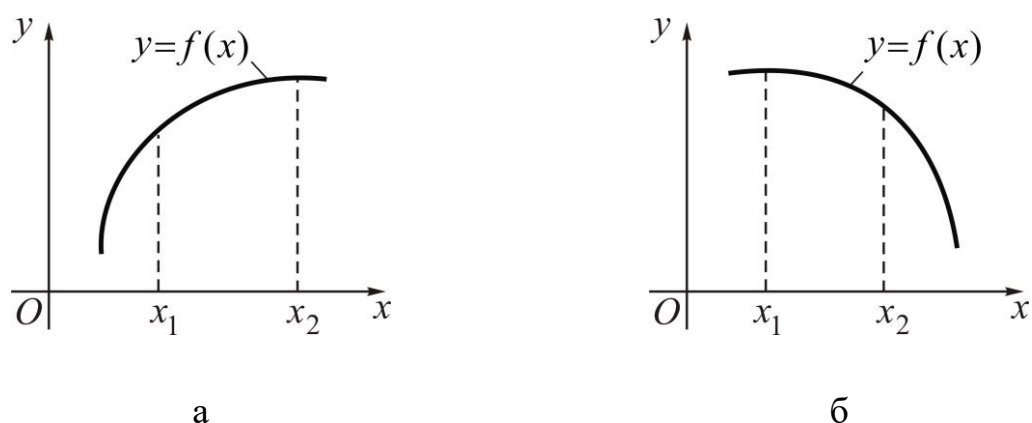


Рис. 11.5. Монотонно зростаюча (а) та монотонно спадна (б) функції

Однак функція не обов'язково монотонно зростає або монотонно спадає на всій множині X . Якщо на множині значень функції можна виділити інтервали, на яких функція буде монотонною, тобто, зростає (або спадає), то такі інтервали називають **інтервалами монотонності** функції.



Наприклад, функція $y = 2x^2 - 6x + 4$ (рис. 11.6).

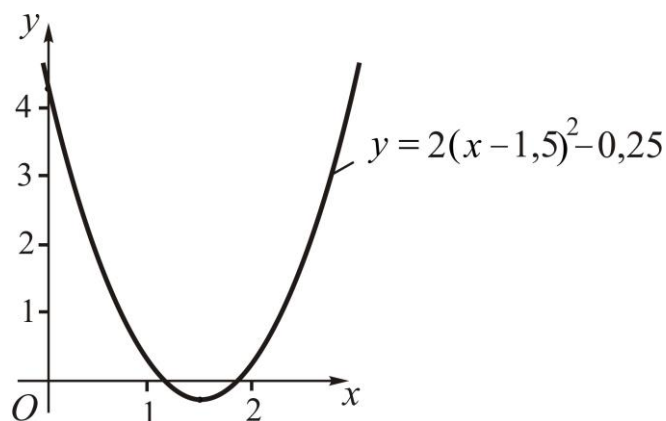


Рис. 11.6. Немонотонна функція

Інтервали монотонності цієї функції легко визначити, якщо в рівнянні параболи виділити повний квадрат:

$$y = 2x^2 - 6x + 4 = 2(x^2 - 3x) + 4 = 2(x^2 - 2 \cdot 1.5x + 2.25) - 2 \cdot 2.25 + 4 = 2(x - 1.5)^2 - 0.5.$$

Маємо, що на інтервалі $(-\infty; 1,5)$ функція спадає, а на інтервалі $(1,5; +\infty)$ вона зростає. Отже, ці інтервали є інтервалами монотонності функції. Значення аргументу $x=1,5$ є границею інтервалів монотонності функції.

Обмеженість функції. Функцію $y = f(x)$ називають **обмеженою** на множині X , якщо існують такі числа m і M , що $m \leq f(x) \leq M$ для всіх $x \in X$. Якщо таких чисел не існує, то функцію називають **необмеженою**.

Нехай число C є найбільшим із чисел m і M , тоді значення функції мають задовольняти умову: $|f(x)| \leq C$.

На рис. 11.7 показано графік функції, яка відповідає умові $0 \leq f(x) \leq 1$.

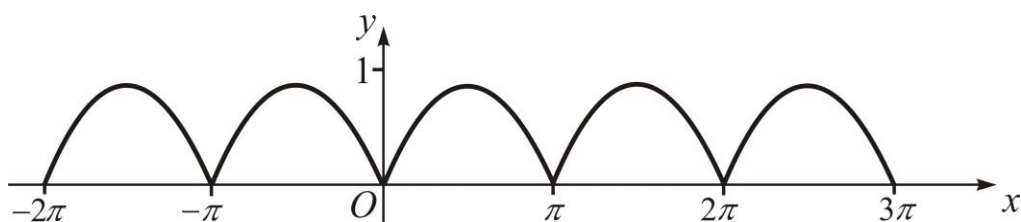


Рис. 11.7. Обмежена функція

Парність та непарність функції. Множину X називають **симетричною відносно початку координат**, якщо з кожним значенням $x \in X$ вона містить і значення $-x$.

Функцію $f(x)$, область визначення якої є симетричною, називають **парною**, якщо має місце співвідношення:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in X. \quad (11.13)$$

Графік парної функції є симетричним відносно осі ординат.

Беручи до уваги вигляд графіка функції, який показано на рис. 11.7, слід зробити висновок, що ця функція є парною.

Якщо для функції, область визначення якої є симетричною, має місце співвідношення:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X, \quad (11.14)$$

таку функцію називають **непарною**. Її графік є симетричним відносно початку координат.

На рис. 11.8 показано графік непарної функції.

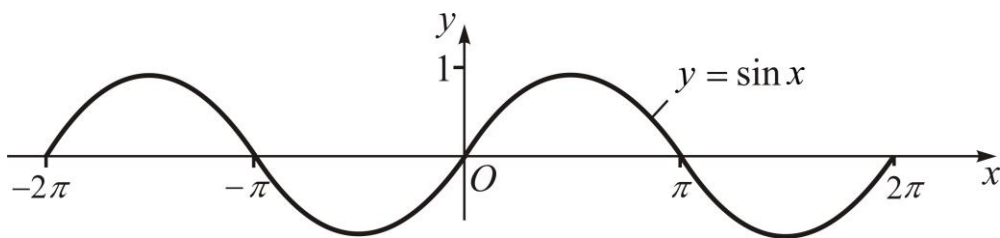


Рис. 11.8. Непарна функція



Розгляньмо функцію $y = x^2 + 1$. Виконаймо таке перетворення:

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x).$$

Оскільки $\forall x \in X \quad f(-x) = f(x)$, то ця функція є парною.

Функція $y = x^3$ є непарною, оскільки $f(-x) = -f(x)$.

Функція $y = 2x^2 - 6x + 4$ не є ані парною, ані непарною (див. рис. 11.6), це функція загального вигляду.

Періодичність функції. Функцію $y = f(x)$ називають **періодичною** на множині X , якщо існує таке число $T > 0$, що для будь-якої точки x , яка належить області визначення, точки $x + T$ і $x - T$ також належать цій області та виконано таку умову:

$$f(x \pm T) = f(x) \quad \forall x \in X. \quad (11.15)$$

У цьому разі число T називають **періодом** функції $f(x)$.

Зі співвідношення (11.15) випливає, що

$$f(x + kT) = f(x), \text{ де } k \in \mathbf{Z},$$

тобто добуток kT ($k \in \mathbf{Z}$) теж можна вважати періодом функції. Але якщо говорять про період функції, то мають на увазі її найменший додатний період.



Для функції $y = \sin x$ співвідношення (11.15) є правильним і для величини $kT = 4\pi$, але періодом функції є $T = 2\pi$ (див. рис. 11.8). Для функції $y = |\sin x|$ періодом є $T = \pi$ (див. рис. 11.7).

Слід зазначити, що під час побудови графіка періодичної функції можна побудувати його фрагмент на будь-якому проміжку $[x_0; x_0 + T]$, а далі повторювати цей фрагмент на всій числовій осі.

Обернена функція. Розгляньмо поняття оберненої функції. Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на множині $X : D(f) = X$, а областю її значень є множина $Y : E(f) = Y$. Якщо кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає лише одне значення змінної $x \in X$, то на множині Y можна визначити функцію:

$$x = g(y), \quad (11.16)$$

причому таку, що $f(g(y)) = y$ для всіх $y \in Y$. Функцію $g(y)$ називають **оберненою** до функції $f(x)$.

Отже, якщо відображення $f : X \rightarrow Y$ визначає вихідну функцію, то відображення $g : Y \rightarrow X$ визначає обернену функцію.

На тих самих підставах можна вважати, що функція $y = f(x)$ є оберненою до $x = g(y)$ за умови, що $g(f(x)) = x$.

Отже, функції $y = f(x)$ та $x = g(y)$ є **взаємно оберненими**. Взаємно обернені функції можна визначити, якщо розв'язати рівняння $F(x, y) = 0$, що визначає функцію в неявному вигляді як відносно y , так і відносно x .

Теорема 11.1. Якщо функція $y = f(x)$ є монотонною на множині $D(f)$, то на відповідній множині $E(f)$ існує також монотонна функція $x = g(y)$, яка є оберненою до вихідної.

Доведення. Дійсно, нехай функція $y = f(x)$ монотонно зростає, тоді кожне її значення $y \in Y$ відповідає тільки одному значенню її аргументу $x \in X$, тобто для неї існує обернена функція $x = g(y)$.

Тепер покажімо, що обернена функція є зростаючою на множині Y , тобто з нерівності $y_2 > y_1$ випливає нерівність $x_2 > x_1$. Припустімо супротивне: $y_2 > y_1$, але $x_2 = g(y_2) < g(y_1) = x_1$. Оскільки функція $y = f(x)$ зростає, то за останньою нерівністю маємо: $f(x_2) < f(x_1)$, що суперечить нерівності $y_2 > y_1$.

Отже, якщо $y_2 > y_1$, то $x_2 > x_1$, тобто функція $x = g(y)$ зростає на множині Y .

Для спадної функції теорему доводять аналогічно. ■

Оскільки більш звичним є позначення аргументу через x , а позначення функції – через y , то обернену функцію теж записують як $y = g(x)$.

Тоді графіки прямої та оберненої функцій, якщо вони побудовані в одній системі координат xOy , будуть симетричними відносно бісектриси першого та третього координатних кутів. Прикладами взаємно обернених функцій є $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$ за умови $x \geq 0$ (рис. 11.9).

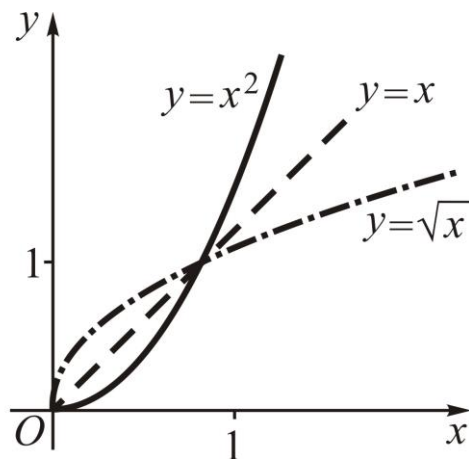


Рис. 11.9. Взаємно обернені функції $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$

Отже, обидві функції є зростаючими, а їхні графіки є симетричними відносно прямої $y = x$.

11.4. Класифікація функцій за діями над аргументом

Функцію $y = f(x)$, яка визначена на множині X , називають **елементарною**, якщо її задано однією формулою так, що її значення за будь-якого значення $x \in X$ може бути обчисленим із застосуванням скінченної кількості таких операцій, як додавання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня, логарифмування, обчислення тригонометричних та обернених тригонометричних функцій. Залежно від операцій, які виконують над аргументом, елементарні функції поділяють на алгебраїчні та неалгебраїчні. До *алгебраїчних* належать функції, над аргументом яких здійснюють скінченну кількість алгебраїчних дій: додавання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня. Усі інші елементарні функції, що не належать до алгебраїчних, називають **трансцендентними**.

Елементарні функції широко застосовують для опису економічних процесів, тому згадаймо основні елементарні функції, які вам відомі ще зі шкільного курсу математики.

До основних елементарних функцій належать такі функції.

1. **Степенева функція** $y = x^\alpha$, де $\alpha \in \mathbf{R}$. Її області визначення та значень залежать від α .

2. **Показникова функція** $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Функцію визначено на множині $x \in (-\infty; +\infty)$, а областю її значень є інтервал $y \in (0; +\infty)$.

3. **Логарифмічна функція** $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Функцію визначено на проміжку $x \in (0; +\infty)$, а областю значень є $y \in (-\infty; +\infty)$. Функція є оберненою до степеневій функції $y = a^x$.

4. **Тригонометричні функції:**

$$y = \sin x \text{ та } y = \cos x, \text{ де } x \in \mathbf{R}, |y| \leq 1;$$

$$y = \operatorname{tg} x, \text{ де } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{R};$$

$$y = \operatorname{ctg} x; \text{ де } x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{R}.$$

5. **Обернені тригонометричні функції:**

$$y = \arcsin x, \text{ де } x \in [-1; 1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x, \text{ де } x \in [-1; 1], y \in [0; \pi];$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \text{ де } x \in \mathbf{R}, y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, \text{ де } x \in \mathbf{R}, y \in (0; \pi).$$

Якщо аргумент функції $y = f(u)$ сам є функцією від іншої змінної, тобто $u = g(x)$, то функцію $y = f(g(x))$ називають **складеною функцією**, або **функцією від функції**, де u та x – змінні, які, відповідно, є *проміжним* та *основним* аргументами; $u = g(x)$ та $y = f(u)$ – *внутрішня* та *зовнішня* функції.

Складені функції належать до елементарних функцій.



Функція $y = \sqrt[3]{\sin x^2}$ є складеною. Зовнішньою є функція $y = \sqrt[3]{u}$, а її внутрішня функція $u = \sin v$ є зовнішньою відносно внутрішньої функції $v = x^2$.

Функцію також можна задати як сукупність кількох формул, водночас указуючи, на якій саме множині значень аргументу розглядають кожну з формул. Функції, що задані кількома формулами, не належать до елементарних.



Прикладом такої неелементарної функції є:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & \text{якщо } x < 0; \\ \sin x, & \text{якщо } 0 \leq x < 0,5\pi; \\ 0, & \text{якщо } x \geq 0,5\pi. \end{cases}$$

Областю визначення цієї функції є нескінченний інтервал $(-\infty; +\infty)$, а її графік має такий вигляд, як показано на рис. 11.10.

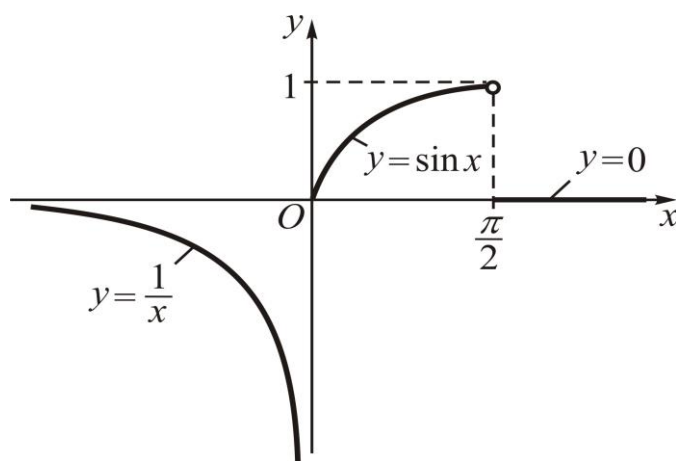


Рис. 11.10. Приклад графіка неелементарної функції

Ще одним прикладом неелементарної функції є **факторіал**:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = 0; \\ 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, & \text{якщо } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

До класу неелементарних функцій належать також функції, у яких кількість операцій над аргументом є нескінченною.

11.5. Застосування елементарних функцій в економіці

Розгляньмо лінійну функцію:

$$y = kx + b.$$

Нехай x – це обсяг продукції, а k – витрати на одиницю продукції (питомі витрати), b – сталі витрати. Тоді лінійна функція $y = f(x)$ описує загальні витрати виробництва, залежно від обсягу продукції.

Якщо маємо загальні витрати $y = kx + b$, то собівартість одиниці продукції запишемо у вигляді дробово-лінійної функції:

$$y = \frac{kx + b}{x},$$

яку можна визначити як питомі витрати, тобто середні витрати виробництва на виготовлення одиниці продукції.

Наведемо функції, що найчастіше використовують в економіці.

Серед них зазначимо такі:

1. **Виробнича функція** – функція, що описує залежність певного результату виробничої діяльності від факторів, які його зумовлюють.

2. **Функція корисності** описує залежність результату, або ефекту деякої діяльності, від рівня (інтенсивності) цієї діяльності.

3. **Функція випуску** (один із видів виробничої функції) описує залежність обсягу виробництва від наявності або споживання ресурсів.

4. **Функція витрат** (один із видів виробничої функції) описує залежність витрат виробництва від обсягу продукції.

5. **Функції попиту, споживання чи пропозиції** описують залежність обсягу попиту, споживання або пропозиції щодо окремих товарів та послуг від різних факторів (наприклад, ціни, прибутку тощо).

Як ще один приклад функцій, що широко застосовують в економіці, розглянемо **формулу простих відсотків**.

Нехай у банку, який нараховує на початковий вклад p % щомісячно, відкрито депозит.

Визначмо, яку суму буде накопичено за цих умов, якщо вклад зберігають протягом n ($n \in \mathbf{N}$) місяців, де $n \leq 12$, а початковий вклад становить A_0 .

Якщо початковий вклад дорівнював A_0 , то вкладник буде мати наприкінці

$$\text{першого місяця: } A_1 = A_0 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right);$$

$$\text{другого місяця: } A_2 = A_1 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{2 \cdot p}{100} \right).$$

Отже, згідно з методом математичної індукції, загальну суму, яку буде накопичено на депозиті протягом n місяців ($n \leq 12$), обчислюють за такою формулою:

$$A_n = A_0 \left(1 + n \cdot \frac{p}{100} \right). \quad (11.17)$$

Це і є формула простих відсотків. Її застосовують для визначення загальної суми на рахунку в тому разі, якщо протягом зазначеного строку зберігання відсотки нараховують лише на початковий вклад.

Однак якщо вкладник зберігає кошти на депозиті протягом кількох років за умови, що він не знімає нараховані за цей час відсотки, відбувається капіталізація відсотків.

Отже, разом із первинним вкладом базою для нарахування відсотків кожного нового року зберігання стають відсотки попередніх років, тобто має місце схема «відсотки на відсотки».

Розгляньмо **формулу складних відсотків**.

Нехай суму A_0 покладено в банк під p % річних, і її зберігають там протягом n років.

Визначмо суму, що накопичено на рахунку через n років.

Після завершення першого року сума буде становити:

$$A_1 = A_0 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

Наприкінці другого року, завдяки капіталізації відсотків попереднього року, загальна сума на рахунку буде дорівнювати:

$$A_2 = A_1 + \frac{p}{100} A_1 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2.$$

За методом математичної індукції маємо таку формулу складних відсотків:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (11.18)$$



До банку зроблено вклад під 10 % річних.

Визначмо, через скільки років загальна сума на рахунку зросте вдвічі, якщо щорічний прибуток клієнт буде залишати на рахунку.

Застосовуючи формулу складних відсотків, маємо:

$$A_n = 2A_0 = A_0 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^n = A_0 \cdot (1,1)^n \Rightarrow (1,1)^n = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow n \lg 1,1 = \lg 2 \Rightarrow n = \frac{\lg 2}{\lg 1,1} = 7,2725.$$

Отже, загальна сума на рахунку зросте вдвічі через 7 років.



Ключові терміни

Множина; порожня множина; універсум; числові множини; діаграма Венна – Ейлера; змінна; область змінювання; функція; аргумент; область визначення функції; область значень функції; спосіб задання функції; парність (непарність) функції; монотонність функції; період функції; взаємно обернені функції; алгебраїчні функції; трансцендентні функції; елементарні функції; складена функція; неелементарні функції.



Запитання для самоперевірки

1. Що таке «множина»? Які є способи її задання? Наведіть приклади.
2. Які множини називають дискретними, неперервними?
3. Що таке «підмножина»?
4. Поясніть за допомогою діаграм Венна – Ейлера такі дії над множинами: додавання, віднімання, добуток множин.
5. Що таке «змінна» і «стала» величини?
6. Яку залежність називають функціональною?
7. Які є способи задання функції?
8. Що таке «область визначення» та «область значення» функції?
9. Які функції називають парними, непарними, функціями загального вигляду? Які властивості мають графіки цих функцій?
10. Які функції є періодичними? Які властивості має графік такої функції?
11. Які функції називають монотонними?
12. Що таке «обернена функція»? Які властивості мають графіки взаємно обернених функцій?

13. Дайте означення елементарної функції.
14. Що таке «складена функція»?
15. Наведіть приклад неелементарних функцій.
16. Наведіть приклади застосування елементарних функцій в економіці.
17. За якою формулою визначають прості відсотки?
18. Що таке «складні відсотки» та за якою формулою їх обчислюють?



Тестові завдання до підрозділу 11

1. На універсумі натуральних чисел задано дві множини: $A = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ та $B = \{2n-1 \mid n \in \mathbf{N}\}$.

Яке з наведених далі співвідношень є правильним:

- а) $B \subset A$; б) $A \cup B = \mathbf{N}$; в) $B \setminus A = \emptyset$; г) $A \setminus B = \emptyset$; ґ) $A \subset B$?

2. Множину $A \subset \mathbf{N}$ задано переліком її елементів: $A = \{2; 4; 6; \dots; 2n; \dots\}$.

Яка із множин $B \subset \mathbf{N}$ відповідає умові $B = \mathbf{N} \setminus A$:

- а) $B = \{0; 1; 3; \dots; 2n-1; \dots\}$; б) $B = \{1; 3; 5; \dots; 2n+1; \dots\}$;
 в) $B = \{1; 3; \dots; 2n-1; \dots\}$; г) $B = \{0; 1; 3; \dots; 2n+1; \dots\}$?

3. На діаграмі Венна – Ейлера множини A і B визначено як два круги на прямокутнику U , причому круг, що відповідає множині B , міститься повністю всередині круга, що відповідає множині A , й обидва круги заштриховано.

Який символічний вираз описує множину, що відповідає тій частині діаграми, яку не заштриховано:

- а) $U \setminus (A \cap B)$; б) $U \setminus (A \cup B)$; в) $U \setminus B$; г) $U \cup (A \setminus B)$?

4. Серед наведених далі функцій виберіть таку, для якої вся множина дійсних чисел не є її областю визначення (тобто твердження $x \in \mathbf{R}$ є хибним):

- а) $y = (x+1)^{-2}$; б) $y = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x < 0; \\ \sqrt{x+1}, & x \geq 0; \end{cases}$ в) $y = \frac{x-1}{x^2+1} + 5$; г) $x^2 - y - 10 = 0$.

5. Укажіть, графік якої з наведених далі функцій є симетричним відносно осі Oy :

а) $y = 2 - x$; б) $y = \frac{-3}{x}$; в) $y = \frac{x-1}{x^2+1}$; г) $y = 5^x$; д) $y = \sqrt{25-x^2}$.

6. Відомо, що функція $y = f(x)$ має область визначення $x \geq 0$ і є монотонно зростаючою.

Щодо властивостей її оберненої функції:

- а) можна стверджувати, що вона є монотонно спадною;
б) можна стверджувати, що вона є монотонно зростаючою;
в) висновок можна зробити лише в тому разі, якщо задано конкретну функцію, а не взагалі.

7. Задано періодичні функції: $y = 2\sin x$; $y = \sin 2x$; $y = \operatorname{tg} 3x$. Для кожної із цих функцій визначте її період і розташуйте їх у порядку зростання їхніх періодів:

а) $\operatorname{tg} 3x$; $\sin 2x$; $2\sin x$; б) $2\sin x$; $\sin 2x$; $\operatorname{tg} 3x$; в) $\sin 2x$; $2\sin x$; $\operatorname{tg} 3x$.

8. Укажіть, яка з наведених далі функцій є неспадною на всій області свого визначення:

а) $y = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ \sqrt{x+1}, & x \geq 0; \end{cases}$ б) $y = \frac{x+1}{x^2-1}$; в) $x^2 + y^2 = 16$; г) $y = \sin^2 x$.

9. Вихідну ціну S_0 на продукцію спочатку підвищили на 20 %, а потім нову ціну S_1 знизили на 25 %.

Укажіть, яке з наведених тверджень щодо співвідношення між вихідною S_0 і кінцевою S_2 цінами є правильним:

а) $S_2 < S_0$; б) $S_2 = S_0$; в) $S_2 > S_0$; г) немає правильної відповіді.

10. Банк нараховує відсотки на вклад наприкінці кожного року. Якщо вкладник не знімає відсотки наприкінці року, то їх капіталізують.

Визначте, який прибуток отримає вкладник за три роки неперервного зберігання, якщо первинний вклад становить 1 000 грн, а банк нараховує 10 % річних:

а) 300 грн; б) 1 300 грн; в) 331 грн; г) 1 210 грн.

Література: [1 – 9; 11 – 15; 20 – 23].

12. Границя функції натурального аргументу

Основні питання:

- 12.1. Числові послідовності: основні означення та арифметичні операції.
- 12.2. Границя числової послідовності.
- 12.3. Нескінченно малі послідовності: означення, властивості.
- 12.4. Нескінченно великі послідовності: означення, властивості, зв'язок із нескінченно малими.
- 12.5. Властивості границь числових послідовностей.

12.1. Числові послідовності: основні означення та арифметичні операції

Числовою послідовністю називають функцію $y = f(x)$, де $x \in \mathbf{N}$. У цьому разі функцію позначають $x_n = f(n)$.

Отже, послідовність є функцією, що визначена на множині натуральних чисел, x_n називають **загальним членом** числової послідовності. Числову послідовність позначають символом $\{x_n\}$.

Числову послідовність вважають заданою, якщо для кожного номера n ($n \in \mathbf{N}$) можна однозначно визначити відповідний член послідовності. З означення послідовності як функції натурального аргументу випливає, що всі способи задання функції можна застосувати й для послідовності, але найчастіше задання послідовності виконують аналітичним способом, тобто у вигляді формули загального члена $x_n = f(n)$. Іноді застосовують *рекурентну форму* задання послідовності, якщо кожний наступний її член, починаючи з деякого номера n , подають через попередній або через декілька попередніх її членів.



Наприклад, арифметичну прогресію, яка є прикладом числової послідовності, можна задати за допомогою формули загального члена:

$$x_n = a_1 + d(n-1), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Отже,

$$\{x_n\}: a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + d(n-1), \dots,$$

де a_1 – перший член прогресії;

d – різниця.

Якщо цю саму послідовність задати за допомогою рекурентного співвідношення, то маємо:

$$x_{n+1} = x_n + d,$$

де $x_1 = a_1$.

Арифметичні операції над числовими послідовностями зводять до відповідних дій над їхніми членами з однаковими номерами:

$$\{z_n\} = \{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\};$$

$$\{z_n\} = \{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\};$$

$$\{z_n\} = c \cdot \{x_n\} = \{c \cdot x_n\}, \quad c = \text{const};$$

$$\left\{ z_n \right\} = \frac{\left\{ x_n \right\}}{\left\{ y_n \right\}} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \quad (y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}).$$

Серед числових послідовностей розрізняють обмежені й необмежені, монотонні й немонотонні.

Обмеженою послідовністю $\{x_n\}$ називають послідовність, для якої існує таке число $M > 0$, що всі члени послідовності за модулем не перевищують M . Отже,

$$\exists M > 0 \quad \forall x_n (n \in \mathbf{N}) : |x_n| \leq M. \quad (12.1)$$

Необмеженою послідовністю називають таку послідовність, що для будь-якого числа $M > 0$ можна визначити відповідне йому значення x_n , яке за модулем перевищує число M , тобто

$$\forall M > 0 \quad \exists x_n (n \in \mathbf{N}) : |x_n| > M. \quad (12.2)$$



Наприклад, послідовність $\{x_n\} = \frac{n}{n+1}$ називають обмеженою, оскільки умову (12.1) задовольняють для $M = 1$, а послідовність $\{x_n\} = 2^n$ – необмеженою.

Монотонно зростаючою (спадною) послідовністю називають таку послідовність $\{x_n\}$, для всіх членів якої виконують таку нерівність:

$$x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbf{N}) . \quad (12.3)$$

Наприклад, відома зі шкільного курсу послідовність $\{x_n\}$, члени якої утворюють геометричну прогресію $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$, є послідовністю зростаючою, якщо її знаменник $q > 1$, і спадною за $0 < q < 1$.

12.2. Границя числової послідовності

Перш ніж увести поняття границі, наведемо приклади числових послідовностей і проаналізуємо, як змінюється величина їхніх членів зі збільшенням номера n ($n \in \mathbf{N}$):



$$1) \{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$$

$$2) \{x_n\} = \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\} : 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \dots;$$

$$3) \{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots;$$

$$4) \{x_n\} = \{2^n\} : 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$$

За зростання n змінна x_n для першої з наведених послідовностей наближається до нуля, для другої – теж за абсолютною величиною наближається до нуля, але значення x_n коливаються навколо нуля; для третьої – змінна, поступово зростаючи ($x_n < 1$), наближається до 1. Спільним для цих послідовностей є те, що за зростання номера n різниця між x_n і певною сталою величиною a зменшується і залишається малою. Але поведінка послідовності $\{x_n\}$, де $x_n = 2^n$, є якісно відмінною від поведінки трьох попередніх послідовностей, а саме зі збільшенням n вона необмежено зростає.

Число a називають **границею послідовності** $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε , яким малим би воно не було, існує такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх значень змінної x_n , у яких $n > N$, виконують нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Стисло означення границі можна подати так:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon . \quad (12.4)$$

Якщо a – границя послідовності $\{x_n\}$, то це позначають так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a , \quad (12.5)$$

де $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ читають як «границя числової послідовності x_n за $n \rightarrow \infty$ »;

$n \rightarrow \infty$ читають як « n необмежено збільшується», або « n прямує до нескінченності».

Послідовність, яка має скінченну границю a (12.5), називають **збіжною**, і кажуть, що вона *збігається до числа a* . Інакше послідовність називають **розбіжною**.

У геометричній інтерпретації умова $|x_n - a| < \varepsilon$ означає, що під час змінювання n усі члени числової послідовності (окрім, можливо, скінченної кількості точок) потрапляють в ε -окіл точки a , тобто $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ (рис. 12.1).

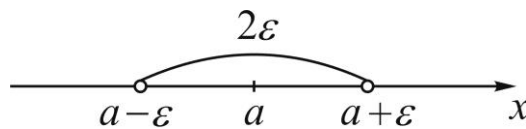


Рис. 12.1. ε -окіл точки a

Звідси маємо таку *геометричну інтерпретацію границі* числової послідовності: якщо число a є границею послідовності $\{x_n\}$, то який би ε -окіл точки a не взяли, усі члени послідовності $\{x_n\}$, починаючи з $n > N$, мають потрапити до цього околу.

Отже, поза цим околom залишається скінченна кількість членів x_n .



Розгляньмо таку числову послідовність:

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} .$$

Згідно з означенням, доведено, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ є довільним, визначмо таке $N(\varepsilon)$, що за $n > N(\varepsilon)$ виконано таку нерівність:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Звідси маємо

$$\left| -\frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Тому достатньо за $N(\varepsilon)$ узяти $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$, де цей запис означає, що розглядають цілу частину того числа, що стоїть у квадратних дужках.

На рис. 12.2 наведено графік числової функції $\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$.

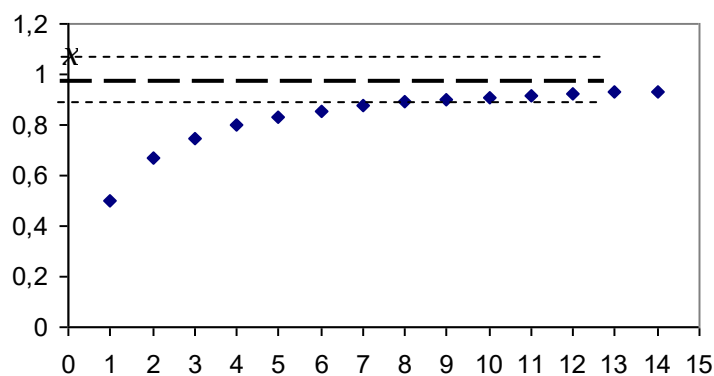


Рис. 12.2. Графік функції $\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$

Видно, що із збільшенням n значення x_n зростає, наближаючись до 1, однак не перевищуючи її. На графіку визначено ε -окіл для $\varepsilon = 0,1$; $N(0,1) = 10$.

Аналогічно можна довести співвідношення:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{та} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.$$

12.3. Нескінченно малі послідовності: означення, властивості

Числову послідовність $\{x_n\}$ називають **нескінченно малою**, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad (12.6)$$

тобто для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке $N(\varepsilon)$, що $|x_n| < \varepsilon$, якщо $n > N(\varepsilon)$.

Отже, стисло:

$$\forall \varepsilon > 0: |x_n| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon). \quad (12.7)$$

У геометричній інтерпретації умова $|x_n| < \varepsilon$ означає, що за необмеженого зростання n ($n \rightarrow \infty$) усі члени x_n (крім, можливо, скінченної кількості) потрапляють в інтервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$, який є ε -околом нуля (рис. 12.3).

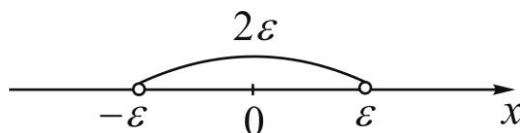


Рис. 12.3. ε -окіл точки 0



Наприклад, розгляньмо геометричну прогресію з першим членом $x_1 = 0,1$ і знаменником $q = 0,1$. Загальний член такої послідовності має такий вигляд:

$$x_n = 10^{-n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ця послідовність є нескінченно малою. Дійсно, з умови $10^{-n} < \varepsilon$ маємо $n > [-\lg \varepsilon] = N(\varepsilon)$, тобто нескінченна кількість значень змінної потрапляє до інтервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$, яким би малим він не був.

Щоб відрізняти нескінченно малі послідовності, їхні члени позначають буквами грецького алфавіту: $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ тощо.

Арифметичні властивості нескінченно малих послідовностей. З означення нескінченно малих послідовностей випливають такі *арифметичні властивості*:

1) сума (різниця) двох нескінченно малих послідовностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ теж є нескінченно малою:

$$\alpha_n \pm \beta_n = \gamma_n; \quad (12.8)$$

2) сума обмеженої послідовності $\{x_n\}$ і нескінченно малої є обмеженою послідовністю:

$$\{x_n + \alpha_n\};$$

3) добуток двох нескінченно малих $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ теж є нескінченно малою:

$$\alpha_n \beta_n = \gamma_n; \quad (12.9)$$

4) добуток обмеженої послідовності $\{x_n\}$ і нескінченно малої $\{\alpha_n\}$ є нескінченно малою:

$$x_n \cdot \alpha_n = \beta_n \text{ (зокрема, якщо } x_n = c - \text{const, то } c \cdot \alpha_n = \beta_n \text{).}$$

Доведення.

1. Покажімо, що $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}$ є нескінченно малою.

Нехай $\varepsilon > 0$ є довільним. Оскільки $\alpha_n \rightarrow 0$ і $\beta_n \rightarrow 0$, то існують такі N_1 і N_2 , що $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_1$ і $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_2$.

Для суми $\alpha_n + \beta_n$ маємо:

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n > \max\{N_1, N_2\}.$$

Для різниці $\{\alpha_n\} - \{\beta_n\}$ окремого доведення не знадобиться, оскільки її можна подати як суму нескінченно малих $\{\alpha_n\}$, $\{-\beta_n\}$.

2. Виберімо таке $M > 0$, що $|x_n| \leq M$ для всіх $n \in \mathbf{N}$, і таке $\varepsilon > 0$, що всі члени послідовності $\{\alpha_n\}$, починаючи з першого включно, за модулем не перевищують ε , тоді для суми $\alpha_n + x_n$ маємо:

$$|\alpha_n + x_n| \leq |\alpha_n| + |x_n| \leq \varepsilon + M = M_1.$$

Отже, усі члени послідовності, де $x_n + \alpha_n = y_n$, за модулем не перевищують числа M_1 : $|y_n| \leq M_1$, а отже, $\{y_n\}$ є обмеженою числовою послідовністю.

3. Якщо $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ є нескінченно малими послідовностями, то для довільних $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$, якими б малими вони не були, виконують нерівності:

$$\forall \varepsilon_1 > 0: |\alpha_n| < \varepsilon_1 \quad \forall n > N_1 \quad \text{і} \quad \forall \varepsilon_2 > 0: |\beta_n| < \varepsilon_2 \quad \forall n > N_2.$$

Виберімо $\forall \varepsilon > 0: |\alpha_n| < \sqrt{\varepsilon}, |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon}$. Для добутку маємо:

$$\forall \varepsilon > 0: |\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon},$$

тобто $\forall \varepsilon > 0: |\alpha_n \cdot \beta_n| < \varepsilon \quad \forall n > \max\{N_1, N_2\}$.

4. За означеннями обмеженої послідовності та нескінченно малої:

$$|x_n| \leq M \quad \text{і} \quad \forall \varepsilon_1 > 0: |\alpha_n| < \varepsilon_1 \quad \forall n > N.$$

Покажімо, що для довільного $\varepsilon > 0$ має місце нерівність: $|x_n \alpha_n| < \varepsilon$.

За властивостями нерівностей, маємо:

$$|x_n \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \varepsilon_1.$$

Оскільки ε є довільним, виберімо його таким, що дорівнює ε/M . Тоді приходьмо до нерівності $|x_n| \cdot |\alpha_n| < \varepsilon$.

Отже, $|x_n \alpha_n| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, а це й означає, що змінна $x_n \alpha_n = \beta_n$ є нескінченно малою. Зокрема, якщо $x_n = c - \text{const}$, то $c \alpha_n = \beta_n$. ■



Слід зазначити, що властивості алгебраїчної суми й добутку двох нескінченно малих поширюють на будь-яке скінченна кількість доданків і співмножників.

Теорема 12.1 (зв'язок між нескінченно малою та границею). Число a є скінченною границею числової послідовності $\{x_n\}$ тоді й лише тоді, якщо загальний член x_n цієї послідовності є сумою числа a та деякої нескінченно малої α_n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad x_n = a + \alpha_n. \quad (12.10)$$

Доведення.

Необхідність. Якщо a – границя числової послідовності, то, за означенням границі (12.4), різниця між x_n і a є нескінченно малою: $x_n - a = \alpha_n$, отже, $x_n = a + \alpha_n$.

Достатність. Нехай має місце рівність $x_n = a + \alpha_n$. Тоді $x_n - a = \alpha_n$, а, за означенням нескінченно малої, $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \forall n > N$, що означає:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \blacksquare$$

12.4. Нескінченно великі послідовності: означення, властивості, зв'язок із нескінченно малими

Нескінченно великою числовою послідовністю $\{x_n\}$, або просто **нескінченно великою**, називають таку послідовність, яка в разі свого змінювання стає і залишається за модулем більшою за будь-яке наперед задане, скільки завгодно велике число $M > 0$, тобто

$$\forall M > 0 : |x_n| > M \quad \forall n > N. \quad (12.11)$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ є нескінченно великою числовою послідовністю, то можливі такі випадки.

1. Послідовність $\{x_n\}$ прямує до $+\infty$ (позначають це так: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$), якщо для довільного $M > 0$ існує таке N , що $x_n > M \quad \forall n > N$.

2. Послідовність $\{x_n\}$ прямує до $-\infty$ (позначають це так: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$), якщо для довільного $M > 0$ існує таке N , що $x_n < -M \quad \forall n > N$.

У геометричній інтерпретації умова $|x_n| > M$, означає, що якщо $n \rightarrow \infty$ всі значення x_n (крім, можливо, скінченної кількості точок) потрапляють і залишаються зовні M -околу нуля, тобто $x < -M \cup x > M$ (рис. 12.4).

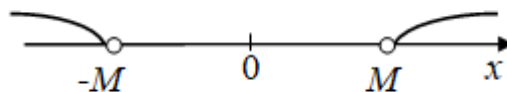


Рис. 12.4. M -окіл нескінченності (∞)



Розгляньмо послідовність $\{x_n\}$ із загальним членом $x_n = 10^n$. За довіль-

ного вибору M за умовою $10^n > M$ визначаймо, що для всіх $n > \lg M$ нескінченна кількість значень змінної опиниться поза інтервалом $(-M, M)$, яким би широким він не був.

Найпростішою нескінченно великою є змінна, значеннями якої є натуральні числа, що взяті в природному порядку.

Розгляньмо арифметичні властивості нескінченно великих послідовностей.

Нехай $\{x_n\}, \{y_n\}$ – дві нескінченно великі послідовності (будьмо позначати їх граничними значеннями: $\infty, \pm\infty$), а z_n – обмеженою змінною. За означенням нескінченно великої й обмеженої змінних, впливають такі *арифметичні властивості*:

1) сума двох нескінченно великих, однакових за знаком, теж є нескінченно великою того самого знаку:

$$\begin{cases} +\infty + (+\infty) = +\infty, \\ -\infty + (-\infty) = -\infty; \end{cases} \quad (12.12)$$

2) сума обмеженої змінної z_n (або $z_n = \text{const}$) та нескінченно великої є нескінченно великою:

$$z_n + (\pm\infty) = \pm\infty; \quad (12.13)$$

3) добуток двох нескінченно великих є нескінченно великим:

$$\begin{cases} +\infty \cdot (+\infty) = +\infty, \\ -\infty \cdot (\mp\infty) = \pm\infty; \end{cases} \quad (12.14)$$

4) добуток обмеженої змінної z_n (або $z_n = \text{const} \neq 0$) із нескінченно великою теж є нескінченно великим:

$$z_n \cdot \infty = \infty. \quad (12.15)$$

Теорема 12.2 (про зв'язок між нескінченно великою і нескінченно малою).

Справедливими є такі твердження:

1) якщо послідовність із загальним членом x_n є нескінченно великою, то обернена до неї послідовність із загальним членом $\frac{1}{x_n}$ є нескінченно малою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0; \quad (12.16)$$

2) якщо послідовність із загальним членом α_n є нескінченно малою, то обернена до неї послідовність із загальним членом $\frac{1}{\alpha_n}$ є нескінченно великою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty. \quad (12.17)$$

Доведення ґрунтується на означеннях нескінченно великої й нескінченно малої послідовностей:

1) оскільки за умовою $\{x_n\}$ є нескінченно великою, то, згідно з означенням:

$$\forall M > 0: |x_n| > M \quad \forall n > N.$$

Треба показати, що послідовність $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ є нескінченно малою,

тобто $\forall \varepsilon > 0: \left| \frac{1}{x_n} \right| = |\alpha_n| < \varepsilon \quad \forall n > N.$

За властивостями нерівностей і модуля відношення двох чисел, маємо:

$$\frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{M} \quad \forall n > N \quad \text{і} \quad \left| \frac{1}{x_n} \right| < \frac{1}{M} \quad \forall n > N.$$

Оскільки M є довільною сталою, виберімо її такою, що дорівнює $1/\varepsilon$.

Тоді приходьмо до нерівності $\left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > N$, а це означає, що $\{1/x_n\} = \{\alpha_n\}$, тобто $\{1/x_n\}$ є нескінченно малою;

2) аналогічно доводять справедливність співвідношення (12.17). ■

12.5. Властивості границь числових послідовностей

Властивості збіжних послідовностей формують у вигляді теорем, які далі застосовують у теоретичних та практичних дослідженнях.

Теорема 12.3. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має границю $a > 0$ ($a < 0$), то, починаючи з деякого номера, усі члени послідовності $x_n > 0$ ($x_n < 0$).

Доведення. За означенням границі послідовності для будь-якого $\varepsilon > 0$, наприклад, $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$, існує такий номер N , що за $n > N$ буде виконано таку нерівність:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ або } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Звідси, якщо $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$, маємо:

$$\frac{a}{2} < x_n < a + \frac{a}{2}, \text{ або } x_n > \frac{a}{2} > 0.$$

Для випадку $a < 0$ доведення є аналогічним. ■

Теорема 12.4. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має скінченну границю, то ця послідовність є обмеженою.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}$ має скінченну границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N , що для всіх $n > N$ буде виконано таку подвійну нерівність: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Отже, кількість членів послідовності, що не потрапляють в інтервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, є скінченною. Тоді серед чисел $x_1, x_2, \dots, x_N$, $x_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \forall n < N$ виберімо найбільше M та найменше m . Очевидно, що всі значення x_n задовольняють таку нерівність: $m \leq x_n \leq M$, що означає обмеженість $\{x_n\}$. ■

Теорема 12.5. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має скінченну границю, то ця границя є тільки єдиною.

Доведення. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Припустімо, що існує інша границя, тобто

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ та $a \neq b$. За теоремою (12.1), маємо:

$$x_n = a + \alpha_n, \quad x_n = b + \beta_n,$$

де α_n, β_n є нескінченно малими величинами.

Віднявши почленно ці співвідношення, маємо:

$$\beta_n - \alpha_n = a - b \text{ або } |\beta_n - \alpha_n| = |a - b|.$$

Ця рівність є неможливою. Дійсно, різниця $\beta_n - \alpha_n$ є нескінченно малою, тому

$$|\beta_n - \alpha_n| = |a - b| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Якщо вибрати $\varepsilon = |a - b|$, то маємо хибну нерівність $|a - b| < |a - b|$.

Тобто припущення щодо існування іншої границі є хибним. ■

Теорема 12.6. Якщо члени послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ і $\{z_n\}$, починаючи з деякого n ($n > N_0$) задовольняють нерівність $x_n \leq y_n \leq z_n$ та послідовності $\{x_n\}$ і $\{z_n\}$ мають границі, які є рівними між собою: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, то послідовність $\{y_n\}$ є збіжною і має ту саму границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Доведення. За означенням границі послідовності $\{x_n\}$, маємо таку нерівність:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > N_1.$$

Для послідовності $\{z_n\}$ виконують аналогічну нерівність:

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > N_2.$$

Якщо вибрати з номерів N_0, N_1, N_2 найбільший $N = \max(N_0, N_1, N_2)$, то для $n > N$ маємо таку нерівність:

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > N,$$

$$\text{звідси } a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > N : |y_n - a| < \varepsilon.$$

Отже, послідовність $\{y_n\}$ є збіжною і має ту саму границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a. \quad \blacksquare$$

Теорема 12.7. Якщо члени двох послідовностей задовольняють нерівність $x_n \leq y_n$, то їхні границі задовольняють нерівність $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Теорему наводьмо без доведення.

Теорема 12.8 (ознаки збіжності монотонних послідовностей).

1. Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає і є обмеженою згори деяким числом C , то така послідовність має скінченну границю, а саме існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \leq C. \quad (12.18)$$

2. Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонно спадає і є обмеженою знизу деяким числом C , то така послідовність має скінченну границю, а саме існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq C. \quad (12.19)$$

Наводьмо теорему без доведення.

Теорема 12.9. Нехай $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ є збіжними послідовностями, границі яких є відомими: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$; $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, тоді їхня сума (різниця), добуток, частка (якщо границя знаменника $\neq 0$) також мають границю, до того ж виконують таке співвідношення:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = ab; \end{aligned} \quad (12.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

Наведені співвідношення поширюють і на випадок кількох, але скінченної кількості доданків чи множників.

Доведімо одне із тверджень теореми, наприклад:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b.$$

Доведення. За визначенням границі, маємо:

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

де α_n і β_n є нескінченно малими.

Обчислімо добуток:

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \underbrace{b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n}_{\gamma_n}.$$

Зважаючи на властивості нескінченно малих (до доданка ab додають нескінченно малу), маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b. \blacksquare$$

Наслідок із теореми про границю добутків числових послідовностей: сталий множник k можна виносити за знак границі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot x_n = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad k = \text{const}. \quad (12.21)$$

Інші властивості доводять аналогічно.

Зауважмо, що під час розв'язування прикладів на обчислення границь послідовностей застосовують арифметичні властивості нескінченно малих і нескінченно великих (у поєднанні з обмеженими змінними) та границі суми, добутку, частки тільки в тих випадках, якщо послідовності задовольняють умови теорем. Окремі випадки визначення границь, у яких зазначені теореми застосувати неможливо, буде розглянуто пізніше.



Розгляньмо приклади обчислення границь числових послідовностей:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0,5^n + 3 \operatorname{arctg} 2n}{5\pi + \operatorname{arctg}(1/n)} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (0,5^n + 3 \operatorname{arctg} 2n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (5\pi + \operatorname{arctg}(1/n))} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 0,5^n + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} 2n}{5\pi + \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(1/n)} = \\ &= \frac{0 + 3 \cdot \pi/2}{5\pi + \pi/2} = \frac{3}{11}. \end{aligned}$$

Після граничного переходу зважаймо на властивості основних елементарних функцій, взаємозв'язок між нескінченно великими й нескінченно малими, арифметичні властивості границь числової послідовності.

Границі чисельника $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ і знаменника $\left(\frac{11\pi}{2}\right)$ є скінченними, тому границя числової послідовності дорівнює їхньому відношенню;

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n - 1) = \left| 3 \cdot \infty^2 + 5 \cdot \infty - 1 = \infty + \infty \right| = \infty.$$

Отже, зважаючи на властивості нескінченно великих, маємо, що числова послідовність розбігається;

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\ln(n+1)} + 3 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\ln(n+1)} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 3.$$

Зважаючи на взаємозв'язок між нескінченно великими й нескінченно малими, маємо арифметичні властивості границь числової послідовності;

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + \sqrt{\frac{8}{n^3} + 1}}{\sqrt{\frac{2}{n^2} + 4}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(9 + \sqrt{\frac{8}{n^3} + 1} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n^2} + 4}} = 5.$$

Під час розв'язування прикладу застосовано арифметичні властивості нескінченно малих і нескінченно великих та границі суми й частки.



Ключові терміни

Числова послідовність; загальний член послідовності; рекурентна форма задання послідовності; функція натурального аргументу; обмежена послідовність; монотонна послідовність; границя послідовності; збіжність послідовності; нескінченно мала величина; нескінченно велика величина.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають числовою послідовністю?
2. Які є способи задання числової послідовності? Наведіть приклади задання числових послідовностей за допомогою формули загального члена та рекурентного співвідношення?
3. Які арифметичні операції виконують над числовими послідовностями, сформулюйте правила визначення загального члена послідовності, що обчислюють як результат застосування цих операцій?
4. Які числові послідовності називають обмеженими та необмеженими?
5. Які послідовності належать до класу монотонних послідовностей?
6. Які послідовності називають нескінченно малими, яка їхня геометрична інтерпретація?
7. Які арифметичні властивості нескінченно малих?
8. Які змінні називають нескінченно великими?

9. У якому разі говорять, що змінна в процесі змінювання прямує до нескінченності?
10. Які арифметичні властивості нескінченно великих?
11. Як формулюють теорему про зв'язок між нескінченно малими й нескінченно великими?
12. Яке є означення границі числової послідовності?
13. У чому полягає критерій збіжності числової послідовності «мовою» нескінченно малих?
14. Як формулюють і доводять теорему про єдиність границі?
15. Як формулюють і доводять теорему про арифметичні властивості збіжних числових послідовностей?



Тестові завдання до підрозділу 12

1. Число a називають границею послідовності $\{x_n\}$, якщо:
- а) $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$;
 б) $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \exists n > N : |x_n - a| < \varepsilon$;
 в) $\exists \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$;
 г) $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N : |x_n - a| > \varepsilon$.
2. Послідовність $\{x_n\}$ називають обмеженою, якщо:
- а) $\forall M > 0, \exists n : |x_n| \leq M$; б) $\exists M > 0, \forall n : |x_n| > M$;
 в) $\forall M > 0, \forall n : |x_n| \leq M$; г) $\exists M > 0, \forall n : |x_n| \leq M$.
3. Послідовність $\{x_n\}$ називають нескінченно малою, якщо:
- а) $\exists \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N : |x_n| < \varepsilon$; б) $\forall \varepsilon > 0, \exists N : |x_n| < \varepsilon$;
 в) $\exists \varepsilon > 0, \forall n : |x_n| < \varepsilon$; г) $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N : |x_n| < \varepsilon$.
4. Послідовність $\{x_n\}$ називають нескінченно великою, якщо:
- а) $\forall M > 0, \exists N : |x_n| > M$; б) $\exists M > 0, \exists N, \forall n > N : |x_n| > M$;
 в) $\forall M > 0, \exists N, \forall n > N : |x_n| > M$; г) $\exists M > 0, \forall n : |x_n| > M$.

5. Яке з наступних тверджень є правильним:

- а) якщо послідовність є монотонною, то вона є збіжною;
- б) якщо послідовність є збіжною, то вона є обмеженою;
- в) якщо послідовність є обмеженою, то вона є збіжною;
- г) якщо послідовність є неспадною, то кожен наступний її член є більшим за попередній?

6. Яке з наступних тверджень є правильним:

- а) якщо послідовність є нескінченно великою, то вона є необмеженою;
- б) якщо послідовність є збіжною, то вона є монотонною;
- в) якщо монотонна послідовність є обмеженою, то вона є збіжною;
- г) якщо послідовність є обмеженою, то вона є нескінченно малою?

7. Яке з наступних тверджень є правильним:

- а) якщо послідовність є нескінченно великою, то вона є необмеженою;
- б) якщо послідовність є збіжною, то вона є монотонною;
- в) якщо монотонна послідовність є обмеженою, то вона є монотонною;
- г) якщо послідовність є необмеженою, то вона є нескінченно великою?

8. Яке з наступних тверджень є неправильним:

- а) усяка розбіжна послідовність є необмеженою;
- б) усяка збіжна послідовність є обмеженою;
- в) усяка монотонна обмежена послідовність є збіжною;
- г) якщо послідовність є необмеженою, то вона є нескінченно великою?

9. Яке з наступних тверджень є неправильним:

- а) добуток нескінченної малої послідовності на обмежену послідовність є нескінченно малою послідовністю;
- б) якщо послідовність є збіжною, то існує розбіжна її підпослідовність;
- в) сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю;
- г) якщо в числовій послідовності змінити, відкинути або приєднати скінченну множину членів, то це не вплине ні на існування, ні на величину границі цієї послідовності?

10. Число e є границею числової послідовності $\{x_n\}$, загальний член якої має такий вигляд:

а) $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$; б) $x_n = (1 + n)^{\frac{1}{n}}$; в) $x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n$; г) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Література: [1 – 3; 5; 14; 20 – 23].

13. Границя функції неперервного аргументу

Основні питання:

13.1. Означення границі функції. Критерій існування.

13.2. Поширення теорії границь послідовностей на функції.

13.3. Різні типи невизначеностей та їхнє розкриття. Перша та друга особливі границі.

13.4. Порівняння нескінченно малих. Застосування еквівалентних нескінченно малих до обчислення границь.

13.1. Означення границі функції. Критерій існування

Розглянуті елементи теорії границь функцій натурального аргументу – числової послідовності – є основою для побудови теорії границь функції неперервного аргументу.

Поняття границі числової послідовності, яке розглядали в попередньому підрозділі, можна поширити й на функцію $y = f(x)$, аргументом якої є неперервна змінна $x \in X$.

Отже, число A називають **границею функції** $y = f(x)$ за $x \rightarrow \infty$, якщо за необмеженого зростання послідовності значень аргументу відповідна послідовність значень функції збігається до A :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A. \quad (13.1)$$

Тобто, якщо x_0 є невластивим числом: ∞ або $\pm\infty$, тобто $\{x_n\} \rightarrow \infty$ за $n \rightarrow \infty$, а послідовність $\{y_n\}$ збігається до A .

Розгляньмо поняття границі функції в точці.

Нехай x_0 – певне фіксоване число, тобто точка числової осі, у деякому околі якої функція $y = f(x)$ є визначеною; у самій точці функція може й не існувати. Точку $x = x_0$ називають **межовою точкою** множини $X = \{x_i\}$, якщо в будь-якому околі точки існують значення $x \in X$, які є відмінними від x_0 .

Число A називають **границею функції** $y = f(x)$, якщо x прямує до x_0 (або в точці x_0), якщо для будь-якої послідовності значень аргументу, збіжної до x_0 , відповідна послідовність значень функції збігається до A :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \quad (13.2)$$

Оскільки для означення границі функції застосовують поняття послідовності, то говорять, що наведене означення границі функції сформульовано «мовою» *послідовностей*. Його називають **означенням границі функції за Гейне**.

Якщо A – нескінченність, то говорять, що функція має *нескінченну границю*, або $f(x)$ *збігається до нескінченності*:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Можливі випадки прямування функції до нескінченності, якщо $x \rightarrow x_0$, показано на рис. 13.1.

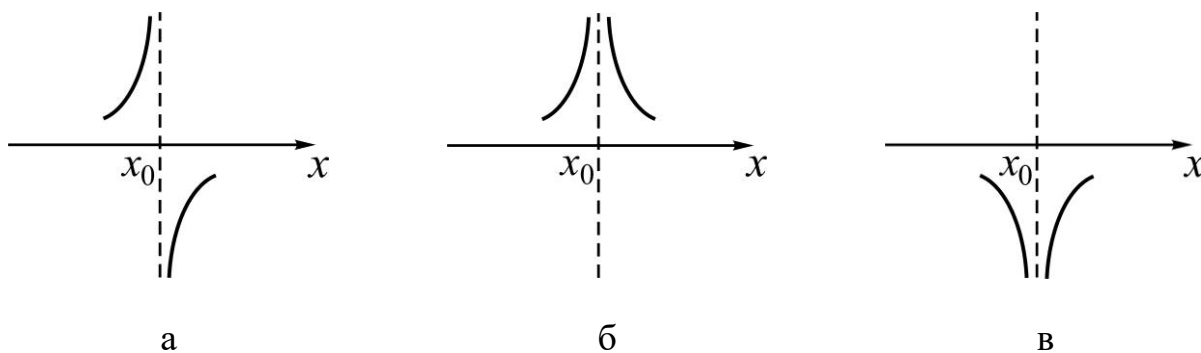


Рис. 13.1. Нескінченні границі функції в точці x_0 :

а) $f(x) \rightarrow \pm\infty$; б) $f(x) \rightarrow +\infty$; в) $f(x) \rightarrow -\infty$

Означення границі функції залишається й у тому разі, якщо x_0 – один із символів: ∞ , $+\infty$, $-\infty$, тобто якщо x прямує до нескінченності (13.1). *Пропонуймо* підтвердити розуміння всіх випадків прямування x до нескінченності (∞ , $+\infty$, $-\infty$), схематично зображаючи поведінку функції, яка має скінченну границю чи нескінченну границю, або не має границі за $x \rightarrow \infty$.

Наведімо ще одне означення границі функції.

Число A називають **границею функції $y = f(x)$** , якщо x прямує до x_0 (або в точці x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна визначити таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що за всіх $x \in X$, які задовольняють таку нерівність:

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

має місце нерівність:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Застосовуючи символи математичної логіки, означення границі функції можна подати так: число A називають **границею функції $y = f(x)$** у точці x_0 , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (13.3)$$

Наведене означення границі сформульовано «мовою» нескінченно малих (або «мовою» « $\varepsilon - \delta$ »). Його називають означенням **границі функції за Коші**.

Можна довести, що означення границі функції (13.2) і (13.3) є еквівалентними.

Розгляньмо геометричну інтерпретацію границі функції в точці (рис. 13.2).

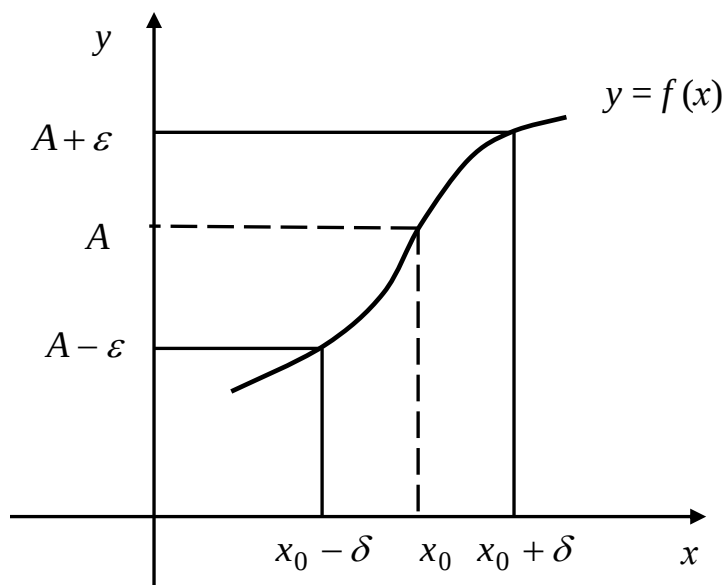


Рис. 13.2. Геометрична інтерпретація границі функції x

За означенням границі функції «мовою» нескінченно малих (за Коші), якщо число A є границею функції $y = f(x)$ за $x \rightarrow x_0$, то яким би малим ε -окіл точки A ми не взяли, буде існувати такий δ -окіл точки x_0 , що для всіх $x \neq x_0$ відповідні їм значення функції $y = f(x)$ містяться в смужі $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.



Використовуючи означення границі (13.2), доведемо, що $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ не існує.

Застосуємо для цього означення границі за Гейне. Візьмімо послідовність значень аргументу, що прямує до нуля:

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{(2n-1)\pi} \right\} \rightarrow 0 \text{ за } n \rightarrow \infty,$$

тоді маємо таку послідовність відповідних значень функції:

$$\{y_n\} = \{\cos(2n-1)\pi\} \rightarrow -1 \text{ за } n \rightarrow \infty.$$

Візьмімо іншу послідовність аргументу, яка теж прямує до нуля:

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{(2n-1)\pi} \right\} \rightarrow 0 \text{ за } n \rightarrow \infty,$$

тоді маємо таку послідовність значень функції:

$$\{y_n\} = \{\cos(2n-1)\pi\} \rightarrow -1 \text{ за } n \rightarrow \infty.$$

Отже, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ не існує, тому що для двох різних послідовностей значень x , обидві з яких збігаються до нуля, маємо різні границі відповідних послідовностей значень функцій.



Згідно з означенням границі (13.3), доведемо, що

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5.$$

Застосуємо для цього означення границі за Коші. Виберімо будь-яке довільне $\varepsilon > 0$ і визначмо відповідне йому $\delta(\varepsilon) > 0$, для якого

$$|3x - 1 - 5| = |3(x - 2)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x - 2| < \varepsilon / 3.$$

Отже, якщо вибрати $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$, то для будь-яких x , що задовольняють нерівність $|x - 2| < \varepsilon / 3$, буде виконано нерівність $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Тож, твердження є доведеним.

Звернімо увагу на поняття *односторонніх границь* функції. Згідно з означенням границі функції, співвідношення $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ передбачає, щоб відповідні умови означення було виконано для всіх точок, близьких до x_0 , як праворуч, так і ліворуч від неї. Але на практиці існують функції, що поведуть себе по-різному праворуч та ліворуч поблизу точки x_0 .

Наприклад,
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x < 1, \\ x^2, & \text{за } x \geq 1. \end{cases}$$

У зв'язку із цим уводять поняття лівої та правої границь функції.

Число A називають **лівою (правою) границею функції $f(x)$ в точці x_0** , якщо для будь-якої послідовності значень аргументу, що є збіжною до x_0 , до того ж $x_n < x_0$ ($x_n > x_0$), відповідна послідовність значень функції збігається до A .

Позначають:

ліву границю –

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0);$$

праву границю –

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Між односторонніми границями та границею функцій у точці x_0 існує певний зв'язок. Якщо односторонні границі функції існують і є рівними між собою, то існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, яка дорівнює тому самому числу, тобто

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \quad (13.4)$$

Як і для послідовностей, поняття нескінченно малої (великої) існують і для функцій. Однак суттєва відмінність полягає в тому, що одна й та сама функція може бути як нескінченно малою, так і нескінченно великою, залежно від того, до якого значення x_0 прямує її аргумент.

Функцію $y = f(x)$ називають **нескінченно малою функцією** за $x \rightarrow x_0$ або за $x \rightarrow \infty$, якщо її відповідна границя дорівнює нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ або } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0. \quad (13.5)$$

Для позначення нескінченно малої функції, як і для нескінченно малої послідовності, використовують перші літери грецького алфавіту, отже, пишуть: $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ тощо, підкреслюючи функціональну залежність від аргументу x .

Функцію $y = f(x)$ називають **нескінченно великою функцією** за $x \rightarrow x_0$ або за $x \rightarrow \infty$, якщо її границею є така нескінченність:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty(+\infty, -\infty). \quad (13.6)$$

Наприклад, одна й та сама функція $y = \frac{1}{x}$ є нескінченно малою за $x \rightarrow +\infty$ або за $x \rightarrow -\infty$ і нескінченно великою за $x \rightarrow 0$.



Властивості нескінченно малої, нескінченно великої та зв'язок між ними, що розглянуті для числової послідовності, є справедливими й для функцій неперервного аргументу.

Як **наслідок** із означення границі функції в точці впливають необхідна й достатня умови існування границі.

Теорема 13.1 (критерій існування скінченної границі). Функція $f(x)$ у точці x_0 має границею число A тоді й лише тоді, якщо її можна подати у вигляді суми числа A й нескінченно малої функції $\alpha(x)$ за $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x). \quad (13.7)$$

Доведення цієї теореми виконують аналогічно доведенню теореми щодо критерію збіжності числових послідовностей (пропонуємо зробити це самостійно).

13.2. Поширення теорії границь послідовностей на функції

Границі функції неперервного аргументу мають властивості, які є аналогічними тим, що було визначено для послідовностей. Цей факт легко доводять, якщо границі функції визначати мовою послідовностей.

Для розв'язування прикладів наведено теорему про обчислення границі суми, добутку та частки.

Теорема 13.2. Нехай на множині X із граничною точкою x_0 задано функції $f(x)$ та $g(x)$, які в точці x_0 мають скінченні границі:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B.$$

Тоді границя суми, добутку, частки цих функцій дорівнює, відповідно, сумі, добутку, частці границь цих функцій (якщо границя знаменника не дорівнює нулю).

Сформульовану теорему в стислому вигляді запишімо так:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B; \\ 2) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = A - B; \\ 3) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B; \\ 4) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0. \end{aligned} \tag{13.8}$$

Як приклад, доведемо теорему для першого співвідношення (13.8).

Доведення. За означенням границі функції для будь-якої послідовності значень змінної $x \in X$, які є відмінними від x_0 , тобто $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \rightarrow x_0$, існують відповідні послідовності значень функцій:

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots \rightarrow A;$$

$$g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n), \dots \rightarrow B.$$

Оскільки для функцій натурального аргументу, маємо:

$$f(x_1) + g(x_1), f(x_2) + g(x_2), f(x_3) + g(x_3), \dots, f(x_n) + g(x_n), \dots \rightarrow A + B,$$

то теорему доведено.

Інші співвідношення доводять аналогічно. ■

Якщо наведені умови теореми не виконують, то маємо справу з так званими невизначеностями, границі яких можна обчислити за допомогою відповідних перетворень. Якщо функцію визначено в точці x_0 , то обчислення границі зведено до підстановлення, замість x , його граничного значення $x = x_0$,

тобто використовують рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0)$.



Обчислімо таку границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$.

Для розв'язання цього прикладу застосуємо теореми про границю суми та частки двох функцій.

Отже, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{3}.$$



Обчислімо таку границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^2 - x - 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^3 - x - 2} = \left[\frac{8}{0} \right] = \infty.$$

У точці $x = 2$ функція є невизначеною, оскільки знаменник дробу дорівнює нулю, то теорема про границю частки не працює. Але із властивостей нескінченно малих ця функція є нескінченно великою за $x \rightarrow 2$.

Отже, за $x \rightarrow 2$ функція наближається до нескінченності.

13.3. Різні типи невизначеностей та їхнє розкриття.

Перша та друга особливі границі

Під час визначення границь функцій потрібно мати на увазі теореми, які задовольняють функції, що мають границю. Однак на практиці часто маємо справу з такими функціями, для яких неможливо використання зазначених

теорем без перетворювання виразу, границю якого треба обчислити. Такі вирази називають **невизначеностями**.

Загальний підхід до обчислення границі в умовах невизначеності передбачає таке:

1) *тотожні перетворення* функції, границю якої обчислюють, із метою звести ситуацію до можливості застосування арифметичних властивостей границь, а також властивостей нескінченно малих і нескінченно великих;

2) *застосування еталонних границь* – границь, які часто трапляються на практиці та їх використовують, як готові формули;

3) *уведення нової (допоміжної) змінної*, із метою спрощення початкового аналітичного виразу.

Перелічені кроки здійснюють незалежно один від одного в довільному порядку й не обов'язково разом: те чи те їхнє поєднання залежить від типу невизначеності й зумовлено кожним конкретним прикладом.

Можна запропонувати загальний алгоритм обчислення границь (рис. 13.3).



Рис. 13.3. Загальний алгоритм обчислення границь

Пояснення кожного кроку наведено далі:

1) *виконуємо* граничний перехід, що формально зводять до підстановлення в досліджувану функцію, замість аргументу x , його значення x_0 ;

2) *аналізуємо* визначений вираз, із метою встановлення, чи є він визначеним або невизначеним;

3) *записуємо* відповідний результат у разі визначеного виразу;

4) *розкриваємо* невизначеність за допомогою допоміжних перетворень, а потім даємо відповідь.

Розгляньмо ряд найбільш важливих невизначеностей різного типу. Під «важливими» розуміймо такі границі, які широко використовують (можливо, і у вигляді готових формул) під час обчислення границь.

Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ виникає під час обчислення границі відношення двох многочленів $P_k(x)$ та $P_m(x)$ від змінної x , якщо аргумент прямує до нескінченності. Для розкриття невизначеності такого типу потрібно із чисельника та знаменника дробу винести за дужки x^n , де $n = \max\{k, m\}$, а після скорочення виразу на x^n обчислити границю, підставивши у функцію значення, до якого прямує аргумент:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_k(x)}{P_m(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + b_{k-2} x^{k-2} + \dots + b_1 x + b_0} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \begin{cases} \infty, & k > m; \\ a_k/b_k, & k = m; \\ 0, & k < m. \end{cases} \quad (13.9)$$

Застосування ф-ли (13.9) дає змогу зразу записати результат, порівнявши степені чисельника k і знаменника m .



Обчислімо таку границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(5 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \right)} = \frac{5}{2}.$$

Зауваження. Висновки співвідношення (13.9) можуть бути застосованими й до дробів, у яких чисельник або знаменник містять степені із дробовими показниками.



Обчислімо таку границю за ф-лою (13.9):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2 + 1} + x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2 + 1} + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Оскільки в цьому прикладі найвищі степені чисельника і знаменника є однаковими (це перший степінь змінної x), то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при цьому степені змінної чисельника до знаменника.

Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0} \right]$. Розгляньмо границю частки двох функцій:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ якщо за } x \rightarrow x_0 \text{ обидві функції } f(x) \text{ і } g(x) \text{ прямують до } 0.$$

Це означає, що $x = x_0$ є коренем функції, що стоїть у чисельнику, а також коренем функції, що стоїть у знаменнику. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ є многочленами, то для розкриття невизначеності їх можна розкласти на множники, до того ж одним із яких обов'язково є $(x - x_0)$:

$$f(x) = P_k(x) = (x - x_0)P_{k-1}(x),$$

$$g(x) = P_m(x) = (x - x_0)P_{m-1}(x).$$

Потім скоротімо дріб на вираз $(x - x_0)$. Це можна виконати, оскільки $x - x_0 \neq 0$, бо змінна x не дорівнює x_0 , а лише прямує до неї. Після скорочення дробу виконаймо повторно граничний перехід. Якщо x_0 є простим коренем багаточленів, то невизначеність розкрито. У тому самому разі, якщо x_0 є кратним коренем обох многочленів, то знову прийдемо до невизначеності «нуль на нуль». Кількість операцій спрощування має дорівнювати найменшій із кратностей кореня $x = x_0$ чисельника і знаменника. Для того щоб виокремити в чисельнику і знаменнику множник $x = x_0$, можна поділити їх «сходинками» на вираз $(x - x_0)$.



Обчислімо таку границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{x^4 - 2x^2 + 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{x^4 - 2x^2 + 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{(x^2 - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2 (x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0.$$



Обчислімо таку границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 5x - 7}{x^2 - 3x + 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 5x - 7}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 + 2x + 7)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x + 7}{x-2} = -11.$$

Якщо треба розкрити невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$, коли чисельник та (або)

знаменник містять ірраціональні функції, то найбільш поширеною операцією, що дозволяє позбутися ірраціональності, є множення чисельника і знаменника дробу на спряжений вираз. Як наслідок, маємо раціональні функції, для яких і виокремимо множник $(x - x_0)$.



Обчислімо таку границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{14+x} - 4}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{14+x} - 4} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{6-x} - 2)(\sqrt{6-x} + 2)}{(\sqrt{14+x} - 4)(\sqrt{14+x} + 4)} \cdot \frac{(\sqrt{14+x} + 4)}{(\sqrt{6-x} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(\sqrt{14+x} + 4)}{(x-2)(\sqrt{6-x} + 2)} = -\frac{8}{4} = -2. \end{aligned}$$

Невизначеність типу $[\infty - \infty]$. Невизначеності цього типу за допомогою

перетворень потрібно привести до невизначеностей $\left[\frac{0}{0} \right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.



Обчислімо такі границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2+2} + x \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2} + x)(\sqrt{x^2+2} - x)}{(\sqrt{x^2+2} - x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2-x^2}{(\sqrt{x^2+2}-x)} = \left[\frac{2}{\infty} \right] = 0.$$

Зауважмо, що для цієї самої функції невизначеності немає, якщо $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+2} + x \right) = [\infty + \infty] = \infty,$$

оскільки сума двох нескінченно великих є нескінченно великою.

Перша особлива границя. Область застосування *першої особливої границі* – розкриття невизначеності «нуль на нуль», яка пов'язана з функціями, що містять тригонометричні або обернені тригонометричні функції.

Теорема 13.3. Границя відношення синуса нескінченно малого аргументу до цього самого аргументу дорівнює одиниці:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = 1. \quad (13.10)$$

Доведення. Для того щоб довести теорему, розгляньмо коло одиничного радіуса з центром у початку координат – точці O (рис. 13.4).

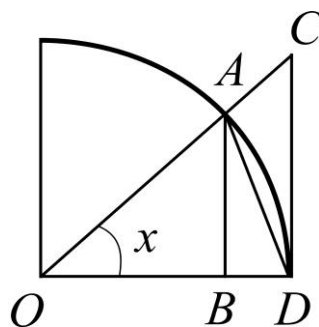


Рис. 13.4. Перша чверть одиничного круга

У першій чверті одиничного круга візьмемо кут x , тобто $0 < x < \pi/2$, де $OD = 1$, $\widetilde{AD} = x$, $AB = \sin x$, $CD = \operatorname{tg} x$. Порівнюючи площі трикутника OAD , кругового сектора OAD і трикутника OCD , маємо співвідношення між площами цих фігур:

$$S_{\triangle OAD} < S_{\text{сек.} OAD} < S_{\triangle OCD},$$

$$\frac{1}{2} OD \cdot AB < \frac{1}{2} OD \cdot \widetilde{AD} < \frac{1}{2} OD \cdot CD$$

або

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Замінюймо члени нерівності оберненими величинами і, з огляду на умови $0 < x < \frac{\pi}{2}$, маємо таку нерівність: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Зауважмо, що ці нерівності виконано і для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, тому що функції $\cos x$ і $\frac{\sin x}{x}$ є парними, тобто $\cos(-x) = \cos x$ та $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$.

Під час переходу до границі за $x \rightarrow 0$ будемо мати:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Отже, для границі праворуч співвідношення (13.10) доведено.

Для лівосторонньої границі, якщо $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, через парність функцій $\cos x$ та $\frac{\sin x}{x}$ приходьмо до того самого результату. ■

Ф-лу (13.10) не слід розуміти буквально в тому сенсі, що змінна x обов'язково має прямувати до нуля. Сама змінна x може прямувати до будь-якого x_0 , але потрібно, щоб аргумент під знаком синуса був довільною нескінченно малою $\alpha(x)$ за $x \rightarrow x_0$.

Отже, в узагальненому вигляді першу особливу границю можна записати так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = 1. \quad (13.11)$$



Для ілюстрації співвідношення (13.11) розгляньмо такі приклади:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x(x-1))}{x^2 - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} 2x(x-1) = \alpha \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{0,5\alpha} = 2;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0,5\pi} \frac{\cos x}{(x - 0,5\pi)^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} x - 0,5\pi = \alpha \\ x \rightarrow 0,5\pi \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = -\infty.$$

Наслідки. За першою особливою границею (13.10) маємо співвідношення, які зручно застосовувати під час розкриття невизначеності:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Друга особлива границя. Область застосування *другої особливої границі* – розкриття невизначеності «одиниця в степені нескінченність», яку породжено степенево-показниковими функціями $y = f(x) = u(x)^{v(x)}$.

Теорема 13.4. Границя степенево-показникової функції така:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \left[1^\infty \right] = e. \quad (13.12)$$

Доведення. Розгляньмо спочатку твердження (13.12) для натурального значення аргументу.

Доведімо, що границя послідовності із загальним членом $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

за $n \rightarrow \infty$ дорівнює:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (13.13)$$

Проаналізуємо поведінку послідовності із загальним членом $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

за $n \rightarrow \infty$. Доведімо, що послідовність $\{u_n\}$ монотонно зростає.

Дійсно, скористаймося формулою бінома Ньютона:

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

або

$$u_n = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Якщо n зростає, то зростає кількість додатних доданків (їх у формулі буде $(n+1)$), а також величина кожного доданка, тобто, дійсно, $\{u_n\}$ зростає.

Зробімо оцінювання загального члена послідовності u_n :

$$u_n < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} < 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отже, починаючи із другого доданка в правій частині нерівності маємо суму перших $(n-1)$ -х членів геометричної прогресії. Для цієї прогресії перший

член $a = \frac{1}{2}$ та знаменник $q = \frac{1}{2}$. Тому:

$$S_{n-1} = \frac{a(q^{n-1} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$$

або

$$2 < u_n < 2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 2 < u_n < 3.$$

Отже, послідовність $\{u_n\}$ монотонно зростає та є обмеженою, тобто, за ознакою збіжності числової послідовності, $\{u_n\}$ має границю. Границю числової послідовності із таким загальним членом: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ позначають через e . Це ірраціональне число, яке дорівнює $e = 2,718\,28\dots$

Число e (константа Непера) є математичною константою.

На основі твердження (13.13) можна довести, що функція $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ за $x \rightarrow +\infty$ також має границю, яка дорівнює e .

Спочатку нагадаймо, що цілою частиною $[x]$ дійсного числа x називають **найбільше ціле число**, яке не перевищує x .

Отже,

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Якщо $x \rightarrow +\infty$, то

$$[x] = n \quad \forall x \in [n, n+1), \text{ де } n \in \mathbf{N}.$$

За $x \rightarrow +\infty$ маємо $n \rightarrow +\infty$, де x є неперервною, n – дискретною змінними.

З огляду на наведе, буде:

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Маємо таку подвійну нерівність:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Виконаймо граничний перехід у нерівності за $x \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$).

Границі першого і третього членів останньої нерівності дорівнюють числу e , отже, є однаковими.

Дійсно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{n+1}{n}} = e.$$

За властивістю функції, що має границю, дістанемо таке:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \left[1^{+\infty} \right] = e. \quad (13.14)$$

Останню рівність можна записати і в такому вигляді:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e, \quad (13.15)$$

де $\alpha = \frac{1}{x}$, тобто за $x \rightarrow +\infty$ маємо, що $\alpha \rightarrow 0$. ■

Щодо ф-л (13.14) та (13.15), обидві з яких відповідають другій особливій границі, можна навести такі самі міркування, як і під час аналізу першої особливої границі: у ролі x та α можуть бути будь-які нескінченно великі чи, відповідно, нескінченно малі, але структура виразу має бути такою, як у наведених формулах.

Наслідки. За другою особливою границею (13.10) маємо такі співвідношення, які зручно застосовувати під час розкриття невизначеності:

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx} &= e^{ab}. & 3. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/bx} &= e^{a/b}. & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a. \\ 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx} \right)^x &= e^{a/b}. & 4. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{b/x} &= e^{ab}. & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1. \end{aligned}$$

Нагадаймо, що логарифм числа за основою e називають **натуральним логарифмом** і позначають $\ln x$. Наслідки можна доповнити ще однією формулою:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Дійсно, спираючись на властивості логарифмів, перетворімо цю рівність таким способом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$



Обчислімо такі границі:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}} \right)^{\frac{3 \cdot 5x}{x}} = e^{15};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{3/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1-2x)^{-1/2x} \right)^{-\frac{2x \cdot 3}{x}} = e^{-6};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{2}} \right)^{\frac{2(2x-1)}{x+1}} = e^4;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 1 + \cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + (\cos x - 1))^{1/(\cos x - 1)} \right)^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 0,5x}{x^2}} = e^{-0,5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x-2)(\ln(2x-1) - \ln(2x+3)) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{(x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \frac{4}{2x+3} \right)^{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\left(1 - \frac{4}{2x+3} \right)^{-\frac{2x+3}{4}} \right)^{-\frac{4(x-2)}{2x+3}} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{4}{2x+3} \right)^{-\frac{2x+3}{4}} \right)^{-\frac{4(x-2)}{2x+3}} = \ln e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{4(x-2)}{2x+3} \right)} = \ln e^{-2} = -2. \end{aligned}$$



Розгляньмо задачу про неперервне нарахування відсотків.

Нехай протягом року банк кілька разів (позначмо цю кількість через m) нараховує відсотки, зважаючи на $p\%$ річних. Початковий вклад у банк становить A_0 . Потрібно визначити величину вкладу, яку буде накопичено за n років.

Для розв'язання застосуємо формулу складних відсотків:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100m} \right)^{mn}.$$

Якщо відсотки за вкладом нараховують неперервно, то за n років на рахунок вкладника буде накопичено таку суму:

$$A_n = \lim_{m \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{p}{100m} \right)^{mn} = A_0 \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{p}{100m} \right)^{\frac{100m}{p}} \right)^{\frac{p}{100} mn} = A_0 e^{\frac{pn}{100}}.$$

Формула відображає показниковий (експоненціальний) закон зростання (за $p > 0$) або спадання (за $p < 0$). Її можна використовувати за неперервного нарахування відсотків. Цю формулу доцільно застосовувати під час аналізу складних фінансових проблем, обґрунтування інвестиційних рішень тощо.

13.4. Порівняння нескінченно малих.

Застосування еквівалентних нескінченно малих до обчислення границь

Нехай $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\gamma = \gamma(x)$ є нескінченно малими за $x \rightarrow x_0$, де x_0 – скінченне число або нескінченність. Хоча всі нескінченно малі мають границю 0, «швидкість» прямування до нього буває різною, тому й виникає потреба у їхньому порівнянні.

Порівняти нескінченно малі означає обчислити границю їхнього відношення:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c. \quad (13.16)$$

Якщо така границя існує, то:

а) за $c \neq 0$ $\alpha = \alpha(x)$ і $\beta = \beta(x)$ називають **нескінченно малими одного порядку**. Зокрема за $c = 1$ нескінченно малі $\alpha = \alpha(x)$ і $\beta = \beta(x)$ називають **еквівалентними** й записують $\alpha \sim \beta$;

б) за $c = 0$ нескінченно малу $\alpha = \alpha(x)$ називають **нескінченно малою більш високого порядку**, ніж $\beta(x)$;

в) за $c = \infty$ нескінченно мала $\alpha = \alpha(x)$ є **більш низького порядку**, порівняно з $\beta(x)$ (або $\beta(x)$ – нескінченно мала більш високого порядку, ніж $\alpha(x)$).

Якщо виникає потреба в більш точному порівнянні величин $\alpha(x)$ і $\beta(x)$, то обчислюють *порядок малості* $\alpha(x)$ щодо $\beta(x)$. Нескінченно малу $\alpha(x)$ називають **нескінченно малою порядку k** щодо нескінченно малої $\beta(x)$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \neq 0.$$



Порівняймо функції $\alpha = x$ і $\beta = x^{10}$, які є нескінченно малими за $x \rightarrow 0$.

Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{10}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^9 = 0,$$

то нескінченно мала $\beta(x)$ є більш високого порядку малості, ніж $\alpha(x)$.

До того ж порядок, малості нескінченно малої $\beta(x)$ дорівнює $k = 10$, оскільки β і α^{10} є еквівалентними нескінченно малими.

Особливий інтерес становлять еквівалентні нескінченно малі, оскільки під знаком границі їх можна замінювати одна на другу, завдяки чому значно спрощено визначення границі.

Ряд еквівалентних нескінченно малих маємо безпосередньо за означенням першої та другої особливих границь, а також завдяки тотожним перетворенням виразів, що описують ці границі. Наприклад, якщо $\alpha = \alpha(x)$ є нескінченно малою за $x \rightarrow x_0$, то маємо таблицю еквівалентних нескінченно малих (табл. 13.1).

Таблиця еквівалентних нескінченно малих

$\sin \alpha \sim \alpha$	$\arcsin \alpha \sim \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$
$\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$	$1 - \cos \alpha \sim 0,5\alpha^2$	$\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \sim 0,5\alpha^3$
$e^\alpha - 1 \sim \alpha$	$\ln(1 \pm \alpha) \sim \pm \alpha$	$(1 \pm \alpha)^{1/n} - 1 \sim \pm \frac{1}{n} \alpha$

Зауваження. Обчислення границі відношення $\frac{\beta}{\alpha}$ (невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$)

часто можна значно спростити.

Якщо $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_1}{\alpha_1}$, тобто границя відношення

нескінченно малих величин не змінюється в разі заміни їх еквівалентними їм нескінченно малими величинами.



За таблицею еквівалентних нескінченно малих (див. табл. 13.1) визначте границю відношення двох функцій:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 6x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \frac{\sin 5x \sim 5x}{\operatorname{arctg} 6x \sim 6x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{6x} = \frac{5}{6},$$

де за $x \rightarrow 0$ у чисельнику маємо $\alpha(x) = 5x$ – нескінченно малу за $x \rightarrow 0$, а в знаменнику маємо $\beta(x) = 6x$.



Ключові терміни

Границя послідовності; збіжність і розбіжність; границя функції за необмеженого зростання аргументу; границя функції в точці; означення границі за Гейне; означення границі за Коші; нескінченна границя; ε -окіл; нескінченно мала функція; нескінченно велика функція; невизначеність; перша особлива границя; друга особлива границя; математичні константи; число e ; нескінченно малі однакового порядку; еквівалентні нескінченно малі; нескінченно мала порядку k ; односторонні границі; лівостороння границя; правостороння границя.



Запитання для самоперевірки

1. Яке число A називають границею функції $y = f(x)$ у точці x_0 ?
2. За якого значення A говорять, що функція має скінченну границю?
3. Яку функцію називають нескінченно малою чи нескінченно великою за $x \rightarrow x_0$?
4. Який критерій існування скінченної границі «мовою» нескінченно малих?
5. Які границі функції називають односторонніми?
6. Як формулюють теореми про єдиність границі та арифметичні властивості збіжних функцій?
7. Які є типи невизначеностей під час обчислення границь?
8. Які перетворення застосовують для розкриття невизначеностей, що породжено відношенням многочленів, дробово-раціональною (ірраціональною) функцією?
9. Як довести теореми про першу і другу особливі границі?
10. У чому полягає порівняння нескінченно малих?
11. Які нескінченно малі називають еквівалентними? Наведіть їхні властивості.
12. Як застосувати еквівалентні нескінченно малі до обчислення границь?
13. Які співвідношення щодо еквівалентних нескінченно малих впливають із першої особливої границі?
14. Який вигляд має еквівалентне формулювання другої особливої границі, що є основою для побудови таблиці еквівалентних нескінченно малих?
15. Які співвідношення щодо еквівалентних нескінченно малих впливають із другої особливої границі?



Тестові завдання до підрозділу 13

1. «Число A називають границею функції $f(x)$ зліва, якщо ...». Виберіть правильне закінчення твердження:
 - а) для будь-якої послідовності значень аргументу, що є збіжною до x_0 , до того ж $x_n < x_0$, відповідна послідовність значень функції збігається до A ;
 - б) для будь-якої послідовності значень аргументу, що є збіжною до x_0 , до того ж $x_n > x_0$, відповідна послідовність значень функції збігається до A ;

в) для будь-якої послідовності значень аргументу x_0 відповідна послідовність значень функції збігається до A ;

г) для будь-якої послідовності значень аргументу, що є збіжною до x_0 , відповідна послідовність значень функції розбігається.

2. «Число A називають границею функції $f(x)$ справа, якщо ...». Виберіть правильне закінчення твердження:

а) для будь-якої послідовності значень аргументу, що є збіжною до x_0 , до того ж $x_n < x_0$, відповідна послідовність значень функції збігається до A ;

б) для будь-якої послідовності значень аргументу, що є збіжною до x_0 , до того ж $x_n > x_0$, відповідна послідовність значень функції збігається до A ;

в) для будь-якої послідовності значень аргументу x_0 відповідна послідовність значень функції збігається до A ;

г) для будь-якої послідовності значень аргументу, що є збіжною до x_0 , відповідна послідовність значень функції розбігається.

3. Функцію $y = f(x)$ називають нескінченно малою функцією за $x \rightarrow x_0$, якщо:

а) її відповідна границя дорівнює одиниці;

б) її відповідна границя дорівнює нулю;

в) її відповідна границя дорівнює нескінченності;

г) її відповідна границя дорівнює константі.

4. Функцію $y = f(x)$ називають нескінченно великою функцією за $x \rightarrow x_0$, якщо:

а) її відповідна границя дорівнює одиниці;

б) її відповідна границя дорівнює нулю;

в) її відповідна границя дорівнює нескінченності;

г) її відповідна границя дорівнює константі.

а) «нуль на нуль»; б) «одиниця в степені нескінченність»;
в) «нескінченність на нескінченність»; г) «нескінченність мінус нескінченність».

а) «нуль на нуль»; б) «одиниця в степені нескінченність»;
в) «нескінченність на нескінченність»; г) «нескінченність мінус нескінченність».

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0.$$
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0.$$
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0.$$
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0.$$

353

14. Неперервність і розриви функцій

Основні питання:

14.1. Означення неперервності функції в точці. Неперервність основних елементарних функцій.

14.2. Розриви функцій та їхня класифікація.

14.3. Неперервність функції на проміжку. Основні теореми про неперервні функції.

14.1. Означення неперервності функції в точці.

Неперервність основних елементарних функцій

Поняття *неперервності* функції тісно пов'язано з її границею. Воно є характеристикою багатьох процесів, що відбуваються неперервно: неперервність часу, неперервність зміни температури, неперервність зростання доходу та ін.

Нехай функцію $y = f(x)$ з областю визначення $D(f)$ визначено в точці x_0 , якій відповідає значення функції $y_0 = f(x_0)$, і x є довільною точкою з деякого околу точки x_0 (рис. 14.1).

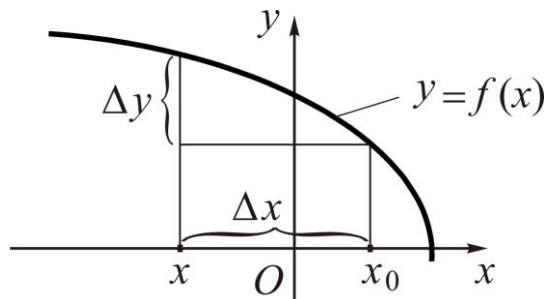


Рис. 14.1. Приріст аргументу Δx та приріст функції Δy

Величина, на яку змінилося значення аргументу під час переходу від точки x_0 до x , називають **приростом аргументу** в точці x_0 :

$$\Delta x = x - x_0, \quad (14.1)$$

а відповідну зміну значення функції називають **приростом функції** в точці x_0 :

$$\Delta y = f(x) - f(x_0),$$

або

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (14.2)$$

Прирости можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Функцію $y = f(x)$ називають **неперервною в точці x_0** , якщо в цій точці вона є визначеною і нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, а саме

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (14.3)$$

Зауважмо, що за означенням неперервності, на відміну від границі, функція в точці x_0 обов'язково має бути визначеною.



Покажімо, що функція $y = e^x$ є неперервною в кожній точці x_0 області визначення $D(f) = (-\infty, +\infty)$.

Дійсно, надаймо значенню аргументу x_0 приріст Δx , тоді $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}$. Визначмо границю приросту функції Δy за $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1) = \\ &= e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (e^{\Delta x} - 1) = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0. \end{aligned}$$

Оскільки x_0 є довільною точкою із $D(f)$, то функція $y = e^x$ є неперервною $\forall x_0 \in D(f)$.

Аналогічно можна довести неперервність будь-якої з основних елементарних функцій (x^α , a^x , $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$).

Теорема 14.1 (про неперервність основних елементарних функцій). Основні елементарні функції є неперервними в кожній точці своєї області визначення.

Доведення виконують для кожної функції окремо.

Теорема 14.2 (критерій неперервності «мовою» границі). Функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0 тоді й лише тоді, коли границя функції в цій точці дорівнює значенню функції в ній:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (14.4)$$

Доведення. Справедливість ф-ли (14.4) випливає з означення неперервності та властивостей границі функції.

Необхідність. Із ф-ли (14.3) маємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)).$$

Якщо позначити $x_0 + \Delta x = x$, то за $\Delta x \rightarrow 0$ маємо, що $x \rightarrow x_0$.

Звідси

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = 0.$$

Отже,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (14.5)$$

Достатність. Нехай функція є визначеною в точці x_0 і неперервною в ній. Тоді, відповідно до означення (14.4):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Отже, маємо два означення неперервності функції в точці, які відповідають ф-лам (14.3) та (14.4):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ або } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \blacksquare$$

Функцію називають **неперервною на множині** X , якщо вона є неперервною в кожній точці цієї множини.

Зауваження. Якщо функція є неперервною в точці x_0 , то для обчислення границі функції в цій точці достатньо у вираз функції підставити, замість аргументу x , його граничне значення, тобто виконати граничний перехід, у результаті якого маємо певне число (а не невизначеність!). Формально це означає, що символ границі й символ функції можна переставляти, а саме:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right). \quad (14.6)$$



Обчислимо таку границю: $f(x) = \sqrt[3]{\cos \pi x}$ в точці $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\cos \pi x} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} \cos \pi x} = \sqrt[3]{\cos(\pi \lim_{x \rightarrow 1} x)} = \sqrt[3]{\cos(\pi \cdot 1)} = -1.$$

Теорема 14.3 (критерій неперервності «мовою» односторонніх границь). Функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0 тоді й лише тоді, якщо односторонні границі функції в цій точці є однаковими між собою і дорівнюють значенню функції в ній:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \quad (14.7)$$

Доведення. Дійсно, співвідношення (14.7) ґрунтується безпосередньо на теоремі існування скінченної границі функції «мовою» односторонніх границь і означенні неперервності функції в точці (див. ф-лу (14.4)):

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0);$$

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \blacksquare$$



Перевірмо в точці $x_0=1$ неперервність такої функції:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1; \\ x+1, & x > 1. \end{cases}$$

Обчислимо односторонні границі цієї функції:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1;$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x+1) = 2,$$

тобто ліва границя функції в точці $x_0 = 1$ не дорівнює правій границі, отже функція $f(x)$ в точці $x_0 = 1$ є розривною.

Розгляньмо далі дві функції: $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$, що є неперервними в точці x_0 .

Теорема 14.4 (про арифметичні властивості неперервних функцій). Якщо функції $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ є неперервними в точці x_0 , то їхня сума (різниця), добуток, частка (якщо знаменник у цій точці не дорівнює нулю) є неперервною функцією в точці x_0 .

Доведення теореми виконують на основі арифметичних властивостей границі функції. Покажімо її справедливність для частки функцій.

Згідно з ф-лою (14.4), маємо:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Позначмо частку функцій через $u(x)$, тоді, за властивістю границі частки, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = u(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0). \blacksquare$$

Пропонуймо інші висновки теореми довести самостійно.

Щодо функцій, утворених з основних елементарних функцій за допомогою суперпозиції, постає питання, якою, із погляду неперервності, буде складено функцію, якщо її складові є неперервними функціями.

Теорема 14.5 (*про неперервність складеної функції*). Якщо функція $u = \varphi(x)$ є неперервною за $x = x_0$, а $y = f(u)$ є неперервною в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ є неперервною в точці x_0 .

Доведення. Позначмо закон зв'язку змінної y з аргументом x через F , тобто $y = f(\varphi(x)) = F(x)$. Зважаючи на неперервність функції $\varphi(x)$, а саме: $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, визначмо границю $F(x)$, якщо $x \rightarrow x_0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \left| x \rightarrow x_0 \Rightarrow u \rightarrow u_0 \right| = \\ &= \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)) = F(x_0) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

На підставі арифметичних властивостей неперервних функцій, неперервності складеної функції та теореми 14.1 (про неперервність основних елементарних функцій) зробимо висновок: усі елементарні функції є неперервними в кожній точці своєї області існування.

Теорема 14.6 (*про неперервність оберненої функції*). Якщо функція $y = f(x)$ є визначеною, зростаючою (або спадною) і неперервною на сегменті $[a, b]$, то й обернена до неї функція $x = \varphi(y)$, або $y = f^{-1}(x)$, є визначеною,

зростаючою (або спадною) і неперервною на відрізку $[f(a), f(b)]$ (або на відрізку $[f(b), f(a)]$, якщо функція є спадною) (рис. 14.2):

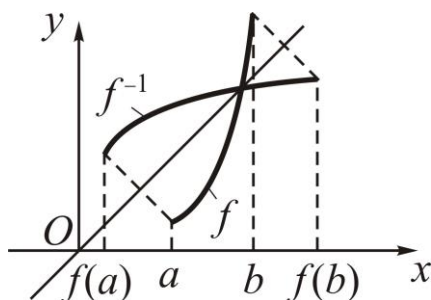


Рис. 14.2. Графіки функції $y = f(x)$ та $y = f^{-1}(x)$

Теорему наводьмо без доведення.

14.2. Розриви функцій та їхня класифікація

Якщо функція $y = f(x)$ не є неперервною в точці x_0 , то говорять, що в цій точці вона має *розрив*, а точку x_0 називають **точкою розриву**.

Точки розриву й самі розриви класифікують, залежно від того, як порушують критерій неперервності (14.7):

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Розрізняють такі випадки:

1. Існують односторонні границі (скінченні), які є однаковими між собою $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$, але $f(x_0) \neq A$ або не існує, тоді говорять, що x_0 є **точкою усувного розриву**.

Назву розриву «усувний» пов'язано з тим, що достатньо в тій точці, де досліджують неперервність функції, задати значення функції, яке б дорівнювало значенню односторонніх границь, або змінити значення функції на значення границі в цій точці, тобто позначити $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.



Класичний усувний розрив дає функція $y = \frac{\sin x}{x}$ у точці $x_0 = 0$ (рис. 14.3).

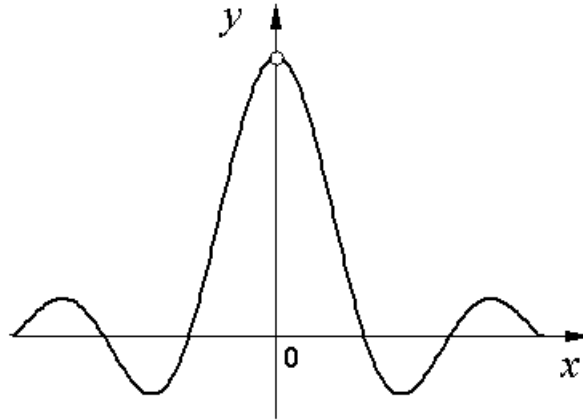


Рис. 14.3. Графік функції $y = \frac{\sin x}{x}$

Оскільки $x_0 \notin D(f)$, а $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$ й $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

тобто

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

то для того, щоб функція була неперервною, достатньо довизначити функцію в точці $x_0 = 0$ таким способом:

$$y(x_0 = 0) = 1.$$

2. Існують скінченні односторонні границі, але $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, тоді x_0 називають **точкою розриву I роду**.

3. Не існує хоча б однієї з односторонніх границь, або принаймні одна з них є нескінченною, тоді точка x_0 є **точкою розриву II роду**.

Прикладом функції, що має розрив II роду, є функція $y = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, оскільки вона не має в нулі ні лівої, ні правої границі.

Під дослідженням на неперервність функції $y = f(x)$ у деякій точці x_0 розуміють установлення факту неперервності (якщо такий, зазвичай, має місце), або типу розриву інакше.

Якщо функція є елементарною, то дослідженню підлягають тільки точки, у яких функція є невизначеною. Під час задання функції різними аналітичними виразами на різних проміжках області існування досліджуванню підлягають точки, які є межами відповідних проміжків.



Дослідімо на неперервність таку функцію: $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$.

Областю визначення функції є вся числова вісь, крім $x=1$, $x=2$ (знаменник дорівнює нулю).

Отже, на неперервність функцію досліджуймо в точках $x=1$ і $x=2$:

1) односторонні границі за $x=1$:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)} = -\infty.$$

Отже, точка $x=1$ є точкою розриву II роду;

2) односторонні границі за $x=2$:

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-1} = 1, \quad f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-1} = 1.$$

У точці $x=2$ функція не існує, тобто

$$f(2-0) = f(2+0) \neq f(2).$$

Отже, точка $x=2$ є точкою усувного розриву (рис. 14.4).

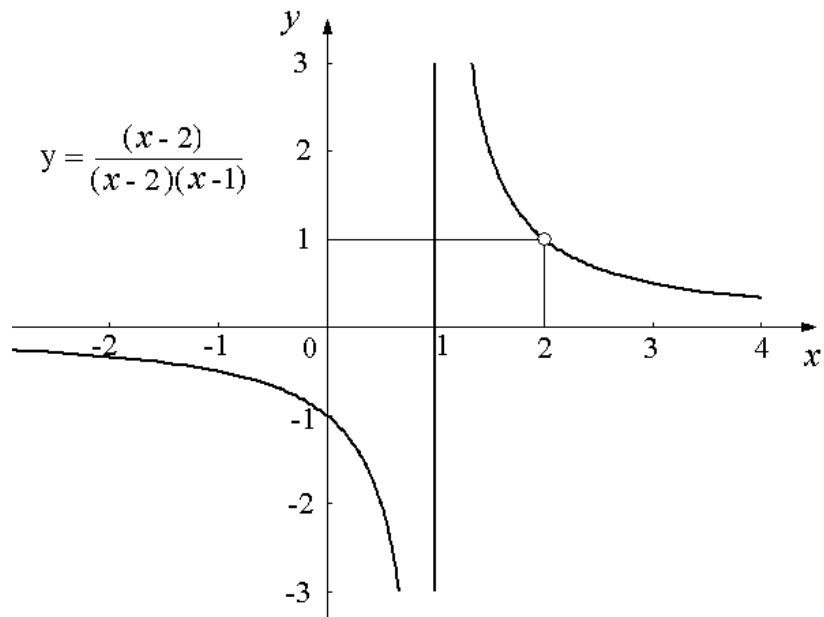


Рис. 14.4. Графік функції $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$



Дослідімо на неперервність таку функцію:

$$y = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ x^2+1, & 0 < x \leq 1, \\ x + \frac{3}{2}, & x > 1. \end{cases}$$

Маємо неелементарну функцію, яку задано трьома формулами. На кожному з указаних проміжків функція є неперервною елементарною на області свого існування, отже, область визначення цієї функції $D(f) = R$.

Потрібно розглянути точки стикування елементарних функцій різного виду, тобто точки $x=0$ і $x=1$.

1. Односторонні границі за $x=0$:

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (x+1) = 1; \quad f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x^2+1) = 1; \quad f(0) = 1.$$

Отже, функція в точці $x_0=0$ є неперервною.

2. Односторонні границі за $x=1$:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = 2; \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 2) = 3; \quad f(1) = 2.$$

Оскільки $f(1-0) \neq f(1+0)$, то функція в цій точці має розрив I роду (рис. 14.5).

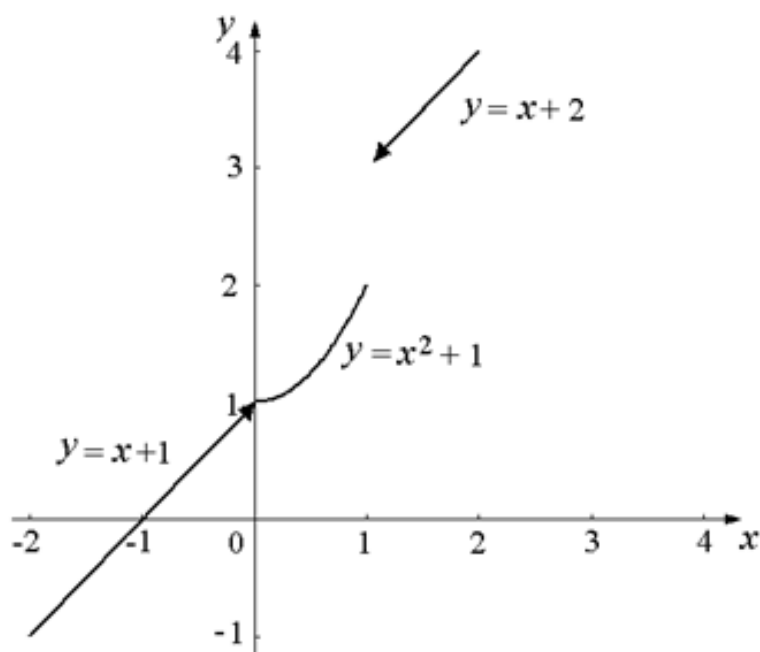


Рис. 14.5. Графік функції $y = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1, \\ x + \frac{3}{2}, & x > 1. \end{cases}$



Дослідимо на неперервність таку функцію: $y = e^{\frac{1}{x-2}}$.

Область визначення функції $D(f) = R \setminus \{2\}$ (рис. 14.6).

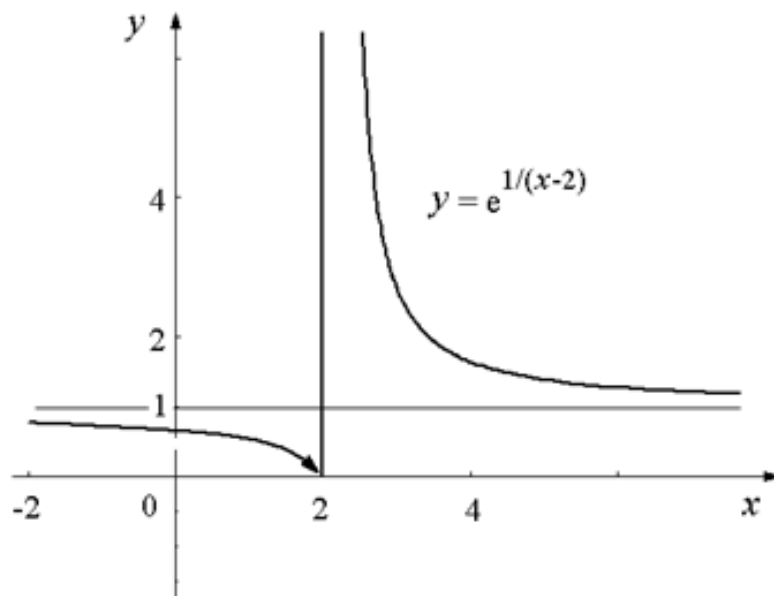


Рис. 14.6. Графік функції $y = e^{\frac{1}{x-2}}$

У точці $x=2$ маємо такі односторонні границі:

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = 0, \quad f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = \infty.$$

Отже, точка $x=2$ є точкою розриву II роду.

14.3. Неперервність функції на проміжку.

Основні теореми про неперервні функції

У теоретичних дослідженнях і на практиці застосовують теореми, які відображають властивості неперервних функцій не в окремо взятій точці, а на множині точок, тобто на проміжку.

Функцію $f(x)$ називають **неперервною на інтервалі (a, b)** , якщо вона є неперервною в кожній точці інтервалу. Функцію $f(x)$ називають **неперервною на відрізку $[a, b]$** , якщо вона є неперервною на інтервалі (a, b) і, крім цього, неперервною зправа у точці a і – зліва у точці b .

Сформульовані далі теореми наводьмо без доведення. Для кращого розуміння їхнього змісту подаймо до кожної теореми відповідну геометричну ілюстрацію, що допоможе, сподіваємося, усвідомити справедливість теорем на інтуїтивному рівні.

Спочатку наведімо означення. Якщо функція $f(x)$ є визначеною на множині X та існує таке значення $x_0 \in X$, що для всіх $x \in X$ виконують умову $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$), то число $f(x_0)$ називають **найбільшим** – M , (**найменшим** – m) значенням функції $f(x)$ на множині X .

Теорема 14.7 (про найменше і найбільше значення неперервної функції). Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$, то серед її значень на цьому відрізку існують найменше і найбільше (рис. 14.7). Тобто для будь-яких $x \in [a, b]$ виконують таку умову:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

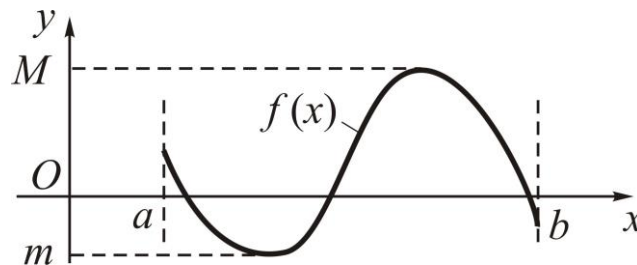


Рис. 14.7. Найменше та найбільше значення функції $y = f(x)$

Якщо функцію $y = f(x)$ задано на інтервалі (a, b) або $[a, b)$, то вона таких властивостей може й не мати.

Наприклад, функція $y = x$, $x \in (0, 1)$ ані найменшого, ані найбільшого значень не має.

Для функції $y = x$ на відрізку $[0, 2]$ найменшим є значення $m = f(0) = 0$, а найбільшим – значення $M = f(2) = 2$, якого вона набуває на кінцях відрізка.

Функція $y = \frac{1}{x}$ на відрізку $[0, 2]$ досягає найменшого значення $m = 0,5$ у точці $x = 2$, але не має найбільшого значення, тому що в точці $x = 0$ вона не є визначеною.

Функція $y = \sin x$ на відрізку $[0, 2\pi]$ досягає найменшого значення $m = -1$ у точці $x = \frac{3}{2}\pi$ і найбільшого значення $M = 1$ у точці $x = \frac{\pi}{2}$.

Теорема 14.8 (про обмеженість неперервної функції). Якщо функція $f(x)$ є визначеною і неперервною на відрізку $[a, b]$, то вона є обмеженою на цьому відрізку, тобто існують такі числа m і M , що виконано нерівність:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b].$$

Теорема 14.9 (про нулі неперервної функції). Якщо $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$ і її значення на кінцях цього відрізку мають різні знаки, то між a і b існує хоча б одна точка x_0 , де $f(x_0) = 0$, тобто яка є нулем функції (рис. 14.8):

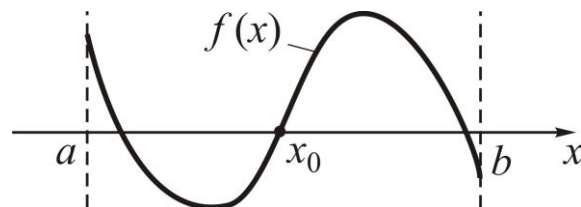


Рис. 14.8. Існування нуля функції $y = f(x)$

Теорема 14.10 (про проміжні значення функції). Якщо функція є неперервною на відрізку $[a, b]$ і її найменшим і найбільшим значеннями є, відповідно, m і M , а число $C \in (m, M)$, тоді на відрізку $[a, b]$ буде існувати хоча б одна точка c така, що $f(c) = C$.

Зауважмо, що всі розглянуті питання щодо неперервності функції є насправді застосуванням поняття границь до дослідження функцій і побудови їхніх графіків.



Ключові терміни

Приріст аргументу; приріст функції; неперервність функції в точці; класифікація розривів функції; усувний розрив; скінченний стрибок (розрив I роду); нескінченний стрибок (розрив II роду); дослідження функції на неперервність; неперервність функції на проміжку.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають приростами аргументу і функції в точці x_0 ?
2. Яку функцію $y = f(x)$ називають неперервною в точці x_0 ?
3. Чи всі основні елементарні функції є неперервними в кожній точці області визначення?
4. Які арифметичні властивості неперервних функцій вам відомо?
5. Чи всі елементарні функції є неперервними в кожній точці області визначення?
6. Чи можливо навести приклади функцій, які не є елементарними та водночас є неперервними на всій області визначення?
7. Яку точку x_0 називають точкою розриву функції?
8. Як можна усунути розрив функції?
9. За якими ознаками розрізняють точки розриву I і II родів?
10. Що розуміють під дослідженням функції на неперервність?
11. Які точки можуть бути точками розриву, якщо функцію задано однією формулою?
12. Які точки можуть бути точками розриву, якщо функцію задано кількома формулами?
13. Які функції за означенням є неперервними на проміжку?
14. Які властивості мають функції, що є неперервними на проміжку?
15. Чи можна навести приклади функцій, для яких порушують умови теорем про неперервність функції на проміжку?



Тестові завдання до підрозділу 14

1. Функцію $y = f(x)$ називають неперервною в точці x_0 , якщо в цій точці:

а) вона є визначеною і нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції;

б) вона є визначеною;

в) нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції;

г) вона є визначеною і нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно великий приріст функції.

2. Якщо функції $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ є неперервними в точці x_0 , то їхня сума (різниця), добуток, частка (якщо знаменник у цій точці не дорівнює нулю) є _____ функцією у точці x_0 . Заповніть пропуск:

а) диференційованою; б) неперервною; в) розривною; г) постійною.

3. Точка x_0 є точкою усувного розриву, якщо:

а) односторонні границі існують, є однаковими між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці;

б) односторонні границі існують, але не дорівнюють значенню функції в цій точці;

в) односторонні границі існують, але не є однаковими між собою;

г) не існує хоча б однієї з односторонніх границь або принаймні одна з них є нескінченною.

4. Точка x_0 є точкою розриву I роду, якщо:

а) односторонні границі існують, є однаковими між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці;

б) односторонні границі існують, але не дорівнюють значенню функції в цій точці;

в) односторонні границі існують, але не є однаковими між собою;

г) не існує хоча б однієї з односторонніх границь або принаймні одна з них є нескінченною.

5. Точка x_0 є точкою розриву II роду, якщо:

- а) односторонні границі існують, є однаковими між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці;
- б) односторонні границі існують, але не дорівнюють значенню функції в цій точці;
- в) односторонні границі існують, але не є однаковими між собою;
- г) не існує хоча б однієї з односторонніх границь або принаймні одна з них є нескінченною.

6. Якщо $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$ і її значення на кінцях цього відрізка мають різні знаки, то між a і b існує:

- а) тільки одна точка, яка є нулем функції;
- б) хоча б одна точка, яка є нулем функції;
- в) дві точки, які є нулями функції;
- г) три точки, які є нулями функції.

7. Якщо функція $f(x)$ _____ на відрізку $[a, b]$, то серед її значень на цьому відрізку існують найменше і найбільше. Заповніть пропуск:

- а) зростає; б) є неперервною; в) спадає; г) є заданою.

8. «Функція $y = \frac{1}{x}$ на відрізку $[0, 2]$ досягає ...». Закінчіть твердження:

- а) найменшого значення $m = 0,5$ у точці $x = 2$;
- б) найменшого значення $m = 0$ у точці $x = 0$;
- в) найбільшого значення $m = \infty$ у точці $x = 0$;
- г) найбільшого значення $m = 0,5$ у точці $x = 2$.

9. «Для функції $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$ точка $x=1$ є точкою ...». Закінчіть

твердження:

- а) усувного розриву; б) розриву I роду; в) розриву II роду.

10. «Для функції $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$ точка $x=2$ є точкою ...». Закінчіть

твердження:

- а) усувного розриву; б) розриву I роду; в) розриву II роду.

Література: [4 – 6; 14; 18].

3

Практичні завдання за розділом 3

Розв'язання задач економічного змісту

3.1. Клієнт поклав 10 000 грн у банк за ставкою 7 %.

Обчисліть накопичення через 5 років у разі: а) простих відсотків; б) складних відсотків. Результати порівняйте.

Розв'язання. У разі простих відсотків накопичену суму обчислюють за такою формулою:

$$A_n = A(1 + np),$$

де $A = 10\,000$; $n = 5$; $p = 0,07$.

Отже, $A_5 = 10\,000(1 + 5 \cdot 0,07) = 13\,500$ (грн).

Якщо передбачено капіталізацію відсотків, тобто нарахування відсотків на відсотки, то кінцеву суму на рахунку обчислюють за такою формулою:

$$A_n = A(1 + p)^n.$$

Тоді $A_5 = 10\,000(1 + 0,07)^5 = 14\,025,52$ (грн).

Порівнявши результати, зробимо висновок, що більш вигідним є внесення грошей під складні відсотки.

3.2. У банк покладено 150 000 грн за ставкою 18 % річних строком на 5 років.

Побудуйте числову послідовність для характеристики суми коштів на рахунку, зважаючи на складні відсотки.

Розв'язання. Для побудови числової послідовності застосуємо таку формулу:

$$A_n = A(1 + p)^n,$$

де $A = 150\,000$; $p = 0,18$; $n = \overline{1,5}$.

Результати обчислень наведено в таблиці:

n , роки	1	2	3	4	5
A_n , грн	177 000,0	208 860,0	246 454,8	290 816,7	323 163,7

3.3. Попит на папір у канцелярії університету протягом певного місяця становив 20 пачок і від того щомісяця зростає на 5 %.

Визначте, за який час попит зросте вдвічі, якщо така тенденція буде зберігатися протягом усього часу.

Розв'язання. Застосовуючи формулу $A_n = A(1 + p)^n$, за умовою задачі, маємо:

$$2A = A(1 + 0,05)^n, \quad \text{або } 2 = 1,05^n.$$

Прологарифмуймо обидві частини останнього рівняння за основою, наприклад, 10 і буде:

$$\lg 2 = n \lg 1,05,$$

звідси

$$n = \frac{\lg 2}{\lg 1,05} = 14.$$

Отже, через 14 місяців попит на папір у канцелярії зросте вдвічі.

3.4. Підприємець вирішив інвестувати в проєкт із будівництва нового готелю 10 млн грн, розраховуючи мати через 3 роки 20 млн грн.

Визначте, якою має бути для цього відсоткова ставка.

Розв'язання. Оскільки для цього знадобиться три роки, то треба застосовувати формулу складних відсотків:

$$A_n = A(1 + p)^n.$$

Звідси потрібно обчислити p . Підставмо дані умови задачі:

$$20 = 10(1 + p)^3, \quad \text{або } 2 = (1 + p)^3.$$

Далі маємо:

$$\lg 2 = 3 \lg(1 + p),$$

$$1 + p = 1,26,$$

тоді буде $p = 0,26$.

Отже, для того щоб через три роки отримати 20 млн грн, відсоткова ставка має бути 26 %.

3.5. Фірмовий магазин продавав щодня 150 пар взуття. Після відкриття ще трьох таких магазинів було вирішено довести щоденний обсяг продажу до 750 пар.

Скільки для цього потрібно часу, якщо вжиті заходи дозволяють щодня збільшувати обсяг продажу на 25 %?

Розв'язання. За формулою складних відсотків $A_n = A(1 + p)^n$, маємо:

$$750 = 150 \cdot 1,25^n \Rightarrow (1,25)^n = 5.$$

Звідси

$$n = \frac{\lg 5}{\lg 1,25} = 7.$$

Отже, потрібно буде 7 днів, щоб щоденний продаж взуття в системі магазинів збільшився до 750 пар.

3.6. Клієнт поклав гроші в банк під складні відсотки за ставкою 8 % річних. Через п'ять років він отримав 29 386,6 грн.

Яку суму було покладено в банк?

Розв'язання. За формулою складних відсотків маємо:

$$29\,386,6 = A(1 + 0,08)^5,$$

звідси

$$A = \frac{29\,386,6}{1,08^5} = 20\,000.$$

Отже, у банк було покладено 20 000 грн.

3.7. Чисельність населення України 2024 року становила 34 млн осіб. Визначте чисельність населення України через 5 років, якщо вона щорічно:

а) буде зростати на 0,5 %;

б) буде зменшуватися на 0,5 %.

Розв'язання. Оскільки зміна чисельності населення протягом строку, який досліджують, описують неперервно функцією, то для обчислення чисельності населення застосовують формулу неперервного нарахування відсотків:

$$A_n = A_0 e^{pn},$$

де A_n – чисельність населення на кінець розрахунку;

A_0 – чисельність населення на початок розрахунку;

p – відсоткова ставка;

n – кількість років.

Тоді через 5 років буде:

а) $A_5 = 34 \cdot e^{0,005 \cdot 5} \approx 34 \cdot 1,0253 = 34,8602$ (млн осіб);

б) $A_5 = 34 \cdot e^{-0,005 \cdot 5} \approx 34 \cdot 0,9753 = 33,1605$ (млн осіб).

Отже, за зростання чисельності населення на 0,5 %, через 5 років вона буде становити майже 34,86 млн осіб, а за зменшення на 0,5 % – 33,16 млн осіб.

Якщо обчислити чисельність населення за формулою складних відсотків:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n,$$

де A_n – чисельність населення на кінець розрахунку;

A_0 – чисельність населення на початок розрахунку;

p – відсоткова ставка;

n – кількість років,

то будемо мати такий результат:

а) $A_5 = 34 \cdot (1 + 0,005)^5 \approx 34,86$ (млн осіб);

б) $A_5 = 34 \cdot (1 - 0,005)^5 \approx 33,16$ (млн осіб).

Отже, маємо той самий результат із точністю два знаки після десяткової коми.

3.8. Здобувач вищої освіти, якого нагородили на конкурсі премією 10 000 грн, поклав її на 3 роки до банку за схемою неперервного нарахування відсотків за ставкою 10 %.

Побудуйте числову послідовність накопичень за $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

Розв'язання. Для побудови числової послідовності застосуємо формулу неперервного нарахування відсотків: $A_n = Ae^{pn}$,

а саме:

$$A_n = 10\,000e^{0,1n}.$$

Результати обчислень подаймо у вигляді таблиці:

n , роки	1	2	3
A_n , грн	11 051,71	12 214,03	13 498,59

Завдання для самостійного розв'язання

3.9. Визначте область визначення функцій:

$$1) y = \sqrt{2x-5} + \frac{1}{3\sqrt{5-x}}; \quad 2) y = \sqrt{6+7x-3x^2};$$

$$3) y = \sqrt{x^2 - x - 20} + \sqrt{6-x}; \quad 4) y = \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} - 2\sqrt{4x-x^2} + \frac{3}{x-1};$$

$$5) y = \arcsin(1-2x); \quad 6) y = \sqrt{3x-x^2} + \lg(x^2-1).$$

3.10. Побудуйте графіки заданих функцій:

$$1) y = 2x^2 - 6x + 4; \quad 2) y = \sqrt{x}; \quad 3) y = \sqrt{2-x}; \quad 4) y = \frac{x-1}{x-2};$$

$$5) y = 3 - \frac{2}{x-1}; \quad 6) y = \log_2(x-1);$$

$$7) y = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x < 1, \\ x, & x \geq 1; \end{cases} \quad 8) y = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < 1, \\ \log_2 x, & x \geq 1. \end{cases}$$

3.11. Напишіть перші п'ять членів послідовності:

$$1) \{x_n\} = \frac{3n+5}{2n-3}; \quad 2) \{x_n\} = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}; \quad 3) \{x_n\} = \sin \pi n;$$

$$4) \{x_n\} = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n.$$

3.12. Укажіть формулу загального члена послідовності:

1) 1, 4, 9, 16, 25, ...; 2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \frac{5}{2^5}, \dots$; 3). $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$.

3.13. Згідно з означенням границі послідовності, доведіть, що:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 1}{7n^2 - 3} = \frac{5}{7}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$.

Обчисліть границі:

3.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{2-7n}$. **3.15.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n}{n^2-1}$. **3.16** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+1}{2^n-1}$. **3.17.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt[3]{2n^3-1}}$.

3.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$. **3.19.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$.

3.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$.

Обчисліть границі, використовуючи властивості нескінченно малих і нескінченно великих функцій:

3.21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x}{\operatorname{tg}^2 3x}$. **3.22.** $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log_{1,7} x$. **3.23.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$.

3.24. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \log_{\frac{1}{2}} x)$. **3.25.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{e^{x^2}}}$. **3.26.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\log_{\frac{1}{5}} |x|}$.

Визначте односторонні границі:

3.27. $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{\log_5(3-x)}{3-x}$. **3.28.** $\lim_{x \rightarrow 2+0} \left(\frac{x^3-8}{4x-8} \right)^{\frac{1}{2-x}}$. **3.29.** $\lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{3}{2^x} + 3 \right)$.

3.30. $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\log_2 x} + 2 \arccos x \right)$.

Визначте границі функцій:

$$3.31. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}. \quad 3.32. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^4 - x}. \quad 3.33. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right).$$

$$3.34. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{3x+4}}{16 - x^2}. \quad 3.35. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x} - 3}. \quad 3.36. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{8-x} - 2}.$$

$$3.37. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 + 3x + 7}. \quad 3.38. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^4}{x^2 + x + 2} - 4x^2 \right). \quad 3.39. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

$$3.40. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2}). \quad 3.41. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 10x} - x).$$

$$3.42. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x}). \quad 3.43. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 8x}. \quad 3.44. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\operatorname{tg}^2 6x}.$$

$$3.45. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + \sin 2x}{4x}. \quad 3.46. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos 2x}{2x \sin x}. \quad 3.47. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\arcsin(x+2)}.$$

$$3.48. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{\operatorname{tg} 3x + x}. \quad 3.49. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}. \quad 3.50. \lim_{x \rightarrow 0,5\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x.$$

$$3.51. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\operatorname{tg}^2 x}. \quad 3.52. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}. \quad 3.53. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin x - 2x}{\sin x + 2 \arctg x}.$$

$$3.54. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}. \quad 3.55. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x-1} \right)^{2x}. \quad 3.56. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x-1} \right)^{x+1}.$$

$$3.57. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x-1}{2}}. \quad 3.58. \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{5x}{x^2-1}}. \quad 3.59. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{\cos x}{2x}}.$$

$$3.60. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}. \quad 3.61. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+5) - \ln x). \quad 3.62. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3-x) - \ln 3}{5x}.$$

$$3.63. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{4x}. \quad 3.64. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin 2x}. \quad 3.65. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - e^{\sin 2x}}{x}.$$

$$3.66. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} - \cos x}{3x^2}.$$

Визначте границі, застосовуючи еквівалентність нескінченно малих:

$$3.67. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 20x}{\operatorname{tg} 15x}. \quad 3.68. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^3 5x}{x^2 \operatorname{tg} 5x}. \quad 3.69. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1 + 2x)}.$$

$$3.70. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{e^{2x^2} - 1}. \quad 3.71. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}. \quad 3.72. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} 4x)}.$$

Дослідіть на неперервність ці функції, установіть характер точок розриву та побудуйте їхні графіки:

$$3.73. y = \frac{1}{3-x}. \quad 3.74. y = \frac{x^2 + x}{2x}. \quad 3.75. y = 3^{\frac{1}{x-2}}. \quad 3.76. y = \frac{2^x - 1}{\frac{1}{2^x} + 1}.$$

$$3.77. y = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2, \\ 4 - x^2, & x \geq 2. \end{cases} \quad 3.78. y = \begin{cases} x - 3, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 3 + \sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$$

3.79. У комерційний банк вкладено 100 000 грн під прості відсотки за ставкою 15 % річних.

Обчисліть накопичену суму через 4 роки.

3.80. Первинний вклад становить 50 000 грн.

Побудуйте числову послідовність накопиченої суми за роками, якщо 50 000 грн було вкладено на 5 років під прості відсотки за ставкою 10 % річних.

3.81. Підприємець щорічно виготовляв 15 000 світильників. Після реконструкції він планує кожного року збільшувати випуск на 4 %.

Скільки світильників буде випускати підприємець через 3 роки?

3.82. У реконструкцію доріг міста інвестор уклав 15 млн грн за ставкою 20 % на 2 роки.

Яку суму він отримає?

3.83. Сільська пекарня за день випікала 500 буханок хліба. Із прибуттям сезонних робітників через 5 днів обсяг виробництва хліба було доведено до 650 буханок.

На який відсоток щодня відбувалося збільшення випуску хліба?

3.84. Яку суму буде накопичено через 100 років, якщо покласти в банк 1 гривню під складні відсотки за ставкою 8 % річних?

3.85. У банк покладено 5 000 грн під складні відсотки. Через 7 років ця сума збільшилася до 7 035,5 грн.

Який річний відсоток було передбачено в договорі з банком?

3.86. Яку суму грошей треба вкласти в банк під складні відсотки зі ставкою 4 % річних, щоб через 15 років отримати суму 10 000 грн?

3.87. Собівартість виробу знижено за I півріччя на 10 %, а за II – на 20 %.

Визначте початкову собівартість виробу, якщо нова собівартість становить 576 грн.



Відповіді

3.9. 1) $\left[\frac{5}{2}, 5\right)$; 2) $\left[-\frac{2}{3}, 3\right]$; 3) $(-\infty, -4] \cup [5, 6]$; 4) $[0, 1) \cup (1, 3)$;

5) $[0, 1]$; 6) $(1, 3]$. **3.11.** 1) $-8, 11, \frac{14}{3}, \frac{17}{5}, \frac{20}{7}$; 2) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}$;

3) $0, 0, 0, 0, 0$; 4) $\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}$. **3.12.** 1) $\{x_n\} = n^2$; 2) $\{x_n\} = \frac{n}{2^n}$;

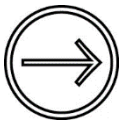
- 3) $\{x_n\} = \frac{(-1)^n}{n+1}$. 3.14. $-\frac{5}{7}$. 3.15. 0. 3.16. 1. 3.17. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$. 3.18. 0. 3.19. $\frac{1}{2}$.
 3.20. 0. 3.21. ∞ . 3.22. ∞ . 3.23. 0. 3.24. $+\infty$. 3.25. 0. 3.26. 0. 3.27. $-\infty$.
 3.28. 0. 3.29. 3. 3.30. π . 3.31. ∞ . 3.32. $\frac{4}{3}$. 3.33. $-\frac{1}{2}$. 3.34. $-\frac{5}{64}$. 3.35. $\frac{3}{2}$.
 3.36. -12 . 3.37. 3. 3.38. $-\infty$. 3.39. 2. 3.40. 0. 3.41. 5. 3.42. 0. 3.43. $\frac{3}{4}$.
 3.44. $\frac{1}{2}$. 3.45. 2. 3.46. -8 . 3.47. -4 . 3.48. $-\frac{1}{4}$. 3.49. $\frac{3}{4}$. 3.50. 1. 3.51. $\frac{\sqrt{2}}{8}$.
 3.52. $-\frac{3}{2}$. 3.53. $\frac{1}{3}$. 3.54. -1 . 3.55. e^{-2} . 3.56. $e^{-\frac{3}{2}}$. 3.57. e^{-1} . 3.58. e^{-5} .
 3.59. $\sqrt{e}$. 3.60. 1. 3.61. 5. 3.62. $-\frac{1}{15}$. 3.63. $\frac{3}{4}$. 3.64. 2. 3.65. 1. 3.66. $\frac{7}{6}$.
 3.67. $\frac{4}{3}$. 3.68. 25. 3.69. $\frac{9}{4}$. 3.70. 7,5. 3.71. ∞ . 3.72. $\frac{1}{2}$. 3.73. $x=3$, II роду.
 3.74. $x=0$, усувний. 3.75. $x=2$, II роду. 3.76. $x=0$, I роду.
 3.77. $x=1$, I роду. 3.78. $x=0$, I роду. 3.79. 160 000 грн.
 3.80. 55 000, 60 000, 65 000, 70 000, 75 000 грн. 3.81. 16 873 шт.
 3.82. 21,6 млн грн. 3.83. 5 %. 3.84. 2 200 грн. 3.85. 5 %.
 3.86. 5 553 грн. 3.87. 800 грн.

Відповіді до тестових завдань

Номери підрозділів	Номери тестових завдань									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	б	в	б	а	д	б	а	а	б	в
12	а	г	г	в	б	в	г	а	б	г
13	а	б	б	в	а	б	г	а	б	в
14	а	б	а	в	г	б	б	а	в	а

Розділ 4. Диференціальне числення функції однієї змінної

Продовжуючи тему функціональної залежності характеристик економічних процесів, перейдімо до вивчення диференціального числення як одного з основних методів дослідження швидкості змін цих процесів у часі або під впливом факторів внутрішнього і зовнішнього середовища та напряму їхнього перебігу.



Після вивчення цього розділу ви зможете:

- розуміти зміст похідної в економіці та її застосування в ході здійснення граничного аналізу, знати методи диференціювання функцій;
- застосовувати інструменти диференціального числення для розв'язання реальних економічних задач;
- використовувати диференціал функції для наближених обчислень величин в економіці;
- набути навичок із застосування похідних під час дослідження функцій та побудови їхніх графіків;
- уміти визначати еластичність функцій в економіці та давати інтерпретацію обчислених результатів;
- виконувати найпростіші розрахунки для оптимізації виробництва та максимізації прибутку підприємства.

15. Похідна та її властивості, диференціювання функцій

Основні питання:

- 15.1. Означення похідної, загальний порядок її визначення, зв'язок похідної з неперервністю функції.
- 15.2. Інтерпретація похідної в різних галузях знань.
- 15.3. Таблиця похідних та правила диференціювання.
- 15.4. Диференціювання складених функцій і функцій різних форм задання.
- 15.5. Диференціал функції та його властивості.
- 15.6. Застосування диференціала для наближених обчислень.
- 15.7. Похідні та диференціали вищих порядків.
- 15.8. Формула Тейлора.

15.1. Означення похідної, загальний порядок її визначення, зв'язок похідної з неперервністю функції

Основні поняття цього розділу – похідна та диференціал – становлять результат подальшого розвитку теорії границь, у зв'язку з існуванням широкого класу задач із різних галузей знань, розв'язання яких потребувало обчислення границь спеціального типу. Це, наприклад, задачі про обчислення швидкості руху матеріального об'єкта чи перебігу хімічної реакції, зростання чисельності населення, собівартості продукції та ін.

Диференціальне числення – це розділ математичного аналізу, у якому визначають властивості похідної та диференціала функції, а також їхнє застосування в процесі дослідження функцій.



Датою становлення диференціального числення вважають травень 1684 року, коли німецький філософ, математик, юрист і дипломат фон Лейбніц оприлюднив своє дослідження «Новий метод максимумів і мінімумів», у якому виклав основи нового методу.

Нехай функція $y = f(x)$ є визначеною в проміжку (a, b) . Зважаючи на деяке значення аргументу $x = x_0$, надаймо йому приріст Δx (додатний або від'ємний), такий, що $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Тоді функція має відповідний приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Розгляньмо відношення $\Delta y / \Delta x$.

Похідною функції $y = f(x)$ за аргументом x за умови заданого його значення (або в цій точці) $x = x_0$ називають границю відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx , якщо приріст аргументу довільним чином прямує до нуля, і пишуть:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (15.1)$$

Процес визначення похідної від заданої функції називають **диференціюванням**. Якщо функція має похідну в кожній точці x інтервалу (a, b) , то вона є *диференційовною на інтервалі (a, b)* . Зазвичай, якщо функція має похідну в точці x_0 , то $f'(x_0)$ – певне число; якщо ж функція є диференційовною на інтервалі, то її похідна, своєю чергою, є деякою функцією від x , тобто $f'(x)$.

Разом із позначенням $f'(x)$ для похідної вживають й інші: y' , y'_x , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, а конкретне значення похідної, якщо $x = x_0$, позначають так:

$$y'|_{x=x_0}, \quad y'(x_0), \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0},$$

де $\left|_{x=x_0}\right.$ – символ *підстановки*, який означає, що $x = x_0$.

Загальний порядок визначення похідної від функції $y = f(x)$ у деякій точці $x \in (a, b)$ є таким:

1) надайте аргументові x приріст Δx і визначте відповідний йому приріст функції:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

2) поділіть приріст функції на приріст аргументу, тобто визначте відношення таких приростів:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

3) визначте границю цього відношення, якщо приріст аргументу прямує до нуля, тобто таку похідну:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Виконання останнього кроку потребує зважання на структуру конкретного відношення, а тому немає загальних указівок щодо визначення його границі.



Визначмо, наприклад, похідну функції $y = \cos x$ для довільної точки $x \in D(f)$.

Дотримуючись щойно наведеної схеми, маємо:

$$1) \Delta y = \cos\left(x + \Delta x\right) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2};$$

$$2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -1 \cdot \sin x.$$

$$\text{Отже, } (\cos x)' = -\sin x.$$

Під час визначення похідної відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ умова $\Delta x \rightarrow 0$ породжує невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, тобто нескінченно малому приростові аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, і це не випадковість.

Теорема 15.1 (про неперервність диференційовної функції). Якщо функція $f(x)$ є диференційовною у точці x_0 , то вона є неперервною в цій точці.

Доведення. Нехай функція $f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ (нагадаймо, що $f'(x_0)$ є певним числом), тобто

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

За критерієм існування границі «мовою» нескінченно малих:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала, якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

Отже, $\Delta y = f'(x_0) \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$. Зважаючи на арифметичні властивості границь та нескінченно малих, маємо: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Це й означає, що функція $f(x)$ є неперервною в точці $x = x_0$. ■

Обернене до теореми 15.1 твердження не є справедливим, тобто з неперервності функції не випливає її диференційовність.

У цьому можна переконатися на прикладі функції $y = |x|$, якщо $x_0 = 0$.

15.2. Інтерпретація похідної в різних галузях знань

Задача про визначення рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в точці $A(x_0, y_0)$ (рис. 15.1).

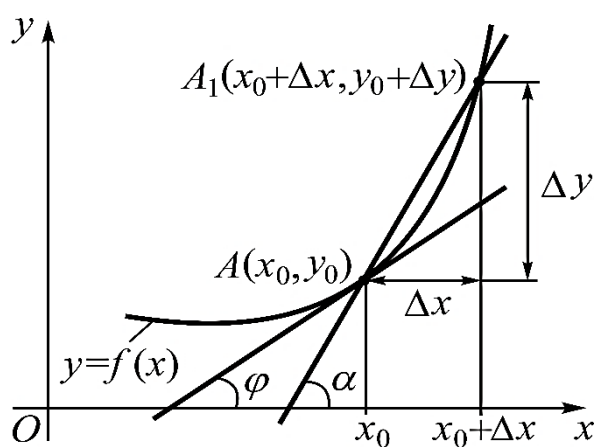


Рис. 15.1. Визначення рівняння дотичної

Дотичною до кривої в точці $A(x_0, y_0)$ називають граничне положення січної, яку проведено через точки A і $A_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

Позначмо кут нахилу січної до осі Ox через α , а дотичної – через φ .

Напишімо рівняння дотичної до кривої, яку визначають функцією $y = f(x)$, у точці $A(x_0, y_0)$: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Визначмо кутовий коефіцієнт дотичної:

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

тобто,

$$k = f'(x_0). \quad (15.2)$$

Наведену задачу вважають класичною задачею Лейбніца про визначення кутового коефіцієнта дотичної в точці.

Із цієї задачі випливає *геометрична інтерпретація похідної*: похідна функції $y = f(x)$ у деякій точці $x \in (a, b)$ дорівнює кутовому коефіцієнтові дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $A(x_0, y_0)$.

Отже, *рівняння дотичної* набуває такого вигляду:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (15.3)$$

З огляду на властивості кутових коефіцієнтів взаємно перпендикулярних прямих ($k_1 \cdot k_2 = -1$), маємо *рівняння нормалі* (перпендикуляра до дотичної):

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (15.4)$$

Задача про визначення швидкості прямолінійного руху, якщо є відомою функція $S = S(t)$, що визначає залежність шляху від часу. Ця задача була історично однією з перших, її вважають *задачею Ньютонів* про визначення похідної. Із неї випливає *механічний зміст* похідної.

Нехай деяка точка рухається вздовж прямої за законом $S = f(t)$, де t – час, а S – шлях, який вона проходить за цей час. Якщо на інтервалі $(t, t + \Delta t)$ уважати рух точки рівномірним, то швидкість руху визначають як $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Якщо швидкість руху змінюється за часом, то миттєву швидкість у певній точці визначають як границю цього відношення:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Звідси випливає, що швидкість руху в довільний момент часу t є похідною від функції, яка відображає залежність шляху від часу:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

Якщо термін «швидкість» розуміти в загальному сенсі, то похідну можна трактувати як швидкість змінювання величини, яку описує функція $y = f(x)$, залежно від зміни x .

Задача про визначення граничних витрат виробництва. Зупинімося детальніше на економічній інтерпретації похідної. Найперше, уведемо на розгляд деякі економічні поняття.

Нехай підприємство виробляє однорідну продукцію. Під *виробничими витратами* z розуміють сукупність людських, матеріальних, енергетичних ресурсів тощо, які витрачають на виготовлення та реалізацію продукції. Якщо ці витрати обчислено в грошовій формі, то їх називають **собівартістю продукції**. Сюди входять: вартість сировини, матеріалів, палива, технічних засобів, загальногосподарчих витрат, заробітна платня тощо. Функцію $z = f(V)$, яка встановлює залежність виробничих витрат z від обсягу виготовленої продукції V , називають **виробничою функцією**. Важливим показником ефективності роботи підприємства є *гранична собівартість* S , що за певного обсягу виробництва V визначає собівартість кожної наступної одиниці продукції.

Нехай обсяг виготовленої продукції V зростає на величину ΔV , тоді витрати виробництва змінюють на величину $\Delta z = f(V + \Delta V) - f(V)$, отже, граничну собівартість одиниці продукції визначає таке співвідношення:

$$S = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta V} = z'(V). \quad (15.5)$$

Термін «граничний» у цьому разі означає швидкість зміни, що характеризують похідною відповідної функції.

Слід підкреслити, що граничні величини характеризують не стан, а швидкість зміни показників економічного процесу, залежно від будь-яких факторів. Зрозуміло, що граничні економічні показники можна визначити, якщо функція, яка їх характеризує, є диференційовною.

15.3. Таблиця похідних та правила диференціювання

Похідну будь-якої елементарної функції можна визначити, застосувавши загальну схему визначення похідних. Основні труднощі полягають у розкритті невизначеності $\left[\frac{0}{0} \right]$. Щоб спростити задачу диференціювання, за загальною схемою встановлюють похідні лише основних елементарних функцій, які наведено в табл. 15.1.

Таблиця основних похідних

№ з/п	Функції	Похідні	№ з/п	Функції	Похідні
1	$y = c, c = \text{const}$	$y' = 0$	6	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
2	$y = x$	$y' = 1$	7	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
3	$y = x^a, a \in R$ $y = \frac{1}{x}$ $y = \sqrt{x}$	$y' = ax^{a-1},$ $y' = -\frac{1}{x^2},$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	8	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
			9	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
4	$y = a^x (a > 0, a \neq 1),$ $y = e^x$	$y' = a^x \ln a,$ $y' = e^x$	10	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
			11	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1),$ $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x \ln a},$ $y' = \frac{1}{x}$	12	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
			13	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Розгляньмо арифметичні властивості похідних.

Нехай функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ мають похідні в певній точці $x = x_0$.

Тоді в тій самій точці:

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (15.6)$$

$$2) (u \cdot v)' = u'v + v'u, \quad (15.7)$$

зокрема,

$$(cu)' = cu', \quad c = \text{const}; \quad (15.8)$$

$$3) \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v(x) \neq 0). \quad (15.9)$$

Доведення виконаймо для частки функцій $y = \frac{u}{v}$, використовуючи загальну схему визначення похідних. Надаймо аргументу x приріст Δx , тоді функції u , v та y будуть мати, відповідно, прирости Δu , Δv та Δy . Їхні нові значення $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ та $y + \Delta y$ пов'язано таким самим співвідношенням, а саме:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Звідси

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}, \quad \text{а} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v(v + \Delta v)} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right).$$

Спрямуймо Δx до нуля, тоді, згідно з теоремою про неперервність диференційовної функції та $\Delta v \rightarrow 0$, а границі відношень $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ за $\Delta x \rightarrow 0$ дають, відповідно, u' , v' .

Вираз $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, якщо $\Delta x \rightarrow 0$, прямує до скінченної границі:

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{v(v + \Delta v)} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Отже, похідна $y' = \left(\frac{u}{v} \right)'$ існує, її визначають за ф-лою (15.9).

Аналогічно доводять співвідношення (15.6) – (15.8). Правило (15.6) поширюють на довільну скінченну кількість доданків. ■



Похідну від функції $y = \operatorname{tg} x$ можна визначити за звичайною схемою.

Однак визначмо її як похідну від частки функцій $y = \frac{\sin x}{\cos x}$:

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, тобто маємо ту саму формулу, що в таблиці похідних основних елементарних функцій (див. табл. 15.1).

15.4. Диференціювання складених функцій і функцій різних форм задання

Визначення похідних складених функцій $y = f(\varphi(x))$, де $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$, посідає центральне місце в техніці диференціювання й тому дуже важливою є така теорема.

Теорема 15.2 (про похідну складеної функції). Якщо функція $y = f(u)$ за деякого значення u має похідну $y'_u = f'_u(u)$, а функція $u = \varphi(x)$ є диференційовною ($u'_x = \varphi'_x(x)$) у точці x , якій відповідає значення u , то похідну складеної функції $y = f(\varphi(x))$ можна визначити за такою формулою:

$$\left(f(\varphi(x)) \right)'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x) \Leftrightarrow y'_x = y'_u \cdot u'_x. \quad (15.10)$$

Доведення. Припущення про існування похідної y'_u за означенням є рівносильним такій рівності:

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u.$$

Звідси, згідно із критерієм існування границі, маємо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha(\Delta u),$$

де $\alpha(\Delta u)$ – нескінченно мала, якщо $\Delta u \rightarrow 0$.

Тоді

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

За умови, що $\Delta x \rightarrow 0$, згідно з неперервністю диференційовної функції $u = \varphi(x)$, маємо, що $\Delta u \rightarrow 0$, а це означає, що $\alpha(\Delta u) \rightarrow 0$; границя відношення $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, якщо $\Delta x \rightarrow 0$, дорівнює u'_x .

Отже, останню рівність за умови, що $\Delta x \rightarrow 0$, і доводить ф-ла (15.10). ■

Згідно з ф-лою (15.10), маємо *правило визначення похідної* від складеної функції: щоб здиференціювати складену функцію $y = f(\varphi(x))$ за незалежною змінною x , потрібно визначити похідну від функції y за проміжним аргументом u і помножити її на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною x .

Отже, маємо такий алгоритм:

- 1) визначити похідну зовнішньої функції $f(u)$ за аргументом u ;
- 2) визначити похідну внутрішньої функції $\varphi(x)$ за змінною x ;
- 3) записати їхній добуток.

Основне, крім знання таблиці похідних і правил диференціювання, під час визначення похідної складеної функції – це вміння визначати зовнішню функцію та проміжний аргумент, тобто внутрішню функцію.



Наприклад, функція $y = \sin^2 x$ є складеною, де зовнішньою є степенева функція $f(u) = u^2$, а внутрішньою – тригонометрична $u = \sin x$, отже,

$$y'_x = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Тому для функції $y = \sin x^2$, де $f(u) = \sin u$, $u = x^2$, маємо:

$$y'_x = \cos x^2 (x^2)' = 2x \cos x^2.$$

Випадок складеної функції як суперпозиції функцій, кількість яких є більшою за дві, передбачає послідовне застосування наведеного правила. Наприклад, для функції $y = f(u(v(x)))$, що є суперпозицією трьох функцій: $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$ та $v = \psi(x)$, маємо $y'_x = y'_u \cdot u'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.



Наприклад, якщо $y = \operatorname{arctg}^4 2x$, то $y = u^4$, $u = \operatorname{arctg} v$ та $v = 2x$.

Тоді похідну визначмо так:

$$y'_x = 4 \operatorname{arctg}^3 2x \cdot (\operatorname{arctg} 2x)'_x = 4 \operatorname{arctg}^3 2x \cdot \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot (2x)' = 4 \operatorname{arctg}^3 2x \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2.$$

Отже,

$$y'_x = \frac{8 \operatorname{arctg}^3 2x}{1+4x^2}.$$

Як наслідок із доведеної теореми про похідну складеної функції випливають твердження про зв'язок похідних прямої й оберненої функцій, про диференціювання функцій, заданих у неявній та параметричній формах.

Похідна оберненої функції. Нагадаймо означення: якщо з рівності $y = f(x)$ за кожним припустимим значенням величини y можна відновити одне й тільки одне значення величини x , то кажуть, що ця рівність визначає функцію $x = \varphi(y)$, яка є оберненою до вихідної функції $y = f(x)$.

Своєю чергою, $y = f(x)$ можна розглядати як функцію, обернену до функції $x = \varphi(y)$, тобто ці функції є взаємно оберненими.

Визначмо похідну від функції $x = \varphi(y)$ за змінною y , якщо функція $y = f(x)$ у деякій точці x має відмінну від нуля похідну.

За означенням оберненої функції $x = \varphi(y)$, її можна розглядати як складену функцію:

$$x = \varphi(f(x)).$$

Візьмімо похідну цієї функції за змінною x :

$$x'_x = \varphi'_y \cdot f'_x \Rightarrow 1 = x'_y \cdot y'_x.$$

Отже,

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad (y'_x \neq 0). \quad (15.11)$$



Визначмо похідну функції $y = \operatorname{arctg} x$, уважаючи, що похідна функції $x = \operatorname{tg} y$ уже є відомою.

Тоді:

$$x'_y = (\operatorname{tg} y)'_y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

За ф-лою (15.11): $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y.$

Оскільки $x = \operatorname{tg} y$, виконаймо перехід в останньому виразі від функції $\cos^2 y$ до функції $\operatorname{tg} y$.

Тепер маємо:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Остаточно буде:

$$(\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Похідна неявної функції. Нагадаймо, що функцію y від x називають заданою в неявній формі, якщо її визначено рівнянням $F(x, y) = 0$, яке не є розв'язаним відносно y , де під символом F розуміють вираз, що містить змінні x та y .

Для визначення похідної від функції y немає потреби розв'язувати рівняння $F(x, y) = 0$ відносно функції y (що, до речі, не завжди можна зробити). Потрібно визначити похідну лівої частини рівності $F(x, y(x)) = 0$ як похідну складеної функції й мати рівняння $(F(x, y(x)))'_x = 0$, яке потім розв'язати відносно y'_x .



Розгляньмо рівняння кола з радіусом r із центром у точці $O(0, 0)$: $x^2 + y^2 = r^2$. Переписавши це рівняння у вигляді $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, здиференціюймо його за змінною x :

$$(x^2 + y^2 - r^2)'_x = 0 \Rightarrow 2x + 2y \cdot y'_x = 0.$$

Розв'язавши останнє рівняння відносно y'_x , маємо: $y'_x = -\frac{x}{y}$.

Отже, *правило диференціювання неявної функції* є таким: щоб визначити похідну y'_x неявної функції y від x виконайте такі кроки:

1) здиференціюйте за змінною x обидві частини рівності $F(x, y) = 0$, якою визначають залежність $y(x)$, застосовуючи правило визначення похідної від складеної функції;

2) розв'яжіть визначене рівняння відносно шуканої похідної y'_x .

Логарифмічне диференціювання. Іноколи, щоб спростити задачу диференціювання функції $y = f(x)$, переходять від явного задавання функції до неявного. Для цього логарифмують ліву та праву частини рівності $|y| = |f(x)|$, маючи $\ln|y| = \ln|f(x)|$. Для спрощення запису модуль можна опускати, оскільки після визначення похідної від логарифма модуля змінної цей модуль зникає: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. Такий підхід до визначення похідної називають **логарифмічним диференціюванням**.

Логарифмічне диференціювання застосовують найчастіше до степеневих показникових функцій $y = (u(x))^{v(x)}$ або до інших функцій, зручних для логарифмування.



Наприклад, визначмо похідну такої функції: $y = (\sin x)^{\cos x}$.

Після логарифмування маємо:

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y'_x = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos^2 x \cdot \frac{1}{\sin x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_x = y \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x (1 + \ln \sin x) \right).$$

Остаточнo буде:

$$y'_x = (\sin x)^{\cos x} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x (1 + \ln \sin x) \right).$$

Похідна функції, що задана параметрично. Функцію y від x називають заданою параметрично, якщо її визначено за допомогою двох функцій від допоміжної змінної (параметра) t :

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (15.12)$$

У прикладних задачах у разі параметричної форми задання функції роль параметра t часто відіграє час.

Функцію, що задана параметрично, можна здиференціювати як і неявну, без подання її у явній формі.

Визначмо похідну функції y від x , яку задано в параметричній формі (15.12), за умови, що функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ мають похідні за аргументом t , а функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = \Phi(x)$. Зважаючи на умову задачі, функцію y від x можна розглядати як складену функцію $y = \psi(\Phi(x))$.

Тоді, за правилом диференціювання складеної функції, маємо:

$$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ оскільки } t'_x \cdot x'_t = 1.$$

Отже,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (15.13)$$



Визначмо тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції, що задана параметрично такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases}$$

де t – кут між радіус-вектором точки, що належить лінії, і додатним напрямком осі Ox , $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ця система рівнянь є параметричним заданням еліпса. Справді, якщо вилучити параметр t , маємо таке канонічне рівняння еліпса:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = x/a, \\ \sin t = y/b \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Нагадаймо, що тангенсом кута нахилу дотичної до графіка функції є похідна від цієї функції.

Отже, буде:

$$y'_x = \frac{(b \sin t)'_t}{(a \cos t)'_t} = -\frac{b \cdot \cos t}{a \cdot \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t.$$

15.5. Диференціал функції та його властивості

Під час введення поняття похідної 1-го порядку від функції $y = f(x)$ у деякій точці $x \in D(f)$ оперують приростами аргументу Δx і відповідним йому приростом функції Δy . Якщо похідна існує, то функція $f(x)$ є неперервною в точці x і її приріст можна подати в такому вигляді:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x), \quad (15.14)$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x)$ є нескінченно малою, якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

Якщо в точці x похідна $y' = f'(x)$ є скінченною і відмінною від нуля, то обидва доданки в (15.14) є нескінченно малими, якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

Порівняймо нескінченно малий приріст функції Δy із першим доданком ф-ли (15.14). Для цього за виразом (15.14) складемо відношення (з огляду на те, що похідна функції в точці є сталою величиною і $y' \neq 0$) та визначмо його границю за умови, що $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{\Delta y}{y' \Delta x} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{y'} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{y' \Delta x} = 1 + \frac{1}{y'} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 1 + 0 = 1. \quad (15.15)$$

Отже, нескінченно мала, що утворена як добуток похідної y' із приростом аргументу Δx , є еквівалентною приросту функції Δy , тобто

$$y' \cdot \Delta x \sim \Delta y \quad (15.16)$$

за умови, що $\Delta x \rightarrow 0$.

Це означає, що перший доданок у ф-лі (15.14) становить *головну частину* приросту функції Δy , яка лінійно залежить від приросту аргументу Δx , а другий доданок є нескінченно малою більш високого порядку, ніж Δy .

Диференціалом функції $y = f(x)$ у точці x називають головну частину приросту функції Δy , яка є лінійною щодо приросту аргументу Δx , і позначають символом dy або $df(x)$:

$$dy = y' \Delta x, \text{ або } df(x) = f'(x) \Delta x. \quad (15.17)$$

Зауваження. Формула диференціала є правильною і в тому разі, якщо $f'(x) = 0$. Тоді диференціал функції f у точці x дорівнює нулю.

З означення диференціала, випливає, що:

1) диференціал незалежної змінної x дорівнює її приросту. Дійсно, якщо $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$, звідси:

$$df(x) = dx = \Delta x;$$

2) диференціал функції дорівнює добутку її похідної з диференціалом аргументу:

$$dy = f'(x) dx \quad (dy = y' dx), \text{ або } df(x) = f'(x) dx; \quad (15.18)$$

3) похідна функції є відношенням диференціала функції до диференціала аргументу:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

отже, символ $\frac{dy}{dx}$, яким раніше позначали похідну, тепер можна тлумачити як відношення диференціалів функції й аргументу.

Зв'язок між похідною функції та її диференціалом, з огляду на геометричний зміст похідної, дозволяє надати геометричну інтерпретацію диференціала функції (рис. 15.2).

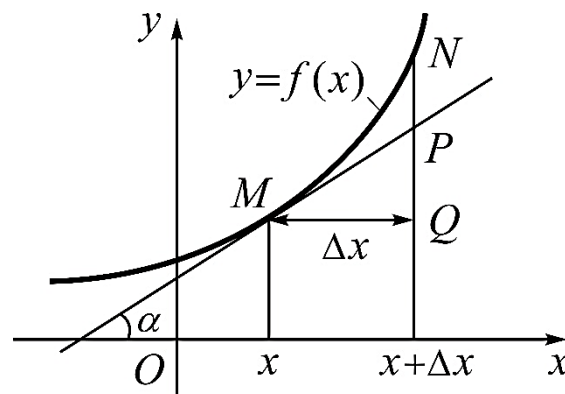


Рис. 15.2. Зв'язок між похідною функції та її диференціалом

Наприклад, із прямокутного трикутника MPQ ($\angle Q = 90^\circ$) маємо:

$$PQ = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x = dy.$$

Звідси *геометрична інтерпретація диференціала* є такою: диференціалом функції $y = f(x)$ у точці x є приріст ординати дотичної до графіка функції в цій точці під час переходу від неї до точки $x + \Delta x$ (тобто x набуває приросту Δx).

Основні властивості диференціала. Диференціал функції dy відрізняє від її похідної $f'(x)$ лише множник dx , тому маємо аналогічні арифметичні властивості диференціала, а саме:

$$dc = 0, \quad c = \text{const};$$

$$d(uv) = v du + u dv;$$

$$d(cu) = c du; \tag{15.19}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v du - u dv).$$

Правильність кожного зі співвідношень (15.19) легко перевірити, помноживши обидві частини кожної рівності, що описують правила диференціювання, на диференціал аргументу dx , та скориставшись означенням диференціала.

Наприклад, диференціал добутку функцій $u = u(x)$ та $v = v(x)$:

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u \Rightarrow (u \cdot v)' dx = v(u' dx) + u(v' dx) \Rightarrow d(u \cdot v) = v du + u dv.$$

Інваріантність (незмінність) форми першого диференціала: форма (вигляд) першого диференціала функції не залежить від того, чи є аргумент функції незалежною змінною, чи він є функцією якоїсь іншої змінної.

Дійсно, якщо x є проміжним аргументом, тобто функцією від незалежної змінної t , а саме $x = \varphi(t)$, то, за правилом визначення похідної складеної функції $y = f(\varphi(t))$, маємо:

$$\frac{dy}{dt} = f'(x) \cdot \varphi'(t). \tag{15.20}$$

Звідси

$$dy = f'(x) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Але, за означенням диференціала, добуток $\varphi'(t) dt$ дорівнює dx , тобто

$$\varphi'(t) dt = dx$$

або

$$dy = f'(x) dx.$$

Отже, формула визначення диференціала складеної функції зберігає той самий вигляд, що й у співвідношенні (15.18). Властивість інваріантності диференціала відіграє важливу роль під час інтегрального числення.

15.6. Застосування диференціала для наближених обчислень

Задача наближеного обчислення значення функції $y = f(x)$ має за основу еквівалентність приросту функції Δy і її диференціала dy під час прямування приросту аргументу Δx до нуля, тобто співвідношення (15.16), яке можна подати так:

$$\Delta y \sim dy, \text{ якщо } \Delta x \rightarrow 0. \quad (15.21)$$

Еквівалентність нескінченно малих Δy і dy означає, що за порівняно малого Δx буде мати місце така наближена рівність:

$$\Delta y \approx dy, \quad (15.22)$$

за якою маємо:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df.$$

Отже, формула для наближених обчислень має такий вигляд:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x) \Big|_{x=x_0} \cdot \Delta x. \quad (15.23)$$

Правило, за яким можна наближено обчислити значення функції, сформулюймо так: для того щоб за заданим значенням функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ визначити її наближене значення в точці $x_0 + \Delta x$, треба обчислити її диференціал у цій точці $df = f'(x) \Big|_{x=x_0} \cdot dx$ і скористатися ф-лою (15.23).

Для оцінювання точності наближеного обчислення застосовують такі характеристики, як абсолютна та відносна похибки.

Абсолютну похибку обчислюють за такою формулою:

$$\Delta = |\Delta y - dy|. \quad (15.24)$$

Її вимірюють у тих самих одиницях, що й функцію, для якої її обчислюють.

Відносну похибку обчислюють за такою формулою:

$$\delta = \left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| \quad (15.25)$$

і, зазвичай, у відсотках.

Точність наближених обчислень залежить не тільки від величини приросту аргументу (чим нижчим є Δx , тим вищою є точність обчислень), а й від поведінки функції в околі точки x_0 (чим меншими є коливання значень функції поблизу точки x_0 , тим точнішими є обчислення).



Обчислимо диференціал та приріст функції $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ під час переходу від $x_0 = 2$ до $x = 2,02$ і порівняймо їх.

Ясно, що приріст аргументу становить таке: $\Delta x = dx = 0,02$.

Визначмо похідну: $y' = 3x^2 - 4x + 3$ й обчислимо її значення в точці $x_0 = 2$: $y'|_{x=2} = 7$.

Далі в точці $x_0 = 2$ за ф-лою (15.18) визначмо такий диференціал:

$$dy|_{x=2} = y'|_{x=2} \cdot dx = 0,14.$$

Тепер підраховуймо приріст цієї функції:

$$\begin{aligned} \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) &= \left((x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 4 \right) - \\ &\quad - (x^3 - 2x^2 + 3x - 4) \Rightarrow \Delta y|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0,02}} = 0,141608. \end{aligned}$$

Отже, абсолютна похибка обчислення становить $\Delta = |\Delta y - dy| = 0,001608$.

15.7. Похідні та диференціали вищих порядків

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ на деякій множині X , то цю похідну також можна розглядати як деяку функцію від x .

Похідну від похідної називають **похідною 2-го порядку**, або **другою похідною**, від функції $y = f(x)$. Тобто

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = (f'(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}. \quad (15.26)$$

Уважаючи, що похідна $f'(x)$ є *похідною 1-го порядку*, або *першою похідною*, назвімо за означенням **другу похідну** похідною 1-го порядку від першої похідної.

Другу похідну позначають як y'' , $f''(x)$ або $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Похідну 1-го порядку від другої похідної називають **похідною 3-го порядку** і позначають через y''' , $f'''(x)$ або $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

Похідною n -го порядку (або **n -ю похідною**) називають похідну 1-го порядку від похідної $(n-1)$ -го порядку, якщо похідна $(n-1)$ -го порядку є диференційовною функцією:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})', \quad n \in N. \quad (15.27)$$

Похідну n -го порядку позначають $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$ або $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Похідними вищого порядку називають похідні, що мають порядок, вищий за перший. Для того щоб визначити n -ну похідну, слід послідовно обчислити першу похідну від функції, потім похідну від її першої похідної, потім похідну від другої похідної, тобто послідовно виконати диференціювання попереднього виразу. Відповідно, визначмо y' , y'' , ..., $y^{(n)}$.

Розгляньмо похідні вищих порядків від функції, яка задана параметрично за допомогою двох функцій: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Уважаючи, що функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ є двічі диференційовними, визначмо другу похідну функції $y = f(x)$,

а саме: $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$.

Для першої похідної функції є відомою така формула: $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, тобто

y'_x є складеною функцією аргументу $x = \varphi(t)$.

Визначмо похідну від y''_{xx} за правилом диференціювання складеної функції.

Отже, маємо:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)'_t \cdot t'_x = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)'_t \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}.$$



Визначмо $\frac{d^2 y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Спочатку визначмо $\frac{dy}{dx}$, а саме:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Далі визначмо похідну 2-го порядку:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right)'_t}{a(1 - \cos t)} = \frac{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}}{2a \sin^2 \frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}.$$

Зауважмо, що в деяких випадках можна записати загальний вираз n -ї похідної, який безпосередньо залежить від довільного n .



Наприклад, визначмо похідні n -го порядку від таких функцій:

$$1) y = a^x.$$

$$\text{Відповідно, } y' = a^x \ln a, \quad y'' = a^x (\ln a)^2, \quad y''' = a^x (\ln a)^3, \dots$$

Тоді маємо таку загальну формулу:

$$y^{(n)} = a^x (\ln a)^n, \text{ зокрема, } (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$2) y = \sin x.$$

$$\text{Тоді } y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = -\cos x, \dots$$

Отже, маємо таку загальну формулу для похідної n -го порядку:

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right), n \in \mathbf{N}.$$

Наведемо деякі приклади застосування другої похідної.

Задача про визначення прискорення прямолінійного руху матеріальної точки. Якщо на інтервалі часу $(t, t + \Delta t)$ уважати рух точки рівномірно прискореним, то прискорення визначають за такою формулою: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Якщо прискорення змінюється в часі, то миттєве прискорення в певній точці визначають як границю цього відношення: $a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Звідси прискорення руху в довільний момент часу t є похідною 1-го порядку від функції швидкості. Оскільки, своєю чергою, $v(t) = S'(t)$, то прискорення є похідною 2-го порядку від функції, якою описують залежність шляху від часу:

$$a = (s'_t)'_t = s''_{tt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (15.28)$$

Твердження (15.28) уважають *механічною інтерпретацією похідної 2-го порядку*.

Задача про визначення швидкості зміни економічних показників. Як і похідна 1-го порядку, що характеризує граничні значення показників виробничих процесів, другу похідну часто використовують для аналізу змінювання цих значень. Зрозуміло, що друга похідна має певний *економічний зміст*, залежно від функції, для якої її розглядають.

Отже, друга похідна від виробничої функції $z = f(V)$, що описує витрати на виробництво продукції, залежно від її обсягу V є *швидкістю змінювання собівартості продукції*:

$$C(V) = (z'_V)'_V = z''_{VV} = \frac{d^2 z}{dV^2}. \quad (15.29)$$

Друга похідна за часом t від обсягу продукції $V = V(t)$ є швидкістю змінювання продуктивності праці $p = p(t)$:

$$v_p(t) = p'(t) = V''(t) = \frac{d^2V}{dt^2}. \quad (15.30)$$

Повернімося до означення похідної 2-го порядку і введемо поняття диференціала 2-го порядку.

Оскільки приріст аргументу Δx не залежить від значення незалежної змінної x (для будь-якої точки з області визначення функції його можна вибрати довільним чином), то від диференціала функції $dy = f'(x)dx$, який теж можна розглядати як функцію від x , можна утворити диференціал $d(dy)$.

Диференціалом 2-го порядку, або **другим диференціалом**, називають диференціал від диференціала функції та позначають символом d^2y або $d^2f(x)$:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx.$$

Уважають, що диференціал dy є диференціалом 1-го порядку.

Зважаючи на загальноприйняте написання $dx \cdot dx = dx^2$, ..., $\underbrace{dx \cdot dx \cdot \dots \cdot dx}_n = dx^n$, остаточно маємо:

$$d^2y = f''(x)dx^2. \quad (15.31)$$

Аналогічно визначають третій диференціал і диференціали більш високих порядків.

Диференціалом n -го порядку називають диференціал 1-го порядку від диференціала $(n-1)$ -го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (15.32)$$

За ф-лою (15.32) маємо вираз для похідної будь-якого скінченного порядку через відношення диференціалів n -го порядку:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

15.8. Формула Тейлора

Задача обчислення значення функції за значеннями аргументу з технічного погляду не завжди є тривіальною. Найпростіше її розв'язують, зазвичай, для цілої раціональної функції-многочлена: виконують певну кількість дій додавання (віднімання) та множення. Якщо ж аналітичне подання функції є іншим, наприклад, $y = \lg x$, $y = \sin x$, то не можна вказати, які саме арифметичні операції та у якій кількості потрібно виконати, щоб обчислити значення функції.

Формула Тейлора дає змогу подавати наближено функції у вигляді многочлена і, користуючись цим, складати таблиці логарифмів, тригонометричних функцій, коренів тощо та розробляти відповідні комп'ютерні програми.

Формула Тейлора для многочлена. Многочлен $P(x)$ степеня n , який подано у такому вигляді:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (15.33)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ – сталі (коефіцієнти многочлена),

називають **многочленом за степенями змінної x** .

Диференціюймо його послідовно n разів:

$$P'(x) = 1a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1};$$

$$P''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \dots + n \cdot (n-1)a_nx^{n-2};$$

$$P'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2)a_nx^{n-3};$$

$$P^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot na_n$$

і, нехай у цих формулах та ф-лі (15.33) $x=0$.

Тоді обчислімо вирази для коефіцієнтів многочлена через значення самого многочлена і його похідних, якщо $x=0$:

$$a_0 = P(0), \quad a_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}. \quad (15.34)$$

З огляду на (15.34), маємо таку формулу:

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad (15.35)$$

яку називають **формулою Тейлора для многочлена** за степенями змінної x ; її відрізняє від ф-ли (15.33) лише спосіб запису коефіцієнтів.

Многочлен, який подано у такому вигляді:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n, \quad (15.36)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ – коефіцієнти многочлена;

x – деяка фіксована вартість аргументу,

називають **многочленом за степенями різниці** $(x - x_0)$.

Аналогічно визначмо формулу Тейлора для многочлена (15.36):

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (15.37)$$

Зрозуміло, що ф-ла (15.35) – окремий випадок (15.37), якщо $x_0 = 0$.

Застосування формули Тейлора дозволяє замінити складну функцію многочленом Тейлора, що значно спрощує обчислення та аналіз. Такий підхід широко використовують в чисельних методах для обчислення значень елементарних функцій, наближеного розв’язування диференціальних рівнянь, а також у прикладних задачах, де важливо отримати просту модель для складного процесу. Також формула Тейлора дає змогу оцінити похибку наближення, завдяки залишковому члену ряду, що забезпечує контроль точності обчислень.



Обчислімо значення многочлена $P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x + 2$, якщо $x = 1,1$, із точністю до 0,1.

Напишімо многочлен за степенями $(x - 1)$.

Тоді

$$P'(x)=4x^3-15x^2+2x+3, \quad P'(1)=-6;$$

$$P''(x)=12x^2-30x+2, \quad P''(1)=-16;$$

$$P'''(x)=24x-30, \quad P'''(1)=-6;$$

$$P^{(4)}(x)=24, \quad P^{(4)}(1)=24.$$

Отже,

$$P(x)=2-6(x-1)-8(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4, \quad P(1,1)=2-6 \cdot 0,1=1,4.$$

Формула Тейлора для довільної функції. Нехай функція $f(x)$ має похідні до $(n+1)$ -го порядку включно в деякому проміжку, що містить точку $x=x_0$.

Напишімо за зразком ф-ли (15.37) многочлен:

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (15.38)$$

Цей многочлен і його похідні (до n -ї включно) у точці x_0 мають ті самі значення, що й функція $f(x)$ і її похідні. Якщо $f(x)$ – не цілий многочлен n -го степеня, то не можна стверджувати про рівність $P_n(x)=f(x)$.

Многочлен $P_n(x)$ дає лише деяке наближення до функції $f(x)$; через те особливий інтерес становить вивчення різниці $f(x)-P_n(x)$. Якщо позначити цю різницю через $R_n(x)$, то маємо:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x). \quad (15.39)$$

Функцію $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$ називають залишковим членом формули Тейлора для функції $f(x)$.

Існують різні форми залишкового члена, одна з них має такий вигляд:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (15.40)$$

де ξ – проміжна точка між x_0 та x .

Ф-лу (15.40) називають **залишковим членом у формі Лагранжа**, а відповідну ф-лу (15.39) – **формулою Тейлора для $f(x)$ із залишковим членом у формі Лагранжа**.

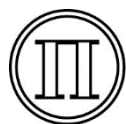
Ф-лу (15.39) відрізняє від ф-ли (15.38) тільки останній член: він має таку саму форму, як і інші члени, але похідну обчислюють не в точці x_0 , а в проміжній точці між x_0 та x .

Якщо $x_0 = 0$, то маємо дуже важливий випадок формули Тейлора:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (15.41)$$

де ξ – число, що визначають між нулем та x .

У цьому разі, замість ξ , часто пишуть θx , де θ – параметр ($0 < \theta < 1$).



Напишімо формулу Тейлора, якщо $x=0$, для таких функцій: а) $y=e^x$; б) $y = \cos x$.

Установлюймо вираз похідної n -го порядку і використовуймо ф-лу (15.41):

а) для функції $y=e^x$:

$$y^{(n)}(x) = e^x.$$

Тому якщо $x=0$, то $y^{(n)}(0)=1$ та ф-ла (15.41) набуває такого вигляду:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}; \quad (15.42)$$

б) функція $y = \cos x$ має такий вираз для n -ї похідної:

$$y^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2).$$

Звідси, якщо $x=0$, маємо:

$$y^{(n)}(0) = 0, \text{ якщо } n \text{ є непарним;}$$

$$y^{(n)}(0) = -1, \text{ якщо } n = 4m - 2, m \in \mathbf{N}; \quad y^{(n)}(0) = 1, \text{ якщо } n = 4(m - 1).$$

Отже,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x). \quad (15.43)$$

Зауваження:

1. Формула теореми Лагранжа є окремим випадком, якщо $n=0$, формули Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x - x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi). \quad (15.44)$$

2. Формулу Тейлора для $f(x)$ застосовують не тільки на практиці наближення функцій многочленами, але й у теоретичних дослідженнях, зокрема, у теорії рядів, яку будуть розглядати далі.



Ключові терміни

Диференціальне числення; похідна; диференціювання; функція, диференційовна в точці; функція, диференційовна на проміжку; дотична; нормаль; геометричний зміст похідної (механічний, економічний); логарифмічне диференціювання; диференціал функції; властивості диференціала; наближене обчислення функції; абсолютна похибка; відносна похибка; похідна n -го порядку; диференціал n -го порядку; формула Тейлора; залишковий член у формі Лагранжа.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають похідною функції в заданій точці?
2. Яким терміном називають процес визначення похідної функції?

3. Чи завжди неперервна в точці функція буде диференційовною?
4. Поясніть, який є зв'язок між неперервністю функції та її диференційовністю в точці.
5. У яких випадках кажуть, що функція має в точці похідну або не має похідної?
6. У чому полягають геометричний, механічний та економічний зміст похідної?
7. Наведіть таблицю похідних основних елементарних функцій.
8. Назвіть арифметичні властивості похідних (правила диференціювання).
9. Опишіть порядок диференціювання складених функцій.
10. Яким співвідношенням пов'язано похідні взаємно обернених функцій?
11. Які функції називають неявними та як їх диференціюють?
12. Що розуміють під логарифмічним диференціюванням? У яких випадках його застосовують?
13. Які функції називають заданими в параметричній формі та як їх диференціюють?
14. Що таке «диференціал функції в заданій точці»?
15. У чому полягає геометричний зміст диференціала?
16. Які властивості диференціала є аналогічними властивостям похідних?
17. Чи залежить форма (вигляд) диференціала функції $y = f(x)$ від того, є аргумент x незалежною чи залежною змінною?
18. Що розуміють під похідними 2, 3, ..., n -го порядків?
19. У чому полягає механічний та економічний зміст другої похідної?
20. Що розуміють під диференціалами 2, 3, ..., n -го порядків?
21. Опишіть, як за допомогою диференціала функції обчислюють наближене значення функції в окремій точці.
22. Як характеризують похибки під час наближеного обчислення значення функції за її диференціалом?
23. Який вигляд має формула Тейлора для: а) многочлена; б) довільної функції?
24. Що називають залишковим членом формули Тейлора для функції $f(x)$? Яке його змістове значення?
25. Який вигляд має залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа?



Тестові завдання до підрозділу 15

1. Як визначають приріст функції $y = f(x)$ у точці x_0 в разі приросту аргументу Δx :

- а) $\Delta y = f(\Delta x) - f(x_0)$;
- б) $\Delta y = f(x_0) - f(\Delta x - x_0)$;
- в) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$?

2. Укажіть формулу, за якою визначають похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 :

- а) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$; б) $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; в) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Наведіть умову, якщо функцію $y = f(x)$, яка визначена в точці x_0 та її околі, називають диференційовною в точці $x = x_0$:

- а) $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x)$ є нескінченно малою, якщо $\Delta x \rightarrow 0$;
- б) $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta y \cdot \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x)$ є нескінченно малою, якщо $\Delta x \rightarrow 0$;
- в) $\Delta y = f(x_0)\Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x)$ є нескінченно малою, якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

4. Приріст функції $y = f(x)$ у точці x_0 має такий вигляд: $\Delta y = A \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$. Укажіть формулу для визначення величини A :

- а) $A = f'(x_0)$; б) $A = \Delta y$; в) $A \cdot \Delta x = y'(x_0)$.

5. Який геометричний зміст має похідна 1-го порядку, якщо в точці $x = x_0$ до графіка функції $y = f(x)$ проведено дотичну:

- а) тангенс кута нахилу дотичної до осі Ox у точці $x = x_0$;
- б) тангенс кута нахилу дотичної до осі Ox ;
- в) приріст ординати дотичної на проміжку $[x_0, x_0 + \Delta x]$?

6. Який фізичний зміст має похідна 1-го порядку:

- а) максимальна швидкість зміни функції;
- б) миттєва швидкість зміни функції;
- в) середня швидкість зміни функції?

7. Який геометричний зміст має диференціал, якщо в точці $x = x_0$ до графіка функції $y = f(x)$ проведено дотичну:

- а) тангенс кута нахилу дотичної до осі Ox у точці $x = x_0$;
- б) тангенс кута нахилу дотичної до осі Ox ;
- в) приріст ординати дотичної на проміжку $[x_0, x_0 + \Delta x]$?

8. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x , а функція $y = f(u)$ – у відповідній точці u , то за якою з наведених формул можна обчислити похідну складеної функції $y = f(\varphi(x))$ у точці x :

- а) $y'(x) = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x)$;
- б) $y'(x) = f(u) \cdot \varphi'_x(x)$;
- в) $y'(x) = f'_u(u) \cdot \varphi(x)$?

9. Якщо функція y від x є заданою параметрично: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ то за якою

з наведених формул визначають її похідну:

- а) $y'_x = y'_t = \psi'(t)$;
- б) $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$;
- в) $y'_x = \frac{x'_t}{y'_t} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$?

10. За якою формулою обчислюють наближене значення функції $y = f(x)$ в окремій точці $x = x_0 + \Delta x$:

- а) $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x) \Big|_{x=x_0} \cdot \Delta x$;
- б) $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) - f'(x) \Big|_{x=x_0} \cdot \Delta x$;
- в) $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x) \Big|_{x=x_0} \cdot x_0$?

Література: [1 – 9; 13; 14; 20 – 22].

16. Застосування похідних для дослідження функцій

Основні питання:

- 16.1. Теореми диференціального числення.
- 16.2. Обчислення границь функцій за правилом Лопіталя.
- 16.3. Дослідження функцій на монотонність.
- 16.4. Екстремум функції. Необхідна та достатні умови екстремуму.
- 16.5. Опуклість, угнутість та точки перегину кривої.
- 16.6. Асимптоти кривої. Загальна схема дослідження функції та побудова графіка.

16.1. Теореми диференціального числення

Для дослідження функцій фундаментальне значення мають деякі теореми, які є теоретичною базою багатьох прикладних задач.

Розгляньмо три основні теореми.

Теорема 16.1 (теорема Ферма).

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено в інтервалі (a, b) і в деякій точці $c \in (a, b)$ набуває найбільшого чи найменшого значення. Якщо в цій точці існує скінченна похідна $f'(c)$, то вона дорівнює нулю.

Доведення. Нехай для визначеності в точці $x = c$ функція набуває найбільшого значення. Це означає, що для довільних значень $x \in (a, b)$ виконано умову $f(x) \leq f(c)$. Надаймо аргументу x у точці $x = c$ приросту Δx .

Тоді функція має такий приріст:

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c), \quad \text{де } c + \Delta x \in (a, b).$$

Складімо таке відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Чисельник цього дробу $\Delta y \leq 0$, оскільки за умовою $f(c + \Delta x) \leq f(c)$.

Отже, якщо $\Delta x < 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, а якщо $\Delta x > 0$ – $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$.

За умовою теореми існує похідна в точці c , тому існує границя:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c),$$

яка не залежить від того, яким способом Δx прямує до нуля (ліворуч або праворуч). Однак, обчисливши границю за $\Delta x \rightarrow +0$, маємо $f'(c) \leq 0$, якщо $\Delta x \rightarrow -0$ – $f'(c) \geq 0$.

Звідси випливає, що $f'(c) = 0$. ■

Геометричну інтерпретацію теореми Ферма показано на рис. 16.1.

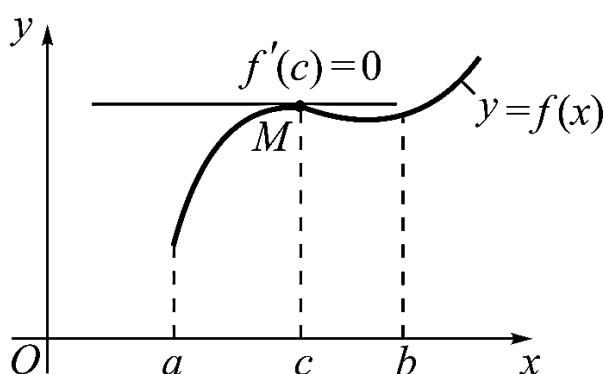


Рис. 16.1. Геометрична інтерпретація теореми Ферма

Наприклад, за теоремою $f'(c) = 0$, а це означає, що дотична в точці $M(c, f(c))$ є паралельною осі Ox .

У разі, якщо функція $f(x)$ набуває в точці $x = c$ найменшого значення, теорему доводять аналогічно.

Теорема 16.2 (теорема Ролля). Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізьку $[a, b]$, має скінченну похідну в інтервалі (a, b) , а на кінцях відрізьку набуває однакових значень, тобто $f(a) = f(b)$, то в інтервалі (a, b) є принаймні одна точка c , у якій $f'(c) = 0$.

Доведення. Неперервна на відрізьку функція набуває на цьому відрізьку найбільшого значення M та найменшого значення m .

Розгляньмо два випадки.

1. Нехай $M = m$. Тоді з умови $m \leq f(x) \leq M$ маємо, що $f(x) = m$ для довільного $x \in [a, b]$, тобто $f(x) = \text{const}$ на відрізьку $[a, b]$.

Отже, $f'(x)=0$ на цьому сегменті й точкою c може бути будь-яка довільна точка інтервалу (a, b) .

2. Якщо $M > m$, тоді принаймні одне зі значень M або m функція набуває у внутрішній точці відрізка $[a, b]$.

Тоді за теоремою Ферма в цій точці $f'(c)=0$ (рис. 16.2). ■

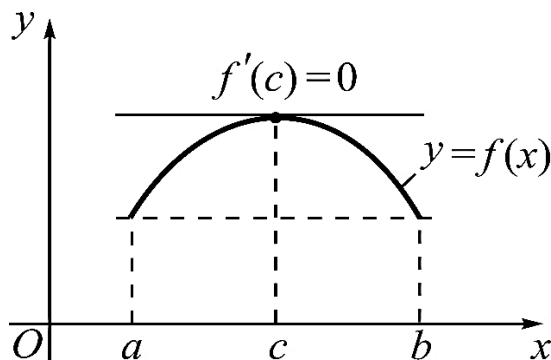


Рис. 16.2. Геометрична інтерпретація теореми Ролля

Теорема 16.3 (теорема Лагранжа). Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$ і має скінченну похідну на інтервалі (a, b) , то є принаймні одна точка $x=c$, $a < c < b$, для якої є справедливою така рівність:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad (16.1)$$

або

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Доведення. Розгляньмо допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \quad (16.2)$$

Для функції $F(x)$ є дійсними умови теореми Ролля. Справді, ця функція є неперервною на $[a, b]$ як сума неперервних функцій; у кожній точці інтервалу (a, b) вона має скінченну похідну.

Отже, на інтервалі (a, b) існує принаймні одна точка $x=c$, для якої $F'(c)=0$.

Тому

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare$$

Геометричну інтерпретацію теореми Лагранжа показано на рис. 16.3.

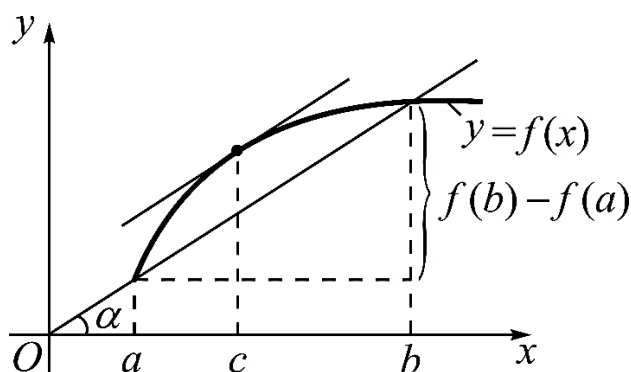


Рис. 16.3. Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа

Наприклад, на кривій, що є графіком функції $y = f(x)$, завжди існує принаймні одна точка, дотична у якій буде паралельною хорді, що з'єднує кінці дуги графіка функції на проміжку $[a, b]$.

Наслідок. Приріст функції $f(x)$ у точці $x_0 \in [a, b]$ дорівнює приросту аргументу, помноженому на похідну цієї функції в деякій точці c , що розташована між точками x_0 та $(x_0 + \Delta x)$: $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c) \cdot \Delta x$.

Справді, якщо в теоремі Лагранжа вважати, що $a = x_0$, а $b = x_0 + \Delta x$, то точка $c \in [x_0, x_0 + \Delta x]$. Уведемо параметр $\theta (0 < \theta < 1)$, тоді будь-яку внутрішню точку c відрізка $[x_0, x_0 + \Delta x]$ можна подати у вигляді $c = x_0 + \theta \Delta x$.

Звідси:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x. \quad (16.3)$$

Отже, приріст функції Δy обчислюють за формулою через приріст Δx і похідну в деякій точці відрізка $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

Ф-лу (16.3) називають **формулою скінченних приростів**.

16.2. Обчислення границь функцій за правилом Лопітала



Нагадаймо, що предметом диференціального числення є встановлення властивостей функцій за допомогою методу границь. Цікаво те, що, своєю чергою, похідні дають змогу розв'язувати загальну задачу визначення границі функції. Основою розкриття невизначеності є правило, що назване ім'ям французького математика Гійома Франсуа маркіза де Лопітала.

Теорема 16.4 (правило Лопітала). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні на інтервалі (a, b) . Якщо на цьому інтервалі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ і $g'(x) \neq 0$ або $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ і $g'(x) \neq 0$ та існує скінченна або нескінченна границя відношення похідних $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то границя відношення функцій $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ також існує і виконано таку рівність:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (16.4)$$

Доведення. Розгляньмо окремий випадок теореми Лопітала, вважаючи, що за $x \rightarrow x_0$ є невизначеність виду $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Отже, припустімо, що функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними в точці x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = 0$.

У цьому разі можна записати таке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Використовуючи теорему Лагранжа для функцій $f(x)$ та $g(x)$ на відрізку $[x, x_0]$, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_1)(x - x_0)}{g'(c_2)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)},$$

де $x < c_1 < x_0$, $x < c_2 < x_0$.

Унаслідок неперервності похідних $f'(x)$ та $g'(x)$:

$$f'(c_1) \rightarrow f'(x_0), \quad g'(c_2) \rightarrow g'(x_0), \text{ якщо } x \rightarrow x_0.$$

Використовуючи теорему про границю частки двох функцій, маємо таку рівність:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \blacksquare$$

Правило Лопіталя використовують також у разі, якщо $x \rightarrow \infty$.

За правилом Лопіталя усувають невизначеності такого вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а інші невизначеності $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$ зводять до них.

Наведімо тотожні перетворення виразів, які дозволяють здійснити це зведення:

$$1) [0 \cdot \infty] \Rightarrow y = f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{ або } y = \frac{g}{\frac{1}{f}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]; \quad (16.5)$$

$$2) [\infty - \infty] \Rightarrow y = f - g \Rightarrow y = \frac{\frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}}}{\frac{1}{\frac{1}{g} \cdot \frac{1}{f}}} = \left[\frac{0}{0}\right]; \quad (16.6)$$

$$3) [1^\infty, 0^0, \infty^0] \Rightarrow y = f^g \Rightarrow \ln y = g \cdot \ln f = [0 \cdot \infty]. \quad (16.7)$$

У співвідношенні (16.7) перехід до $\ln y$ дає невизначеність уже розглянутого вигляду $[0 \cdot \infty]$.

Отже, якщо можна визначити $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = k$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} y = e^k$, оскільки

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = \ln \left(\lim_{x \rightarrow x_0} y \right).$$

Зауваження:

1) правило Лопіталя використовують і за умови, що x_0 є одним із символів ∞ , $+\infty$, $-\infty$;

2) якщо $f'(x)$ і $g'(x)$ є нескінченно малими, якщо $x \rightarrow x_0$, то можна повторно застосовувати правило Лопіталю; іноді – кілька разів;

3) якщо скінченна чи нескінченна границя відношення похідних функцій $f = f(x)$ та $g = g(x)$ не існує, це не означає, що не існує й границі відношення самих функцій.

Наведемо кілька прикладів застосування правила Лопіталю.



Визначмо границю $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$.

Якщо $x \rightarrow 0$, то є невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$, отже, за правилом Лопіталю, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Застосуємо правило Лопіталю вдруге:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow L = 2.$$



Розгляньмо приклад, якщо границі відношення похідних не існує.

Визначмо таку границю за правилом Лопіталю:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}.$$

Останньої границі не існує, але це не означає, що не існує й границі відношення функцій, оскільки:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

Цей приклад – застереження від неправильного висновку, який можна зробити в разі, якщо дріб $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ за $x \rightarrow x_0$ не має ні скінченної, ні нескінченної границі.



Визначмо ще таку границю:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x^x = [0^0].$$

Якщо позначити $y = x^x$, то $\ln y = x \ln x$. Цей вираз у разі $x \rightarrow 0$ породжує невизначеність $[0 \cdot \infty]$:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1.$$

Цей підхід є стандартною технікою в математичному аналізі, коли початковий вигляд виразу не дозволяє безпосередньо визначити границю, але через алгебраїчне перетворення його вдається подати у формі, прийнятній для використання правила Лопіталя.

16.3. Дослідження функцій на монотонність

Розгляньмо застосування похідної для аналізу поведінки функції та побудови її графіка. Із цією метою зупинимося на деяких теоремах, які мають основне значення для дослідження функції.

Теорема 16.5 (необхідна умова монотонності). Якщо функція $y = f(x)$ є диференційовною на проміжку (a, b) і зростає ($x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$), то її похідна на цьому проміжку $f'(x) \geq 0$. Якщо функція є спадною на проміжку (a, b) ($x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$), то її похідна на цьому проміжку $f'(x) \leq 0$. Якщо функція є сталою на проміжку (a, b) , то в кожній його точці похідна $f'(x) = 0$.

Доведення. Припустімо, що функція $y = f(x)$ на проміжку (a, b) зростає, тобто для $x_2 > x_1$ $f(x_2) > f(x_1)$. Нехай $x_1 = x$, тоді $x_2 = x + \Delta x$, а також $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

За означенням похідної, маємо:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Оскільки за умовою теореми $\Delta y > 0$, якщо $\Delta x > 0$, і $\Delta y < 0$, якщо $\Delta x < 0$, то відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, отже, його границя $f'(x) \geq 0$.

Для спадної функції теорему доводять аналогічно.

Якщо $f(x) = \text{const}$, то $f'(x) \equiv 0$, оскільки $\Delta y = 0$. ■

Теорема 16.6 (достатня умова монотонності). Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною на проміжку (a, b) . Тоді, якщо похідна $f'(x) > 0$ в кожній точці проміжку, то функція на проміжку зростає, а якщо $f'(x) < 0$, то функція спадає на цьому проміжку.

Доведення. Нехай $f'(x) < 0$. Доведемо, що функція є спадною. Для цього візьмімо будь-які дві точки x_2 і x_1 , що належать проміжку (a, b) , і застосуємо теорему Лагранжа до функції $f(x)$ на проміжку $[x_1, x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2).$$

Нехай $x_2 > x_1$, тоді $f(x_2) - f(x_1) < 0$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$, отже, функція спадає.

Достатню умову зростання функції доводять аналогічно. ■

Точки, які відокремлюють інтервали зростання та спадання функції, називають **межами інтервалів монотонності**.

Умови наявності меж інтервалів монотонності як висновки з теорем 16.5 і 16.6:

1) якщо точка x_0 є межею інтервалу монотонності функції $y = f(x)$, то $f'(x) = 0$ або не існує. Справді, якщо точка x_0 відокремлює інтервал зростання функції від інтервалу її спадання, то, проходячи через цю точку, похідна або змінює знак і тому $f'(x) = 0$, або ж похідна не існує в точці x_0 ;

2) точка $x = x_0$ є межею інтервалу монотонності, якщо похідна функції в разі переходу через цю точку змінює знак.

Точки області визначення, у яких похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю або не існує, називають **критичними точками** функції $f(x)$. Критичні точки, у яких $f'(x) = 0$, також називають **стаціонарними точками** функції $f(x)$.

На підставі розглянутого раніше наведено алгоритм дослідження функції на монотонність:

- 1) визначмо область визначення функції $D(f)$;
- 2) визначмо критичні точки (за першою похідною);
- 3) установимо знак похідної в кожному з інтервалів, на які критичні точки та точки розриву розподіляють область визначення;
- 4) зробимо відповідний висновок.



Розгляньмо декілька прикладів визначення інтервалів монотонності функцій:

$$1) y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Функція не є визначеною в точках $x = \pm 1$. Тобто область визначення функції становлять три інтервали $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ та $(1, +\infty)$.

Визначмо критичні точки функції:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2},$$

$f'(x) = 0$ в точках $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$. Якщо $x = \pm 1$, то похідної не існує, але не існує і функції.

Отже, область визначення функції розбиває вісь на шість інтервалів, у яких похідна має постійний знак (рис. 16.4).

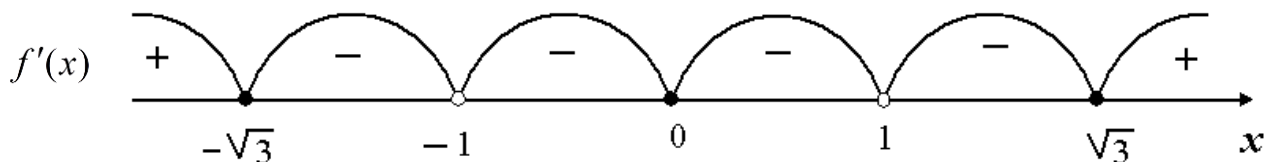


Рис. 16.4. Визначення знака похідної

Щоб установити знак похідної на кожному інтервалі, достатньо установити знак похідної в будь-якій точці кожного з них. Як видно, критична точка $x = 0$ не є межею інтервалу монотонності, бо для неї не виконано достатню умову. Також не змінює знака похідна під час переходу через точки $x = \pm 1$.

Отже, ця функція зростає на інтервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$ і $(\sqrt{3}, +\infty)$, а на інтервалах $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$ і $(1, \sqrt{3})$ вона спадає (див. рис. 16.4);

$$2) y = \ln(x^2 + 2x - 3).$$

Область визначення функції: $x^2 + 2x - 3 > 0$, тобто $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.
Визначмо похідну та обчислимо точки, у яких вона дорівнює нулю:

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-3}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1.$$

Але точка $x=-1$ не належить області визначення функції, а межами інтервалів монотонності є точки, у яких ця функція не є визначеною, тобто точки $x=1$ та $x=-3$.

Отже, на інтервалі $(-\infty, -3)$ функція спадає, а на інтервалі $(1, +\infty)$ – зростає (рис. 16.5).

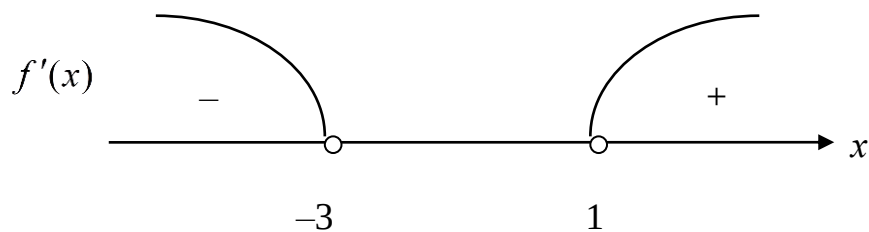


Рис. 16.5. Інтервали монотонності функції

Отже, дослідження функції на монотонність дає змогу виявити характер її зростання чи спадання на різних інтервалах, що є необхідною передумовою для подальшого аналізу екстремальних значень функції.

16.4. Екстремум функції. Необхідна та достатні умови екстремуму

Нехай функція $y = f(x)$ є визначеною і неперервною на інтервалі (a, b) . Точку $x_0 \in (a, b)$ називають **точкою максимуму (мінімуму)** функції $f(x)$, якщо існує такий її окіл $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, що для всіх x із цього околу виконано відповідну нерівність:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)). \quad (16.8)$$

Якщо позначити $x - x_0 = \Delta x$, то співвідношення (16.8) можна записати, відповідно, у такому вигляді:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0 \quad (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0)$$

або

$$\Delta y \leq 0 \quad (\Delta y \geq 0), \text{ якщо } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \quad (16.9)$$

Отже, інакше кажучи, x_0 – *точка максимуму (мінімуму)*, якщо приріст функції в цій точці в разі переходу від x_0 до $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ є від’ємним (додатним).

Точки максимуму ($x_{\max}$) і мінімуму ($x_{\min}$) називають **точками (локального) екстремуму функції**, а відповідні їм значення функції – **(локальними) екстремумами функції (максимумами $f_{\max}$ та мінімумами $f_{\min}$)**.

Теорема 16.7 (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $f(x)$ у точці $x_0 \in (a, b)$ досягає екстремуму і в цій точці існує скінченна похідна, то $f'(x_0) = 0$.

Доведення. За умовою теореми, функція $f(x)$ у точці x_0 досягає максимуму або мінімуму, тобто в околі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ набуває найбільшого (найменшого) значення, а за теоремою Ферма, якщо в цій точці функція $f(x)$ має скінченну похідну, то $f'(x) = 0$. ■

Зауважмо, що функція може не досягати екстремуму, навіть якщо необхідну умову виконано. Це означає, що точка x_0 є тільки критичною, але не є точкою екстремуму.

Теорема 16.8 (перша достатня умова екстремуму). Нехай точка x_0 є критичною точкою для неперервної функції $f(x)$ і в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , існує скінченна похідна. Якщо похідна функції $f'(x)$ під час переходу через точку x_0 змінює знак, то x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$. Якщо ж під час переходу через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знака, то x_0 не є точкою екстремуму функції $f(x)$.

Доведення. Розгляньмо два можливі випадки:

1. Нехай $f'(x) > 0$, якщо $x < x_0$ і $f'(x) < 0$, якщо $x > x_0$, тоді ліворуч від точки x_0 функція зростає, а праворуч – спадає.

Отже, у точці x_0 функція досягає максимуму (рис. 16.6а).

2. Нехай $f'(x) < 0$, якщо $x < x_0$ і $f'(x) > 0$, якщо $x > x_0$, тоді ліворуч від точки x_0 функція спадає, а праворуч – зростає.

Отже, у точці x_0 функція досягає мінімуму (рис. 16.6б).

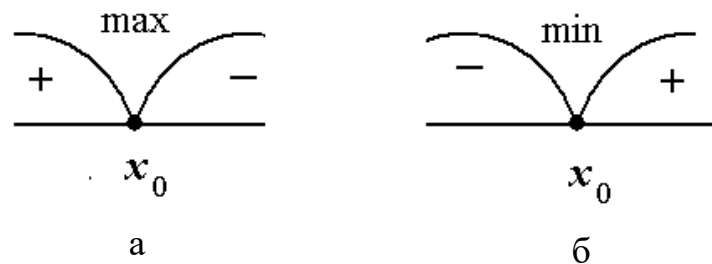


Рис. 16.6. Точки екстремуму

Нехай тепер під час переходу через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знака. Наприклад, нехай $f'(x) > 0$ як ліворуч від точки x_0 , так і праворуч від неї. Тоді функція весь час зростає. Тому як завгодно близько до точки x_0 ліворуч існують точки x , у яких значення функції є меншими за значення функції в точці x_0 , а праворуч існують точки x , у яких значення функції є більшими за значення функції в точці x_0 .

Отже, у точці x_0 ніякого екстремуму немає. Доведення для випадку від'ємної похідної є аналогічним. ■

Отже, для визначення екстремуму функції виконаймо певні дії, а саме:

- 1) визначмо область визначення функції;
- 2) визначмо критичні точки ($f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$, або не існує);
- 3) дослідімо на екстремум кожен критичну точку.

Зауваження. Означення точки максимуму (мінімуму) потребує існування такого її околу, що приріст функції в ній під час переходу до будь-якої точки саме цього околу має один і той самий знак.

Тому:

- 1) розглянуті екстремуми називають **локальними**, бо може бути таке, що значення локального максимуму функції в одній точці є меншим за значення локального мінімуму функції в іншій точці;

2) екстремуми є можливими тільки у внутрішніх точках відрізка $[a, b]$, тобто на інтервалі (a, b) , а саме для таких проміжків і доводили відповідні теореми.



Проведімо дослідження на екстремум таких функцій:

$$1) y = (x + 2)^2 (x - 1)^3.$$

Функція є визначеною на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Визначмо похідну й обчислімо критичні точки:

$$y' = 2(x + 2)(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2(x + 2)^2 = (x - 1)^2(x + 2)(5x + 4).$$

Отже, критичними є такі точки: $x_1 = -2$; $x_2 = -\frac{4}{5}$; $x_3 = 1$. Визначмо знак похідної в околі кожної із цих точок (рис. 16.7).

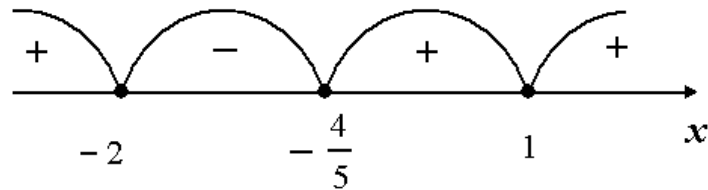


Рис. 16.7. Визначення знака похідної на інтервалах

На кожному проміжку виберімо довільну точку:

$$f'(-3) = 176 > 0; \quad f'(-1) = -4 < 0; \quad f'(0) = 8 > 0; \quad f'(2) = 56 > 0.$$

Отже, точка $x_1 = -2$ є точкою максимуму, $f_{\max}(-2) = 0$; точка $x_2 = -\frac{4}{5}$ є точкою мінімуму, $f_{\min}\left(-\frac{4}{5}\right) \approx -8,4$; у точці $x_3 = 1$ функція екстремуму не має;

$$2) y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Під час дослідження цієї функції на монотонність (див. рис. 16.4) доведено, що точки $x = \pm\sqrt{3}$, $x = \pm 1$, $x = 0$ є критичними точками для неї.

Водночас похідна змінює знак, тільки проходячи через точки $x = \pm\sqrt{3}$.

Отже, функція має екстремум тільки в цих точках, а саме $f_{\max}(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}/2$, $f_{\min}(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}/2$. Підкреслимо, що визначені мінімум і максимум функції є локальними.

Теорема 16.9 (друга достатня умова екстремуму). Нехай точка x_0 є критичною точкою функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, а друга похідна $f''(x_0)$ – неперервною в деякому околі точки x_0 і $f''(x_0) \neq 0$, тоді:

- а) якщо $f''(x_0) > 0$, то в точці x_0 функція має локальний мінімум;
- б) якщо $f''(x_0) < 0$, то функція в точці x_0 має локальний максимум.

Доведення:

а) нехай $f''(x_0) > 0$, тоді $f'(x)$ у деякому околі точки x_0 є зростаючою функцією, тобто, якщо $x < x_0$, то $f'(x) < 0$, а якщо $x > x_0$, то $f'(x) > 0$.

Отже, у точці $x = x_0$ функція має мінімум (за першою достатньою умовою екстремуму);

б) нехай $f''(x_0) < 0$, тоді $f'(x)$ у деякому околі точки x_0 є спадною функцією, тобто, якщо $x < x_0$, то $f'(x) > 0$, а якщо $x > x_0$, то $f'(x) < 0$.

Отже, у точці $x = x_0$ функція має максимум (за першою достатньою умовою екстремуму). ■

Зауваження. У разі $f''(x_0) = 0$ другу достатню умову екстремуму використовувати не можна й дослідження слід проводити за першою.



Покажімо використання другої достатньої умови екстремуму на розглянутому раніше прикладі.

$$y = (x+2)^2(x-1)^3; \quad y' = (x-1)^2(x+2)(5x+4);$$

$$y'' = 2(x-1)(10x^2 + 16x + 1).$$

Отже, у точці $x = -2$ $y'' < 0$, тому функція має максимум; у точці $x = -\frac{4}{5}$ $y'' > 0$, тому функція має мінімум; у точці $x = 1$ $y'' = 0$, тому дослідити її на екстремум не можна.

Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$ й існує таке значення $x_0 \in [a, b]$, що для будь-якого $x \in [a, b]$ виконано умову $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$), тоді число $f(x_0)$ називають **найбільшим (найменшим) значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$** .

Відповідні значення функції позначають так:

$$\sup_{[a, b]} f(x_0) = M \text{ (найбільше значення } f(x));$$

$$\inf_{[a, b]} f(x_0) = m \text{ (найменше значення } f(x)).$$

Найбільше (найменше) значення функції на відрізку ще визначають як **глобальний екстремум**. Точка, у якій спостерігають найбільше (найменше) значення функції може збігатися з відповідною точкою локального екстремуму (якщо така існує для заданого відрізка) або належати межі відрізка.

Для визначення найбільшого й найменшого значень функції на відрізку $[a, b]$ виконаймо такі дії:

- 1) визначмо похідну $f'(x)$ та всі критичні точки, які належать відрізку $[a, b]$, тобто визначмо точки, у яких $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0) = \infty$, або $f'(x)$ не існує;
- 2) обчислимо значення функції $f(x)$ у критичних точках і на кінцях відрізка $[a, b]$;
- 3) порівняймо обчислені значення функції та виберімо серед них найбільше й найменше.



Обчислимо найбільше та найменше значення функції $y = (x + 2)^2 (x - 1)^3$ на проміжку $[-1, 2]$.

Спочатку визначмо критичні точки цієї функції:

$$y' = (x-1)^2(x+2)(5x+4) \Rightarrow y' = 0, \text{ якщо } x_1 = -2; x_2 = -\frac{4}{5}; x_3 = 1.$$

Зауважмо, що $x_1 = -2 \notin [-1, 2]$, отже, для цього прикладу не є критичною точкою.

Обчислимо значення функції в критичних точках, що належать відрітку $[-1, 2]$, тобто в точках $x_2 = -\frac{4}{5}$ і $x_3 = 1$, а також на кінцях проміжку, а саме якщо $x = -1$ і $x = 2$: $f(-1) = -8$; $f\left(-\frac{4}{5}\right) \approx -8,4$; $f(1) = 0$; $f(2) = 16$.

Порівняймо обчислені значення:

$$M = \sup_{[-1, 2]} f(2) = 16 - \text{найбільше значення функції};$$

$$m = \inf_{[-1, 2]} f\left(-\frac{4}{5}\right) \approx -8,4 - \text{найменше значення функції}.$$

Зазначмо, що за допомогою наведених раніше методів обчислення максимальних і мінімальних значень функції можна розв'язувати задачі з геометрії, механіки, економіки та інших наук.

Розгляньмо одну з таких задач.



На сторінці книги друкований текст має займати площу S см². Поля згори та знизу мають бути по a см, а праворуч і ліворуч – по b см.

Визначмо найбільш економні розміри сторінки.

Позначмо через F площу сторінки, а через x , y – розміри сторінки; тоді її площа $F = x \cdot y$. Найбільш економні розміри мають забезпечити мінімальну площу.

З огляду на умови задачі, маємо:

$$s = (x-2b)(y-2a) \Rightarrow y = \frac{s}{x-2b} + 2a.$$

Визначмо площу сторінки як функцію змінної x , де $x > 2b$ за змістом задачі, і дослідімо обчислену функцію на екстремум за допомогою похідної, розв'язавши рівняння $F'(x) = 0$.

Маємо такий розв'язок:

$$F = x \left(\frac{s}{x-2b} + 2a \right), \quad F' = 2a - \frac{2bs}{(x-2b)^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{bs}{a}} + 2b.$$

Тепер визначмо другу похідну та її знак у критичній точці.

Оскільки друга похідна

$$F'' = \frac{4bs}{(x-2b)^3} > 0,$$

то, за теоремою 16.9, у визначеній точці є мінімум.

Отже, розміри сторінки, що забезпечують її найбільш економне використання, є такими:

$$x = \sqrt{bs/a} + 2b, \quad y = \sqrt{as/b} + 2a.$$

16.5. Опуклість, угнутість та точки перегину кривої

Функцію $y = f(x)$ називають **опуклою (угнутою)** у точці x_0 , якщо в деякому околі цієї точки криву, яка є графіком функції, розташовано нижче (вище) від дотичної до кривої в цій точці (рис. 16.8).

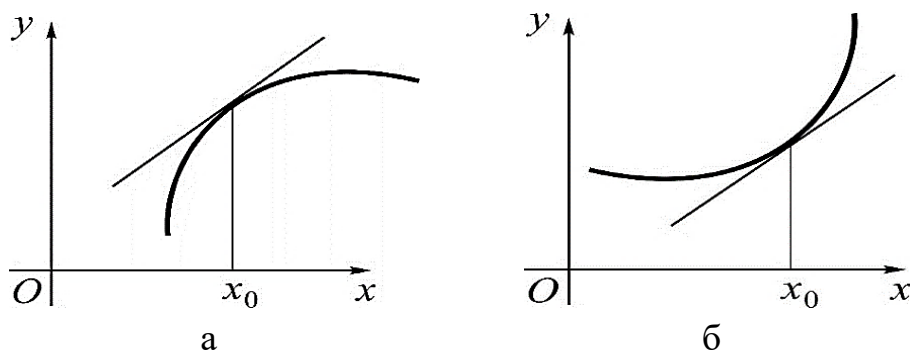


Рис. 16.8. Опуклість та угнутість кривої:

а) крива опукла; б) крива угнута

Криву називають **опуклою (угнутою)** на проміжку (a,b) , якщо вона є опуклою (угнутою) в усіх точках цього проміжку.

Теорема 16.10 (необхідна та достатня умова опуклості (угнутості)).

Нехай функція $f(x)$ на інтервалі (a, b) є неперервною і двічі диференційовною, водночас $f''(x) \neq 0$ на цьому інтервалі.

Для того щоб крива $y = f(x)$ була опуклою чи угнутою на інтервалі, необхідно й достатньо, щоб друга похідна функції $f''(x)$ зберігала свій знак: якщо $f''(x) < 0$ у всіх точках інтервалу, то крива є опуклою, якщо $f''(x) > 0$ у всіх точках інтервалу, то угнутою.

Доведення.

Необхідність. Нехай функція $y = f(x)$ є угнутою на (a, b) . Покажімо, що $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

На інтервалі (a, b) візьмімо довільну точку x_0 . Рівняння дотичної до графіка функції в точці $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Оскільки на кривій виконано рівність $y = f(x)$, то слід оцінити різницю між виразами $f(x)$ та $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Для цього двічі перетворимо їхню різницю за теоремою Лагранжа.

Отже,

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) &= f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \\ &= (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0) = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

За теоремою Лагранжа, точку c розташовано між x_0 і x , а точку c_1 — між x_0 і c , тому добуток $(c - x_0)(x - x_0)$ є додатним, незалежно від порядку, у якому розміщено точки x_0 , x та c на числовій прямій.

Отже, знак $f''(x)$ є збіжним зі знаком виразу $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, а тому з нерівності $f''(x) < 0$ випливає, що $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (опуклість графіка), а з нерівності $f''(x) > 0$ — $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (угнутість графіка).

Достатність. Нехай $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, тоді, згідно з виразом для різниць ординат кривої й дотичної $f''(c_1)(x - x_0)(c - x_0)$, та зважаючи на означення угнутості, маємо:

$$f''(c_1)(x - x_0)(c - x_0) > 0,$$

тобто криву розташовано під дотичною, отже, вона є угнутою. ■

Точки, у яких функція є визначеною і які відокремлюють інтервали опуклості та угнутості кривої, називають **межами** відповідних інтервалів, або **точками перегину** кривої.

Теорема 16.11 (необхідні умови точок перегину). Проміжки опуклості та угнутості кривої відокремлюють точками, у яких похідна $f''(x) = 0$ або її не існує.

Доведення виконаймо для випадку, якщо друга похідна $f''(x)$ є неперервною. Справді, якщо точка $x = x_0 \in (a, b)$ є межею інтервалів опуклості й угнутості (a, x_0) , (x_0, b) , то $f''(x_0) = 0$, бо перехід від додатного до від'ємного та навпаки для неперервної функції виконують через нуль. ■

Теорема 16.12 (достатні умови точок перегину). Якщо під час переходу через критичну точку $x_0 \in D(f)$, у якій $f''(x_0) = 0$, друга похідна змінює знак, то ця точка є точкою перегину функції $f(x)$.

Доведення. За умови теореми, функція змінює опуклість на угнутість чи навпаки, тому точка x_0 є межею відповідних інтервалів, тобто точкою перегину. ■

Отже, на основі теорем 16.10 – 16.12 для дослідження функції на опуклість (угнутість) виконаймо такі дії:

- 1) визначмо існування функції $f(x)$;
- 2) визначмо похідну $f'(x)$ і критичні точки за похідною 2-го порядку;
- 3) установімо знак другої похідної в кожному з інтервалів, на які ці критичні точки розбивають область визначення функції;
- 4) застосуємо відповідну достатню умову і зробить висновки.



Дослідімо на опуклість (угнутість) таку функцію: $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Область визначення функції: $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Визначмо $f'(x)$ та $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}; \quad f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Звідси $f''(x) = 0$, якщо $x = 0$, а також $f''(x)$ не існує, якщо $x = \pm 1$, однак якщо $x = \pm 1$, то функції не існує. Ці точки розбивають область визначення функції на такі інтервали: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Установлюймо знак другої похідної на кожному інтервалі (рис. 16.9) і, за теоремою 16.10, зробимо відповідні висновки.

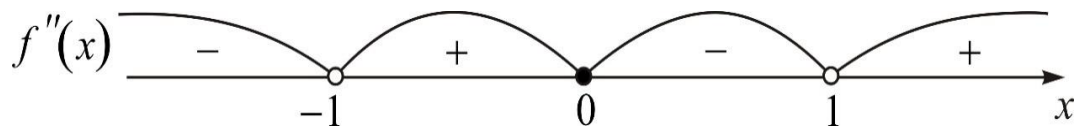


Рис. 16.9. Визначення знака другої похідної

Отже, на проміжках $(-\infty, -1)$ та $(0, 1)$ графік функції є опуклим; на проміжках $(-1, 0)$ та $(1, +\infty)$ – угнутим. Усі критичні точки, у яких функція є визначеною, є точками перегину функції. Такою є тільки одна із трьох точок – точка $x_2 = 0$.

16.6. Асимптоти кривої. Загальна схема дослідження функції та побудова графіка

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називають пряму, відстань до якої від точки кривої прямує до нуля за необмеженого віддалення цієї точки вздовж кривої від початку координат.

Наведімо можливі три типи асимптот (рис. 16.10) і рівняння прямих, якими їх описують:

- 1) *вертикальна* асимптота має рівняння $x = a$;
- 2) *похила* асимптота має рівняння $y = kx + b$;
- 3) *горизонтальна* асимптота має рівняння $y = b$ (окремий випадок похилої асимптоти, якщо $k = 0$).

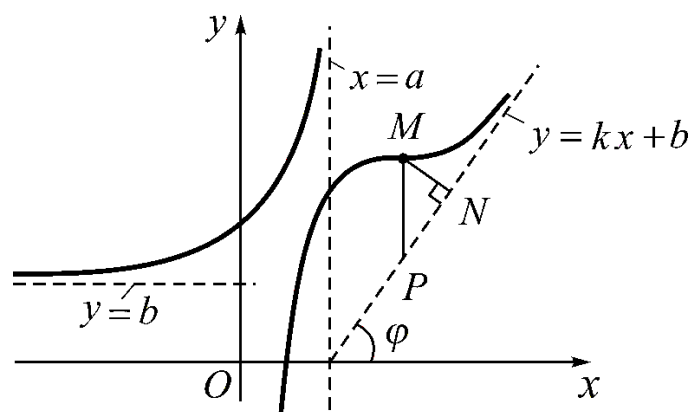


Рис. 16.10. Різновиди асимптот

За означенням асимптот, вертикальні асимптоти визначають точками $x=a$, для яких $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Такими точками, зазвичай, є точки розриву II роду (точки нескінченних розривів); їх легко встановлюють під час визначення області існування функції, водночас обчислюють $f(a-0)$ і $f(a+0)$.

Параметри k і b в рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ визначають за умовою (див. рис. 16.10) $MP = |f(x) - (kx + b)| \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow \infty$. Ця умова тягне за собою таку умову:

$$MN = MP \cos \varphi \rightarrow 0,$$

де MN – відстань від точки кривої до асимптоти;

MP – модуль різниці ординат точок кривої та асимптоти за деякого x .

Тому за таких обставин:

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала за $x \rightarrow \infty$,

тоді

$$\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} = \frac{\alpha(x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k = 0 \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = 0 \Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Отже, параметри k і b в рівнянні похилої асимптоти $y=kx+b$ визначають, обчислюючи такі границі:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad (16.10)$$

Оскільки пряма може бути асимптотою в разі прямування x до нескінченності в одному напрямку ($x \rightarrow +\infty$ або $x \rightarrow -\infty$), то для визначення k і b визначають границі за $x \rightarrow +\infty$ та за $x \rightarrow -\infty$.

Якщо $k=0$, то маємо горизонтальну асимптоту:

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

Якщо хоча б однієї із границь (для k або b) не існує або є нескінченною, то крива не має похилих (горизонтальних) асимптот.



Визначмо асимптоти графіка таких функцій:

$$1) y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Цю функцію вже досліджено раніше.

Областю її визначення є $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Для визначення вертикальних асимптот розгляньмо точки, у яких хоча б одна із границь функції є нескінченною.

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Отже, прямі $x=-1$ і $x=1$ – це вертикальні асимптоти.

Рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$ визначмо, обчисливши такі границі:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

Рівняння похилої асимптоти графіка функції: $y = x$;

2) $y = x \cdot e^x$.

Вертикальних асимптот функція не має, оскільки $D(f) = \mathbf{R}$.

Похилі асимптоти визначмо, розглядаючи два випадки:

а) $x \rightarrow +\infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty,$$

тому асимптоти графік функції не має;

б) $x \rightarrow -\infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0,$$

отже, якщо $x \rightarrow -\infty$ крива має горизонтальну асимптоту $y = 0$.

За результатами дослідження функції, згідно з п. 16.3 – 16.6, з огляду на деякі інші відомості про неї, можна схематично побудувати графік функції.

Для зображення графіка функції рекомендують загальну схему, згідно з якою виконаймо такі дії:

- 1) визначмо область визначення функції;
- 2) перевірмо функцію на парність, непарність, періодичність;
- 3) дослідімо функцію на монотонність та екстремуми;
- 4) установімо інтервали опуклості, угнутості та точки перегину;
- 5) визначмо асимптоти графіка функції;
- 6) визначмо точки перетину графіка функції з осями координат (не обов'язково).



Побудуймо графік такої функції: $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

У п. 16.4 – 16.6 цю функцію досліджували на екстремум, опуклість (угнутість) та наявність асимптот.

Отже, на рис. 16.11 схематично зображено графік функції.

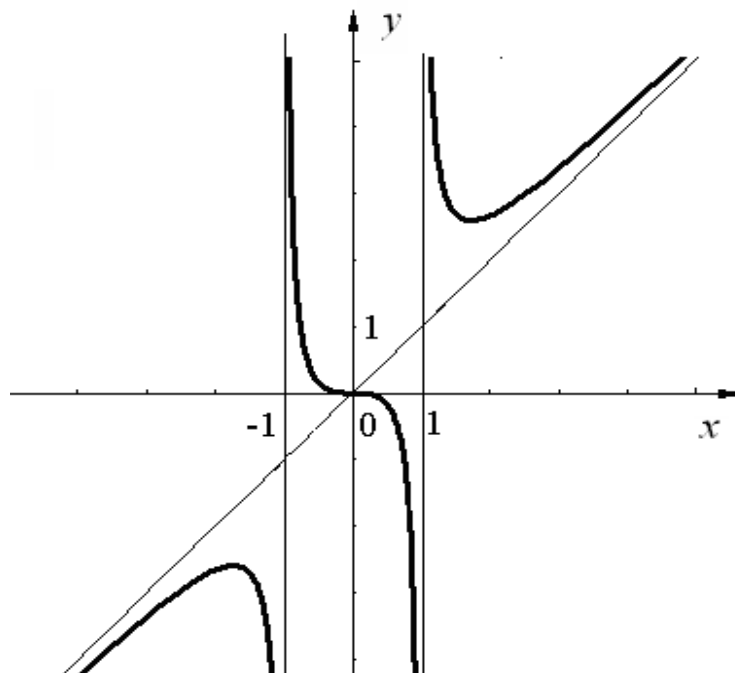


Рис. 16.11. Графік функції $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$



Проведімо дослідження функції $y = \operatorname{arctg} x - x$ та побудуємо її графік:

1. Область визначення функції така: $x \in \mathbf{R}$.
2. Функція є непарною, оскільки $f(-x) = -f(x)$, тобто графік її є симетричним відносно початку координат.
3. Визначмо критичні точки за першою похідною й інтервали монотонності та екстремуми:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

З умови $f'(x) = 0$, випливає, що $x = 0$. Оскільки $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$, то функція всюди спадає й екстремуму не має.

$$4. \text{ Установімо інтервали опуклості (угнутості): } f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Маємо: $f''(x) = 0$, якщо $x = 0$.

На інтервалі $(-\infty, 0)$ крива є угнутою ($f''(x) > 0$); на інтервалі $(0, +\infty)$ – опуклою ($f''(x) < 0$).

5. Вертикальних асимптот крива не має, оскільки $D(f) = \mathbf{R}$.

Дослідімо щодо похилих асимптот:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1 \right) = 0 - 1 = -1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\operatorname{arctg} x - x + x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Отже, крива має похилу асимптоту $y = -x + \frac{\pi}{2}$, якщо $x \rightarrow +\infty$, і похилу

асимптоту $y = -x - \frac{\pi}{2}$, якщо $x \rightarrow -\infty$.

6. Графік перетинає осі координат у точці $(0, 0)$.

Результати дослідження показано на рис. 16.12.

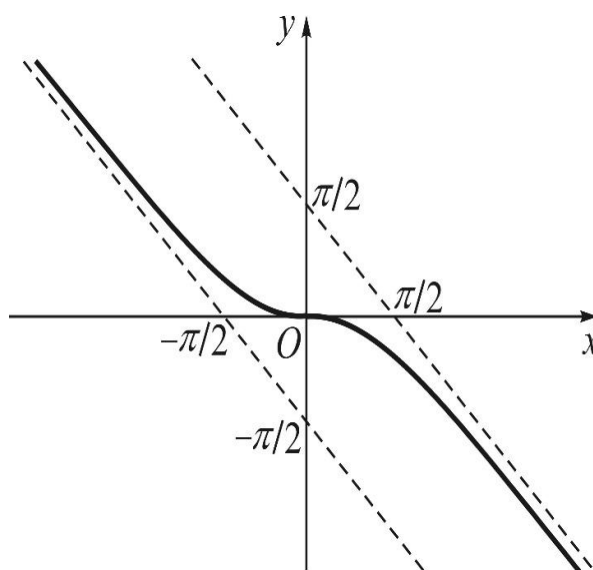


Рис. 16.12. Графік функції $y = \operatorname{arctg} x - x$

Отже, зважаючи на всі властивості функції, побудований графік повністю відображає її поведінку на всій області визначення.



Ключові терміни

Правило Лопіталя; інтервали монотонності функції; критичні точки; стаціонарні точки; точки мінімуму та максимуму функції; локальний екстремум;

найбільше та найменше значення функції на відрізку; інтервали опуклості й угнутості функції; критичні точки функції за другою похідною; асимптоти графіка функції.



Запитання для самоперевірки

1. Наведіть три основні теореми диференціального числення і надайте їхню геометричну інтерпретацію.
2. Які види невизначеності під час обчислення границь функцій можна розкрити за правилом Лопіталя?
3. Які функції називають монотонними, зростаючими, спадними?
4. У чому полягають необхідна та достатня умови монотонності функцій, сталості функції на деякому проміжку?
5. Які точки називають точками екстремуму функції?
6. Що таке «локальний екстремум функції»?
7. У чому полягають необхідна та достатня умови екстремуму (максимуму і мінімуму) функції за першою похідною?
8. Наведіть загальний порядок дослідження функцій на екстремум.
9. Які точки називають точками перегину графіка функції?
10. Які функції називають опуклими (угнутими) у заданій точці, на заданому інтервалі?
11. У чому полягають необхідна та достатня умови опуклості (угнутості) функції?
12. Наведіть схему дослідження функцій на опуклість (угнутість).
13. У чому полягають необхідна та достатня умови наявності точок перегину функції?
14. Що таке «асимптота» графіка функції?
15. Які є типи асимптот графіка функції?
16. Наведіть загальну схему дослідження функцій засобами диференціального числення.



Тестові завдання до підрозділу 16

1. Які з наведених умов є умовами теореми Ролля:
 - а) функція $f(x)$ є неперервною на $[a, b]$, диференційовною на (a, b) ;
 - б) функція $f(x)$ є неперервною на $[a, b]$, $f(a) = f(b)$;

- в) функція $f(x)$ є неперервною на $[a, b]$, диференційовною на (a, b) ;
 г) функція $f(x)$ є неперервною на $[a, b]$, диференційовною на (a, b) ,
 $f(a) = f(b)$?

2. Яка з рівностей є правильною, згідно з теоремою Лагранжа, якщо функція $f(x)$ є неперервною на $[a, b]$, диференційовною на (a, b) :

- а) $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$; б) $f(b) - f(a) = f'(c)$;
 в) $\frac{b - a}{f(b) - f(a)} = f'(c)$; г) $\frac{f(b) - b}{f(a) - a} = f'(c)$.

3. Нехай відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ є невизначеністю $\left[\frac{0}{0}\right]$ чи $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, якщо $x \rightarrow x_0$.

Яке з наведених тверджень є правильним:

- а) якщо $\epsilon \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\epsilon \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$;
 б) якщо $\epsilon \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, то $\epsilon \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$;
 в) якщо $\epsilon \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\epsilon \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$;
 г) якщо $\epsilon \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\epsilon \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$?

4. Якщо похідна функції на проміжку (a, b) є від'ємною, то що можна сказати про поведінку функції на проміжку (a, b) :

- а) функція зростає; б) функція спадає;
 в) функція є сталою; г) функція є опуклою?

5. Якщо функція зростає на проміжку (a, b) , то що можна сказати про похідну функції на проміжку (a, b) :

- а) похідна є від'ємною; б) похідна дорівнює нулю;
 в) похідна є додатною; г) похідна не існує?

6. Які точки є критичними точками функції:

- а) точки, у яких похідна дорівнює нулю;
- б) точки, у яких похідна дорівнює нулю або її не існує;
- в) точки, у яких похідна є від'ємною;
- г) точки, у яких похідна є додатною?

7. Що є першою достатньою умовою існування максимуму:

- а) $f'(x) = 0$ і під час переходу через точку x_0 у напрямку зростання x похідна $f'(x)$ змінює знак із плюса «+» на мінус «-»;
- б) $f'(x) = 0$ і під час переходу через точку x_0 у напрямку зростання x похідна $f'(x)$ змінює знак із мінуса «-» на плюс «+»;
- в) $f'(x) \neq 0$ і під час переходу через точку x_0 у напрямку зростання x похідна $f'(x)$ змінює знак із плюса «+» на мінус «-»?

8. Якщо на проміжку (a, b) похідна 2-го порядку $f''(x) > 0$, то якою буде функція на цьому проміжку:

- а) опуклою; б) зростаючою; в) угнутою; г) спадною?

9. Якщо пряма $x = a$ – це вертикальна асимптота графіка функції $f(x)$, то якою є точка $x = a$:

- а) усувного розриву;
- б) розриву I роду;
- в) розриву II роду, водночас одна (або обидві) з одnobічних границь дорівнює нескінченності;
- г) неперервності функції $f(x)$?

10. За якими формулами визначають коефіцієнти k і b в рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ до графіка функції $y = f(x)$:

- а) $k = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x), b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x};$
- б) $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x);$
- в) $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx);$
- г) $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (kf(x) - x)?$

Література: [1 – 9; 13; 14; 20 – 22].

17. Застосування похідних в економічних дослідженнях

Основні питання:

- 17.1. Задачі, у яких використовують поняття похідної.
- 17.2. Граничний аналіз.
- 17.3. Еластичність функції.
- 17.4. Застосування похідної в економічній теорії.

17.1. Задачі, у яких використовують поняття похідної

Задача про продуктивність праці. Нехай функція $f = f(t)$ визначає обсяг виробленої продукції f за час t і потрібно визначити продуктивність праці в момент t_0 .

Очевидно, за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ обсяг виробленої продукції зросте від значення $f_0 = f(t_0)$ до значення $f_0 + \Delta f = f(t_0 + \Delta t)$.

Тоді середня продуктивність праці за цей період часу становить

$$z_{\text{сер.}} = \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

Продуктивність праці в момент t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$, якщо $\Delta t \rightarrow 0$, тобто

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_{\text{сер.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = f'(t_0).$$

Отже, похідна обсягу виробленої продукції за часом $f'(t_0)$ є продуктивністю праці в момент t_0 . У цьому є економічний зміст похідної.

Максимізація прибутку. Максимізація прибутку є одним з основних критеріїв оцінювання діяльності виробничої або комерційної структури. Прибуток R (*revenue*) є деякою функцією від обсягу реалізованої продукції x – $R = R(x)$.



Дослідження, проведені фірмою, показали: щотижневий продаж x , залежно від щотижневого прибутку R , описано співвідношенням, яке подано у вигляді такої функції:

$$R(x) = -0,005x^2 + 20x - 5\,000.$$

Визначмо, за яких умов фірма буде мати максимальний щотижневий прибуток.

Зрозуміло, що областю визначення функції є $x \geq 0$.

Визначмо всі стаціонарні точки з умови, що похідна функції прибутку дорівнює нулю:

$$\frac{dR}{dx} = -0,01x + 20 = 0, \quad x_0 = 2\,000.$$

Із метою ідентифікації цієї точки, визначмо:

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -0,01 < 0.$$

Отже, точка $x_0 = 2\,000$ є точкою локального максимуму.

Водночас

$$R = -0,005 \cdot 2\,000^2 + 20 \cdot 2\,000 - 5000 = 1\,500.$$

Отже, для максимізації свого прибутку фірма має щотижня реалізовувати 2 000 од. своєї продукції. Водночас її максимальний прибуток буде становити 1 500 грн.

17.2. Граничний аналіз

У практиці економічних досліджень широко застосовують *виробничі функції*, які використовують для встановлення залежностей, наприклад, випуску продукції від витрат ресурсів, витрат виробництва від обсягу продукції, доходу від продажу товару тощо. У припущенні диференційовності виробничих функцій важливого значення набувають їхні диференціальні характеристики, пов'язані з поняттям похідної.

Аналіз, що використовує граничні величини (відносні прирости) для дослідження економічних процесів, називають **граничним**, або **маржинальним аналізом**.

Розгляньмо похідні для означених типів виробничих функцій:

1. Нехай виробнича функція $TC = TC(x)$ – функція сукупних витрат виробництва (*total cost*), що залежить від обсягу продукції x .

Припустімо, що обсяг продукції збільшили на Δx .

Обсягу продукції $(x + \Delta x)$ відповідають витрати виробництва $TC(x + \Delta x)$. Приросту обсягу продукції Δx відповідає приріст сукупних витрат виробництва продукції на величину $\Delta TC = TC(x + \Delta x) - TC(x)$.

Середній приріст сукупних витрат виробництва визначають як $\frac{\Delta TC}{\Delta x}$.

Це приріст сукупних витрат виробництва на одиницю приросту обсягу продукції.

Граничними витратами виробництва (*marginal cost*) називають додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції. Їх визначають як границю відношення зміни сукупних витрат до обсягу додаткової продукції, що було виготовлено:

$$MC = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta TC}{\Delta x} = TC'(x).$$

Граничні витрати виробництва є швидкістю зміни витрат виробництва. Величина $TC'(x)$ характеризує наближено додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

2. Позначмо $TR(x)$ сукупний дохід (*total revenue*) від продажу x одиниць товару.

Граничним доходом (*marginal revenue*) називають додатковий дохід, отриманий від реалізації додаткової одиниці продукції. Його визначають як границю відношення зміни сукупного доходу до обсягу реалізованої продукції, що його зумовила:

$$MR = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta TR}{\Delta x} = TR'(x).$$

3. Нехай виробнича функція $TP = TP(x)$ установлює залежність загального обсягу випуску продукції (*total product*) від витрат ресурсу x .

Граничним продуктом (*marginal product*) називають додатковий продукт, вироблений у разі використання додаткової одиниці ресурсу.

Його визначають як границю відношення зміни обсягу продукції до обсягу використовуваного ресурсу, що його зумовила:

$$MP = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta TP}{\Delta x} = TP'(x).$$

17.3. Еластичність функції

Поняття еластичності було введено Альфредом Маршаллом, лідером кембриджської школи маржиналізму, наприкінці XIX ст., у зв'язку з аналізом функції попиту. Зараз це поняття широко використовують для характеристики інших економічних функцій.

Спочатку введемо деякі поняття. В економіці часто використовують поняття відносних змін певної величини. Нехай функція $y = f(x)$ є визначеною на інтервалі (a, b) і точка $x \in (a, b)$ і $f(x) \neq 0$. Візьмімо приріст аргументу Δx таким, що $x + \Delta x \in (a, b)$.

Відношення $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}$ називають **відносним змінням функції**

$y = f(x)$ у точці x , що зумовлено змінням аргументу Δx .

Відносне зміння величини часто обчислюють у відсотках

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)} \cdot 100 \%.$$

Розгляньмо таке відношення:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x) \cdot \Delta x}, \quad (17.1)$$

яке показує відносне зміння функції $y = f(x)$ у точці x , що припадає на одну одиницю зміння аргументу. Нехай існує скінченна похідна $f'(x)$, тоді й існує границя :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x) \cdot \Delta x} = \frac{1}{f(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Відношення $\frac{f'(x)}{f(x)}$ називають **швидкістю відносного зміння функції**

$y = f(x)$ у точці x .

У разі, якщо аргумент функції інтерпретують як час, то швидкість відносного зміння функції називають **темпом приросту функції**.

Якщо Δx є достатньо малим, то відношення (17.1) наближено дорівнює швидкості відносного змінення функції в точці x :

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x) \cdot \Delta x} \approx \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

У тому разі, якщо одиниці вимірювання аргументу x є такими, що Δx (який дорівнює одиниці) можна вважати достатньо малим зміненням x , то швидкість відносного змінення функції наближено дорівнює відносному зміненню функції за змінення аргументу на одиницю.

Нехай точка $x \in (a, b)$ є такою, що $x \neq 0$.

Візьмімо таке Δx , що $x + \Delta x \in (a, b)$, і розгляньмо відносне змінення аргументу в точці x : $\frac{\Delta x}{x}$.

Тоді така величина:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} \quad (17.2)$$

буде визначати відносне змінення функції, що припадає на одиницю відносного змінення аргументу.

Нехай задана функція $y = f(x)$, для якої існує похідна $y' = f'(x)$.

Еластичністю функції $y = f(x)$ відносно змінної x називають границю відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x за умови, що $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} f'(x).$$

Її позначають $E_x(y)$.

Отже,

$$E_x(y) = \frac{x}{y} f'(x) = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}. \quad (17.3)$$

Величину $E_x(y)$ за заданого значення x називають також **показником** або **коефіцієнтом еластичності**.

Еластичність за аргументом x визначає наближений відносний приріст функції (у відсотках), що відповідає відносному приросту незалежної змінної на 1 %.

Властивості еластичності функції:

1. Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі еластичностей цих функцій:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v).$$

2. Еластичність частки двох функцій дорівнює різниці еластичностей цих функцій:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

3. Якщо $c = \text{const}$, то

$$E_x(c \cdot u) = E_x(u).$$

Еластичність функції застосовують під час аналізу попиту і споживання. Наприклад, еластичність попиту y щодо ціни x (або прибутку x) – це коефіцієнт, що показує наближено, на скільки відсотків буде змінюватися попит (обсяг споживання) за умови зміни ціни (або прибутку) на 1 %.

Якщо еластичність попиту (за абсолютною величиною) $|E_x(y)| > 1$, то попит вважають еластичним, якщо $|E_x(y)| = 1$ – нейтральним, якщо $|E_x(y)| < 1$ – нееластичним щодо ціни (або прибутку).

Загалом, високий коефіцієнт еластичності означає слабкий ступінь задоволення потреби; низький – указує на вищу потребу в цьому товарі.



Нехай ціну за одиницю товару подано функцією $P(Q)$:

$$P(Q) = 2\,400 - 0,2Q,$$

де P вимірюють у грн;

Q – холодильників, що мають попит у споживачів, у шт.

Фірма хоче визначити еластичність попиту для 2 000 холодильників.

Тоді

$$P(2\,000) = 2\,400 - 0,2 \cdot 2\,000 = 2\,000.$$

Далі

$$\frac{dP}{dQ} = -0,2; \quad E_P = \frac{dP}{dQ} \cdot \frac{P}{Q} = -0,2 \cdot \frac{2\,000}{2\,000} = -0,2.$$

Отже, якщо ціну одного холодильника знизити на 0,2 %, то попит на холодильники буде підвищено на 1 % (із 2 000 до 2 020 шт.).

На цьому прикладі видно, що можна розглядати й обернену залежність:

$$E_Q = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{1}{E_P}.$$

Тоді

$$E_P = \frac{1}{-0,2} = -5.$$

Це означає, що підвищення ціни на один холодильник на 1 % призводить до зниження попиту на холодильники на 5 % (із 2 000 до 1 900 шт.).



Нехай сукупні витрати виробництва, залежно від обсягу x виробленої продукції, визначають функцією $TC(x) = 20x - \frac{x^2}{20}$.

Визначмо граничні витрати виробництва MC і коефіцієнт еластичності, якщо обсяг продукції становить 100 і 20 од.

1. Граничні витрати виробництва визначають як похідну від такої функції витрат:

$$MC(x) = TC'(x) = 20 - \frac{x}{10}.$$

За відповідних обсягів продукції:

$$MC(100) = TC'(100) = 20 - \frac{100}{10} = 10;$$

$$MC(20) = TC'(20) = 20 - \frac{20}{10} = 18.$$

Отже, збільшення обсягу виробленої продукції приводить до уповільнення зростання витрат на її випуск.

2. Еластичність визначають за такою формулою:

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}.$$

У цьому прикладі:

$$y(x) = TC(x) = 20x - \frac{x^2}{20};$$

$$E_x(TC) = \frac{x}{20x - \frac{x^2}{20}} \left(20 - \frac{10}{x} \right) = \frac{2(200 - x)}{400 - x};$$

$$E_{100}(TC) = \frac{2 \cdot 100}{300} = \frac{2}{3} \approx 0,67; \quad E_{20}(TC) = \frac{2 \cdot 180}{380} = \frac{18}{19} \approx 0,95.$$

Отже, якщо обсяг виробництва 100 од. збільшити на 1 %, тобто на одну одиницю, то відносні витрати виробництва зростуть приблизно на 0,67 %; якщо обсяг 20 од. збільшити на 1 %, то це призведе до підвищення відносних витрат приблизно на 0,95 %.

17.4. Застосування похідної в економічній теорії

Розгляньмо економічну інтерпретацію теореми Ферма (див. теорему 16.1). Спочатку сформулюймо один із базових законів теорії виробництва: *оптимальний для виробника рівень випуску товару визначають рівністю граничних витрат і граничного доходу.*

Тобто рівень випуску x_0 є оптимальним для виробника, якщо

$$MC(x_0) = MR(x_0),$$

де MC – граничні витрати, а MR – граничний дохід.

Позначмо функцію прибутку $Z(x)$.

Тоді

$$Z(x) = TR(x) - TC(x),$$

де $TR(x)$ – сукупний дохід від виробництва x одиниць продукції, а $TC(x)$ – сукупні витрати.

Очевидно, що оптимальним є такий рівень виробництва, за якого прибуток буде максимальним, тобто такий обсяг випуску x_0 , за якого функція $Z(x)$ буде мати екстремум (максимум).

За теоремою Ферма, у цій точці є виконаною необхідна умова екстремуму:

$$Z'(x) = 0.$$

Оскільки $Z'(x) = TR'(x) - TC'(x)$, то $TR'(x_0) = TC'(x_0)$, відповідно, $MC(x_0) = MR(x_0)$.

Друге важливе поняття теорії виробництва – це рівень найбільш економічного виробництва, якому відповідають мінімальні середні витрати (*average cost*) на виробництво товару. Відповідний економічний закон говорить: *рівень найбільш економічного виробництва визначають рівністю середніх та граничних витрат*.

Дослідімо цю умову як наслідок теореми Ферма. Середні витрати $AC(x)$ визначають як $\frac{TC(x)}{x}$, тобто витрати на виробництво товару, поділені на вироблений обсяг цього товару. Мінімального значення ця величина набуває в критичній точці функції $y = AC(x)$, координати якої визначають із необхідної умови екстремуму: $AC'(x) = \frac{TC' \cdot x - TC}{x^2} = 0$.

Звідси маємо $TC' \cdot x - TC = 0$, або $TC' = \frac{TC}{x}$, отже, $MC(x) = AC(x)$, тобто середні витрати дорівнюють граничним.

Поняття опуклості функції також визначають свою інтерпретацію в економічній теорії.

Одним із найбільш відомих економічних законів є *закон спадної дохідності*, відповідно до якого зі збільшенням виробництва обсяг додаткової продукції, що отримана на кожну нову одиницю ресурсу (трудового, технологічного тощо), із деякого моменту зростає більш повільно, ніж зростає фактор виробництва.

Інакше кажучи, величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, де Δx – приріст ресурсу, а Δy – приріст випуску продукції, буде зменшуватися за умови збільшення x .

Отже, мовою математики закон спадної дохідності формують так: функція $y = f(x)$, що виявляє залежність випуску продукції від укладеного ресурсу, є функцією опуклою.

Іншим базисним поняттям економічної теорії є функція корисності $U = U(x)$, де x – товар, а U – корисність. Ця величина є дуже суб'єктивною для кожного окремого споживача, але досить об'єктивною для суспільства загалом.

Закон спадної корисності формулюють так: із зростанням обсягу товару додаткова корисність від кожної нової його одиниці з деякого моменту спадає. Очевидно, що мовою математики цей закон можна подати так: *функція корисності є опуклою вгору*. У такому формулюванні закон спадної граничної корисності є початковим пунктом для математичного дослідження в теорії попиту та пропозиції.



Нехай підприємство виробляє x од. продукції за ціною $P(x) = 50 - \frac{1}{10}x$,

а сукупні витрати виробництва задано функцією $TC(x) = \frac{1}{50}x^2 + 14x + 800$.

Визначмо оптимальний для підприємства обсяг випуску продукції та відповідний йому максимальний випуск.

Нехай $TR(x)$ – валовий дохід, $Z(x)$ – прибуток від реалізації x од. продукції за ціною $P(x)$.

Тоді

$$TR(x) = x \cdot P(x);$$

$$Z(x) = TR(x) - TC(x),$$

де $P(x)$, $TC(x)$ – це відомі функції.

Для розв'язання задачі слід дослідити функцію $Z(x)$ на екстремум. Тоді прибуток буде максимальним для такого обсягу x випуску продукції, для якого $Z'(x) = 0$ (необхідна умова екстремуму) та $Z''(x) < 0$ (достатня умова екстремуму, оскільки функцію досліджують на максимум).

Проведімо це дослідження.

1. Складімо $Z(x)$, визначмо $Z'(x)$ і, розв'язавши рівняння $Z'(x) = 0$, визначмо критичну точку.

$$\text{Урахуємо, що } TR(x) = 50x - \frac{1}{10}x^2 \text{ та } TC(x) = \frac{1}{50}x^2 + 14x + 800,$$

тому

$$Z(x) = TR(x) - TC(x),$$

$$Z'(x) = TR'(x) - TC'(x) = 0 \Rightarrow TR'(x) = TC'(x)$$

або

$$50 - \frac{1}{5}x = \frac{1}{25}x + 14 \Rightarrow x = 150.$$

Отже, $x = 150$ – це критична точка.

2. Визначмо $Z''(x)$ і її знак у точці $x = 150$:

$$Z''(x) = TR''(x) - TC''(x) = -\frac{1}{5} - \frac{1}{25} = -\frac{6}{25} < 0.$$

Отже, $x = 150$ – точка максимуму функції $Z(x)$, тобто оптимальний обсяг виробництва становить 150 од. продукції.

3. Визначмо максимальний прибуток виробництва, тобто $Z_{\max} = Z(150)$.

Якщо обсяг виробництва $x = 150$, то ціна за одиницю продукції становить $P = 50 - \frac{1}{10} \cdot 150 = 35$, а валовий дохід сягає $TR = 35 \cdot 150 = 5\,250$.

Витрати виробництва дорівнюють

$$TC(x) = \frac{1}{50} \cdot 150^2 + 14 \cdot 150 + 800 = 3\,350,$$

отже, максимальний прибуток від продажу становить:

$$Z_{\max} = 5\,250 - 3\,350 = 1\,900.$$



Ключові терміни

Економічний зміст похідної; граничний (маржинальний) аналіз; відносне змінення функції; швидкість відносного змінення функції; еластичність функції; властивості еластичності функції; граничні витрати; граничний дохід; функція корисності.



Запитання для самоперевірки

1. Наведіть економічний зміст похідної та проілюструйте прикладом.
2. Для чого використовують граничний (маржинальний) аналіз?

3. Наведіть формули для обчислення граничних витрат виробництва, граничного доходу, граничного продукту.

4. Що розуміють під відносною зміною функції?

5. Що таке «еластичність функції»? Наведіть приклад її застосування.

6. Які властивості має еластичність функції?

7. Яких значень (щодо одиниці) може набувати коефіцієнт еластичності?

Як ці значення пов'язано із властивостями функції?

8. У чому різниця між сукупними, середніми та граничними значеннями витрат виробництва?



Тестові завдання до підрозділу 17

1. У чому полягає економічний зміст похідної:

а) $f'(t_0)$ є продуктивністю праці в момент часу t_0 , де $f = f(t)$ – обсяг виробленої продукції;

б) $f'(t_0)$ є обсягом виробленої продукції в момент часу t_0 , де $f = f(t)$ – продуктивність праці;

в) $f'(t_0)$ є зміною обсягу виробленої продукції в момент часу t_0 , де $f = f(t)$ – продуктивність праці;

г) $f'(t_0)$ є зміною витрат на виробництво в момент часу t_0 , де $f = f(t)$ – продуктивність праці?

2. Визначте правильний опис обчислення величини граничного продукту:

а) границя відношення зміни сукупних витрат до обсягу додаткової продукції, що була виготовлена;

б) границя відношення зміни сукупного доходу до обсягу реалізованої продукції, що його зумовила;

в) границя відношення зміни обсягу продукції до обсягу використовуваного ресурсу, що його зумовила;

г) границя відношення зміни сукупного доходу до обсягу використовуваного ресурсу, що його зумовила.

3. Визначте правильний опис обчислення граничного доходу:

а) границя відношення зміни сукупних витрат до обсягу додаткової продукції, що була виготовлена;

б) границя відношення зміни сукупного доходу до обсягу реалізованої продукції;

в) границя відношення зміни обсягу продукту до обсягу використовуваного ресурсу;

г) границя відношення зміни сукупного доходу до обсягу використовуваного ресурсу.

4. Що є характерним для цінової еластичності попиту на товар:

а) дозволяє знижувати ціну та збільшувати виторг, якщо попит на цей товар є нееластичним;

б) залежить від наявності замінників товару, частки в бюджеті споживача, часу та його важливості для споживача;

в) показує, на скільки відсотків буде підвищеним попит на цей товар, якщо ціна на товар зросте на 1 %;

г) є величиною від'ємною для товарів високої споживчої цінності?

5. Що означає нееластичний попит:

а) зростання ціни на 1 % призводить до зниження попиту менш ніж на 1 %;

б) зростання ціни на 1 % призводить до зниження попиту більш ніж на 1 %;

в) зростання ціни на 1 % призводить до зниження попиту на 1 %;

г) зростання ціни на 1 % є настільки незначним, що не вплине на попит?

6. Незважаючи на зміну ціни товару, загальний виторг не змінився. Що це означає:

а) еластичність ціни дорівнює одиниці;

б) еластичність ціни є більшою ніж одиниця;

в) еластичність ціни дорівнює нулю;

г) еластичність ціни є меншою ніж одиниця, але більшою, ніж нуль?

7. Як обчислити коефіцієнт еластичності попиту за ціною:

а) слід визначити відношення абсолютного зниження попиту до абсолютного підвищення ціни;

б) слід визначити відношення відносної зміни попиту до відносної зміни ціни;

в) слід визначити відношення відносної зміни ціни до відносної зміни попиту;

г) слід визначити відношення абсолютного підвищення попиту до абсолютного зниження ціни?

8. Наведіть зміст закону спадної дохідності:

а) зі зростанням обсягу товару додаткова корисність від кожної нової його одиниці з деякого моменту спадає;

б) зі збільшенням виробництва обсяг додаткової продукції, що отримана на кожну нову одиницю ресурсу (трудового, технологічного тощо), із деякого моменту зростає більш повільно, ніж зростає фактор виробництва;

в) зі зростанням обсягу товару додаткова корисність від кожної нової його одиниці з деякого моменту зростає;

г) зі збільшенням виробництва обсяг додаткової продукції, що отримана на кожну нову одиницю ресурсу (трудового, технологічного тощо), із деякого моменту спадає більш повільно, ніж зростає фактор виробництва.

9. Наведіть зміст закону спадної корисності:

а) зі зростанням обсягу товару додаткова корисність від кожної нової його одиниці з деякого моменту спадає;

б) зі збільшенням виробництва обсяг додаткової продукції, що отримана на кожну нову одиницю ресурсу (трудового, технологічного тощо), із деякого моменту зростає більш повільно, ніж зростає фактор виробництва;

в) зі зростанням обсягу товару додаткова корисність від кожної нової його одиниці з деякого моменту зростає;

г) зі збільшенням виробництва обсяг додаткової продукції, що отримана на кожну нову одиницю ресурсу (трудового, технологічного тощо), із деякого моменту спадає більш повільно, ніж зростає фактор виробництва.

10. Якою є функція корисності:

а) опуклою вгору;

б) угнутою;

в) спадною;

г) зростаючою?

Література: [1 – 9; 13; 14; 16; 20 – 24].



Практичні завдання за розділом 4

Розв'язання задач економічного змісту

4.1. Функція випуску продукції має такий вигляд:

$$y = 15 + 12x - x^2.$$

Визначте граничну продуктивність ресурсу (швидкість зміни випуску), якщо витрати ресурсу становлять 2 у. о.

Розв'язання. Швидкість зміни випуску визначмо за такою похідною:

$$y' = 12 - 2x \Rightarrow y'(2) = 12 - 2 \cdot 2 = 8.$$

Отже, якщо витрати становлять 2 у. о., то швидкість зміни випуску становить 8 у. о.

4.2. Обсяг продукції, що вироблена бригадою робітників протягом однієї робочої зміни, визначають таким рівнянням:

$$y = -\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 + 50x, \quad 0 \leq x \leq 8,$$

де x – робочий час (у год).

Визначте продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) через годину після початку роботи; б) за годину до її закінчення.

Розв'язання. Продуктивність праці в будь-який момент часу – це похідна від обсягу продукції, отже,

$$P(x) = y' = -2x^2 + 12x + 50.$$

Швидкість – це похідна від продуктивності праці, тобто похідна 2-го порядку від обсягу продукції:

$$P'(x) = y'' = -4x + 12.$$

Темп зміни продуктивності праці є похідною від логарифма продуктивності або відношення швидкості до продуктивності:

$$T(x) = (\ln P(x))' ;$$

$$T(x) = \left(\ln(-2x^2 + 12x + 50) \right)' = \frac{1}{-2x^2 + 12x + 50} \cdot (-4x + 12).$$

Якщо $x = 1$:

$$P(1) = 60, \quad P'(1) = 8, \quad T(1) = 0,13.$$

Якщо $x = 7$:

$$P(7) = 36, \quad P'(7) = -16, \quad T(7) = -0,44.$$

Отже, продуктивність праці наприкінці робочого дня буде знижуватися.

4.3. Обчисліть еластичність функції витрат y від обсягу продукції x , якщо відомо, що ця функція має такий вигляд:

$$y = 200x - 2x^3,$$

а також визначте середні та граничні витрати за обсягом продукції, який становить 5 од.

Розв'язання. Щоб обчислити еластичність функції, застосуємо таку формулу:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Визначмо y' :

$$y' = 200 - 6x^2.$$

Тоді маємо:

$$E_x(y) = \frac{x}{200x - 2x^3} \cdot (200 - 6x^2) = \frac{100 - 3x^2}{100 - x^2}.$$

Отже,

$$E_5(y) = \frac{100 - 3 \cdot 5^2}{100 - 5^2} = 0,33 \, \%.$$

Тобто за умови виробництва продукції обсягом 5 од. збільшення випуску на 1 % призведе до підвищення витрат на 0,33 %.

Функцію середніх витрат визначають як відношення функції витрат y до обсягу продукції x :

$$S(x) = \frac{y}{x} = 200 - 2x^2.$$

Якщо обсяг продукції становить 5 од., то

$$S(5) = 200 - 2 \cdot 5^2 = 150.$$

Для визначення граничних витрат визначмо похідну від функції витрат:

$$y' = 200 - 6x^2$$

й обчислимо її для $x = 5$, маємо $y'(5) = 50$.

Отже, у разі випуску 5 од. продукції середні та граничні витрати становлять, відповідно, 150 і 50 у. о.

4.4. Дослідним шляхом було встановлено таку функцію попиту $q = \frac{p+8}{p+3}$

та функцію пропозиції $S = 0,5p + 1$, де p – ціна товару, S і q – обсяг товару, що, відповідно, пропонують і купують за одиницю часу.

Визначте: 1) ціну рівноваги; 2) еластичності попиту і пропозиції для цієї ціни.

Розв'язання.

1. Ціну рівноваги визначають за такої умови:

$$q = S \Rightarrow \frac{p+8}{p+3} = 0,5p + 1$$

або

$$p^2 + 3p - 10 = 0,$$

звідси $p_1 = 2$ ($p_2 = -5$ – не підходить, оскільки ціна не може бути від’ємною).

Отже, ціна рівноваги одиниці товару дорівнює 2 у. о.

2. Визначмо еластичності попиту та пропозиції за такою формулою:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Тоді маємо:

$$E_p(q) = \frac{p(p+3)}{p+8} \cdot \frac{p+3-p-8}{(p+3)^2} = \frac{-5p}{(p+8)(p+3)};$$

$$E_p(S) = \frac{p}{0,5p+1} \cdot 0,5 = \frac{p}{p+2}.$$

Оскільки ціна рівноваги $p = 2$, то $E_2(q) = -0,2$; $E_2(S) = 0,5$.

Отже, попит і пропозиція цього товару в разі ціни рівноваги $p = 2$ є нееластичними щодо ціни, бо значення еластичності за абсолютною величиною є нижчими ніж одиниця. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту і пропозиції, а саме: якщо ціну p підвищити на 1 %, то попит буде знижуватися на 0,2 %, а пропозиція буде підвищуватися на 0,5 %.

4.5. Підприємство виготовляє x од. продукції щотижня й реалізує її за ціною $S = 15 - \frac{x}{20}$. Сумарні витрати виробництва становлять:

$$C = \frac{1}{10}x^2 + 3x + 100.$$

За якого обсягу виробництва прибуток підприємства буде найвищим?

Розв’язання. Визначмо прибуток $Z = Sx - C$,

тобто

$$Z = \left(15 - \frac{1}{20}x\right)x - \frac{1}{10}x^2 - 3x - 100 = -\frac{3}{20}x^2 + 12x - 100.$$

Дослідимо функцію $Z(x)$ на екстремум.

Визначмо її похідну: $Z' = -\frac{3}{10}x + 12$.

Далі за необхідною умовою екстремуму маємо значення критичної точки:

$$Z' = 0 \Rightarrow -\frac{3}{10}x + 12 = 0 \Rightarrow x = 40.$$

Тепер визначмо другу похідну $Z'' = -\frac{3}{10} < 0$, тобто, прибуток підприємства буде максимальним, якщо обсяг виробництва $x = 40$ од., і буде становити $Z(40) = 140$ (у. о.).

4.6. Нехай функція витрат має такий вигляд:

$$y = x + 2\ln(x + 2).$$

Обчисліть граничні витрати виробництва, якщо обсяг виробництва становить $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. За яких значень x функція витрат зростає (спадає) повільніше (швидше)?

Розв'язання. Щоб обчислити граничні витрати, визначмо похідну від заданої функції витрат:

$$y' = 1 + \frac{2}{x + 2}$$

й обчислимо її у відповідних точках:

$$y'(4) = \frac{4}{3} \text{ та } y'(8) = \frac{6}{5}.$$

Отже, якщо обсяг виробництва зростає, граничні витрати спадають.

Область визначення функції: $x \in (-2, \infty)$. Оскільки x є обсягом виробництва, то $x \in (0, \infty)$, на цьому інтервалі $y' > 0$.

Визначмо похідну 2-го порядку:

$$y'' = -\frac{2}{(x+2)^2} < 0 \quad \forall x \in (0, \infty).$$

Отже, функція витрат зростає повільніше, оскільки $y' > 0$, а $y'' < 0$ для $x \in (0, \infty)$.

4.7. Фірма планує випускати пластикові вікна. Дослідним шляхом установлено залежність попиту q від ціни p за вікно:

$$q = 2\,500 - 100p,$$

де q – кількість вікон.

Витрати фірми на випуск q вікон становлять

$$C = 100 + 13q + 0,002q^2.$$

Визначте максимальний прибуток.

Розв'язання. Валовий прибуток дорівнює $p \cdot q$, а прибуток від реалізації q вікон становить:

$$Z = p \cdot q - C.$$

Із рівняння $q = 2\,500 - 100p$, маємо $p = 25 - 0,01q$.

Тоді

$$Z = (25 - 0,01q)q - 100 - 13q - 0,002q^2$$

або

$$Z = -0,012q^2 + 12q - 100.$$

Визначмо похідні функції Z : $Z' = -0,024q + 12$, $Z'' = -0,024$.

За необхідною умовою екстремуму:

$$Z' = 0 \Rightarrow -0,024q + 12 = 0,$$

звідси $q = 500$ і $Z'' < 0$, тобто, якщо $q = 500$, то функція досягає максимуму.

Обчислимо: $Z(500) = -0,012 \cdot 500^2 + 12 \cdot 500 - 100 = 2\,900$.

Отже, максимальний прибуток становить 2 900 у. о.

4.8. Функція попиту на товар має такий вигляд:

$$q = -p^2 + 5p + 50,$$

де p – ціна на товар.

Визначте граничний попит та ціну, за якими попит: 1) буде найвищим; 2) зникне. Визначте темп зміни попиту.

Розв'язання. Граничний попит – це похідна від функції попиту, а саме:

$$q' = -2p + 5.$$

1. За необхідною умовою екстремуму: $-2p + 5 = 0 \Rightarrow p = 2,5$.

Отже, за ціною $p = 2,5$ попит буде найвищим ($q'' = -2 < 0$) і дорівнювати:

$$q(2,5) = -(2,5)^2 + 5 \cdot 2,5 + 50 = 56,25.$$

2. Попит дорівнює 0, якщо $-p^2 + 5p + 50 = 0$, звідси $p_1 = 10$, $p_2 = -5$ (від'ємне значення не підходить, бо p – ціна товару).

Темп зміни попиту визначмо за похідною 2-го порядку від функції попиту, а саме:

$$q'' = -2.$$

Якщо ціна зростає до $p = 2,5$, то попит теж зростає і набуває максимального значення, а саме $q_{\max}(2,5) = 56,25$. У разі зростання ціни від 2,5 до 10 од. попит спадає і зникає, якщо ціна $p \geq 10$.

Отже, на проміжку $p \in (0; 2,5)$ попит зростає ($q' > 0$, $q'' < 0$), тоді як на проміжку $p \in (2,5; 10)$ – спадає ($q' < 0$, $q'' < 0$).

Граничний попит визначмо за такою формулою:

$$q' = -2p + 5.$$

Максимального попиту $q_{\max} = 56,25$ досягають за ціною товару $p = 2,5$. Попит зникає, якщо ціна $p \geq 10$.

4.9. Залежність витрат виробництва від обсягу продукції задано такою функцією:

$$y = -0,025x^3 + 18\,750x + 115.$$

За якого обсягу продукції витрати виробництва почнуть спадати?

Розв'язання. Визначмо похідну:

$$y' = -0,075x^2 + 18\,750.$$

Витрати спадають, якщо $y' < 0$, тобто

$$-0,075x^2 + 18\,750 < 0 \quad \text{або} \quad x^2 > 250\,000,$$

звідси

$$x < -500 \quad \text{або} \quad x > 500.$$

Ураховуючи, що $x > 0$, тому $x > 500$.

Отже, витрати почнуть спадати, якщо обсяг виробництва $x > 500$.

4.10. Нехай функція $C = 8q - \frac{q^2}{10}$ установлює залежність витрат фірми від обсягу виготовленої продукції, а $q = 40 - 2p$ – залежність попиту від ціни.

Визначте максимальний обсяг виробництва. Порівняйте оптимальну ціну із граничними витратами.

Розв'язання. Прибуток фірми становить:

$$Z = pq - C,$$

де p – ціна одиниці продукції;

q – обсяг виготовленої продукції;

C – витрати.

Із рівняння $q = 40 - 2p$, маємо, що $p = 20 - 0,5q$.

Тоді

$$Z = (20 - 0,5q)q - 8q + \frac{q^2}{10}$$

або

$$Z = -0,4q^2 + 12q.$$

Визначмо екстремум цієї функції.

За необхідною умовою екстремуму, маємо:

$$Z' = 0,$$

де $Z' = -0,8q + 12$.

Тоді $-0,8q + 12 = 0$, звідси $q = 15$ – це максимальний обсяг виробництва, оскільки $Z'' = -0,8 < 0$.

Відповідна ціна $p = 20 - 0,5 \cdot 15 = 12,5$.

Граничні витрати становлять:

$$C'(15) = \left(8 - \frac{q}{5} \right) \Big|_{q=15} = 5.$$

Порівняймо оптимальну ціну із граничними витратами: $\frac{12,5}{5} = 2,5$.

Отже, максимальний обсяг продукції фірми становить 15 од., відповідна ціна – 12,5 грн, найбільш вигідна ціна для фірми є у 2,5 рази більшою, ніж граничні витрати.

Завдання для самостійного розв'язання

4.11. Користуючись загальним порядком визначення похідної, обчисліть похідну функції $f(x) = \sqrt{2x-1}$ у точці $x_0 = 1$.

Визначте похідні функцій, користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних:

4.12. $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 + \frac{x}{3} + \sqrt{2}$. **4.13.** $y = \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{11x^4}$.

$$4.14. y = \frac{6x^5 - 7x^3 + x^2 - 5x + 3}{2x^4}. \quad 4.15. y = 4\sqrt[4]{x} + 9x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 3x\sqrt[5]{x^2} + \frac{7}{x^2}.$$

$$4.16. y = \frac{x^2 + 1}{3(x^2 - 1)} + (x^2 - 1)(1 - x). \quad 4.17. y = \left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{x} + 6\right)^6.$$

$$4.18. y = \frac{4}{(2x^2 + x - 1)^2}. \quad 4.19. y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x - 1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^2 + 2)^3}}.$$

$$4.20. y = 2\sqrt{x} \sin x - \frac{\cos x}{x}. \quad 4.21. y = \sqrt[5]{x^4} \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

$$4.22. y = 3\sin^4 x - \sin^2 x. \quad 4.23. y = \sin \frac{1}{x} + \cos \sqrt{x}.$$

$$4.24. y = \sin \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{\sin 2x}. \quad 4.25. y = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}(x^2).$$

$$4.26. y = \left(1 + \sin^2 x\right)^3. \quad 4.27. y = \sqrt{2 - \operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

$$4.28. y = \arcsin \frac{x}{2}. \quad 4.29. y = \operatorname{arctg} x^2.$$

$$4.30. y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad 4.31. y = 2\sqrt[4]{\arcsin^3 x}.$$

$$4.32. y = \sqrt{1 - \arccos^2 x}. \quad 4.33. y = 10x \arccos \sqrt{1 - 5x}.$$

$$4.34. y = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right). \quad 4.35. y = \sqrt[4]{\arcsin \sqrt{x^2 + 2x}}.$$

$$4.36. y = \ln(x^2 - 3x). \quad 4.37. y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

$$4.38. y = 10^{1-\sin^4 3x}. \quad 4.39. y = e^x (\sin 3x - 3\cos 3x).$$

Визначте похідну 2-го порядку:

$$4.40. y = x^4 - 4x^2 + 5x - 3. \quad 4.41. y = \sin^2 3x.$$

$$4.42. y = (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x. \quad 4.43. y = \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right).$$

4.44. Доведіть, що функція $y = x^2 \ln \sqrt{x} + 2x^2 - 3x + 1$ задовольняє рівняння $y''' \cdot x = 1$.

Визначте похідні y' від функцій, які задано неявно:

$$4.45. y^3 - x^3 + x^2 y^2 = 0. \quad 4.46. x \cos y = y \sin x.$$

$$4.47. 2y \ln y = x. \quad 4.48. \operatorname{arctg}(x + y) = x.$$

Визначте похідні y'' неявної функції:

$$4.49. y = x + \operatorname{arctg} y. \quad 4.50. x^3 + y^3 - 3yx = 0.$$

Визначте похідні 2-го порядку від функцій, заданих параметрично:

$$4.51. x = \ln t, y = t^2. \quad 4.52. x = \operatorname{arctg} t, y = \ln(1 + t^2).$$

$$4.53. x = a \cos 2t, y = a \sin^2 t. \quad 4.54. x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$$

Застосовуючи метод логарифмічного диференціювання, визначте похідні y' для заданих функцій:

$$4.55. y = (3x - 4)^4 (2x + 7)^5 (x - 1)^6. \quad 4.56. y = x^{\sin 2x}.$$

$$4.57. y = (x^2 - 1)^{\frac{1}{x}}. \quad 4.58. y = (\cos 2x)^{\sin x}.$$

$$4.59. y = \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x-1} \cdot \sin 2x}. \quad 4.60. y = \frac{(x-2)^3 \sqrt{5x+1}}{(x+1)^4}.$$

4.61. Визначте кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ у точці $(1, 2)$.

4.62. Визначте, у якій точці дотична до параболи $y = x^2 - 7x + 3$ є паралельною прямій $5x + y - 3 = 0$.

4.63. До кривої $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ напишіть рівняння дотичної та нормалі в точці $(-2, 5)$.

4.64. Складіть рівняння дотичної до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ у точці $(1, -1)$.

4.65. Складіть рівняння дотичної до кривої $x^3 + y^2 + 4x - 17 = 0$ у точці з ординатою $y_0 = 1$.

4.66. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $x = \sin t$, $y = \cos 2t$, якщо $t = \frac{\pi}{6}$.

Визначте диференціали функцій:

4.67. $y = \cos^3 2x$. **4.68.** $y = 5^{x^2} \arccos \frac{1}{x}$. **4.69.** $y = \sqrt[3]{(2 + \cos x)^2}$.

4.70. $y = x \ln(x^2 - 2x)$. **4.71.** $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. **4.72.** $y = \operatorname{arctg}^3(e^{3x})$.

4.73. Визначте наближено $f(1,05)$, якщо $f(x) = e^{0,1x(1-x)}$.

4.74. Обчисліть наближено $\sqrt[3]{27,36}$.

4.75. Обчисліть наближено $\arcsin 0,4983$.

4.76. Обчисліть наближено $\ln 1,01$.

Визначте границі за правилом Лопіталя:

4.77. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x} - 1}{\sin 2x}$. **4.78.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln(e^{x^2} + 1)}$.

4.79. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+2) - \ln 3}{\sqrt{1+2x} - 3^{x-\frac{1}{2}}}$. **4.80.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \ln(x^2 - 3)}{\ln(x-2)}$.

4.81. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^3 x$. **4.82.** $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(x + e^x)$.

4.83. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$. **4.84.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x}$.

4.85. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$. **4.86.** $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

4.87. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$. **4.88.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x})^{\frac{3}{x}}$.

Дослідіть на монотонність та екстремум задані функції:

4.89. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$. **4.90.** $y = (x+2)^2(x-3)^3$.

4.91. $y = x \ln x$. **4.92.** $y = (x^2 - 8)e^x$.

4.93. $y = (7-x)\sqrt[3]{x+5}$. **4.94.** $y = (x^2 - 2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x$.

Обчисліть найбільше та найменше значення функцій на вказаних проміжках:

4.95. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $x \in [-1, 1]$.

4.96. $y = \frac{2x-1}{2+x^2}, \quad x \in [-2, 0].$

4.97. $y = \sin 2x - x, \quad x \in [-0,5\pi, 0,5\pi].$

4.98. $y = \ln x - 2\operatorname{arctg} x, \quad x \in [1, +\infty).$

4.99. Різниця двох чисел дорівнює 13.

Визначте ці числа, якщо відомо, що їхній добуток є найбільшим.

4.100. Бак із квадратним дном може вміщувати 27 л.

Якими мають бути його розміри, щоб повна поверхня була найбільшою?

4.101. У шар із радіусом R уписано циліндр із найбільшою бічною поверхнею.

Визначте висоту цього циліндра.

4.102. Визначте розміри басейну із квадратним дном об'ємом 32 м^3 , якщо на облицювання його стін і днища було витрачено найменшу кількість матеріалу.

4.103. Треба виготовити відкритий бак циліндричної форми місткістю 3л.

Якими мають бути розміри бака, щоб на його виготовлення було витрачено найменшу кількість матеріалу?

Визначте проміжки опуклості, угнутості та точки перегину заданих функцій:

4.104. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$. **4.105.** $y = (x-1)^4 - 24x^2 + x$.

4.106. $y = x^2 \cdot e^{\frac{2}{x}}$. **4.107.** $y = x - \ln x$.

Визначте асимптоти графіків функцій:

4.108. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$. **4.109.** $y = \frac{2x + 1}{x - 3}$. **4.110.** $y = \frac{x}{x - 1} + x$.

$$4.111. y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}. \quad 4.112. y = \frac{x}{e^x} - 2.$$

Дослідіть функції та побудуйте їхні графіки:

$$4.113. y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6. \quad 4.114. y = (x + 4)^2(x - 5).$$

$$4.115. y = \frac{x^2}{x - 3}. \quad 4.116. y = \ln(x^2 + 4).$$

$$4.117. y = x \cdot e^{-x}. \quad 4.118. y = x^2 \ln x.$$

$$4.119. y = x - 2 \operatorname{arctg} x. \quad 4.120. y = (x + 4)\sqrt[3]{x}.$$

4.121. Крива повних витрат виробництва має такий вигляд:

$$y = 5 \ln(1 + 2x).$$

Визначте криву граничних витрат.

4.122. Крива повних витрат виробництва має такий вигляд:

$$y = 2x^3 - 16x^2 + 15x.$$

Визначте обсяг виробництва, за якого середні витрати будуть мінімальними.

4.123. Обсяг виробництва продукції x і виторг y , який отримали від реалізації продукції, пов'язано такою залежністю:

$$y = 24x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3.$$

Визначте середній і граничний виторги за обсягу виробництва $x = 10$.

4.124. Залежність попиту на товар від його ціни задано таким співвідношенням:

$$q = 100 + \frac{p - 1}{p^2 + 2}.$$

Обчисліть граничний попит за ціною: а) 2 грн; б) 5 грн. Порівняйте відповіді.

4.125. Залежність собівартості одиниці продукції y (грн) від обсягу випуску продукції x (од.) визначають такою функцією:

$$y = -0,4x + 50.$$

Визначте еластичність собівартості, якщо випуск продукції дорівнює 40 млрд од.

4.126. Залежність попиту q від ціни p обчислюють такою функцією:

$$q = -3p^2 + 2p + 9.$$

Визначте еластичність попиту q щодо ціни p і значення показника еластичності, якщо $p = 1$. Зробіть висновки.

4.127. Функції попиту q і пропозиції S від ціни p задають, відповідно, такими рівняннями:

$$q = 8 - p \quad \text{і} \quad S = p + 2.$$

Визначте: а) ціну рівноваги; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни.

4.128. Попит q і пропозиція S змінюються за такими формулами:

$$q = \frac{50}{3p + 2}, \quad S = \frac{2p^2}{3p + 2}.$$

Визначте ціну рівноваги. Обчисліть еластичність попиту та пропозиції за такої ціни.

4.129. Виробник реалізує свою продукцію за ціною 18 грн за одиницю, а витрати задають такою залежністю:

$$S = 2x + \frac{1}{12}x^3.$$

Визначте максимальний обсяг випуску продукції та відповідний йому прибуток.

4.130. Витрати виробництва залежать від обсягу продукції за такою формулою:

$$y = x^3 - 12x + 11.$$

За яких значень обсягу продукції витрати спадають, а за яких – зростають?

4.131. Підприємство виготовляє x од. продукції щотижня і реалізує її за такою ціною:

$$p = 25 - \frac{1}{30}x.$$

Загальні витрати виробництва становлять:

$$S = \frac{1}{15}x^2 + 5x + 300.$$

За якого обсягу виробництва прибуток буде максимальним?

4.132. Функцію попиту пов'язано із ціною p таким співвідношенням:

$$q = -p^2 + 16p + 80.$$

Яка ціна відповідає максимальному попиту? За якої ціни попит зникає? Визначте ціну, якщо граничний попит дорівнює 2. Визначте темп зміни попиту.

4.133. Витрати на виробництво x од. продукції дорівнюють $d(x)$, ціна продукції $p(x)$.

Визначте, який обсяг продукції треба виробити, щоб мати максимальний прибуток, якщо:

1) $d(x) = 5x^2 + 300x + 5\,000$, $p(x) = 580 - 2x$;

2) $d(x) = 10x^2 + 200x + 6\,000$, $p(x) = 1000 - 10x$.

4.134. Витрати на виробництво x од. товару становлять $d(x) = 25x + 200$, ціна товару $p(x) = 100 - \frac{x}{50}$.

Скільки товару треба виробити, щоб прибуток був максимальним? Скільки товару треба виробити, щоб прибуток був максимальним, якщо з кожної одиниці товару беруть податок, який дорівнює 10?



Відповіді

$$4.11. 1. \quad 4.12. 4x^3 - 4x^2 + 6x + \frac{1}{3}. \quad 4.13. -\frac{5}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{15}{x^4} + \frac{24}{11x^5}.$$

$$4.14. 3 + \frac{7}{2x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{15}{2x^4} - \frac{6}{x^5}. \quad 4.15. \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + 21x\sqrt[3]{x} + \frac{21}{5}\sqrt[5]{x^2} - \frac{14}{x^3}.$$

$$4.16. -\frac{4x}{3(x^2 - 1)^2} + 1 + 2x - 3x^2. \quad 4.17. 6\left(\frac{x^3}{9} - \frac{4}{x} + 6\right)^5 \left(\frac{x^2}{3} + \frac{4}{x^2}\right).$$

$$4.18. \frac{-8(4x + 1)}{(2x^2 + x - 1)^3}. \quad 4.19. \frac{-2}{3\sqrt[3]{(2x - 1)^4}} - \frac{15x}{2\sqrt[4]{(x^2 + 3)^7}}.$$

$$4.20. \frac{\sin x + 2x \cos x}{\sqrt{x}} + \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}. \quad 4.21. \frac{2 \sin 2x - 5x}{5\sqrt[5]{x} \sin^2 x} - \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}.$$

$$4.22. 12 \sin^3 x \cos x - \sin 2x. \quad 4.23. -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} - \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

$$4.24. \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cos \sqrt{1 + x^2} + \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}. \quad 4.25. \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + \frac{2x}{\sin^2 x^2}.$$

$$4.26. 3(1 + \sin^2 x)^2 \sin 2x. \quad 4.27. \frac{-(x^2 + 1)}{2x^2 \cos^2\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \sqrt{2 - \operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{x}\right)}}.$$

$$4.28. \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}. \quad 4.29. \frac{2x}{1 + x^4}. \quad 4.30. \frac{1}{2x\sqrt{x - 1}}. \quad 4.31. \frac{3}{2\sqrt[4]{\arcsin x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$4.32. \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-\arccos^2 x}}. \quad 4.33. 10 \arccos \sqrt{1-5x} + \frac{25x}{\sqrt{5x} \cdot \sqrt{1-5x}}.$$

$$4.34. \frac{1}{2(x^2+1)}. \quad 4.35. \frac{1}{4\sqrt[4]{\arcsin^3 \sqrt{x^2+2x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2-2x}} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}.$$

$$4.36. \frac{2x-3}{x^2-3x}. \quad 4.37. \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \quad 4.38. -12 \ln 10 \cdot 10^{1-\sin^4 3x} \cdot \sin^3 3x \cdot \cos 3x.$$

$$4.39. 10e^x \sin 3x. \quad 4.40. y'' = 12x^2 - 8. \quad 4.41. y'' = 18 \cos 6x.$$

$$4.42. y'' = \frac{2x}{1+x^2} + 2 \operatorname{arctg} x. \quad 4.43. y'' = \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}. \quad 4.45. y' = \frac{3x^2 - 2xy^2}{2x^2y + 3y^2}.$$

$$4.46. y' = \frac{\cos y - y \cos x}{\sin x + x \sin y}. \quad 4.47. y' = \frac{1}{2(1+\ln y)}. \quad 4.48. y' = (x+y)^2.$$

$$4.49. y'' = \frac{-2-2y^2}{y^5}. \quad 4.50. y'' = \frac{2xy}{(x-y^2)^3}. \quad 4.51. y'' = 4t^2.$$

$$4.52. y'' = 2(t^2+1). \quad 4.53. y'' = 0. \quad 4.54. y'' = \frac{1}{3a \cos^4 t \cdot \sin t}.$$

$$4.55. y' = y \left(\frac{12}{3x-4} + \frac{10}{2x+7} + \frac{6}{x-1} \right). \quad 4.56. y' = y \left(2 \cos 2x \cdot \ln x + \frac{\sin 2x}{x} \right).$$

$$4.57. y' = y \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{\ln(x^2-1)}{x^2} \right). \quad 4.58. y' = y(\cos x \cdot \ln \cos 2x - 2 \sin x \cdot \operatorname{tg} 2x).$$

$$4.59. y' = y \left(\frac{2}{x \ln x} - \frac{1}{2(x-1)} - 2 \operatorname{ctg} 2x \right). \quad 4.60. y' = y \left(\frac{3}{x-2} + \frac{2,5}{5x+1} - \frac{4}{x+1} \right).$$

4.61. $-\frac{1}{11}$. **4.62.** $(1, -3)$. **4.63.** $y - 5 = 0, x + 2 = 0$. **4.64.** $x - 4y - 5 = 0$.

4.65. $y + 8x - 17 = 0$. **4.66.** $4x + 2y - 3 = 0, 4y - 2x - 1 = 0$.

4.67. $dy = -6 \cos^2 2x \cdot \sin 2x dx$.

4.68. $dy = \left(2x \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 5 \arccos \frac{1}{x} + \frac{5^{x^2}}{x\sqrt{x^2 - 1}} \right) dx$. **4.69.** $dy = \frac{-2 \sin x}{3\sqrt[3]{2 + \cos x}} dx$.

4.70. $dy = \left(\ln(x^2 - 2x) + \frac{2x - 2}{x - 2} \right) dx$. **4.71.** $dy = \frac{x + y}{x - y} dx$.

4.72. $dy = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{6x}} \operatorname{arctg}^2(e^{3x}) dx$.

4.73. $\approx 0,995$. **4.74.** $\approx 3,013$. **4.75.** $\approx 0,5216$. **4.76.** $\approx 0,01$. **4.77.** $2,5$. **4.78.** 1 .

4.79. $\frac{\sqrt{3}}{3 - 9 \ln 3}$. **4.80.** 1 . **4.81.** 0 . **4.82.** 2 . **4.83.** 0 . **4.84.** 1 . **4.85.** 1 . **4.86.** 1 .

4.87. 1 . **4.88.** 1 .

4.89. Зростає, якщо $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$; спадає, якщо $x \in (-2, 1)$,
 $y_{\max}(-2) = 25, y_{\min}(1) = -2$.

4.90. Зростає, якщо $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$; спадає, якщо $x \in (-2, 0)$,
 $y_{\max}(-2) = 0, y_{\min}(0) = -108$.

4.91. Спадає, якщо $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$; зростає, якщо $x \in \left(\frac{1}{e}, \infty\right), y_{\min}\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

4.92. Зростає, якщо $x \in (-\infty, -4) \cup (2, \infty)$; спадає, якщо $x \in (-4, 2)$,
 $y_{\max}(-4) = 8e^{-4}$, $y_{\min}(2) = -4e^2$.

4.93. Зростає, якщо $x \in (-\infty, -2)$; спадає, якщо $x \in (-2, \infty)$,
 $y_{\max}(-2) = 9\sqrt[3]{3}$.

4.94. Зростає, якщо $x \in (0, 1) \cup (e, \infty)$; спадає, якщо $x \in (1, e)$, $y_{\max}(1) = \frac{5}{2}$,
 $y_{\min}(e) = \frac{4e - e^2}{2}$.

4.95. $y_{\text{найб.}}(-1) = 2$; $y_{\text{найм.}}(1) = -12$. **4.96.** $y_{\text{найм.}}(-1) = -1$; $y_{\text{найб.}}(0) = -\frac{1}{2}$.

4.97. $y_{\text{найм.}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$; $y_{\text{найб.}}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

4.98. $y_{\text{найм.}}(1) = -\frac{\pi}{2}$, найбільшого значення немає.

4.99. 6,5 і $(-6, 5)$. **4.100.** $3 \times 3 \times 3$. **4.101.** $R\sqrt{2}$. **4.102.** $4 \times 4 \times 2$.

4.103. $h = R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ (дм).

4.104. Є опуклим, якщо $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$; угнутим, якщо $x \in (-3, 2)$;
точки $(-3, 294)$ і $(2, 114)$ є точками перегину.

4.105. Якщо $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, є угнутим; якщо $x \in (-1, 3)$, є опуклим;
точки $(-1, -9)$ і $(3, -197)$ є точками перегину.

4.106. Якщо $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, є угнутим; точок перегину немає.

4.107. Якщо $x \in (0, \infty)$, є угнутим; точок перегину немає.

4.108. $x = -2$, $y = x - 4$. **4.109.** $x = 3$, $y = 2$. **4.110.** $x = 1$, $y = x + 1$.

4.111. $x = 0$, $y = x + 1$. **4.112.** $y = -2$.

4.113. Якщо $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, \infty)$, зростає; якщо $x \in \left(-\frac{1}{3}, 3\right)$, спадає;

$x = -\frac{1}{3}$ є точкою максимуму; $x = 3$ є точкою мінімуму; асимптот немає.

4.114. Зростає, якщо $x \in (-\infty, -4) \cup (2, \infty)$; спадає, якщо $x \in (-4, 2)$; $x = -4$ є точкою максимуму; $x = 2$ є точкою мінімуму; асимптот немає.

4.115. Зростає, якщо $x \in (-\infty, 0) \cup (6, \infty)$; спадає, якщо $x \in (0, 3) \cup (3, 6)$; $x = 0$ є точкою максимуму; $x = 6$ є точкою мінімуму; є опуклою, якщо $x \in (-\infty, 3)$; є угнутою, якщо $x \in (3, \infty)$; асимптоти: $x = 3$ і $y = x + 3$.

4.116. Спадає, якщо $x \in (-\infty, 0)$; зростає, якщо $x \in (0, \infty)$; $x = 0$ є точкою мінімуму; є опуклою, якщо $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; угнутою, якщо $x \in (-2, 2)$; асимптот немає.

4.117. Зростає, якщо $x \in (-\infty, 1)$; спадає, якщо $x \in (1, \infty)$; $x = 1$ є точкою максимуму; є опуклою, якщо $x \in (-\infty, 2)$; угнутою, якщо $x \in (2, \infty)$; асимптота $y = 0$.

4.118. Спадає, якщо $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; зростає, якщо $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$; є опуклою, якщо $x \in \left(0, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$; угнутою, якщо $x \in \left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, \infty\right)$; $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ є точкою мінімуму; асимптот немає.

4.119. Зростає, якщо $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; спадає, якщо $x \in (-1, 1)$; $x = -1$ є точкою максимуму; $x = 1$ є точкою мінімуму; є опуклою, якщо $x \in (-\infty, 0)$; угнутою, якщо $x \in (0, \infty)$; асимптоти: $y = x + \pi$ і $y = x - \pi$.

4.120. Спадає, якщо $x \in (-\infty, -1)$; зростає, якщо $x \in (-1, \infty)$; $x = -1$ є точкою мінімуму; є угнутою, якщо $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$; опуклою, якщо $x \in (0, 2)$; асимптот немає.

4.121. $y' = \frac{10}{1+2x}$. **4.122.** $x = 4$. **4.123.** $y_{сер.} = \frac{122}{3}$; $y_{зр.} = 49$.

4.124. $q_1 = \frac{1}{18}$; $q_2 = -\frac{13}{729}$. **4.125.** $E_{40}(y) = -0,47$. **4.126.** $E_1(q) = -0,5$.

4.127. $E_3(q) = -0,6$; $E_3(s) = 0,6$. **4.128.** $E_5(q) = -0,88$; $E_5(S) = 1,12$.

4.129. $x = 8$ (у. о.), $Z_{\max} = \frac{256}{3}$ (у. о.).

4.130. Якщо $x \in (0, 2)$, витрати спадають; якщо $x \in (2, \infty)$, зростають.

4.131. $x = 100$.

4.132. $q_{\max}(8) = 144$; $q = 0$, якщо $p \geq 20$; $q = 2$, якщо $p = 7$; $q'' = -2$.

4.133. 1) 20; 2) 20. **4.134.** 1) 1 875; 2) 1 625.

Відповіді до тестових завдань

Номери підрозділів	Номери тестових завдань									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15	в	в	а	а	а	б	в	а	б	а
16	г	а	а	б	в	б	а	в	в	в
17	а	в	б	в	г	г	б	б	а	а

Розділ 5. Диференціальне числення функції багатьох змінних

На розвиток економічних процесів та явищ, зазвичай, впливає велика кількість факторів, частину із яких пов'язано між собою певними співвідношеннями, а інші є незалежними один від одного.

Отже, для побудови математичної моделі цих процесів виникає потреба у використанні разом із функціями однієї змінної функцій, що залежать від кількох змінних.



Після вивчення цього розділу ви зможете:

- використовувати функції кількох змінних для формалізації економічних процесів;
- розуміти економічний зміст частинних похідних функції кількох змінних;
- знати методи диференціювання функцій кількох змінних;
- використовувати диференціал функції кількох змінних для наближених обчислень економічних показників;
- уміти обчислювати похідну за напрямком і градієнт функції та застосовувати їх в економічних моделях;
- уміти обчислювати екстремум функції кількох змінних;
- знати поняття емпіричних формул та методу найменших квадратів;
- уміти застосовувати інструменти диференціального числення функції кількох змінних до розв'язання реальних економічних задач;
- застосовувати емпіричні формули та метод найменших квадратів до опрацювання даних;
- уміти визначати еластичність функцій кількох змінних і проводити дослідження економічних процесів із її застосуванням та інтерпретувати визначені результати.

18. Функція багатьох змінних

Основні питання:

18.1. Основні поняття. Область визначення функції.

18.2. Границя та неперервність функції двох змінних.

18.3. Природи функції двох змінних.

18.4. Частинні похідні функції двох змінних.

18.5. Частинні диференціали. Повний диференціал та його використання в наближених обчисленнях.

18.1. Основні поняття. Область визначення функції

Функції кількох змінних є природним узагальненням функцій однієї змінної, які широко застосовують в математичному моделюванні процесів, де результат залежить від кількох незалежних параметрів. Вивчення таких функцій дозволяє аналізувати складні явища у фізиці, економіці, інженерії та інших науках. Знання властивостей таких функцій є основою для розв'язування прикладних задач оптимізації та побудови математичних моделей багатофакторних систем.

Функцією кількох змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ називають змінну z , якщо кожному набору значень $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ із множини X за певним правилом або законом ставлять у відповідність одне певне значення величини z із множини Z . Змінні $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають **незалежними змінними**, або **аргументами**, функції, z – **залежною змінною**, або **функцією**. Кількість незалежних змінних може бути довільною.

Множину наборів $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яким відповідає певне значення z , називають **областю визначення функції**, або її **областю існування** $D(f)$. Відповідну множину значень змінної z називають **областю значень функції** $E(f)$.

Для простоти викладення матеріалу обмежмося розглядом основних понять та положень відносно функції кількох змінних на прикладі функції двох змінних: $z = f(x, y)$.

Як і функцію однієї змінної, функцію двох незалежних змінних може бути задано кількома способами: табличним (за допомогою таблиці значень аргументів та функції), аналітичним (за допомогою однієї або кількох формул) або графічним способом. У табл. 18.1 наведено табличний спосіб задання функції двох змінних.

Табличний спосіб задання функції двох змінних

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$\dots$	$f(x_1, y_n)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\dots$	$f(x_2, y_n)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	$f(x_m, y_1)$	$f(x_m, y_2)$	$\dots$	$f(x_m, y_n)$

Якщо для функції однієї змінної $y = f(x)$ областю визначення найчастіше є інтервал числової осі (скінченний або нескінченний), то в разі функції двох змінних $z = f(x, y)$ сукупність пар (x, y) , які утворюють область визначення функції $D(f)$, визначає множину точок площини, тобто $D \subseteq \mathbf{R}^2$.

Областю визначення функції двох змінних може бути деяка обмежена або необмежена частина площини. У першому випадку лінію, що обмежує область, називають **межею області визначення**. Точки області визначення функції, які не належать межі, називають **внутрішніми точками області**. У разі, якщо межа належить області визначення, то є **замкнена область**. Область, яка містить тільки внутрішні точки, називають **відкритою**.

У разі, якщо функцію задано формулою, областю визначення вважають область існування відповідного математичного виразу. Визначення області визначення (для) функції $z = f(x, y)$ потребує знань областей існування основних елементарних функцій однієї змінної та вміння розв'язувати нерівності (або їхні системи) відносно змінних x і y .



Визначмо область визначення деяких функцій:

1. Для функції $z = 4x - y$ областю визначення є вся площина xOy , оскільки вираз має зміст для довільних x та y .

2. Для функції $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ математичний вираз має зміст за умови $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 16$. Цю нерівність задовольняють усі точки, які

розташовані в середині кола з радіусом 4, центр якого є в початку координат. Точки кола також належать області визначення, тобто область визначення функції є замкненою (рис. 18.1).

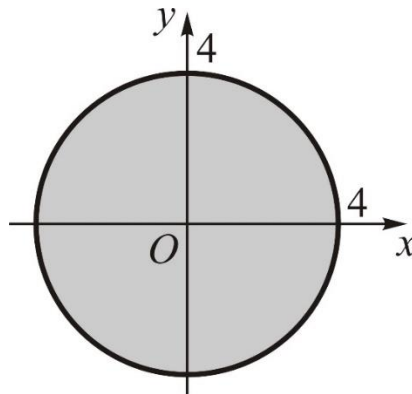


Рис. 18.1. Область визначення функції $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

3. Аналітичний вираз, що визначає функцію $z = \ln(x^2 + y)$, має зміст, якщо $x^2 + y > 0 \Rightarrow y > -x^2$. Остання нерівність описує частину площини, що розташована над параболою $y = -x^2$, а точки самої параболи до області визначення не належать. Це приклад відкритої області визначення (рис. 18.2).

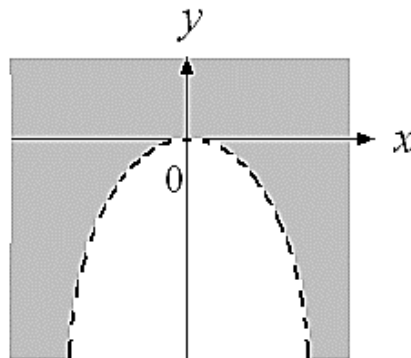


Рис. 18.2. Область визначення функції $z = \ln(x^2 + y)$

Алгоритм визначення області існування функції передбачає такі етапи:

1) записують нерівність або систему нерівностей, що відповідає області визначення елементарних функцій, які утворюють аналітичний вираз функції $z = f(x, y)$;

2) за допомогою графічного або аналітичного розв'язання обчисленої нерівності або системи нерівностей визначають область визначення.

Кожна пара значень (x, y) із множини X визначає точку $M(x, y)$ на площині xOy , а значення функції z є аплікатою точки $P(x, y, z)$ у просторі.

Графіком функції двох змінних $z = f(x, y)$ називають множину точок тривимірного простору (x, y, z) , аплікату яких пов'язано з абсцисою x та ординатою y функціональною залежністю $z = f(x, y)$.

Отже, графіком функції двох неперервних змінних є деяка поверхня в тривимірному просторі.



Наприклад, областю визначення функції $z = x^2 + y^2$ є вся множина точок площини xOy , а її графіком, як відомо з аналітичної геометрії, є параболоїд обертання.

Зазвичай, побудова графіка функції двох змінних є складною задачею. Тому для визначення характеру поведінки функції дуже часто використовують поняття лінії рівня функції.

Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$ називають таку множину точок на площині xOy , що в усіх точках цієї лінії значення функції є однаковим і дорівнює деякій сталій величині C ($z = C$, $C = \text{const}$), яку називають **рівнем функції** (рис. 18.3).

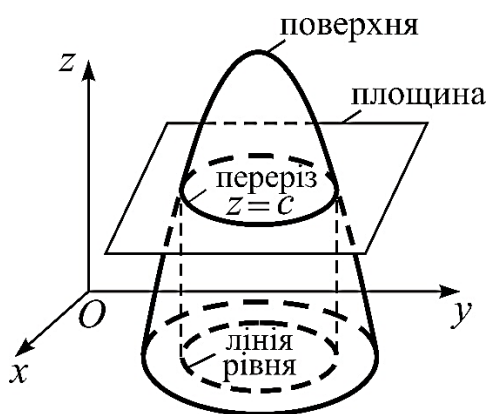


Рис. 18.3. Рівень та лінія рівня функції

Прикладом застосування функцій кількох змінних в економіці є *виробнича функція* $z = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$, яка встановлює залежність величини створеного суспільного продукту z від різних факторів: витрати праці (x_1), обсяг виробничих

фондів (x_2), енергоємність виробництва (x_3) тощо; параметри α_i задовольняють таку умову: $0 < \alpha_i < 1$, $i = \overline{0, n}$.

Прикладом виробничої функції є *функція Кобба – Дугласа*, яка встановлює функціональну залежність між обсягом основних фондів K , витратами праці L і обсягом продукції:

$$F(K, L) = A \cdot L^{1-\alpha} K^{\alpha},$$

де A – характеристика продуктивності вибраної технології, $A > 0$;

α – коефіцієнт еластичності за працею, $0 < \alpha < 1$.

У задачах *споживчого вибору* використовують так звану **функцію корисності**, яка описує кількісну характеристику z доцільності придбання того чи того набору n різних товарів:

$$X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

де x_i – обсяг i -го товару в натуральних одиницях.

Прикладами цих функцій є такі:

логарифмічна функція

$$z = \sum_{i=1}^n a_i \ln(x_i - c_i),$$

де a_i, c_i – параметри ($a_i > 0$, $x_i > c_i \geq 0$);

функція сталої еластичності

$$z = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-b_i} (x_i - c_i)^{1-b_i},$$

де b_i є сталими ($a_i > 0$, $0 < b_i < 1$, $x_i > c_i \geq 0$).

Зазвичай, основою моделі поведінки споживачів є така гіпотеза: кожен із них здійснює вибір певних наборів благ за заданих цін і наявного доходу та прагне максимізувати рівень задоволення своїх потреб. Такий підхід дозволяє формалізувати процес ухвалення рішень і моделювати вплив змін у цінах або доходах на поведінку споживача.

18.2. Границя та неперервність функції двох змінних

Розгляньмо поняття δ -околу точки $M_0(x_0, y_0)$, під яким розуміймо сукупність усіх точок (x, y) , які розташовані всередині кола з радіусом δ ($\delta > 0$) із центром у точці $M_0(x_0, y_0)$, тобто це множина точок, координати яких задовольняють таку нерівність:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2.$$

Поняття границі функції двох змінних є складнішим, ніж поняття границі для функції однієї змінної. Це можна пояснити тим, що в ході визначення границі функції однієї змінної напрямків, за якими може наближатися аргумент до вибраного значення, є тільки два: уздовж осі Ox ліворуч або праворуч від заданої точки. Під час визначення границі функції двох змінних є безліч напрямків, за якими може наближатися точка (x, y) до точки (x_0, y_0) .

Загальноприйнятою є така вимога: значення границі функції $f(x, y)$ у разі $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ дорівнює A тільки тоді, якщо величина A не залежить від шляху, за яким рухається точка $M(x, y)$ до точки $M_0(x_0, y_0)$.

Сформулюймо таке означення границі.

Сталу величину A називають **границею функції $f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$** (за наближення точки $M(x, y)$ до точки $M_0(x_0, y_0)$), якщо будь-якому наперед заданому додатному числу ε ($\varepsilon > 0$) можна поставити у відповідність таке число δ , яке залежить від ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$), що для всіх точок $M(x, y)$ із δ -околу точки M_0 виконано нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Таке означення границі функції двох (і більшої кількості) змінних називають означенням **мовою ε - δ** , або означенням **за Коші**.

Границю функції двох змінних позначають так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A. \quad (18.1)$$

Число A не залежить від того, яким шляхом рухається точка $M(x, y)$ до точки $M_0(x_0, y_0)$.

Основні теореми про границі функцій однієї змінної поширюють і на випадок функцій двох змінних, а саме:

1. Границя сталої величини дорівнює самій сталій:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} C = C, \quad (18.2)$$

де $C = \text{const}$.

2. Границя алгебраїчної суми скінченної кількості функцій дорівнює алгебраїчній сумі границь цих функцій, якщо існують ці границі:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x, y) \pm g(x, y)) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \pm \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y). \quad (18.3)$$

3. Границя добутку скінченної кількості функцій, границі яких існують, дорівнює добутку границь цих функцій:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y). \quad (18.4)$$

4. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо існують границі цих функцій і границя знаменника не дорівнює нулю:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)}{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y)}, \quad (18.5)$$

якщо $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) \neq 0$.



Установімо існування границі функції $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, якщо $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

Нехай точка $M(x, y)$ прямує до точки $O(0, 0)$ уздовж прямої $y = kx$, де k – кутовий коефіцієнт.

Тоді

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2xkx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Отже, границя залежить від кутового коефіцієнта k , тобто від того, яким шляхом рухається точка $M(x, y)$ до точки $O(0, 0)$. Це означає, що границі функції в точці $O(0, 0)$ не існує.

Функція $f(x, y)$ є *неперервною в точці* $M_0(x_0, y_0)$, якщо виконано такі умови:

- 1) функція є визначеною в цій точці;
- 2) існує скінченна границя, якщо $x \rightarrow x_0$ та $y \rightarrow y_0$;
- 3) ця границя дорівнює значенню функції в точці (x_0, y_0) .

Якщо у якійсь точці $M_0(x_0, y_0)$ принаймні одна із зазначених умов не є виконаною, ця точка є *точкою розриву*.

Наведені раніше означення описують неперервність функції $z = f(x, y)$ за сукупністю змінних. Якщо зафіксувати одну зі змінних, наприклад, $y = y_0$, то маємо функцію від однієї змінної x : $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Якщо ця функція $\varphi(x)$ є неперервною в точці $x = x_0$, то говорять, що функція $f(x, y)$ є *неперервною в точці* (x_0, y_0) *за змінною* x . Аналогічно вводять означення *неперервності функції* $z = f(x, y)$ *у точці* (x_0, y_0) *за змінною* y .

Якщо функція $f(x, y)$ є неперервною в кожній внутрішній точці області та на її границі, то така функція є *неперервною в замкненій області*.

Для функцій кількох змінних виконано теореми про неперервність суми, добутку та частки, установлені раніше для функції однієї змінної. Справедливими є також властивості функції, неперервної в замкненій області. Наведімо одну із цих властивостей про найбільше та найменше значення функції в замкненій області, яке буде використано в наступних підрозділах.

Якщо функція $f(x, y)$ є визначеною і неперервною в замкненій області X , то всередині цієї області є принаймні одна така точка (x_1, y_1) , що для всіх інших точок області виконано нерівність $f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$, і принаймні

одна така точка (x_2, y_2) , що для всіх інших точок виконано нерівність $f(x_2, y_2) \leq f(x, y)$.

Значення $f(x_1, y_1) = M$ є найбільшим значенням функції $f(x, y)$ в області X , а значення $f(x_2, y_2) = m$ – її найменшим значенням у цій області. Доведення виходить за межі цього підручника.

18.3. Прирости функції двох змінних

Нехай задано функцію $z = f(x, y)$. Виберімо довільну точку $M_0(x_0, y_0)$ з області її визначення.

Зафіксуємо значення однієї з незалежних змінних, наприклад, змінної $y = y_0$, та надаймо іншій незалежній змінній x приріст Δx . Тоді функція z має приріст, який називають **частинним приростом z за x** у точці $M_0(x_0, y_0)$ і позначають $\Delta_x z$. Інакше кажучи, частинний приріст – це різниця між значеннями функції в точці $M(x_0 + \Delta x, y_0)$ та вихідній точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \quad (18.6)$$

Аналогічно, зафіксувавши значення змінної x ($x = x_0$) і надавши приріст незалежній змінній y , тобто, якщо з точки $M_0(x_0, y_0)$ рухатися в точку $M(x_0, y_0 + \Delta y)$, маємо **частинний приріст z за y** , який дорівнює:

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \quad (18.7)$$

Якщо незалежній змінній x надати приріст Δx та одночасно незалежній змінній y надати приріст Δy , розглянувши різницю між значеннями функції в точці $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ та в точці $M_0(x_0, y_0)$, то маємо **повний приріст функції** у точці M_0 :

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \quad (18.8)$$



Проілюструймо це на прикладі функції $z = xy$.

Визначмо частинні прирости та повний приріст цієї функції:

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x; \quad \Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y;$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

Звідси $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

18.4. Частинні похідні функції двох змінних

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x називають границю відношення частинного приросту функції за відповідною змінною $\Delta_x z$ до приросту самої незалежної змінної Δx за умови, що приріст аргументу прямує до нуля ($\Delta x \rightarrow 0$) довільним способом.

Частинна похідна за змінною x від функції $z = f(x, y)$ має ряд позначень: z'_x ; $f'_x(x, y)$; $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Згідно з означенням, можна записати так:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \quad (18.9)$$

Аналогічно визначають частинну похідну за змінною y від функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (18.10)$$

Ці похідні є аналогами похідних функцій однієї змінної, але істотно їх відрізняє те, що як сама функція, так і її похідні залежать від двох змінних. Із того, що частинні прирости було визначено в припущенні сталості однієї з незалежних змінних, випливає, що правила визначення частинних похідних такі самі, як і правила диференціювання функцій однієї змінної.



Під час визначення частинних похідних функції двох змінних одну незалежну змінну вважають сталою величиною і в ході диференціювання використовують таблицю похідних основних елементарних функцій однієї змінної та правила диференціювання.



Визначмо частинні похідні функції $z = \ln(x^2 + xy)$.

Диференціюймо цю функцію спочатку за змінною x , водночас змінну y уважаймо сталою. За правилом диференціювання складеної функції, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\ln(x^2 + xy)) = \frac{1}{x^2 + xy} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + xy) = \frac{2x + y}{x^2 + xy}.$$

Тепер визначмо похідну від заданої функції за змінною y , уважаймо сталою змінну x :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\ln(x^2 + xy)) = \frac{1}{x^2 + xy} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + xy) = \frac{x}{x^2 + xy}.$$

Геометрична інтерпретація частинних похідних. Нагадаймо, що графіком функції $z = f(x, y)$ є поверхня S у тривимірному просторі (рис. 18.4).

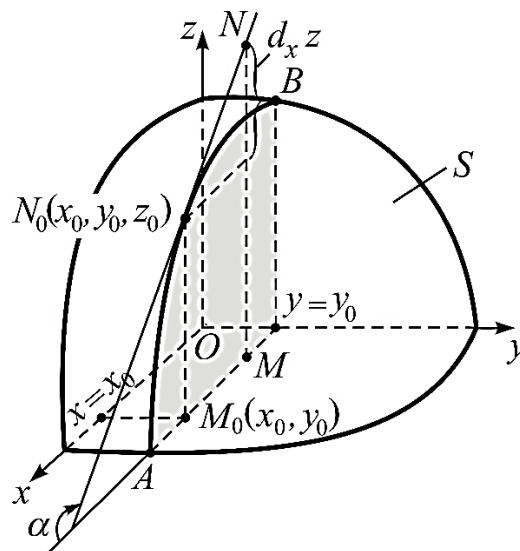


Рис. 18.4. Графік поверхні $z = f(x, y)$

Візьмімо на площині xOy точку $M_0(x_0, y_0)$ та проведемо через неї площину, яка описана рівнянням $y = y_0$, де $y_0 = \text{const}$. За фіксованого значення y частинна похідна z'_x дорівнює тангенсу кута α , який утворює дотична, що проходить через точку $N(x_0, y_0, z_0)$, до лінії перетину графіка функції та площини з додатним напрямком осі Ox :

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \text{tg } \alpha.$$

Аналогічно маємо, що

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \text{tg } \beta,$$

де β – кут між додатним напрямком осі Oy і дотичною до лінії перерізу поверхні S із площиною $x = x_0$.

Оскільки частинні похідні від функції $z = f(x, y)$ є функціями незалежних змінних x та y , то їх, своєю чергою, можна здиференціювати.

Як відомо, другою похідною функції є перша похідна від першої похідної цієї функції. Тому як результат диференціювання частинних похідних 1-го порядку від функції кількох змінних маємо *частинні похідні 2-го порядку функції* $z = f(x, y)$.

Розгляньмо ці похідні. Наприклад, якщо диференціювання і перший, і другий раз виконують за змінною x , то обчислюють частинну похідну 2-го порядку за змінною x :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_x = z''_{xx}.$$

Аналогічно обчислюють частинну похідну 2-го порядку за змінною y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)'_y = z''_{yy},$$

а також мішані похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_y = z''_{xy}$$

та

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)'_x = z''_{yx}.$$

Для мішаних похідних є справедливою теорема, яку наводьмо без доведення.

Теорема 18.1 (про рівність мішаних частинних похідних). Якщо функція $z = f(x, y)$ та її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ є визначеними та неперервними в деякій області, то мішані похідні не залежать від порядку диференціювання, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \quad (18.11)$$

Отже, функція двох змінних $z = f(x, y)$, яка задовольняє певні вимоги неперервності, має тільки три різні частинні похідні 2-го порядку.



Визначмо частинні похідні 2-го порядку функції $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$.

Зазначмо, що функція z є визначеною і неперервною для будь-яких пар $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, оскільки її утворено додаванням та множенням неперервних функцій.

Спочатку визначмо частинні похідні 1-го порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 y^2.$$

Вони також є визначеними та неперервними на $\mathbf{R}^2$.

Тепер визначмо частинні похідні 2-го порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x + 6x^2 y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y^2 e^x + 2xy^3 \right)'_y = 2ye^x + 6xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(2ye^x + 3x^2 y^2 \right)'_x = 2ye^x + 6xy^2.$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

18.5. Частинні диференціали. Повний диференціал та його використання в наближених обчисленнях

Вивчення повного приросту $\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ функції $z = f(x, y)$ у разі переходу від точки (x_0, y_0) до точки $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ порушує питання аналізу його структури.

Функцію $z = f(x, y)$ називають **диференційовною в точці**, якщо її приріст Δz можна подати у вигляді суми лінійної (відносно Δx та Δy) частини та доданків вищого порядку малості:

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \quad (18.12)$$

де A, B – деякі сталі;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – є нескінченно малими в разі $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$.

Вираз $A\Delta x + B\Delta y$, який є головною частиною приросту функції, лінійно залежною від приростів її аргументів, називають **повним диференціалом функції** і позначають df або dz :

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Теорема 18.2 (перша необхідна умова диференційовності). Якщо функція $z = f(x, y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0, y_0)$, то вона є неперервною в цій точці.

Доведення. Якщо в співвідношенні (18.12) перейти до границі за $\Delta x \rightarrow 0$ та $\Delta y \rightarrow 0$, маємо:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0,$$

тому функція $z = f(x, y)$ є неперервною в точці $M_0(x_0, y_0)$, що й потрібно довести. ■

Теорема 18.3 (друга необхідна умова диференційовності). Якщо функція $z = f(x, y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0, y_0)$, тобто виконано умову (18.12), то в цій точці існують обидві її частинні похідні, причому:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = A, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = B.$$

Доведення. За умовою теореми функція $z = f(x, y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0, y_0)$, тобто в цій точці виконано співвідношення (18.12). Припустимо, що $\Delta y = 0$. Тоді $\Delta_x z = A \cdot \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$. Поділивши останній вираз на Δx , перейдемо до границі за умови $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \varepsilon_1) = A = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Отже,

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = A.$$

Аналогічно можна довести, що

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = B. \quad \blacksquare$$



Необхідна умова диференційовності не є достатньою.

Теорема 18.4 (достатня умова диференційовності). Якщо функція $z = f(x, y)$ в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ має неперервні частинні похідні z'_x та z'_y , то вона є диференційовною в цій точці (наводьмо без доведення).

Аналогічно тому, як було введено поняття диференціала для функції однієї змінної, розгляньмо це поняття для функції кількох змінних.

Повернімося до ф-ли (18.12). За теоремою 18.3, коефіцієнт A дорівнює значенню частинної похідної 1-го порядку від функції $z = f(x, y)$ за аргументом x для точки (x_0, y_0) , а коефіцієнт B – значенню частинної похідної 1-го порядку від функції $z = f(x, y)$ за аргументом y для точки (x_0, y_0) .

Отже, повний приріст функції $z = f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) має такий вигляд:

$$\Delta z = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \Delta x + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ є нескінченно малими за $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Тому вираз $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$, який утворює головну лінійну частину повного приросту функції, і є *повним диференціалом функції* $z = f(x, y)$. Оскільки для незалежних змінних їхні прирости й диференціали є збіжними, тобто $\Delta x = dx, \Delta y = dy$, то формула для повного диференціала набуде такого вигляду:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (18.13)$$

Кожен із доданків ф-ли (18.13) є головною частиною приросту функції, яка лінійно залежить від приросту цього аргументу за умови, що інші аргументи є сталими.

Отже, кожен із цих доданків є *частинним диференціалом* за відповідним аргументом:

$$dz = d_x z + d_y z,$$

де $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx$ – частинний диференціал функції z за аргументом x ;

$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$ – частинний диференціал функції z за аргументом y .

Основною властивістю диференціала є інваріантність форми першого диференціала, тобто рівність (18.13) є виконаною, незалежно від того, чи є змінні x та y незалежними, чи вони є функціями інших аргументів.

Зауважмо, що диференціал dz (18.13) називають **диференціалом 1-го порядку**. Якщо вважати функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ диференційовними в точці $M_0(x_0, y_0)$, можна ввести поняття диференціала 2-го порядку як диференціал від диференціала 1-го порядку $d^2z = d(dz)$.

Отже, згідно з ф-лою (18.13), маємо:

$$\begin{aligned} d^2z = d(dz) &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)'_y dy = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx^2) + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy^2). \end{aligned} \quad (18.14)$$

Аналогічно можна визначити диференціали 3-го порядку та більш високих порядків.

Повний диференціал 1-го порядку dz є головною лінійною частиною приросту функції, тому за його допомогою можна виконувати наближене обчислення значень функції, відкидаючи у виразі для Δz доданки, що є нескінченно малими вищого порядку, порівняно з Δx та Δy .

Для цього перетворимо формулу для повного приросту функції, зважаючи на співвідношення (18.12), таким способом:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + \Delta f(x_0, y_0) = \\ &= f(x_0, y_0) + A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y. \end{aligned}$$

Різниця між повним приростом функції $z = f(x, y)$ та її повним диференціалом у точці $M_0(x_0, y_0)$ за $\Delta x \rightarrow 0$ та $\Delta y \rightarrow 0$ є величиною нескінченно малою більш високого порядку, порівняно із приростами її аргументів.

Звідси випливає, що для досить малих Δx та Δy значення функції в точці $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ наближено дорівнює значенню функції в точці (x_0, y_0) , до якого додано вираз $A\Delta x + B\Delta y$, тобто диференціал функції в точці (x_0, y_0) .

Тоді формула для наближених обчислень значень функції має такий вигляд:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + A\Delta x + B\Delta y = f(x_0, y_0) + df \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}. \quad (18.15)$$

Отже,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 dy,$$

або наближено

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y. \quad (18.16)$$

Для наближеного обчислення значення функції в точці застосовуймо такий алгоритм:

- 1) визначмо точку (x_0, y_0) , координати якої є близькими до координат цієї точки $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, а значення функції $z = f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) легко обчислити;
- 2) визначмо частинні похідні 1-го порядку в точці (x_0, y_0) ;
- 3) скористаймося ф-лою (18.16).



Обчислімо наближено $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$.

Розгляньмо функцію $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Нехай $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, тоді визначмо $f(x_0, y_0) = \sqrt{16 + 9} = 5$. Уважаючи, що $x_0 + \Delta x = 4,05$, а $y_0 + \Delta y = 2,93$, маємо $\Delta x = 0,05$; $\Delta y = -0,07$.

Визначмо частинні похідні 1-го порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

та обчислімо повний диференціал у точці (x_0, y_0) :

$$dz \Big|_{\substack{x=4 \\ y=3}} = \frac{4}{\sqrt{16+9}} \cdot 0,05 - \frac{3}{\sqrt{16+9}} \cdot 0,07 = -0,002.$$

Скористаймося ф-лою (18.16).

Звідси

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2} \approx 5 - 0,002 = 4,998.$$

Обчислення на калькуляторі дає такий результат: 4,998 739 8. Як видно, абсолютна похибка становить 0,000 739 8.

Для ілюстрації точності обчислення за допомогою диференціала ще один приклад.



Нехай загальний прибуток від реалізації певної продукції описують таким співвідношенням:

$$z = x \cdot y,$$

де x – прибуток від реалізації одиниці продукції;

y – обсяг реалізованої продукції.

У певний момент часу прибуток від реалізації становить $z = x_0 \cdot y_0$.

Визначмо зміну загального прибутку, якщо прибуток від реалізації одиниці продукції зросте на величину Δx , а обсяг реалізованої продукції – на Δy .

Приріст функції, яка описує прибуток від реалізації, визначають за такою формулою:

$$\Delta z = (x_0 + \Delta x) \cdot (y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 =$$

$$= x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y - x_0 y_0 =$$

$$= x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y = dz + \Delta x \Delta y,$$

оскільки для цієї функції:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = y_0 \quad \text{та} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = x_0.$$

Кількісно функція $z = x \cdot y$ дорівнює площі прямокутника зі сторонами x та y . Тоді приріст функції Δz можна розглядати як приріст площі прямокутника за умов, що сторона, яка мала довжину x_0 , має приріст Δx , а сторона довжиною y_0 – приріст Δy (рис. 18.5).

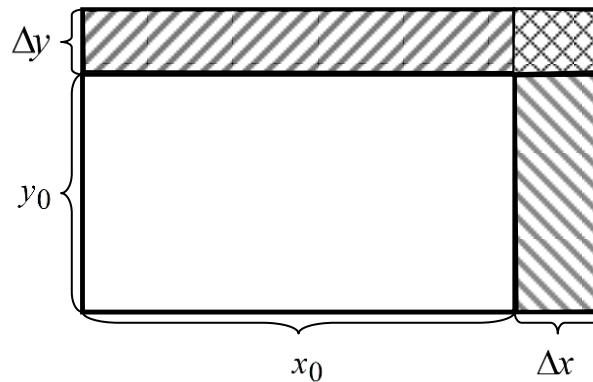


Рис. 18.5. Приріст площі прямокутника

Наприклад, площа вихідного прямокутника дорівнює $z = x_0 \cdot y_0$ (на рис. 18.5 цей прямокутник не має штриховки).

Якщо надати приріст лише одній зі сторін прямокутника, а довжину другої залишити сталою, то площа вихідного прямокутника буде збільшеною на величину, що відповідає частинному диференціалу функції $z = x \cdot y$ за цією змінною (ця частка приросту функції на рис. 18.5 відповідає одному із прямокутників, що мають штриховку під одним нахилом), а сума площ цих обох прямокутників – повному диференціалу функції.

Тоді повний приріст функції (уся заштрихована площа) відрізняє від її повного диференціала на величину $\Delta x \cdot \Delta y$ (на рис. 18.5 це площа маленького прямокутника, що має подвійну штриховку). Оскільки за умовою задачі $\Delta x \rightarrow 0$ та $\Delta y \rightarrow 0$, то величина $\Delta x \cdot \Delta y$ є нескінченно малою вищого порядку, порівняно з нескінченно малими Δx і Δy . У цьому прикладі величина $\Delta x \cdot \Delta y$ і є абсолютною похибкою в разі заміни повного приросту функції її диференціалом.

Оскільки відносна похибка дорівнює відношенню абсолютної похибки до значення функції, то в розглянутому прикладі відносна похибка дорівнює:

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{x_0 \cdot y_0}.$$

Частинні та повний диференціали відіграють важливу роль у математичному аналізі, адже дають змогу наближено обчислювати зміну значення функції за невеликих змін її змінних, що особливо корисно в прикладних задачах і моделюванні.



Ключові терміни

Функція кількох змінних; область визначення; внутрішні точки області визначення; замкнена та відкрита області визначення; лінія рівня; границя функції двох змінних; неперервність функції в точці; неперервність функції в замкненій області; найбільше та найменше значення функції в області; частинний приріст функції в точці; повний приріст функції в точці; частинні похідні; геометричний зміст частинних похідних; похідні 2-го порядку; мішані похідні; повний диференціал; частинні диференціали; інваріантність форми першого диференціала; наближене обчислення функції в точці.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають функцією кількох змінних?
2. Що розуміють під областю визначення функції двох змінних, який її геометричний зміст?
3. Який графік у функції двох змінних?
4. Що таке «лінія рівня»?
5. Як за допомогою ліній рівня дістати уявлення про графік функції двох змінних?
6. Надайте означення границі функції двох змінних.
7. Що таке «частинний приріст функції за змінною x »? Надайте його геометричне тлумачення.
8. Що таке «частинний приріст функції за змінною y »?
9. Як визначають частинну похідну за змінною x ? Яка її геометрична інтерпретація?
10. Як визначають частинну похідну за змінною y ?
11. Що називають повним диференціалом?
12. Як розуміти інваріантність форми першого диференціала?
13. Яку функцію вважають диференційовною?

14. Назвіть необхідні, а також достатню умови диференційовності функції в точці.

15. Що називають частинними похідними 2-го порядку від функції із двома невідомими?

16. Що називають першим dz та другим d^2z диференціалами функції?

17. Яку формулу застосовують у наближених обчисленнях?



Тестові завдання до підрозділу 18

1. Як зображують функцію $z = f(x, y)$ графічно:

- а) лінією в просторі;
- б) лінією на площині;
- в) поверхнею в просторі;
- г) областю на площині?

2. Як називають множину наборів $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яким відповідає певне значення z :

- а) областю визначення функції $z = f(x, y)$;
- б) областю значень функції $z = f(x, y)$;
- в) залежними змінними функції $z = f(x, y)$;
- г) межею області визначення функції $z = f(x, y)$?

3. Яка з наведених рівностей завжди є виконаною для функції $z = f(x, y)$ за умови, що відповідні похідні є неперервними:

- а) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$; б) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; в) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; г) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$?

4. За якою формулою визначають повний диференціал функції $z = f(x, y)$:

- а) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$; б) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx - \frac{\partial z}{\partial y} dy$;
- в) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} dx \cdot dy$; г) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial z}{\partial y} dy^2$?

5. Як називають множину точок на площині xOy , якщо в цих точках значення функції $z = f(x, y)$ є однаковим і дорівнює деякій сталій величині C :

- а) графіком функції $z = f(x, y)$;
- б) лінією рівня $z = f(x, y)$;
- в) межею області визначення функції $z = f(x, y)$;
- г) функцією корисності функції $z = f(x, y)$?

6. За яких із наведених умов сталу величину A називають границею функції $f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$:

а) будь-якому наперед заданому додатному числу ε ($\varepsilon > 0$) можна поставити у відповідність таке число δ , яке залежить від ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$), що для всіх точок $M(x, y)$ із δ -околу точки M_0 виконано нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$;

б) будь-якому наперед заданому числу ε можна поставити у відповідність таке число δ , що для всіх точок $M(x, y)$ із δ -околу точки M_0 виконано нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$;

в) будь-якому наперед заданому додатному числу ε ($\varepsilon > 0$) можна поставити у відповідність таке число δ , яке залежить від ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$), що для всіх точок $M(x, y)$ із δ -околу точки M_0 виконано нерівність $|f(x, y) - A| > \varepsilon$;

г) будь-якому наперед заданому додатному числу ε ($\varepsilon > 0$) можна поставити у відповідність таке число δ , яке залежить від ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$), що для всіх точок виконано нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$?

7. Які умови неперервності функції $f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$:

а) функція є визначеною в цій точці; існує скінченна границя, якщо $x \rightarrow x_0$ та $y \rightarrow y_0$;

б) є скінченною границя цієї функції, якщо $x \rightarrow 0$ та $y \rightarrow 0$; ця границя дорівнює значенню функції в точці $(0, 0)$;

в) функція є визначеною в цій точці; існує скінченна границя, якщо $x \rightarrow x_0$ та $y \rightarrow y_0$; ця границя дорівнює значенню функції в точці (x_0, y_0) ;

г) функція є визначеною в цій точці?

8. Що визначає формула $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$:

а) частинний приріст функції z за x у точці $M_0(x_0, y_0)$;

б) частинний приріст функції z за y у точці $M_0(x_0, y_0)$;

в) повний приріст функції z у точці $M_0(x_0, y_0)$;

г) приріст функції z ?

9. Що називають частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x :

а) границю відношення приросту самої незалежної змінної Δx до частинного приросту функції за відповідною змінною $\Delta_x z$ за умови, що приріст аргументу прямує до нуля ($\Delta x \rightarrow 0$);

б) границю відношення частинного приросту функції за відповідною змінною $\Delta_x z$ до приросту самої незалежної змінної Δx за умови, що приріст аргументу прямує до нуля ($\Delta x \rightarrow 0$) довільним способом;

в) границю відношення приросту функції до приросту самої незалежної змінної Δx за умови, що приріст аргументу прямує до нуля ($\Delta x \rightarrow 0$) довільним способом;

г) границю відношення приросту функції до приросту самої незалежної змінної Δx за умови, що приріст аргументу прямує до нескінченності ($\Delta x \rightarrow \infty$) довільним способом?

10. Як називають вираз $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$, який утворює головну лінійну частину повного приросту функції:

а) повним диференціалом функції $z = f(x, y)$;

б) частинним диференціалом функції $z = f(x, y)$;

в) частинним приростом функції $z = f(x, y)$;

г) приростом функції $z = f(x, y)$?

Література: [1 – 9; 11 – 16; 20 – 24].

19. Похідна за напрямом. Градієнт функції. Локальний і умовний екстремуми

Основні питання:

- 19.1. Похідна за напрямком.
- 19.2. Градієнт функції та лінії рівня.
- 19.3. Локальний екстремум функції двох змінних.
- 19.4. Умовний екстремум.
- 19.5. Найменше та найбільше значення функції в замкненій області.

19.1. Похідна за напрямком

Нехай функцію $z = f(x, y)$ задано в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Розгляньмо напрямок (рис. 19.1), заданий одиничним вектором $\vec{s} = (\cos \alpha, \cos \beta)$, де $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$.

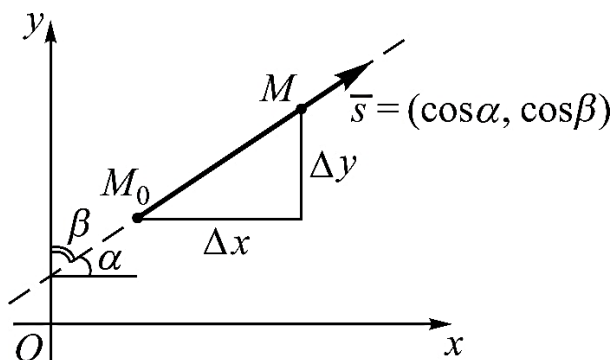


Рис. 19.1. Напрямок $\vec{s} = (\cos \alpha, \cos \beta)$

Виконаймо рух уздовж напрямку такого вектора від точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Функція має повний приріст:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Вектор $\overline{\Delta s}$, координатами якого є прирости аргументів, назвімо **вектором приростів**: $\overline{\Delta s} = (\Delta x, \Delta y)$. Його довжина дорівнює $\overline{\Delta s} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Проекція вектора приростів на напрямок $\bar{s}$, яку позначмо через Δs , є додатною, якщо його напрямок є збіжним із напрямком вектора $\bar{s}$, і від'ємною – в іншому разі:

$$\Delta s = \begin{cases} |\overline{\Delta s}|, & \text{якщо } \overline{\Delta s} \uparrow\uparrow \bar{s}; \\ -|\overline{\Delta s}|, & \text{якщо } \overline{\Delta s} \uparrow\downarrow \bar{s}. \end{cases}$$

Похідною функції $z = f(x, y)$ за напрямком $\bar{s}$ називають границю відношення $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ за умови, що $\Delta s \rightarrow 0$, та позначають символом $\frac{\partial z}{\partial s}$.

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Теорема 19.1 (про похідну за напрямком). Якщо функція $z = f(x, y)$ є визначеною в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ і має в ній неперервні частинні похідні, то в цій точці існує похідна за напрямком довільного вектора $\bar{s} = (\cos \alpha, \cos \beta)$, яку можна визначити за такою формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta, \quad (19.1)$$

де $\cos \alpha$ та $\cos \beta$ – напрямні косинуси.

Доведення. Візьмімо на промені, який виходить із точки $M_0(x_0, y_0)$ за напрямком вектора $\bar{s} = (\cos \alpha, \cos \beta)$, точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Оскільки функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в точці $M_0(x_0, y_0)$, то її повний приріст, що відповідає приростам її аргументів Δx та Δy , можна записати в такому вигляді:

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Вектор приростів:

$$\overline{\Delta s} = \overline{M_0 M} = (\Delta x, \Delta y).$$

На рис. 19.1 видно, що $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos \alpha$; $\frac{\Delta y}{\Delta s} = \sin \alpha = \cos \beta$.

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos \beta + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta. \end{aligned}$$

Якщо точка M_0 прямує до точки M уздовж заданого напрямку, а $\Delta x \rightarrow 0$ та $\Delta y \rightarrow 0$, то $|\overline{\Delta s}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$.

Оскільки $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ є нескінченно малими, якщо $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$, а напрямні косинуси й частинні похідні в точці M_0 є сталими, то маємо:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_1 \cos \alpha = 0 \quad \text{та} \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_2 \cos \beta = 0.$$

Звідси

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos \beta. \blacksquare$$

19.2. Градієнт функції та лінії рівня

Розгляньмо функцію $z = f(x, y)$, яка визначена в області D і є диференційовною в точці $M(x, y) \in D$.

Градiєнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називають вектор, координатами якого є частинні похідні 1-го порядку функції z у цій точці. Градієнт позначають символом $\text{grad } z$.

Отже, якщо розкласти градієнт за одиничним базисом, то його можна записати у векторній формі:

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} \quad (19.2)$$

або в координатній формі:

$$\text{grad } z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Виберімо в точці $M(x, y)$ довільний напрямок, який визначають одиничним вектором $\bar{s} = (\cos \alpha, \cos \beta)$.

Визначмо скалярний добуток градієнта функції в цій точці та напрямного вектора $\bar{s}$:

$$\text{grad } z \cdot \bar{s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta.$$

Зважаючи на ф-лу (19.1), маємо:

$$\text{grad } z \cdot \bar{s} = \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Звідси, за означенням скалярного добутку, визначмо:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = |\text{grad } z| \cdot |\bar{s}| \cdot \cos \varphi, \quad (19.3)$$

де φ – кут між векторами $\text{grad } z$ та $\bar{s}$.

Визначмо дві основні властивості $\text{grad } z$, які випливають із ф-ли (19.3):

1) похідна за напрямком у цій точці досягає найбільшого значення, якщо напрямок вектора $\bar{s}$ є збіжним із напрямком $\text{grad } z$ ($\cos \varphi = 1, \varphi = 0$), тобто напрямок градієнта функції є напрямком, за яким функція змінює значення з максимальною швидкістю;

2) градієнт у вибраній точці утворює прямий кут із дотичною до лінії рівня функції, що проходить через цю точку ($\cos \varphi = 0, \varphi = \pi / 2$).



Розгляньмо приклад. Нехай задано таку функцію $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$.

Визначмо її градієнт у точці $M_0(1, 2)$ та доведемо, що градієнт є перпендикулярним до лінії рівня, яка проходить через цю точку. Для цього спочатку визначмо частинні похідні 1-го порядку від функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 6$$

та обчислімо їх у точці $M_0(1, 2)$:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1, \\ y=2}} = 2 \cdot 1 - 4 = -2; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1, \\ y=2}} = 2 \cdot 2 + 6 = 10.$$

Отже, $\text{grad } z = -2\vec{i} + 10\vec{j}$.

Тепер визначмо рівняння лінії рівня, яка проходить через точку $M_0(1, 2)$.
Значення функції z_0 (її рівень), що відповідає цій лінії рівня, становить

$$z_0 = 1^2 + 2^2 - 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 13.$$

Отже, рівнянням лінії рівня, якщо $z_0 = 13$, буде

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 13.$$

Зведемо його до канонічного вигляду:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 4 - 9 = 13 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 26.$$

Отже, маємо канонічне рівняння кола із центром у точці з координатами $(2, -3)$, радіус якого дорівнює $R = \sqrt{26}$.

Щоб пересвідчитися, що градієнт функції є перпендикулярним до лінії рівня, визначмо кутовий коефіцієнт дотичної до лінії рівня в точці M_0 .

Рівняння лінії рівня визначають функцією, що задана неявно.

За формулою похідної від такої функції, маємо:

$$2x + 2yy' - 4 + 6y' = 0 \Rightarrow y' = \left. \frac{2 - x}{y + 3} \right|_{x=1, y=2} = 0,2.$$

Отже, у точці $M_0(1, 2)$ кутовий коефіцієнт дотичної до лінії рівня функції z дорівнює 0,2.

Градієнт $\text{grad } z = (-2, 10)$ утворює з віссю Ox кут, тангенс якого визначають як відношення координат градієнта: $\frac{10}{-2} = -5$.

Тоді добуток кутових коефіцієнтів дотичної та градієнта дорівнює $0,2 \cdot (-5) = -1$.

Тому градієнт функції в точці M_0 є перпендикуляром до дотичної лінії рівня функції у вибраній точці.

На рис. 19.2 зображено лінію рівня функції $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$, за умови рівня $z_0 = 13$, а також градієнт цієї функції в точці $M_0(1, 2)$.

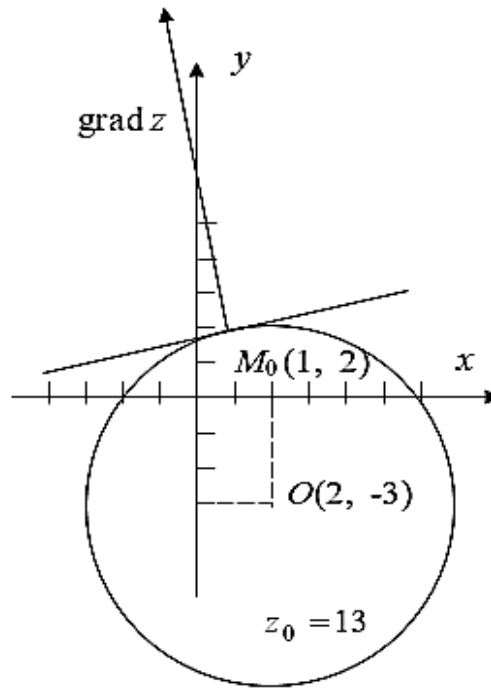


Рис. 19.2. Лінія рівня $z_0 = 13$ функції $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$

Отже, доведено, що градієнт функції перпендикулярний до лінії рівня.

19.3. Локальний екстремум функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ є визначеною на множині $D \subset D(f) \subset \mathbf{R}^2$ та точка $M_0(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Функція $z = f(x, y)$ у точці M_0 має *локальний максимум (мінімум)*, якщо навколо цієї точки існує такий δ -окіл, що для всіх точок цього околу виконано таку нерівність: $f(x, y) \leq (\geq) f(x_0, y_0)$.

Теорема 19.2 (необхідна умова екстремуму). Якщо функція двох змінних $z = f(x, y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0, y_0)$ і має в цій точці екстремум, то обидві частинні похідні 1-го порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} = 0, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} = 0. \end{cases} \quad (19.4)$$

Як і в разі функції однієї змінної, точки, де перші похідні дорівнюють нулю або вони не існують, називають **критичними**.

Критичні точки, у яких перші похідні дорівнюють нулю, називають **стаціонарними**.

Виконання умови (19.4) є необхідною умовою екстремуму, однак не є достатньою умовою екстремуму. Розв'язавши систему цих рівнянь, визначмо координати точок, у яких функція може мати екстремум.

Щоб сформулювати достатню умову екстремуму, розгляньмо визначник, елементами якого є похідні 2-го порядку функції $z = f(x, y)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}. \quad (19.5)$$

Матрицю, елементами якої є частинні похідні 2-го порядку функції кількох змінних, називають **матрицею Гессе**, а її визначник – **гессіаном**. Для функції двох змінних гессіан є визначником 2-го порядку.

Теорема 19.3 (достатня умова екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ у стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ та деякому її околі має всі частинні похідні 2-го порядку й гессіан у цій точці є додатним, то функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ локальний екстремум. Якщо в цій точці $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, то в стаціонарній точці функція має мінімум; якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, то – максимум.

Отже, достатню умову екстремуму для функції двох змінних можна записати в такому вигляді:

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0. \quad (19.6)$$

У разі, якщо в стаціонарній точці визначник (19.5) є від'ємним, то функція в цій точці не має локального екстремуму. Якщо в стаціонарній точці гессіан дорівнює нулю, то наведена раніше теорема не відповідає на питання про існування екстремуму і потрібні додаткові дослідження.



Проведімо дослідження функції $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$ на локальний екстремум. За необхідною умовою екстремуму, перевірмо, чи має функція стаціонарні точки. Для цього визначмо її похідні 1-го порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 6.$$

Прирівнявши ці похідні до нуля, маємо систему рівнянь для обчислення координат стаціонарної точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 2y + 6 = 0. \end{cases}$$

Звідси визначмо, що стаціонарна точка $M_0(x_0, y_0)$ має такі координати:

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = -3. \end{cases}$$

За достатньою умовою перевірмо, чи є ця стаціонарна точка точкою локального екстремуму. Для цього визначмо всі похідні 2-го порядку й обчислимо їхні значення в стаціонарній точці:

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0} = 2; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0} = 2; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right|_{M_0} = 0.$$

Тепер складемо матрицю Гессе й обчислимо її визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Оскільки гессіан є додатним, то функція в стаціонарній точці має екстремум. Далі визначмо характер екстремуму.

Оскільки $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0} = 2 > 0$, то звідси випливає, що стаціонарна точка є точ-

кою локального мінімуму.

Обчислимо значення функції в точці $M_0(2, -3)$:

$$z_{\min} = 2^2 + (-3)^2 - 4 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) = -13.$$



Проведімо дослідження функції $z = x^2 - 4y^2 - 4x + 8y$ на локальний екстремум. Спочатку визначмо перші похідні функції й за системою рівнянь, яку маємо, за необхідною умовою екстремуму, обчислимо координати стаціонарної точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -8y + 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ -8y + 8 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

Визначмо похідні 2-го порядку:

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0} = 2; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0} = -8; \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right|_{M_0} = 0.$$

Перевірмо, чи виконано достатню умову екстремуму:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -16 < 0.$$

Оскільки гессіан є від'ємним, то функція не має екстремуму.

19.4. Умовний екстремум

Нехай функція $z = f(x, y)$ є визначеною в області $D(f)$, і на координати точок області накладено співвідношення $\varphi(x, y) = 0$ яке називають **рівнянням зв'язку**. Це означає, що на області визначення функції розглядають тільки точки, для яких виконано рівність $\varphi(x, y) = 0$.

Множину всіх таких точок позначмо через X і точка $M_0(x_0, y_0) \in X$, тобто $\varphi(x_0, y_0) = 0$.

Можна також уважати, що в цьому разі аргументи функції $z = f(x, y)$ не є незалежними, а пов'язаними між собою співвідношенням $\varphi(x, y) = 0$.

Розгляньмо задачу про визначення екстремуму такої функції. У цьому разі застосовують термін *умовний екстремум*.

Точку $M_0(x_0, y_0) \in X$ називають **точкою умовного максимуму (мінімуму) функції $f(x, y)$** , якщо існує такий δ -окіл цієї точки, що для всіх точок (x, y) перетину цього околу із множиною X виконано нерівність:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) \geq f(x_0, y_0)) \text{ за умови, що } \varphi(x, y) = 0. \quad (19.7)$$

Для розв'язання задачі на умовний екстремум застосовують метод зведення до екстремуму функції однієї змінної або метод множників Лагранжа.

Метод зведення до екстремуму функції однієї змінної. Якщо рівняння $\varphi(x, y) = 0$ можна розв'язати відносно однієї зі змінних, тобто подати у явному вигляді цю змінну як функцію іншої змінної, то, підставивши її у функцію $z = f(x, y)$, маємо нову функцію, яка залежить тільки від однієї змінної. Локальний екстремум цієї нової функції й буде умовним екстремумом вихідної функції $z = f(x, y)$.

Отже, задачу визначення умовного екстремуму можна звести до розв'язання задачі про визначення локального екстремуму функції однієї змінної.



Визначмо умовний екстремум функції $z = xy$, якщо $x + y = 1$.

У цьому разі можна з рівняння зв'язку одну зі змінних обчислити через другу й підставити у функцію, а потім дослідити визначену функцію однієї змінної на локальний екстремум.

Отже, визначмо, що $y = 1 - x$, підставмо у вихідну функцію й маємо:

$$z = x(1 - x).$$

Далі дослідимо на екстремум визначену функцію від однієї змінної.

Визначмо її першу похідну $\frac{dz}{dx} = 1 - 2x$.

За необхідною умовою екстремуму, визначмо абсцису стаціонарної точки $x_0 = \frac{1}{2}$. Ця точка є точкою максимуму, оскільки під час переходу через

цю точку зліва направо похідна змінює знак із «+» на «-» (за достатньою умовою екстремуму). Тепер для $x_0 = \frac{1}{2}$ з рівняння зв'язку визначмо ординату точ-

ки максимуму: $y_0 = \frac{1}{2}$.

Обчислимо значення екстремуму функції:

$$z_{\max} = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Метод множників Лагранжа. Якщо рівняння зв'язку не можна розв'язати відносно однієї змінної, то для визначення умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ за наявності співвідношення $\varphi(x, y) = 0$ застосовують метод невизначених множників Лагранжа. Зміст методу полягає в тому, щоб перейти від дослідження умовного екстремуму функції двох змінних до визначення безумовного екстремуму функції трьох змінних.

Згідно із цим методом складають *функцію Лагранжа*:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y), \quad (19.8)$$

де λ – невизначена стала, яку називають **множником Лагранжа**.

Множник λ є ще однією змінною, що разом зі змінними x та y є аргументом функції Лагранжа, і саме функцію Лагранжа, яка в цьому разі є функцією трьох змінних, досліджують на екстремум.

Теорема 19.4 (необхідна умова екстремуму). Нехай функції $f(x, y)$ та $\varphi(x, y)$ є неперервними в області D , мають неперервні частинні похідні 1-го порядку за змінними x та y , а точка (x_0, y_0) є точкою умовного локального екстремуму функції $z = f(x, y)$ за наявності рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ і нехай $\text{grad} \varphi(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді існує таке єдине число λ_0 , що координати точки (x_0, y_0, λ_0) , яка є стаціонарною точкою функції Лагранжа $L(x, y, \lambda)$, задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (19.9)$$

Теорему наводьмо без доведення.

Система (19.9) є необхідною умовою локального екстремуму функції трьох змінних, отже, якщо точка (x_0, y_0) є точкою умовного локального екстремуму функції $z = f(x, y)$ за наявності умови $\varphi(x, y)$, то точка (x_0, y_0, λ_0) є стаціонарною точкою функції Лагранжа.

Оскільки $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$, а $\text{grad } \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$, то два останні рівняння умови (19.9) можна записати у векторній формі:

$$\text{grad } f + \lambda \cdot \text{grad } \phi = 0.$$

Тоді для стаціонарної точки функції Лагранжа маємо:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = -\lambda_0 \cdot \text{grad } \phi(x_0, y_0). \quad (19.10)$$

Це означає, що в точці $M_0(x_0, y_0)$, яка є точкою умовного екстремуму, градієнти функцій $f(x, y)$ і $\phi(x, y)$ належать одній прямій.

Геометричну інтерпретацію умовного екстремуму показано на рис. 19.3.

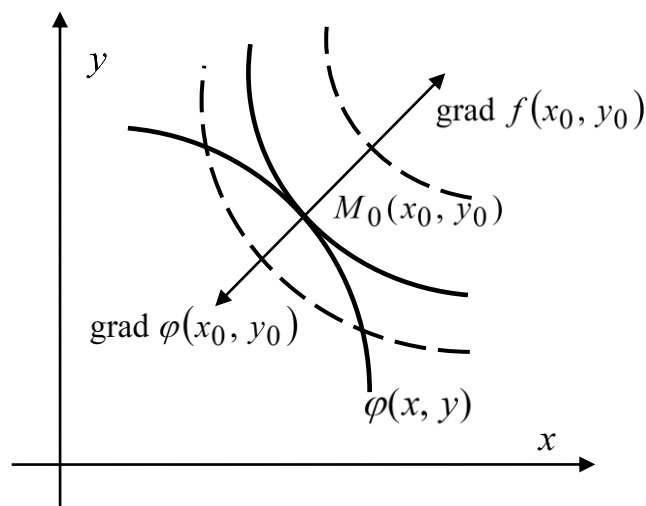


Рис. 19.3. Геометрична інтерпретація умовного екстремуму

Функції $f(x, y)$ відповідають декілька ліній рівня, серед яких виокремлено саме ту, на якій функція досягає екстремального значення $z = f(x_0, y_0)$, тоді

як для функції $\varphi(x, y)$ наведено лише лінію рівня, для якої виконано умову $\varphi(x, y) = 0$.

Лінії рівня функцій $z = f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ у точці екстремуму $M_0(x_0, y_0)$ є дотичними одна до одної.

Фрагмент *карти ліній рівня*, зображеної на рис. 19.3, є типовим для задач економічного змісту. Наприклад, такий вигляд мають лінії сталого значення виробничих функцій – *ізокванти*.

Якщо виробнича функція є функцією двох аргументів (найчастіше, це витрати й капітал), то ізокванти відображають можливі комбінації факторів виробництва для досягнення певного рівня виробництва.

Отже, ізокванта визначає можливість заміщення одного фактора виробництва іншим. Якщо приросту Δx відповідає таке значення Δy , за якого перехід від одних умов виробництва до інших виконують за ізоквантою, то диференціал виробничої функції (на ізокванті) дорівнює нулю.

Повернімося до питання про умовний екстремум функції. Із системи (19.9) визначмо координати стаціонарної точки (x_0, y_0, λ_0) . Однак співвідношення (19.9) є необхідною, але не достатньою умовою умовного екстремуму.

Теорема 19.5 (*достатня умова екстремуму*). Нехай для функції $L = L(x, y, \lambda)$ точка $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ є стаціонарною. Якщо функція в цій точці має похідні 2-го порядку та другий диференціал за фіксованого λ_0 :

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2, \quad (19.11)$$

то якщо $d^2L > 0$ функція досягає мінімуму, а якщо $d^2L < 0$ – максимуму (наведьмо без доведення).

Схема дослідження на екстремум функції Лагранжа є такою:

- 1) складімо функцію Лагранжа (19.8);
- 2) запишімо систему рівнянь (19.9), тобто необхідні умови екстремуму;
- 3) визначмо стаціонарні точки функції, для чого розв'яжімо систему (19.9);
- 4) перевірмо достатню умову екстремуму в кожній стаціонарній точці;
- 5) зробімо висновки.

Дослідження на екстремум функції Лагранжа еквівалентно розв'язанню задачі на умовний екстремум (19.7), а саме: якщо точка $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ є точкою екстремуму функції Лагранжа, то точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$. Обґрунтування цього факту потребує додаткових відомостей із розд. «Функції багатьох змінних», які в цьому підручнику не розглядають.



Визначмо екстремум функції $z = x + y$ за умови, що на її змінні накладено таке обмеження: $9x^2 + 4y^2 = 13$.

Перепишімо рівняння зв'язку в такому вигляді: $9x^2 + 4y^2 - 13 = 0$.

Звідси $\varphi(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 13$.

Складімо функцію Лагранжа:

$$L(\lambda, x, y) = x + y + \lambda \cdot (9x^2 + 4y^2 - 13)$$

і визначмо її частинні похідні 1-го порядку:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 9x^2 + 4y^2 - 13; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 18\lambda x; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 8\lambda y.$$

Відповідно до необхідної умови екстремуму функції Лагранжа (19.9), побудуймо систему рівнянь для визначення координат стаціонарних точок:

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 - 13 = 0, \\ 1 + 18\lambda x = 0, \\ 1 + 8\lambda y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9}{324\lambda^2} + \frac{4}{64\lambda^2} - 13 = 0, \\ x = \frac{-1}{18\lambda}, \\ y = \frac{-1}{8\lambda}. \end{cases}$$

Розв'язок першого рівняння системи – $\lambda = \pm \frac{1}{12}$.

Отже, для функції $L(\lambda, x, y)$ стаціонарні точки $M\left(-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{12}\right)$ та $N\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{12}\right)$. Відповідно для вихідної функції точки $M_1\left(-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ та $M_2\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ є стаціонарними точками умовного екстремуму.

Для перевірки виконання достатньої умови екстремуму для функції Лагранжа треба визначити знак другого диференціала d^2L у точках M та N .

Визначмо частинні похідні 2-го порядку:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 18\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 8\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0.$$

Другий диференціал функції Лагранжа (19.11) має такий вигляд:

$$d^2L = 18\lambda dx^2 + 8\lambda dy^2 = 2\lambda(9dx^2 + 4dy^2).$$

Отже, знак d^2L є збіжним зі знаком множника Лагранжа λ .

У точці $M\left(-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{12}\right)$ $d^2L > 0$ і функція Лагранжа в цій точці досягає мінімуму, а функція $z = f(x, y)$ у точці $M_1\left(-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ – умовного мінімуму,
 $z_{\min} = -\frac{13}{6}.$

У точці $N\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{12}\right)$ $d^2L < 0$ і функція Лагранжа досягає максимуму, а функція $z = f(x, y)$ у відповідній точці $M_2\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ – умовного максимуму,
 $z_{\max} = \frac{13}{6}.$

Цей приклад можна проілюструвати геометрично. На графіку (рис. 19.4) наведено лінії рівня функцій $z = x + y$ та $\varphi(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 13$, що проходять через точку $M_2\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$, де функція $z = x + y$ досягає умовного максимуму.

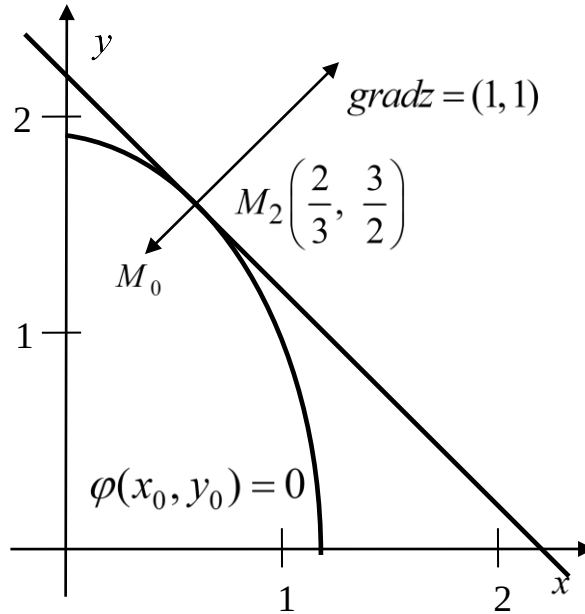


Рис. 19.4. Геометрична ілюстрація точки умовного максимуму

Оскільки функція $\varphi(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 13$ описує еліпс із центром симетрії в початку координат, то в точці $M_1\left(-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ для функції $z = x + y$ є умовний мінімум.

Графік не просто ілюструє наведений приклад, але й дозволяє запропонувати простий спосіб його розв'язання.

Наприклад, для визначення стаціонарної точки функції Лагранжа визначимо проєкції градієнта функції $z = x + y$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

З огляду на співвідношення (19.10), для точки M відносно проєкцій градієнта функції $\varphi(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 13$ можна записати таке:

$$-18\lambda x_0 = 1; \quad -8\lambda y_0 = 1.$$

Підставивши ці співвідношення до умови обмеження, маємо відносно λ :

$$9 \cdot \left(-\frac{1}{18\lambda}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{8\lambda}\right)^2 - 13 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{12}.$$

Тепер визначмо координати стаціонарних точок функції Лагранжа. Зрозуміло, що маємо ті самі точки $M\left(-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{12}\right)$ та $N\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{12}\right)$.

19.5. Найменше та найбільше значення функції в замкненій області

Під час визначення екстремуму функції кількох змінних, яка є неперервною на замкненій множині, постає питання про обчислення найбільшого та найменшого значень, яких набуває функція на цій множині, тобто про визначення глобального максимуму та глобального мінімуму. Оскільки функція може досягати глобального екстремуму на межі області, то однією зі складових задачі на глобальний екстремум є визначення стаціонарних точок у ході дослідження функції на умовний екстремум; рівнянням зв'язку в цьому разі є рівняння межі області. Установлення стаціонарних точок виконують розглянутими раніше методами зведення до визначення екстремуму функції однієї змінної та множників Лагранжа.

У разі визначення *найбільшого та найменшого значень функції в замкненій області* $D \subset D(f) \subset \mathbf{R}^2$ виконаймо такі кроки:

- 1) визначмо стаціонарні точки функції $z = f(x, y)$, що лежать всередині області D , і обчислимо значення функції в цих точках;
- 2) визначмо стаціонарні точки функції на лініях, що описують межу області D , і також обчислимо значення функції в них;
- 3) серед здобутих на кроках 1) і 2) значень функції виберімо найменше й найбільше.



Визначмо найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - y^2$ в області $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

Вихідній нерівності відповідає круг, радіус якого дорівнює одиниці, а центр розташовано у точці $O(0, 0)$.

Спочатку перевірмо, чи має функція стаціонарні точки, які належать області, що визначена нерівністю $x^2 + y^2 < 1$.

Отже, визначмо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Стаціонарна точка $O(0, 0)$ є внутрішньою точкою області D і є центром круга. Обчислимо значення функції в цій точці: $z(0, 0) = 0$.

Тепер слід дослідити поведінку функції на межі області D . Наразі це є дослідженням на умовний екстремум, де рівнянням зв'язку є рівняння межі області: $x^2 + y^2 = 1$.

У цьому прикладі немає сенсу застосовувати метод множників Лагранжа, оскільки рівняння зв'язку можна розв'язати відносно будь-якої зі змінних.

Із рівняння $x^2 + y^2 = 1$ визначмо $y^2 = 1 - x^2$. Підставляючи цей вираз у вихідну функцію, маємо функцію однієї змінної:

$$z(x) = x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1,$$

де $-1 \leq x \leq 1$.

Визначмо її стаціонарні точки, використавши необхідну умову екстремуму для функції однієї змінної:

$$\frac{dz}{dx} = 4x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Обчислимо значення функції в цій точці $z(0) = -1$ та значення на кінцях проміжку $[-1, 1]$:

$$z(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 1, \quad z(1) = 2(1^2) - 1 = 1.$$

Для функції $z(x, y)$ слід порівняти її значенні в таких точках: $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(0, -1)$; $(1, 0)$; $(-1, 0)$.

Відповідні значення функції в цих точках дорівнюють: 0 ; -1 ; -1 ; 1 ; 1 .

Порівняймо обчислені значення за величиною. Звідси випливає, що найменшого значення функція набуває в точках $(0, -1)$ та $(0, 1)$ і вона дорівнює числу -1 , а найбільшого – у точках $(-1, 0)$ та $(1, 0)$ і це значення дорівнює числу 1 .

Отже,

$$z_{\text{найм.}} = z(0, -1) = z(0, 1), \quad z_{\text{найб.}} = z(-1, 0) = z(1, 0) = 1.$$



Ключові терміни

Вектор приростів; похідна за напрямком; градієнт функції; локальний екстремум; необхідна умова екстремуму; стаціонарна точка; матриця Гессе; достатня умова екстремуму; умовний екстремум; метод невизначених множників Лагранжа; карта ліній рівня; ізокванти; функція Лагранжа; найбільше та найменше значення функції в замкненій області.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають похідною за напрямком?
2. Як обчислюють похідну за напрямком?
3. Що називають градієнтом функції?
4. Які властивості має градієнт функції?
5. Як визначають екстремум функції кількох змінних?
6. Які є необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних?
7. Які є достатні умови існування екстремуму функції двох змінних?
8. Що називають умовним екстремумом функції двох змінних?
9. Які методи дослідження на умовний екстремум застосовують для функції двох змінних?
10. Що таке «функція Лагранжа»?
11. Як визначити найменше та найбільше значення функції двох змінних в замкненій області?



Тестові завдання до підрозділу 19

1. Що називають похідною функції $z = f(x, y)$ за напрямком $\vec{s}$:
 - а) границю відношення $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ за умови, що $\Delta s \rightarrow 0$;
 - б) границю відношення $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ за умови, що $\Delta s \rightarrow \infty$;

- в) границю відношення $\frac{\Delta s}{\Delta z}$ за умови, що $\Delta z \rightarrow 0$;
- г) границю відношення $\frac{\Delta s}{\Delta z}$ за умови, що $\Delta z \rightarrow \infty$?

2. За якою з наведених формул визначають похідну функції $z = f(x, y)$ за напрямком вектора $\vec{s}$, який утворює кути α і β з координатними осями:

- а) $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta$;
- б) $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \beta$;
- в) $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \beta$;
- г) $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta$?

3. Якою є функція двох змінних $z = f(x, y)$, якщо її похідна за заданим напрямком у точці є від'ємною:

- а) зростає за заданим напрямком у точці;
- б) є сталою за заданим напрямком у точці;
- в) спадає за заданим напрямком у точці;
- г) є від'ємною за заданим напрямком у точці?

4. Градієнтом функції $z = f(x, y)$ називають:

- а) скаляр $gradz = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$;
- б) вектор $\overrightarrow{gradz} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$;
- в) вектор $\overrightarrow{gradz} = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)$;
- г) скаляр $gradz = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$.

5. Точки, де частинні похідні 1-го порядку дорівнюють нулю або вони не існують, називають:

- а) критичними;
- б) стаціонарними;
- в) точками екстремуму;
- г) точками розриву.

6. Функція $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ має локальний максимум, якщо:

а) навколо точки M_0 існує такий δ -окіл, що для всіх точок цього околу виконано таку нерівність: $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$;

б) для всіх інших точок виконано таку нерівність: $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$;

в) навколо точки M_0 існує такий δ -окіл, що для всіх точок цього околу виконана нерівність: $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$;

г) для всіх точок області визначення функції виконано таку нерівність: $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

7. Нехай функція $z = f(x, y)$ має в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ неперервні частинні похідні 1-го і 2-го порядків і $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$. Тоді функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум, якщо:

а) $f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 = 0$;

б) $f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 > 0$;

в) $f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 < 0$;

г) $f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 \neq 0$.

8. Що не є етапом визначення екстремуму функції двох змінних:

- а) підстановлення значення критичної точки у функцію двох змінних;
- б) розв'язання системи рівнянь;
- в) визначення асимптот;
- г) визначення частинних похідних 2-го порядку?

9. Під час визначення екстремуму функції $z = f(x, y)$ за умови, що $\varphi(x, y) = 0$, складають функцію Лагранжа, яка має такий вигляд:

а) $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y);$

б) $L(x, y, \lambda) = \lambda \cdot f(x, y) + \varphi(x, y);$

в) $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \frac{\lambda}{\varphi(x, y)};$

г) $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \varphi(x, y) + \lambda.$

10. Як формулюють достатню умову екстремуму:

а) нехай для функції $L = L(x, y, \lambda)$ точка $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ є стаціонарною. Якщо функція в цій точці має похідні 2-го порядку та другий диференціал за фіксованого λ_0 : $d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2$, то, якщо $d^2L > 0$, функція досягає мінімуму, а якщо $d^2L < 0$ – максимуму;

б) нехай для функції $L = L(x, y, \lambda)$ точка $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ є стаціонарною. Якщо функція в цій точці має похідні 2-го порядку та другий диференціал за фіксованого λ_0 : $d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2$, то, якщо $d^2L < 0$,

функція досягає мінімуму, а якщо $d^2L > 0$ – максимуму;

в) нехай для функції $L = L(x, y, \lambda)$ точка $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ є точкою неперервності. Якщо функція в цій точці має похідні 2-го порядку та $d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2$, то, якщо $d^2L > 0$, функція досягає мінімуму, а якщо $d^2L < 0$ – максимуму;

г) нехай для функції $L = L(x, y, \lambda)$ точка $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ належить її області визначення. Якщо функція в цій точці має похідні та другий диференціал $d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2$, то, якщо $d^2L < 0$, функція досягає мінімуму, а якщо $d^2L > 0$ – максимуму?

Література: [1 – 9; 11 – 16; 20 – 24].

20. Застосування функцій кількох змінних у дослідженнях економічних процесів

Основні питання:

- 20.1. Поняття про емпіричні формули й метод найменших квадратів.
- 20.2. Загальні поняття про задачі математичного програмування.
- 20.3. Еластичність функції кількох змінних.

Функції кількох змінних широко застосовують у різних галузях знань, зокрема і в економіці, для опису різних процесів і явищ. Звернімо увагу на те, що методи визначення локальних чи глобальних екстремумів функції кількох змінних покладено в основу методів побудови економічних моделей та визначення стратегії управління економічними процесами, із метою оптимізації роботи економічних систем. Зупинімося на деяких важливих прикладах.

20.1. Поняття про емпіричні формули й метод найменших квадратів

Нехай під час дослідження якогось явища або процесу (зокрема, економічного) за двома змінними величинами x і y маємо n пар значень (x, y) , які зазвичай подають у вигляді таблиці (табл. 20.1).

Таблиця 20.1

Результати спостережень

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

За даними експерименту визначмо функціональну залежність y від x , яка б найкраще описувала результати спостережень.

Емпіричними формулами називають функціональні залежності, які побудовано за результатами експерименту. Оскільки значення залежної змінної (функції) y , які обчислюють за емпіричними формулами $\tilde{y} = f(x)$, можуть відрізнятися від результатів вимірювань y_i для відповідного значення x_i , то значення, обчислені за емпіричними формулами, позначають $\tilde{y}_i$.

Побудову емпіричної формули виконують у два етапи.

Перший етап передбачає визначення множини можливих функцій, до якої може, згідно з теоретичним припущенням, належати така залежність. Вибір функції, яку доцільно використати для наближеного опису (*апроксимації*) результатів досліджень, виконують на основі теоретичних припущень щодо природи явища, яке досліджують, або за результатами візуального аналізу розташування точок на площині.

Кожен клас функцій характеризують кількома числовими параметрами $a_0, a_1, \dots, a_m$, кількість яких залежить від типу функції. Наприклад, лінійна залежність $y = kx + b$ містить два параметри: k – кутовий коефіцієнт, b – величина відрізка, який пряма відтинає на осі ординат; квадратичну залежність $y = ax^2 + bx + c$ описують формулою, що залежить від трьох числових параметрів a, b, c тощо. Відповідно, значення функції, якого вона набуде за емпіричною формулою, залежить не тільки від значення аргументу, але й від цих параметрів, тому параметри теж уносять у символічний запис емпіричної формули: $\tilde{y} = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$.

На *другому етапі* обчислюють значення числових параметрів, що визначають кожен з вибраних функцій $\tilde{y} = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$. Вони мають бути такими, щоб функція найкраще описувала явище, що вивчають. Слід зазначити, що побудова емпіричних формул є однією із задач, які досліджує математична статистика за допомогою регресійного аналізу.

Одним із найпоширеніших методів, що застосовують для визначення параметрів емпіричних формул, є *метод найменших квадратів (МНК)*. Його базовий принцип полягає в тому, що функцію вважають найкращою для апроксимації емпіричних даних, якщо сума квадратів різниць між емпіричними значеннями залежної змінної y_i і значеннями, обчисленими за допомогою функції $\tilde{y}$ за одного й того самого значення аргументу x_i , є мінімальною.

Різниця між значеннями y_i ($i = \overline{1, n}$), визначеними в результаті досліджень та обчисленими за такою емпіричною формулою:

$$\tilde{y} = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m),$$

тобто відхилення емпіричних значень функціональної змінної від теоретичних, є *похибками моделі* (рис. 20.1). Ці похибки позначають через ε_i .

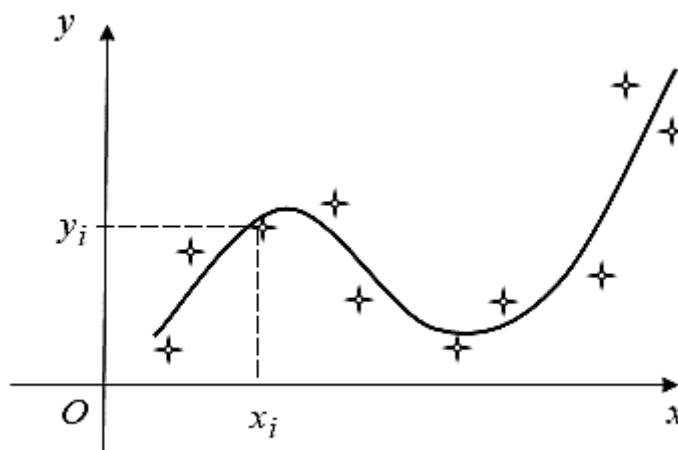


Рис. 20.1. Апроксимація емпіричних даних

Отже,

$$y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) = \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

За принципом МНК невідомі параметри функції, за допомогою якої виконують апроксимацію, вибирають так, щоб сума квадратів похибок була мінімальною:

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m))^2 \rightarrow \min. \quad (20.1)$$

Функцію (20.1) називають **функцією похибок**. Вона залежить від параметрів моделі a_j ($j = \overline{0, m}$), тобто $S = S(a_0, a_1, \dots, a_m)$.

Отже, за методом найменших квадратів є функція $m+1$ змінної, для якої слід визначити мінімум і вказати значення параметрів $a_0, a_1, \dots, a_m$, за яких його буде досягнуто.

Визначення параметрів емпіричних формул виконують за таким алгоритмом:

1) обчислюють суму квадратів відхилень емпіричних значень залежної змінної від її теоретичних значень, тобто за ф-лою (20.1) утворюють функцію похибок S ;

2) записують необхідну умову локального екстремуму функції S як систему рівнянь виду $\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0, j = \overline{0, m}$;

3) розв'язують систему, визначену в п. 2, і визначають числа a_j , $j = \overline{0, m}$, які забезпечують мінімальне значення функції S .

Доведено, що відповідна стаціонарна точка є точкою мінімуму функції $S = S(a_0, a_1, \dots, a_m)$.

Одним із принципів, які покладено в основу побудови емпіричних формул, є припущення, що зв'язок між досліджуваними факторами є найпростішим. Тому детальніше розглянемо побудову емпіричної формули у разі, якщо апроксимуючою є лінійна функція $\tilde{y}(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1x$.

Функція похибок у цьому разі має такий вигляд:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i)^2.$$

За необхідною умовою екстремуму визначмо її частинні похідні 1-го порядку і прирівняймо їх до нуля. Маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} S'_{a_0} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a_0 - a_1x_i) \cdot (-1) = 0, \\ S'_{a_1} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a_0 - a_1x_i) \cdot (-x_i) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 \sum_{i=1}^n 1 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases}$$

Для всіх сум, які містить визначена система, є спеціальні позначення, які прийняті в математичній статистиці:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \overline{x^2}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \overline{xy}.$$

Із використанням цих позначень необхідну умову екстремуму можна записати у вигляді такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \bar{x} = \bar{y}, \\ a_0 \bar{x} + a_1 \overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases} \quad (20.2)$$

або в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{x^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \overline{xy} \end{pmatrix}.$$

Цю систему називають **системою нормальних рівнянь** для визначення параметрів емпіричної формули.

Звідси визначмо, що

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{x^2 - (\bar{x})^2}, \quad a_0 = \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot (\overline{xy})}{x^2 - (\bar{x})^2}. \quad (20.3)$$

Розв'язок системи (20.2) дає найкращі значення цих параметрів, за яких для вибраного виду функції сума квадратів похибок буде найменшою.

У разі, якщо залежність між змінними y та x слід апроксимувати функцією, яка не є лінійною, застосування методу найменших квадратів потребує попередньої *лінеаризації* моделі, тобто введення нових змінних таким способом, щоб залежність між цими новими змінними була лінійною.

Наприклад, якщо залежність змінної y від змінної x описують гіперболічною функцією, тобто $f(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1 x^{-1}$, то вводять змінну $X = x^{-1}$ і систему нормальних рівнянь (20.2) записують щодо цієї змінної.

Якщо залежність є степеневою, тобто $f(x, a_0, a_1) = a_0 x^{a_1}$, то функцію спочатку логарифмують за будь-якою основою (наприклад, за десятковою):

$$\lg y = \lg a_0 + a_1 \cdot \lg x.$$

Уведімо такі нові змінні: $Y = \lg y$, $X = \lg x$. За їхньою допомогою складемо систему нормальних рівнянь (20.2), і за цією системою визначмо параметри моделі $A_0 = \lg a_0$ та a_1 . Після їхнього обчислення слід повернутися до вихідних змінних.

Нехай наближенням функції є квадратний тричлен, тобто:

$$f(x, a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Тоді функція похибок, яку потрібно мінімізувати, має такий вигляд:

$$S = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2.$$

Визначмо її частинні похідні за невідомими a_0 , a_1 та a_2 і, за необхідною умовою екстремуму, складемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot x_i^2 = 0. \end{cases}$$

Перетворимо цю систему, із метою зведення до системи нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{cases} \quad (20.4)$$

Поділивши обидві частини кожного рівняння на n (кількість вимірювань), маємо таку систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} a_2 \overline{x^2} + a_1 \overline{x} + a_0 = \overline{y}, \\ a_2 \overline{x^3} + a_1 \overline{x^2} + a_0 \overline{x} = \overline{xy}, \\ a_2 \overline{x^4} + a_1 \overline{x^3} + a_0 \overline{x^2} = \overline{x^2 y}. \end{cases}$$



Слід зазначити, що значення параметрів певної функції, обчислення яких виконують за методом найменших квадратів, забезпечують найменшу суму квадратів похибок, порівняно з іншими параметрами цієї функції. Однак, якщо для апроксимації застосувати іншу функцію, то можна мати менше значення суми квадратів похибок.



Покажімо це на прикладі. У табл. 20.2 наведені дані щодо чисельності населення окремої області за 2011 – 2020 рр.

Чисельність населення області

№ з/п	Роки	Чисельність населення, млн
1	2011	2,94
2	2012	2,91
3	2013	2,89
4	2014	2,87
5	2015	2,85
6	2016	2,83
7	2017	2,81
8	2018	2,80
9	2019	2,78
10	2020	2,77

Визначмо функцію, за якою доцільно виконувати апроксимацію емпіричних даних, із метою подальшого складання короткострокового прогнозу. Для цього за вихідними даними побудуємо графік (рис. 20.2), що дозволить візуально оцінити вигляд апроксимуючої функції.

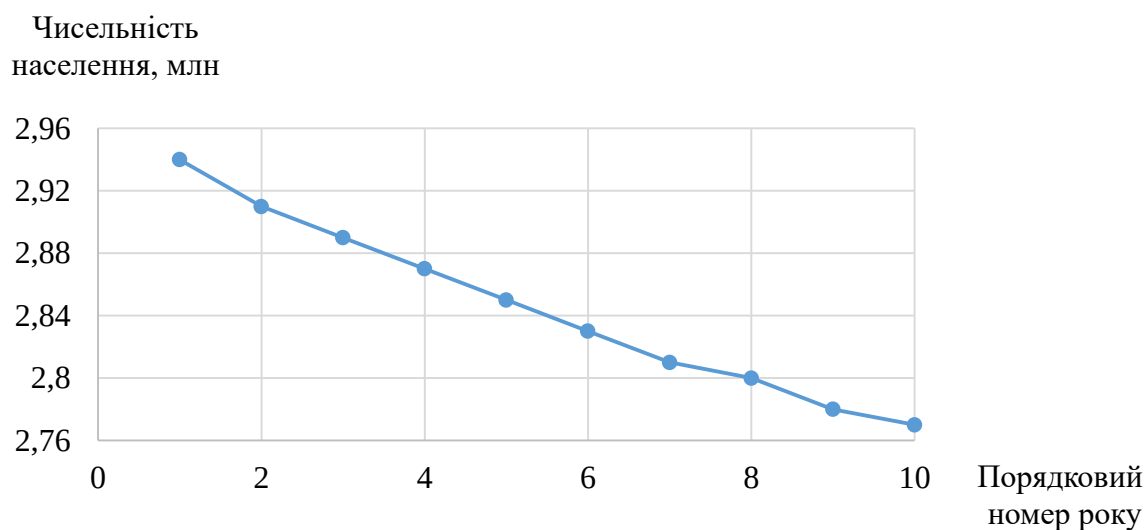


Рис. 20.2. Зміна чисельності населення

Розгляньмо спочатку найпростішу модель – *лінійну*. Тобто за виглядом графіка припустимо, що чисельність населення з роками буде зменшуватися за лінійною функцією. Для спрощення обчислень замість року в моделі використовуймо його порядковий номер.

Визначмо параметри емпіричної формули:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x,$$

де x – порядковий номер року.

Наводьмо обчислення у вигляді таблиці (табл. 20.3).

Таблиця 20.3

Розрахунок параметрів лінійної моделі

Роки	x	y	x^2	xy	$\tilde{y}$	$(y - \tilde{y})^2$
2011	1	2,94	1	2,94	2,929 3	0,000 11
2012	2	2,91	4	5,82	2,910 6	0,000 00
2013	3	2,89	9	8,67	2,891 9	0,000 00
2014	4	2,87	16	11,48	2,873 2	0,000 01
2015	5	2,85	25	14,25	2,854 5	0,000 02
2016	6	2,83	36	16,98	2,835 8	0,000 03
2017	7	2,81	49	19,67	2,817 1	0,000 05
2018	8	2,80	64	22,40	2,798 4	0,000 00
2019	9	2,78	81	25,02	2,779 7	0,000 00
2020	10	2,77	100	27,70	2,761 0	0,000 08
Суми	55	28,45	385	154,93	–	0,000 32
Середні значення	5,5	2,845	38,5	15,493	–	–

Підставляючи середні значення з останнього рядка табл. 20.3 у ф-ли (20.3), маємо параметри лінійної моделі:

$$a_1 = \frac{15,493 - 5,5 \cdot 2,845}{38,5 - 5,5^2} = -0,018 7,$$

$$a_0 = 2,845 + 0,018 7 \cdot 5,5 = 2,948.$$

Отже, апроксимуюча функція має такий вигляд:

$$\tilde{y} = 2,948 - 0,0187 x.$$

Обчислімо за цим наближенням теоретичні значення функції та визначмо суму квадратів похибок (див. останні два стовпці табл. 20.3).

Виявилося, що сума квадратів похибок у цьому разі дорівнює 0,000 32. Це найменша величина, порівняно з тією, яку б ми мали за допомогою інших лінійних функцій. Якщо цю формулу використовувати для прогнозу, то через два роки (порядковий номер року буде становити 12) можна очікувати, що чисельність населення буде становити:

$$\tilde{y} = 2,948 - 0,0187 \cdot 12 = 2,724 \text{ (млн)}.$$

Розгляньмо апроксимацію за допомогою такого квадратного тричлена (це можна припустити з вигляду графіка, що на рис. 20.2):

$$\tilde{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Визначивши всі коефіцієнти системи нормальних рівнянь (20.4) і розв'язавши цю систему (пропонуємо зробити це самостійно), маємо відповідну апроксимуючу функцію:

$$\tilde{y} = 2,9638 - 0,0266 \cdot x + 0,0007 \cdot x^2.$$

Застосувавши цю модель, також обчислімо значення $\tilde{y}$, які відповідають емпіричним даним, і визначмо суму квадратів відхилень між емпіричними й теоретичними даними (пропонуємо теж зробити це самостійно). Як наслідок, маємо суму квадратів відхилень у разі застосування квадратичної функції, що становить 0,000 1, яка є меншою, ніж під час застосування лінійної апроксимації.

Отже, для прогнозування доцільно використовувати квадратичну функцію.

Якщо прийняти модель квадратичної залежності, то через два роки слід очікувати таку чисельність населення:

$$\tilde{y} = 2,9638 - 0,0266 \cdot 12 + 0,0007 \cdot 12^2 = 2,7454 \text{ (млн)}.$$

Припустімо, що чисельність населення, залежно від року, визначають гіперболічною залежністю, тобто

$$\tilde{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}.$$

Тоді маємо таку формулу для визначення $\tilde{y}$:

$$\tilde{y} = 2,79 + \frac{0,176}{x}.$$

Відповідно, сума квадратів відхилень у разі застосування цієї функції дорівнює 0,007 8, тобто є у 20 разів більшою, ніж у разі застосування лінійної моделі.

Отже, найкращою моделлю цієї задачі можна вважати квадратичну модель (сума квадратів відхилень емпіричних даних від теоретичної лінії є найменшою).

20.2. Загальні поняття про задачі математичного програмування

Однією з галузей застосування функцій кількох змінних є розв'язання задач оптимізації. Математичну дисципліну, яка розглядає теорію побудови математичних моделей задач оптимізації та методи їхнього розв'язання, називають **математичним програмуванням**. Прикладом задач математичного програмування є задачі про оптимальне використання сировини; оптимальний склад суміші; транспортна задача, яка передбачає оптимізацію перевезень: матрична гра, згідно з якою виконують оптимізацію ймовірностей застосування тієї чи тієї стратегії, тощо. Хоча всі ці задачі є задачами на умовний екстремум і для їхнього розв'язання можна застосовувати метод Лагранжа, який розглядали раніше, у межах математичного програмування розробляють спеціальні методи, призначені для розв'язання задач саме цих класів.

Однією із класичних задач математичного програмування є задача оптимального використання сировини під час складання плану роботи підприємства, із метою мати максимальний прибуток від реалізації продукції.

Задача про використання сировини. Нехай підприємство випускає продукцію n назв, для виробництва якої використовують m видів сировини. Потреби в сировині певного виду для виготовлення одиниці продукції, обсяг сировини та прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду наведено в табл. 20.4.

Таблиця 20.4

Задача про використання сировини

Види сировини	Види продукції				Обсяги сировини
	1	2	...	n	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Прибутки	c_1	c_2		c_n	

Розв'язання. Побудуємо математичну модель задачі. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – обсяги продукції відповідної назви, що виробляє підприємство. Тоді, за даними табл. 20.4 математична модель задачі буде мати такий вигляд:

Отже, розв'язання задачі про використання сировини зведено до розв'язання системи m лінійних нерівностей з n невідомими. Зрозуміло, що система (20.5) має безліч розв'язків і серед них потрібно визначити такий, за якого функція Z досягає максимального значення. У загальній постановці є задача на умовний екстремум функції n змінних, у якій на невідомі x_j накладають обмеження у вигляді системи нерівностей.

Для розв’язання задачі використовують методи математичного програмування, але для геометричної ілюстрації задачі розгляньмо її на площині, тобто обмежмося випадком двох змінних. Тоді задачу розв’язують на основі відомого зі шкільного курсу методу розв’язання системи нерівностей і деяких властивостей функції двох змінних. Випадок двох змінних не має особливого практичного значення, але його розгляд дає геометричну наочність, способи розв’язання та шляхи їхньої практичної реалізації.

Нехай розглядають задачу, що є моделлю задачі про використання сировини (20.5), складену відносно тільки двох змінних, а саме:

536

Наведімо *геометричну ілюстрацію* цієї задачі. Кожна нерівність (20.6) визначає на площині x_1Ox_2 деяку півплощину, межею якої є відповідна пряма (рис. 20.3).

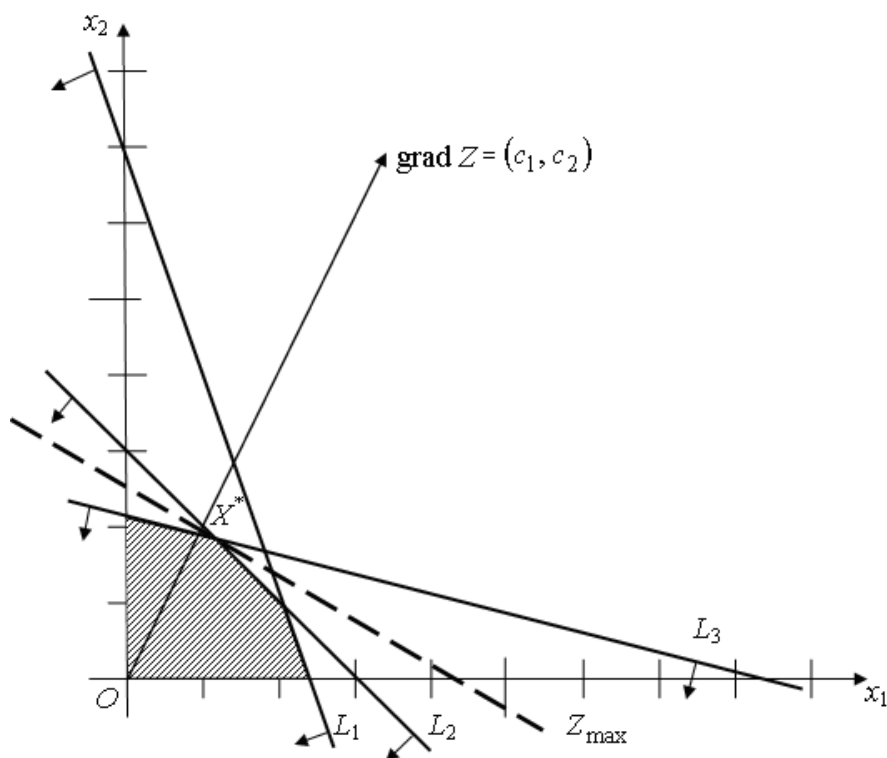


Рис. 20.3. Графічний метод розв'язання оптимізаційної задачі

Якщо система (20.6) є сумісною, то перерізом цих площин є багатокутник, який і є множиною розв'язків системи обмежень задачі (20.6).

На цьому багатокутнику визначмо точку, у якій функція Z досягає максимального значення. Для визначення цієї точки через початок координат проведьмо лінію рівня функції $Z = 0$, тобто побудуємо пряму з таким рівнянням:

$$c_1x_1 + c_2x_2 = 0.$$

Напрямок, за яким функція Z найшвидше зростає, визначають за градієнтом цієї функції:

$$\text{grad } Z = \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2).$$

За властивістю градієнта цей вектор у кожній точці є перпендикулярним до лінії рівня, яка проходить через цю точку.

Оскільки функцію Z досліджують на максимум, то пересуваймо лінію рівня функції за напрямком градієнта так, щоб вона дотикалася до многокутника допустимих розв'язків системи обмежень у її крайній точці.

Координати цієї точки $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ визначмо як розв'язок системи рівнянь, що відповідають прямим, перетином яких є точка X^* .

Тоді значення функції в цій точці буде максимальним:

$$Z(X^*) = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* = Z_{\max}.$$



Розгляньмо алгоритм графічного розв'язування задачі на прикладі.

Цех має можливість виробляти продукцію двох видів A та B . Водночас він використовує три види сировини, запаси якої обмежено. Витрати сировини на виробництво одиниці продукції кожного виду, запаси сировини та прибуток від реалізації одиниці продукції задають таблицею (табл. 20.5).

Таблиця 20.5

Витрати сировини на одиницю продукції та її запаси

Види сировини	Види продукції		Обсяги сировини
	A	B	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252
Прибутки	20	40	—

Визначмо такий план виробництва, за яким підприємство має максимальний прибуток.

Розв'язання. Побудуймо математичну модель задачі.

Позначмо через x_1 кількість одиниць виробу виду A , через x_2 – виробу виду B , тоді прибуток від реалізації готової продукції є функцією двох змінних:

$$Z = 20x_1 + 40x_2.$$

Обсяг сировини, що витрачають на виготовлення продукції, не може перевищувати її запасів, тому обмеження за кожним видом сировини можна записати у вигляді такої системи нерівностей:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252. \end{cases}$$

Крім того, обсяг продукції не може бути від'ємним, тобто існує обмеження на знаки: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Отже, математична модель задачі має такий вигляд:

$$Z = 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \max ,$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Застосуємо до розв'язання задачі графічний метод (рис. 20.4).

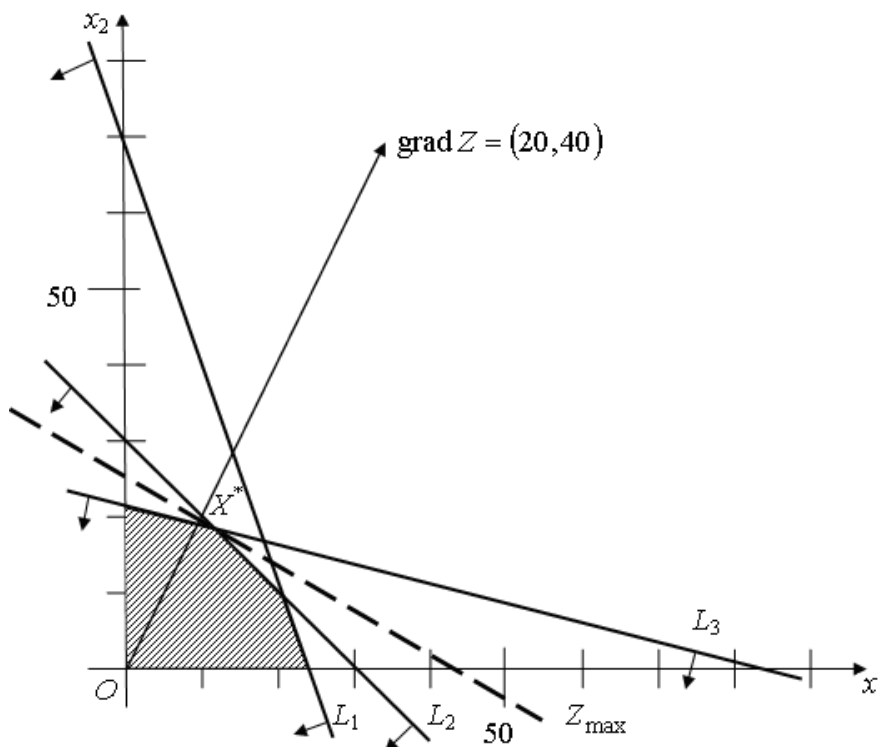


Рис. 20.4. Графічний метод розв'язання задачі про використання сировини

Для побудови многокутника, що визначає множину розв'язків системи обмежень, у першій чверті координатної площини побудуємо прямі за такими рівняннями:

$$L_1: 12x_1 + 4x_2 = 300 \Rightarrow \frac{x_1}{25} + \frac{x_2}{75} = 1;$$

$$L_2: 4x_1 + 4x_2 = 120 \Rightarrow \frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{30} = 1;$$

$$L_3: 3x_1 + 12x_2 = 252 \Rightarrow \frac{x_1}{84} + \frac{x_2}{21} = 1.$$

Побудуємо лінію рівня функції $Z = 0$ та перпендикулярний до неї вектор $\text{grad } Z = (20, 40)$. Пересуваючи лінію рівня за напрямком градієнта, визначмо, що лінія рівня має дотик до многокутника в точці перетину прямих L_2 та L_3 . Саме їй відповідає розв'язок $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, за якого функція Z набуває максимального значення.

Визначмо координати цієї вершини, розв'язуючи систему рівнянь, що відповідають лініям L_2 та L_3 :

$$\begin{cases} 4x_1^* + 4x_2^* = 120, \\ 3x_1^* + 12x_2^* = 252. \end{cases}$$

Для визначення розв'язку скористаймося формулами Крамера:

$$x_1^* = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2^* = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 12 = 36, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 120 & 4 \\ 252 & 12 \end{vmatrix} = 1\,440 - 1\,008 = 432,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 120 \\ 3 & 252 \end{vmatrix} = 1\,008 - 360 = 648.$$

Звідси

$$x_1^* = \frac{432}{36} = 12, \quad x_2^* = \frac{648}{36} = 18.$$

Оптимальний план виробництва становить $X^* = (12, 18)$.

За цим планом прибуток підприємства має найбільше з можливих значень:

$$Z_{\max} = Z(X^*) = 960.$$

Отже, найбільший прибуток, який дорівнює 960 у. о., цех має, якщо з наявної сировини буде випускати 12 од. продукції виду A та 18 од. продукції виду B .

20.3. Еластичність функції кількох змінних

Чутливість ринку до зміни будь-якого з показників відображають у такій його властивості, як *еластичність*, характеристикою якої є коефіцієнт еластичності за цим показником, тобто частинний коефіцієнт еластичності.

Частинним коефіцієнтом еластичності функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ за її аргументом називають границю відношення частинного приросту функції за цим аргументом до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, значення всіх інших аргументів функції залишаються сталими.

Еластичність E_x функції $z = f(x, y)$ за аргументом x у точці $M_0(x_0, y_0)$ визначають за таким співвідношенням:

$$E_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z}. \quad (20.7)$$

Для визначення *еластичності функції $z = f(x, y)$ за аргументом y у точці $M_0(x_0, y_0)$* застосовують аналогічне співвідношення:

$$E_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta y}{y} \right) = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z}. \quad (20.8)$$

Еластичність функції за деяким фактором наближено визначає відношення темпів приросту функції до темпів приросту цього фактора за незмінного значення всіх інших факторів.

Отже, еластичність показує, на скільки відсотків буде змінюватися вироблення продукції, якщо витрати якогось ресурсу зростуть на 1 % за незмінного обсягу іншого ресурсу.

Зауважмо, що коефіцієнт еластичності не має вимірності, він є безрозмірним числом.

Залежно від значення коефіцієнта еластичності для певного аргументу функції розподіляють на:

еластичні в точці, якщо модуль частинного коефіцієнта еластичності більший за одиницю;

нееластичні, якщо він є меншим за одиницю;

нейтральні, якщо він дорівнює одиниці.

Розгляньмо деякі приклади застосування еластичності функції в дослідженнях економічних процесів.

Однією з поширених областей застосування функції кількох змінних у таких дослідженнях є побудова *виробничої функції*, яка описує залежність обсягів продукції, що виробляють, від факторів виробництва. Найбільш відомою виробничою функцією є **функція Кобба – Дугласа**, аргументами якої є витрати праці L та капіталу K .



1928 року Чарльз Кобб та Пол Дуглас під час аналізу факторів виробництва в переробній промисловості США запропонували описувати вплив витрат праці та капіталу на виробництво продукції за допомогою виробничої функції, яка в подальшому дістала їхні імена. Функцію було побудовано за емпіричними даними, що не мали теоретичного обґрунтування. До речі, у ході визначення її параметрів автори застосували метод найменших квадратів.

Функцію Кобба – Дугласа записують у такому вигляді:

$$Q = A \cdot L^{\alpha} K^{\beta}, \quad (20.9)$$

де A – технологічний коефіцієнт, $A > 0$;

α та β – параметри моделі,

де $0 < \alpha < 1$ та $0 < \beta < 1$, водночас здебільшого $\alpha + \beta = 1$.

Функція Кобба – Дугласа визначає можливість взаємної заміни таких факторів виробництва, як праця і капітал.

Це можна проілюструвати на такому прикладі.



На рис. 20.5 зображено фрагмент поверхні, яка відображає залежність обсягу Q від праці L і капіталу K за даними табл. 20.6.

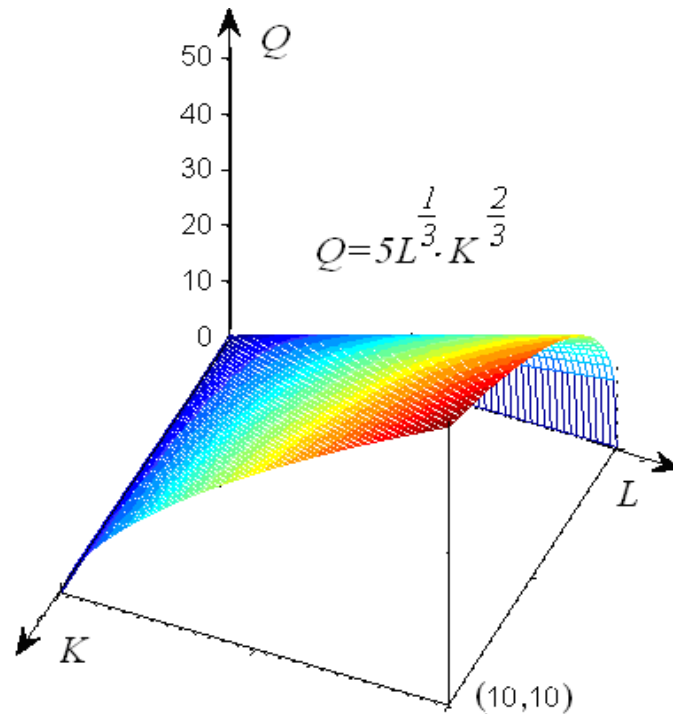


Рис. 20.5. Фрагмент поверхні $Q = A \cdot L^{\alpha} K^{\beta}$

Таблиця 20.6

Зв'язок між зміною ресурсів «праця» та «капітал»

Витрати капіталу (K)	Витрати праці (L)				
	1	2	3	4	5
1	10	30	45	55	60
2	30	50	65	75	80
3	45	65	80	90	95
4	55	75	90	100	105
5	60	80	95	105	110

Визначмо, який зміст мають параметри виробничої функції. Для обчислимо її коефіцієнти еластичності за кожним аргументом.

Наприклад, за фактором праці, маємо:

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{A \cdot K^\beta \cdot \alpha \cdot L^{\alpha-1} \cdot L}{A \cdot L^\alpha \cdot K^\beta} = \alpha,$$

тобто показник степеня аргументу L функції Кобба – Дугласа є *частинним коефіцієнтом еластичності за аргументом L* .

Аналогічно,

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{A \cdot L^\alpha \cdot \beta \cdot K^{\beta-1} \cdot K}{A \cdot L^\alpha \cdot K^\beta} = \beta,$$

тобто показник степеня аргументу K функції Кобба – Дугласа є *частинним коефіцієнтом еластичності за аргументом K* .

Якщо $\alpha + \beta = 1$, то ф-лу (20.9) можна перетворити так:

$$\frac{Q}{L} = A \frac{L^\alpha K^{1-\alpha}}{L} = A \frac{L^{\alpha-1} K^{1-\alpha}}{K^{\alpha-1}} = A \left(\frac{L}{K} \right)^{\alpha-1}. \quad (20.10)$$

Відношення $\frac{Q}{L}$ є середньою продуктивністю праці, а $\frac{L}{K}$ – середньою капіталоозброєністю праці. Відношення $\frac{Q}{K}$ є **середньою капіталовіддачею**, а обернений дріб $\frac{K}{Q}$ визначає середню капіталомісткість продукції, а $\frac{L}{Q}$ – її середню трудомісткість.

За виробничою функцією Кобба – Дугласа граничну продуктивність праці визначають за такою формулою:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L} (A \cdot L^\alpha \cdot K^\beta) = \alpha \cdot A \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^\beta = \alpha \frac{Q}{L}.$$

Отже, величина ефекту від кожної додаткової одиниці праці, що витрачають на виробництво продукції, є пропорційною середній продуктивності праці, але меншою за неї, оскільки $\alpha < 1$.



Нехай певне виробництво можна описати за допомогою функції Кобба – Дугласа. Відомо, що кожний робітник щомісячно виробляє продукції на 100 000 грн. Загальна кількість робітників становить 1 000 осіб. Основні фонди оцінюють у 64 млн грн. Відомо, що для збільшення продукції на 3 % треба або підвищити вартість фондів на 6 %, або збільшити кількість робітників на 9 %.

Визначмо для цього підприємства функцію Кобба – Дугласа за допомогою її коефіцієнтів еластичності.

За умовою $L = 1\,000$ осіб, $K = 64 \cdot 10^6$ грн. Відповідно, обсяг продукції у вартісному вигляді становить:

$$Q = L \cdot 100\,000 = 1\,000 \cdot 100\,000 = 10^8 \text{ (грн)}.$$

Функція Кобба – Дугласа у відносних приростах має такий вигляд:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \approx \alpha \frac{\Delta L}{L} + \beta \frac{\Delta K}{K}.$$

Визначмо частинні коефіцієнти еластичності.

Оскільки для збільшення випуску продукції на 3 % потрібно підвищити вартість фондів на 6 % (за незмінної кількості робітників), то

$$0,03 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0,06 \Rightarrow \beta = 1/2.$$

Відповідно, для збільшення випуску продукції на 3 % слід збільшити кількість робітників на 9 % (за незмінної вартості фондів),

$$0,03 = \alpha \cdot 0,09 + \beta \cdot 0 \Rightarrow \alpha = 1/3.$$

Тепер визначмо технологічний коефіцієнт:

$$A = \frac{Q}{L^{1/3} \cdot K^{1/2}} = \frac{10^8}{\sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt{64 \cdot 10^6}} = 1\,250.$$

Отже, виробнича функція Кобба – Дугласа для цього підприємства має такий вигляд:

$$Q = 1\,250 \cdot L^{1/3} \cdot K^{1/2}.$$



Ключові терміни

Емпіричні формули; апроксимація; метод найменших квадратів (МНК); похибки моделі; функція похибок; система нормальних рівнянь; лінеаризація моделі; математичне програмування; частинний коефіцієнт еластичності функції в точці; еластичність функції; виробнича функція; функція Кобба – Дугласа.



Запитання для самоперевірки

1. Що таке «емпіричні формули» та з якою метою їх застосовують?
2. У чому полягає сутність методу найменших квадратів?
3. Що описує система нормальних рівнянь?
4. Наведіть приклади задач, що належать до класу оптимізаційних.
5. Які значення аргументів цільової функції утворюють многокутник планів у задачах лінійного програмування?
6. Які лінії є лініями рівня функції Z ?
7. Який вектор показує напрямок зростання функції Z ?
8. Як визначають на многокутнику розв'язків задачі точку, що відповідає максимальному значенню функції Z ?
9. Наведіть схему графічного розв'язання задачі про оптимальне використання сировини.
10. Що таке «еластичність функції»?
11. Як визначають частинні коефіцієнти еластичності функції в точці?
12. Які функції називають виробничими?
13. Напишіть виробничу функцію Кобба – Дугласа й наведіть зміст її параметрів.



Тестові завдання до підрозділу 20

1. Що називають емпіричними формулами:
 - а) функціональні залежності, які побудовані за результатами проведеного експерименту;
 - б) результати проведеного експерименту;
 - в) параметри моделі;
 - г) похибку моделі?

2. У чому полягає базовий принцип МНК:

а) функцію вважають найкращою для апроксимації емпіричних даних, якщо сума квадратів відношень емпіричних значень залежної змінної y_i і значень, обчислених за допомогою функції $\tilde{y}$ за одного й того самого значення аргументу x_i , є мінімальною;

б) функцію вважають найкращою для апроксимації емпіричних даних, якщо сума квадратів різниць між емпіричними значеннями залежної змінної y_i і значеннями, обчисленими за допомогою функції $\tilde{y}$ за одного й того самого значення аргументу x_i , є максимальною;

в) функцію вважають найкращою для апроксимації емпіричних даних, якщо сума різниць між емпіричними значеннями залежної змінної y_i і значеннями, обчисленими за допомогою функції $\tilde{y}$ за одного й того самого значення аргументу x_i , є мінімальною;

г) функцію вважають найкращою для апроксимації емпіричних даних, якщо сума квадратів різниць між емпіричними значеннями залежної змінної y_i і значеннями, обчисленими за допомогою функції $\tilde{y}$ за одного й того самого значення аргументу x_i , є мінімальною?

3. Еластичність E_x функції $z = f(x, y)$ за аргументом x у точці $M_0(x_0, y_0)$ визначають за одним із таких співвідношень:

$$\text{а) } E_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta y}{y} \right) = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z};$$

$$\text{б) } E_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z};$$

$$\text{в) } E_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta x}{y} \right) = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{x}{z};$$

$$\text{г) } E_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{y} \right) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{z}{x}.$$

4. Якщо модуль частинного коефіцієнта еластичності функції є більшим за одиницю, то якою є така функція:

а) еластичною; б) нееластичною; в) нейтральною; г) зростаючою?

5. Еластичність показує, на скільки відсотків змінюють вироблення продукції, якщо:

- а) витрати якогось ресурсу зростуть на 1 % за незмінного обсягу іншого ресурсу;
- б) витрати змінюють на 1 %;
- в) витрати якогось ресурсу знижують на 1 % за незмінного обсягу іншого ресурсу;
- г) прибуток змінюють на 1 %.

6. Для виробничої функції $z = x^y$ – залежності витрат виробництва від двох видів продукції x та y еластичність за продукцією x у точці (1, 2) дорівнює:

- а) 2; б) 1; в) 0; г) $\ln 2$.

7. Для виробничої функції $z = x^y$ – залежності витрат виробництва від двох видів продукції x та y еластичність за продукцією y у точці (1, 2) дорівнює:

- а) 2; б) 1; в) 0; г) $\ln 2$.

8. Частинний коефіцієнт еластичності за аргументом L функції $Q = A \cdot L^\alpha K^\beta$ дорівнює:

- а) α ; б) β ; в) $\frac{Q}{L}$; г) $\frac{L}{K}$.

9. Частинний коефіцієнт еластичності за аргументом K функції $Q = A \cdot L^\alpha K^\beta$ дорівнює:

- а) α ; б) β ; в) $\frac{Q}{L}$; г) $\frac{L}{K}$.

10. За виробничою функцією Кобба – Дугласа $Q = A \cdot L^\alpha K^\beta$ гранична продуктивність праці L дорівнює:

- а) α ; б) β ; в) $\frac{Q}{L}$; г) $\frac{L}{K}$.

Література: [1 – 9; 11 – 16; 20 – 24].

3

Практичні завдання за розділом 5

Розв'язання задач економічного змісту

5.1. Визначте емпіричну формулу, що описує залежність між вартістю основних коштів і виробленням продукції на одного робітника, які задані таблицею:

Вартість основних коштів, млн грн	1	2	3	4	5	6
Вироблення продукції на одного робітника, тис. грн	3,5	6	5	7	8,5	9,5

Розв'язання. За x берімо вартість основних коштів, а за y – виробіток продукції на одного робітника. Перенесімо дані таблиці на графік (рис. 1).

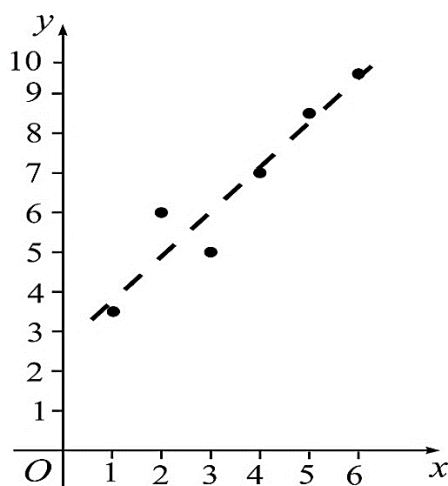


Рис. 1. Вихідні дані до задачі 5.1

Візуальний аналіз графіка показує, що точки розміщено вздовж прямої $\tilde{y} = a_0 + a_1x$.

Отже, параметри a_0 і a_1 визначмо із системи нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases}$$

Щоб скласти цю систему, визначмо такі величини:

$$\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n x_i^2, \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Результати розрахунків розмістимо в табл. 1.

Таблиця 1

Допоміжні розрахунки до задачі 5.1

№ з/п	x	y	x ²	xy	$\tilde{y}$
1	1	3,5	1	3,5	3,76
2	2	6,0	4	12,0	4,89
3	3	5,0	9	15,0	6,02
4	4	7,0	16	28,0	7,15
5	5	8,5	25	42,5	8,28
6	6	9,5	36	57,0	9,41
Сума	21	39,5	91	158,0	39,51

Використовуючи суми (див. останній рядок табл. 1), запишемо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} 6a_0 + 21a_1 = 39,5, \\ 21a_0 + 91a_1 = 158. \end{cases}$$

Обидві частини першого рівняння поділімо на 6, а другого – на 21.

У результаті маємо таку систему:

$$\begin{cases} a_0 + 3,5a_1 = 6,583, \\ a_0 + 4,333a_1 = 7,524. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, маємо: $a_0 = 2,63$; $a_1 = 1,13$.

Отже, емпірична формула має такий вигляд:

$$\tilde{y} = 1,13x + 2,63.$$

Порівняймо значення y_i та $\tilde{y}_i$, для чого виконаймо розрахунки, підставляючи у визначене рівняння значення x_i . Ці розрахунки запишуймо в 6-й стовпець табл. 1.

Отже, значення y_i і $\tilde{y}_i$ не є дуже різними. Зазначмо також, що сума, обчислена за рівнянням, та емпірична (див. 3-й стовпець табл. 1) із точністю до десятих є збіжними (39,5).

На графіку (див. рис. 1) зображено лінію, рівнянням якої є $\tilde{y} = 1,13x + 2,63$. Видно, що емпіричні точки є розміщеними поблизу побудованої прямої, тобто емпірична формула відображає розглянуту залежність. До речі, із цього рівняння випливає, що вироблення продукції на одного робітника зросте на 1,13 тис. грн, якщо вартість основних коштів підвищити на 1 млн грн.

5.2. Визначте емпіричну формулу, що описує залежність між вартістю основних коштів і собівартістю одиниці продукції, які задані таблицею:

Вартість основних коштів, у. о.	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
Собівартість одиниці продукції, у. о.	16,0	11,0	12,0	12,0	9,0	10,0

Розв'язання. За x берімо вартість основних коштів, а за y – собівартість одиниці виробу. Для того щоб підібрати емпіричну формулу, перенесімо дані таблиці на графік (рис. 2).

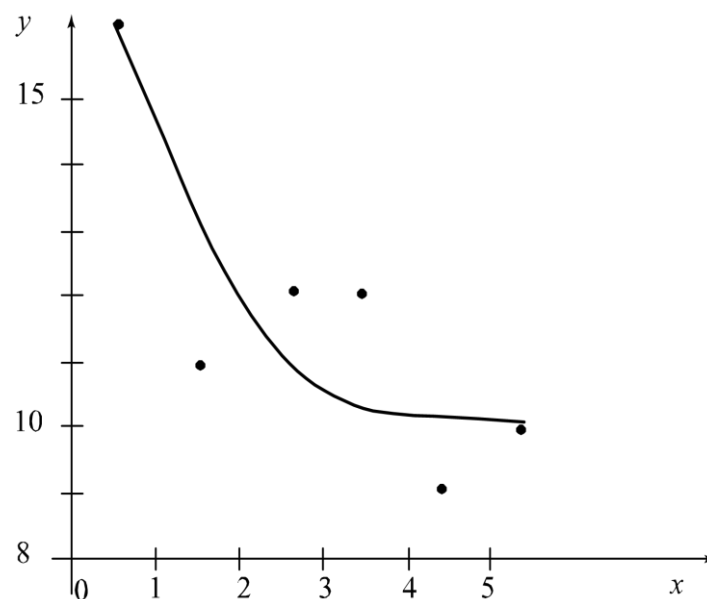


Рис. 2. Графік вихідних даних та теоретичної функції

За змістом задачі та виглядом графіка можна зробити висновок, що «найкращою» лінією для визначення залежності є гіпербола. Тому емпіричну формулу маємо визначати у такому вигляді:

$$\tilde{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}.$$

Спочатку лінеаризуємо цю залежність.

Позначмо $\frac{1}{x} = x'$, тоді відносно нової змінної лінійний зв'язок маємо:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x'.$$

Параметри a_0 і a_1 цієї залежності визначмо за методом найменших квадратів як розв'язок системи нормальних рівнянь.

Результати допоміжних розрахунків подано у вигляді табл. 2.

Таблиця 2

Допоміжні розрахунки до задачі 5.2

№ з/п	x	y	$\frac{1}{x}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\tilde{y}$
1	0,5	16	2	32	4	15,95
2	1,5	11	0,667	7,333	0,445	11,79
3	2,5	12	0,400	4,800	0,160	10,96
4	3,5	12	0,286	3,429	0,082	10,60
5	4,5	9	0,222	2,000	0,049	10,40
6	5,5	10	0,182	1,818	0,033	10,28
Сума	18,0	70	3,757	51,380	4,769	69,98

Використовуючи суми останнього рядка табл. 2, маємо:

$$\begin{cases} 6a_0 + 3,757a_1 = 70, \\ 3,757a_0 + 4,769a_1 = 51,380. \end{cases}$$

Із цієї системи маємо:

$$a_0 = 9,71; a_1 = 3,12.$$

Отже, емпірична формула щодо змінної x' має такий вигляд:

$$\tilde{y} = 9,71 + 3,12x'.$$

Далі повертаймося до вихідної змінної x :

$$\tilde{y} = 9,71 + \frac{3,12}{x}.$$

Для оцінювання адекватності емпіричної формули обчислимо $\tilde{y}_i$ для кожного значення x_i і порівняймо з y_i .

Розрахунки записуймо в 7-му стовпці табл. 2. За визначеною формулою побудуймо графік функції (див. рис. 2). Видно, що емпіричні точки досить близько розташовані до побудованої кривої.

5.3. Залежність між вартістю основних коштів і місячним випуском продукції задано таблицею:

Вартість основних коштів, у. о.	1	2	3	4	5
Виготовлено продукції за місяць, у. о.	2	5	9	10	11

Визначте емпіричну формулу, що описує залежність між вартістю основних коштів (x) і щомісячним випуском продукції (y) у припущенні, що ця залежність є параболічною.

Розв'язання. Емпіричну формулу будемо визначати в такому вигляді:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Застосовуючи метод найменших квадратів, параметри a_0 , a_1 , a_2 визначимо із системи нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} a_0n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Для того щоб скласти систему нормальних рівнянь, обчислимо такі величини: $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum_{i=1}^n x_i^3$, $\sum_{i=1}^n x_i^4$, $\sum_{i=1}^n y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$.

Результати всіх допоміжних обчислень наведено в табл. 3.

Таблиця 3

Допоміжні розрахунки до задачі 5.3

№ з/п	x	y	xy	x ²	x ² y	x ³	x ⁴	$\tilde{y}$
1	1	2	2	1	2	1	1	1,8
2	2	5	10	4	20	8	16	5,6
3	3	9	27	9	81	27	81	8,4
4	4	10	40	16	160	64	256	10,2
5	5	11	55	25	275	125	625	11,0
Суми	15	37	134	55	538	225	979	37,0

Система нормальних рівнянь набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} 5a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 37, \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 134, \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 538. \end{cases}$$

Цю систему лінійних рівнянь можна розв'язати, наприклад, за методом Жордана – Гаусса. Для цього зручно виконувати перетворення не із самими рівняннями, а з розширеною матрицею системи, а саме:

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 & 55 & | & 37 \\ 15 & 55 & 225 & | & 134 \\ 55 & 225 & 979 & | & 538 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 & | & 7,4 \\ 15 & 55 & 225 & | & 134 \\ 55 & 225 & 979 & | & 538 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 & | & 7,4 \\ 0 & 10 & 60 & | & 23 \\ 0 & 60 & 374 & | & 131 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 & | & 7,4 \\ 0 & 1 & 6 & | & 2,3 \\ 0 & 60 & 374 & | & 131 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & | & 0,5 \\ 0 & 1 & 6 & | & 2,3 \\ 0 & 0 & 14 & | & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & | & 0,5 \\ 0 & 1 & 6 & | & 2,3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -0,5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5,3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -0,5 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язок системи є таким: $a_0 = -3$, $a_1 = 5,3$; $a_2 = -0,5$, а емпірична формула має такий вигляд:

$$\tilde{y} = -3 + 5,3x - 0,5x^2.$$

Обчислимо значення $\tilde{y}$ для всіх x_i і занесімо результати в останній стовець табл. 3. Порівняймо $\tilde{y}_i$ і y_i та визначмо, що відхилення є невеликими. Це свідчить про адекватність емпіричної формули.

5.4. Нехай випуск деякого товару характеризують виробничою функцією:

$$z(x, y) = 3x^2 - 2xy + 4y^2 + 10x + 20y,$$

де x та y – фактори виробництва.

Визначте закон зміни виробничої функції, залежно від кожного фактора. Обчисліть еластичність $E_x(z)$ і $E_y(z)$, якщо $x = y = 1$.

Розв'язання. Швидкість будь-якого процесу характеризує похідна функції. Щоб установити змінювання виробничої функції, залежно від фактора x , визначмо від функції $z(x, y)$ частинну похідну за змінною x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 2y + 10.$$

Для встановлення змінювання виробничої функції, залежно від фактора y , визначмо від функції $z(x, y)$ частинну похідну за змінною y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 8y + 20.$$

Обчислимо еластичності $E_x(z)$ і $E_y(z)$:

$$E_x(z) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z}, \quad E_y(z) = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z}.$$

Тоді

$$E_x(z) = (6x - 2y + 10) \cdot \frac{x}{3x^2 - 2xy + 4y^2 + 10x + 20y},$$

$$E_y(z) = (-2x + 8y + 20) \cdot \frac{y}{3x^2 - 2xy + 4y^2 + 10x + 20y}.$$

Якщо $x=1$, $y=1$, то $E_x(z)=0,4$, $E_y(z)=0,74$.

Відповідь: зі зростанням фактора x на 1 % (за умови що y не змінюється) функція зростає на 0,4 %. Зі зростанням фактора y на 1 % (за умови що x не змінює значення) виробнича функція зростає на 0,74 %.

5.5. Фірма виробляє два види продукції, які продає за цінами 500 та 600 грн за одиницю. Обсяги випуску продукції становлять x_1 і x_2 , відповідно. Функція витрат має такий вигляд:

$$K(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2.$$

Визначте план випуску продукції, за яким прибуток буде максимальним. Обчисліть цей прибуток.

Розв'язання. Прибуток від продажу продукції обох видів буде становити $C = 500x_1 + 600x_2$. З урахуванням функції витрат фірма має такий прибуток:

$$P = C - K = 500x_1 + 600x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2.$$

Проведімо дослідження цієї функції на екстремум. Визначмо стаціонарні точки, для чого обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 500 - 2x_1 - 2x_2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 600 - 4x_2 - 2x_1.$$

За необхідною умовою існування екстремуму: $\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0,$

тобто:

$$\begin{cases} 500 - 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ 600 - 2x_1 - 4x_2 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 250, \\ x_1 + 2x_2 = 300, \end{cases}$$

звідси $x_1 = 200, \quad x_2 = 50$.

Перевірмо, що за такого обсягу продукції прибуток буде максимальним. Для цього побудуємо матрицю Гессе (матрицю похідних 2-го порядку) й обчислимо її визначник у точці $(200, 50)$.

$$A = \left. \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} \right|_{(200, 50)} = -2, \quad C = \left. \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} \right|_{(200, 50)} = -4, \quad B = \left. \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{(200, 50)} = -2.$$

Тоді $AC - B^2 = 8 - 4 > 0$, а $A < 0$, тому в разі $x_1 = 200, \quad x_2 = 50$ фірма має максимальний прибуток, який становить:

$$P_{\max} = 500 \cdot 200 + 600 \cdot 50 - 200^2 - 2 \cdot 50^2 - 2 \cdot 200 \cdot 50 = 65\,000 \text{ (грн)}.$$

Відповідь: прибуток у розмірі 65 000 грн фірма має, якщо буде виробляти 200 од. продукції за ціною 500 грн і 50 од. продукції за ціною 600 грн.

5.6. Фірма реалізує частину товару на внутрішньому ринку, де ціна одиниці товару становить p од. і пов'язана з обсягом товару x_1 залежністю $p + 2x_1 = 400$, а іншу частину товару поставляє на експорт, де ціна товару p і його обсяг x_2 пов'язано залежністю $3p + 2x_2 = 540$. Сумарні витрати дорівнюють $Q = 10\,000 + 40x_1 + 20x_2$.

Визначте, який обсяг товару необхідно реалізувати на внутрішньому ринку, а який постачати на експорт, щоб фірма мала максимальний прибуток.

Розв'язання. За рівнянням $p + 2x_1 = 400$.

Визначмо ціну реалізації одиниці товару на внутрішньому ринку:

$$p = 400 - 2x_1,$$

а з рівняння $3p + 2x_2 = 540$ – ціну реалізації одиниці товару, який поставляють на експорт:

$$p = \frac{1}{3}(540 - 2x_2).$$

Прибуток від реалізації товарів становить:

$$C = (400 - 2x_1)x_1 + \frac{1}{3}(540 - 2x_2)x_2.$$

З урахуванням витрат фірма має такий прибуток:

$$\Pi = (400 - 2x_1) \cdot x_1 + \frac{1}{3}(540 - 2x_2) \cdot x_2 - 10\,000 - 40x_1 - 20x_2$$

або

$$\Pi = -2x_1^2 - \frac{2}{3}x_2^2 + 360x_1 + 160x_2 - 10\,000.$$

Визначмо частинні похідні 1-го порядку функції Π за кожною змінною:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = -4x_1 + 360, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -\frac{4}{3}x_2 + 160.$$

За необхідною умовою існування екстремуму:

$$\begin{cases} -4x_1 + 360 = 0, \\ -\frac{4}{3}x_2 + 160 = 0, \end{cases}$$

звідси $x_1 = 90$ од., $x_2 = 120$ од.

За достатньою умовою екстремуму перевіримо, що за $x_1 = 90$, $x_2 = 120$ фірма буде мати максимальний прибуток.

Визначмо другі частинні похідні функції Π в точці $(90, 120)$:

$$A = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^2} \Big|_{(90,120)} = -4, \quad C = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2} \Big|_{(90,120)} = -\frac{4}{3}, \quad B = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{(90,120)} = 0.$$

Оскільки $AC - B^2 = -4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} > 0$, то в стаціонарній точці $(90, 120)$

функція має екстремум. Крім того, $A = -4 < 0$, а це свідчить про те, що точка $(90, 120)$ є точкою локального максимуму.

Відповідь: фірма буде мати максимальний прибуток, якщо на внутрішньому ринку буде реалізовувати 90 од., а на зовнішньому – 120 од. товару, водночас $\Pi_{\max} = 15\,800$ у. о.

5.7. Вартість будівництва 1 м^2 фасаду дорівнює a грн, інших стін – b грн, даху – c грн.

Визначте, за яких розмірів будинку вартість його будівництва (з огляду на верхнє покриття) буде найнижчою за заданої кубатури, якщо вартість будівництва описують такою формулою:

$$S = a \frac{v}{y} + b \frac{v}{y} + 2b \frac{v}{x} + cx,$$

де $v = xyz$ – об'єм будинку (м^3);

y – ширина будинку (м);

x – довжина фасаду (м);

z – висота будинку (м).

Розв'язання. Визначмо частинні похідні 1-го порядку від функції вартості будівництва:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{2bv}{x^2} + cy, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{av}{y^2} - \frac{bv}{y^2} + cx.$$

За необхідною умовою екстремуму, складемо систему рівнянь відносно координат стаціонарної точки:

$$\begin{cases} -\frac{2bv}{x^2} + cy = 0, \\ -\frac{av}{y^2} - \frac{bv}{y^2} + cx = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2bv}{x^2} = cy, \\ \frac{v(a+b)}{y^2} = cx. \end{cases}$$

Із другого рівняння визначмо x і підставмо його в перше:

$$\begin{cases} \frac{2bv y^4 c^2}{v^2 (a+b)^2} = cy, \\ x = \frac{v(a+b)}{cy^2}. \end{cases}$$

Тепер із першого рівняння останньої системи маємо:

$$y = \sqrt[3]{\frac{v(a+b)^2}{2bc}}.$$

Тоді

$$x = \frac{v(a+b)}{c} \sqrt[3]{\left(\frac{2bc}{v(a+b)^2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4vb^2}{c(a+b)}};$$

$$z = \frac{v}{xy} = \frac{v}{\sqrt[3]{\frac{4vb^2}{c(a+b)}} \sqrt[3]{\frac{v(a+b)^2}{2bc}}} = \sqrt[3]{\frac{c^2 v}{2b(a+b)}}.$$

Перевірмо, чи має функція S мінімум за цих значень x , y і z .

Визначмо частинні похідні 2-го порядку цієї функції:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4bv}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{2av}{y^3} + \frac{2bv}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = c.$$

Для перевірки достатньої умови екстремуму обчислимо $AC - B^2$, де A , C , B – значення частинних похідних $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}$ у стаціонарній точці:

$$A = \frac{4bvc(a+b)}{4vb^2} = \frac{c(a+b)}{b}, \quad C = \frac{2v(a+b)2bc}{v(a+b)^2} = \frac{4bc}{a+b}, \quad B = c.$$

Отже, $AC - B^2 = \frac{c(a+b)}{b} \cdot \frac{4bc}{a+b} - c^2 = 4c^2 - c^2 = 3c^2 > 0$, тобто екстремум

є. Оскільки $A > 0$, то функція S у стаціонарній точці має мінімум.

Відповідь: вартість будівництва буде мінімальною за таких розмірів будинку:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4vb^2}{c(a+b)}} \text{ (м)}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{v(a+b)^2}{2bc}} \text{ (м)}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{c^2v}{2b(a+b)}} \text{ (м)}.$$

5.8. На підприємстві використовують два види ресурсів у кількостях x_1 і x_2 одиниць. Вартість одиниці кожного з ресурсів дорівнює 1 і 2 грн. Для придбання ресурсів виділено 10 000 грн.

Визначте оптимальний розподіл ресурсів, який забезпечує підприємству максимальний прибуток, якщо відомо, що сумарний прибуток z , залежно від витрат ресурсів, описують такою функцією:

$$z = 2x_1 + 10x_2 - x_2^2.$$

Розв'язання. Визначмо такі значення x_1 і x_2 , які задовольняють умову $x_1 + 2x_2 = 10\,000$ і за яких функція $z = 2x_1 + 10x_2 - x_2^2$ має максимум.

Розв'яжімо рівняння $x_1 + 2x_2 = 10\,000$ відносно x_1 і підставмо обчислений вираз у функцію z .

Отже, $x_1 = 10\,000 - 2x_2$,

тоді

$$z(x_2) = 20\,000 + 6x_2 - x_2^2.$$

Це функція однієї змінної.

Визначмо її похідну:

$$z'(x_2) = 6 - 2x_2.$$

За необхідною умовою екстремуму, маємо:

$$6 - 2x_2 = 0,$$

звідси $x_2 = 3$, тоді $x_1 = 9\,994$.

Перевірмо, чи ця стаціонарна точка є точкою максимуму функції. Для цього визначмо в ній знак другої похідної: $z''(x_2) = -2 < 0$.

Отже, дійсно, у стаціонарній точці функція z має максимальне значення.

Відповідь: на виділені кошти потрібно придбати 9 994 од. першого ресурсу і 3 од. другого. Прибуток буде дорівнювати $z_{\max}(9\,994, 3) = 20\,009,0$ (грн).

5.9. Функція загальних витрат підприємства має такий вигляд:

$$Q = 0,4x^2 + 0,5xy + 0,6y^2 + 500x + 400y + 1\,000,$$

де x і y – кількості одиниць продукції видів A і B , відповідно.

Загальний обсяг виготовленої продукції має становити 1 000 од.

Визначте обсяг продукції видів A і B , яку потрібно виготовити, щоб витрати на їхнє виготовлення були мінімальними.

Розв'язання. Визначмо такі значення x і y , за яких така функція:

$$Q = 0,4x^2 + 0,5xy + 0,6y^2 + 500x + 400y + 1\,000$$

має мінімум за умови $\varphi(x, y) = x + y - 1\,000 = 0$.

Для дослідження цієї функції на умовний екстремум складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 0,4x^2 + 0,5xy + 0,6y^2 + 500x + 400y + 1\,000 + \lambda(x + y - 1\,000).$$

Визначмо її частинні похідні 1-го порядку:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0,8x + 0,5y + 500 + \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0,5x + 1,2y + 400 + \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1000.$$

За необхідною умовою екстремуму, маємо:

$$\begin{cases} 0,8x + 0,5y + 500 + \lambda = 0, \\ 0,5x + 1,2y + 400 + \lambda = 0, \\ x + y - 1000 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,3x - 0,7y + 100 = 0, \\ x + y - 1000 = 0, \\ 0,5x + 1,2y + 400 + \lambda = 0. \end{cases}$$

Звідси: $x = 600$, $y = 400$, $\lambda = -1180$.

Отже, визначено стаціонарну точку функції Лагранжа.

Для перевірки достатньої умови екстремуму визначмо частинні похідні 2-го порядку:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0,8; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 1,2; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0,5.$$

Складаймо другий диференціал функції Лагранжа за фіксованого λ :

$$d^2 L = 0,8dx^2 + 0,5dxdy + 1,2dy^2.$$

З урахуванням умови $\varphi(x, y) = x + y - 1000 = 0$: $dy = -dx$.

Отже, $d^2 L = 1,5dx^2$.

Оскільки $d^2 L > 0$, то умовний мінімум $Q_{\min}(600, 400) = 821\,000$ (у. о.).

Відповідь: мінімальні витрати будуть становити 821 000 (у. о.), якщо підприємство виготовить 600 од. продукції A і 400 од. продукції B .

5.10. Річні витрати підприємства (амортизація, ремонт, витрати на відновлення тощо), залежно від обсягу виготовлення двох видів продукції x_1 і x_2 , описують такою функцією:

$$z = a + b(x_1 + x_2) + \frac{c}{x_1 + x_2} + \frac{c_1}{x_1} + \frac{c_2}{x_2},$$

де a, b, c, c_1, c_2 – це додатні сталі.

Визначте умови господарювання підприємства.

Розв'язання. Досліджуймо на екстремум функцію $z = f(x_1, x_2)$.

Визначмо частинні похідні 1-го порядку цієї функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = b - \frac{c}{(x_1 + x_2)^2} - \frac{c_1}{x_1^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = b - \frac{c}{(x_1 + x_2)^2} - \frac{c_2}{x_2^2}.$$

За необхідною умовою екстремуму, складемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} b - \frac{c}{(x_1 + x_2)^2} - \frac{c_1}{x_1^2} = 0, \\ b - \frac{c}{(x_1 + x_2)^2} - \frac{c_2}{x_2^2} = 0. \end{cases}$$

Віднімаймо з першого рівняння друге:

$$\frac{c_1}{x_1^2} = \frac{c_2}{x_2^2},$$

звідси $x_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} x_2$.

Підставляймо x_1 у перше рівняння системи, у результаті чого маємо:

$$\begin{aligned} b - \frac{c}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \cdot x_2 + x_2\right)^2} - \frac{c_1}{c_2 x_2^2} = 0 &\Rightarrow b - \frac{c}{x_2^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} + 1\right)^2} - \frac{c_2}{x_2^2} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{b(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})^2 x_2^2 - c c_2 - c_2(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})^2}{x_2^2 (\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})^2} = 0. \end{aligned}$$

Звідси, обсяг продукції II виду дорівнює:

$$x_2 = \sqrt{\frac{c_2}{b} \left(1 + \frac{c}{(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})^2} \right)}.$$

Тепер у співвідношення $x_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} x_2$ підставляймо x_2 і тоді обсяг продукції I виду:

$$x_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \sqrt{\frac{c_2}{b} \left(1 + \frac{c}{(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})^2} \right)} = \sqrt{\frac{c_1}{b} \left(1 + \frac{c}{(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})^2} \right)}.$$

Перевірмо, чи має функція мінімум за цих значень x_1 і x_2 .

Визначмо частинні похідні 2-го порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{2c}{(x_1 + x_2)^3} + \frac{2c_1}{x_1^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{2c}{(x_1 + x_2)^3} + \frac{2c_2}{x_2^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{2c}{(x_1 + x_2)^3}.$$

Визначмо знак $AC - B^2$,

де A , C , B – значення частинних похідних 2-го порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$

у стаціонарній точці:

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= \left(\frac{2c}{(x_1 + x_2)^3} + \frac{2c_1}{x_1^3} \right) \left(\frac{2c}{(x_1 + x_2)^3} + \frac{2c_2}{x_2^3} \right) - \frac{4c^2}{(x_1 + x_2)^6} = \\ &= \frac{4c^2}{(x_1 + x_2)^6} + \frac{4cc_2}{x_2^3(x_1 + x_2)^3} + \frac{4cc_1}{x_1^3(x_1 + x_2)^3} + \frac{4c_1c_2}{x_1^3x_2^3} - \frac{4c^2}{(x_1 + x_2)^6} = \\ &= \frac{4cc_2}{x_2^3(x_1 + x_2)^3} + \frac{4cc_1}{x_1^3(x_1 + x_2)^3} + \frac{4c_1c_2}{x_1^3x_2^3}. \end{aligned}$$

Кожен доданок є додатним, тому $AC - B^2 > 0$, а це означає, що екстремум є. Оскільки $A > 0$, то функція $f(x_1, x_2)$ у стаціонарній точці має мінімум.

Відповідь: витрати підприємства будуть мінімальними, якщо воно буде виробляти продукцію в таких обсягах:

$$x_1 = \sqrt{\frac{c_1}{b} \left(1 + \frac{c}{(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})^2} \right)}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{c_2}{b} \left(1 + \frac{c}{(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})^2} \right)}.$$

Завдання для самостійного розв'язання

Визначте області визначення функцій:

$$5.11. \quad z = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} - 1. \quad 5.12. \quad z = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{4 - y^2}.$$

$$5.13. \quad z = \log_{\sqrt{3}}(y^2 - 2x + 6). \quad 5.14. \quad z = \arcsin(x + y - 1).$$

$$5.15. \quad z = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\log_2(y + x)}. \quad 5.16. \quad z = \sqrt{x \sin y}.$$

Визначте частинні похідні 1-го порядку заданих функцій:

$$5.17. \quad z = x^2 y + 3y^2 + 5x - \sqrt{2}. \quad 5.18. \quad z = e^{5x + 3x^3 y^2}.$$

$$5.19. \quad z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right). \quad 5.20. \quad z = x^{\sin y}.$$

$$5.21. \quad z = (x^2 + 2x)^{2y-3}. \quad 5.22. \quad z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$5.23. \quad z = \frac{\cos(2y^3 - 3)}{x}. \quad 5.24. \quad z = 3x^2 y e^{-xy}.$$

5.25. Доведіть, що функція $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ задовольняє таку умову:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

5.26. Доведіть, що функція $z = \sqrt{x} \cos \frac{x}{y}$ задовольняє таку умову:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}.$$

Визначте повні диференціали функцій у заданих точках:

5.27. $z = x^y + y^x$, $M(1, 1)$. 5.28. $z = \ln(x^3 + y^3 - 3xy)$, $M(2, 2)$.

5.29. Визначте наближене значення $1,03^2 \cdot 0,98^4$, застосовуючи значення функції $z = x^2 y^4$, якщо $x=1$, $y=1$.

5.30. Визначте наближене значення $\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}$, застосовуючи значення функції $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$, якщо $x=1$, $y=0$.

5.31. Визначте наближене значення $\sqrt{1,04^{1,09} + \ln 1,2}$, застосовуючи значення функції $u = \sqrt{x^y + \ln z}$, якщо $x=1$, $y=2$, $z=1$.

Визначте частинні похідні 2-го порядку заданих функцій:

5.32. $z = \frac{x}{y^2}$. 5.33. $z = \ln(x + y^2)$.

5.34. Для функції $z = e^{xy^2}$ визначте $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

5.35. Доведіть, що функція $z = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ за будь-яких значень аргументів

задовольняє умову $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}$.

5.36. Визначте похідну функції $z = x^2 y^2 + 2x - 2y$ у точці $M(2, 2)$ за напрямком вектора, що утворює з осями координат кути $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

5.37. Визначте похідну функції $z = \ln(e^x + e^y)$ у точці $M(0, 0)$ за напрямком вектора $\bar{s} = \bar{i} + \bar{j}$.

5.38. Визначте похідну функції $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ у точці $M(1, 2, 1)$ за напрямком вектора $\bar{s} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$.

5.39. Визначте градієнт функції $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ у точці $M(3, 4)$.

5.40. Визначте похідну функції $z = \ln(2x^2 + 3y^2)$ у точці $M(1, -1)$ за напрямком градієнта функції z .

5.41. Визначте градієнт функції $f = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z$ у точці $M(\pi/4, \pi/2, \pi/3)$.

Визначте екстремуми функцій:

5.42. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$. 5.43. $z = x^3 + y^3 - 9xy$.

5.44. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

5.45. $z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

5.46. $z = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 5x - y + 2$.

5.47. Визначте екстремум функції $z = xy^2$ за умови $x + 2y - 1 = 0$.

5.48. Визначте екстремум функції $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ за умови $x + y = 2$.

5.49. Визначте найбільше і найменше значення функції $z = xy(4 - x - y)$ в замкненій області, обмеженій лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 8$.

5.50. На області, яка визначена такими нерівностями: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 3 - x$, визначте найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$.

5.51. Визначте найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 4y^2$ на області, де $x^2 + y^2 \leq 1$.

5.52. Нехай $z(x, y)$ – виробнича функція, де x – витрати живої праці, y – витрати уречевленої праці.

Визначте закон зміни виробничої функції залежно від кожного фактора. Обчисліть еластичність функції за кожним фактором, якщо $x = 1$, $y = 1$. Зробіть висновок.

а) $z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3$; б) $z = e^{x^2y}$; в) $z = \ln(2x^3 + 3y^2)$.

5.53. Задана виробнича функція, що залежить від чотирьох факторів:
 $z = 0,76x_1^{0,25}x_2^{0,37}x_3^{0,45}x_4^{-0,15}$.

Здійсніть аналіз впливу відносних приростів факторів на темпи зміни виробничої функції.

5.54. Для розширення виробництва підприємець виділяє 150 000 грн. Відомо, що якщо на придбання обладнання витратити x тис. грн, а на зарплату нових робітників – y тис. грн, то приріст обсягу продукції буде становити $Q = 0,001x^{0,6}y^{0,4}$.

Як треба розподілити виділені кошти, щоб приріст обсягу продукції був максимальним?

5.55. Підприємство виготовляє два види виробів в обсягах x_1 і x_2 , відповідно. Функція витрат виробництва має такий вигляд: $C = 5x_1 + 2x_1x_2$. Залежність ціни одиниці виробів I виду від обсягів виробів обох видів описують такою функцією: $P_1 = 20 - x_1 + 2x_2$, виробів II виду – $P_2 = 10 + x_1 - 2x_2$.

Визначте максимальний прибуток підприємства за умови, що загальний обсяг виготовлених виробів становить 15 од.

Визначте емпіричну формулу для аналітичного опису залежності між двома величинами за відомими табличними даними. Для обчислення параметрів застосуйте метод найменших квадратів.

5.56.

а)

X	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Y	2,15	2,30	2,60	2,80	2,50

б)

X	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
Y	4,5	7,0	8,0	7,5	9,0

5.57.

X	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Y	45,2	49,9	54,8	59,8	65,1	70,2

5.58.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	157,0	168,2	181,5	190,9	201,1	212,3	221,8	231,9	245,1

5.59.

Обсяг продукції, у. о.	1	2	3	4	5	6
Собівартість одиниці продукції, у. о.	7,70	7,10	6,90	6,80	6,74	6,70

5.60.

X	10	20	30	40	50
Y	14,0	12,0	11,3	11,0	10,8



Відповіді

$$5.11. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 \geq 0. \quad 5.12. \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, \\ 4 - y^2 \geq 0. \end{cases} \quad 5.13. y^2 - 2x + 6 > 0.$$

$$5.14. 0 \leq x + y - 1 \leq 2. \quad 5.15. \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ y + x > 0, \\ y + x \neq 1. \end{cases} \quad 5.16. x \sin y \geq 0.$$

$$5.17. z'_x = 2xy + 5, \quad z'_y = x^2 + 6y.$$

$$5.18. z'_x = e^{5x+3x^3y^2} (5 + 9x^2y^2), \quad z'_y = e^{5x+3x^3y^2} 6x^3y.$$

$$5.19. z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$5.20. z'_x = \sin y \cdot x^{\sin y - 1}, \quad z'_y = x^{\sin y} \cdot \ln x \cdot \cos y.$$

$$5.21. z'_x = (2y - 3)(x^2 + 2x)^{2y-4} (2x + 2), \quad z'_y = 2(x^2 + 2x)^{2y-3} \ln(x^2 + 2x).$$

$$5.22. z'_x = \frac{-2y}{x^2 \sin \frac{2y}{x}}, \quad z'_y = \frac{2}{x \sin \frac{2y}{x}}.$$

$$5.23. z'_x = \frac{-\cos(2y^3 - 3)}{x^2}, \quad z'_y = \frac{-6y^2 \sin(2y^3 - 3)}{x}.$$

$$5.24. z'_x = (6xy - 3x^2y^2) \cdot e^{-xy}, \quad z'_y = (3x^2 - 3x^3y) \cdot e^{-xy}.$$

$$5.27. dz = dx + dy. \quad 5.28. dz = \frac{3}{2}(dx + dy). \quad 5.29. 0,979. \quad 5.30. 1,014.$$

$$5.31. 1,107. \quad 5.32. z''_{xx} = 0, \quad z''_{xy} = -\frac{2}{y^3}, \quad z''_{yy} = \frac{6x}{y^4}.$$

$$5.33. z''_{xx} = \frac{-1}{(x+y^2)^2}, z''_{xy} = \frac{-2y}{(x+y^2)^2}, z''_{yy} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}.$$

$$5.34. \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2y^3(2+xy^2) \cdot e^{xy^2}. \quad 5.36. 9 + 7\sqrt{3}. \quad 5.37. \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad 5.38. \frac{7}{9}.$$

$$5.39. \operatorname{grad} z = 2\bar{i} - \frac{9}{4}\bar{j}. \quad 5.40. \frac{2\sqrt{13}}{5}. \quad 5.41. \operatorname{grad} f = \bar{i} - \frac{1}{3}\bar{k}.$$

$$5.42. z_{\min}(1, 2) = -7. \quad 5.43. z_{\min}(3, 3) = -27. \quad 5.44. z_{\min}(-2, 0) = -2/e.$$

$$5.45. z_{\min}(0, 0) = 4. \quad 5.46. \text{Екстремуму немає.}$$

$$5.47. z_{\min}(1, 0) = 0, z_{\max}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}. \quad 5.48. z_{\min}(1, 1) = 2.$$

$$5.49. z_{\text{найм.}} = -64, z_{\text{найб.}} = \frac{64}{27}. \quad 5.50. z_{\text{найм.}} = -10, z_{\text{найб.}} = -1.$$

$$5.51. z_{\text{найм.}} = 4, z_{\text{найб.}} = 0.$$

$$5.52. \text{ а) } E_x(z) = 1,67; E_y(z) = 1,33; \text{ б) } E_x(z) = 2; E_y(z) = 1; \\ \text{ в) } E_x(z) = 0,75; E_y(z) = 0,75.$$

$$5.54. x = 90 \text{ тис. грн, } y = 60 \text{ тис. грн.} \quad 5.55. \Pi(10, 5) = 100 \text{ у. о.}$$

$$5.56. \text{ а) } \tilde{y} = 0,24x + 1,99; \text{ б) } \tilde{y} = 0,475x + 4,35. \quad 5.57. \tilde{y} = 10,02x + 39,9.$$

$$5.58. \tilde{x} = 10,76t + 147,30. \quad 5.59. \tilde{y} = \frac{1,23}{x} + 6,49. \quad 5.60. \tilde{y} = \frac{40,91}{x} + 9,95.$$

Відповіді до тестових завдань

Номери підрозділів	Номери тестових завдань									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	в	а	б	а	б	а	в	а	б	а
19	а	а	в	б	а	а	б	в	а	а
20	а	г	б	а	а	а	в	а	б	в

Розділ 6. Інтегральне числення функцій однієї та кількох змінних

Однією з основних задач диференціального числення є визначення похідної заданої функції. Проте дослідження в багатьох галузях науки, зокрема в економіці, часто приводять до оберненої задачі, а саме: потрібно визначити таку функцію, похідна від якої дорівнює заданій функції. З економічного погляду це означає, що за граничними характеристиками (швидкостями) процесів потрібно відтворити їхні загальні властивості (загальні витрати, загальний прибуток тощо).



Після вивчення цього розділу ви зможете:

- інтерпретувати зміст інтегралів у математичних моделях економічних процесів;
- опанувати методи інтегрування різних функцій;
- розпізнавати типи задач в економіці, для розв'язання яких доцільно застосовувати інтеграли;
- використовувати інструменти інтегрального числення для визначення вихідних величин за відомими функціями факторів, що на них впливають;
- досліджувати економічну динаміку різноманітних процесів із застосуванням інтегралів.

21. Первісна функція. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування

Основні питання:

21.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла.

21.2. Невизначений інтеграл: означення, властивості, таблиця основних інтегралів.

21.3. Метод безпосереднього інтегрування.

21.4. Метод інтегрування заміною змінної.

21.5. Метод інтегрування частинами.

21.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла

Нехай функції $f(x)$ і $F(x)$ є визначеними на проміжку $\langle a, b \rangle$, де a, b – дійсні числа або один із символів: $-\infty, +\infty$.

Функцію $F(x)$ називають **первісною** для $f(x)$ на заданому проміжку $\langle a, b \rangle$, якщо в кожній точці цього проміжку $f(x)$ є похідною від $F(x)$, або, що те саме, добуток $f(x)dx$ є диференціалом функції $F(x)$:

$$F(x) - \text{первісна на } \langle a, b \rangle : \Leftrightarrow \forall x \in \langle a, b \rangle : F'(x) = f(x) \quad (dF(x) = f(x)dx). \quad (21.1)$$

Наприклад, первісною для функції $f(x) = \cos x$ на множині $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ є функція $F(x) = \sin x$, оскільки $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$.

Установлення для $f(x)$ усіх її первісних називають **інтегруванням** функції $f(x)$, а відповідний розділ математики, у якому розв'язують задачу визначення функції за її похідною (або диференціалом), називають **інтегральним численням**.

Теорема 21.1 (про множину первісних). Якщо для функції $f(x)$ на проміжку $\langle a, b \rangle$ існують первісні, то:

- 1) їх нескінченно багато;
- 2) усі вони відрізняються одна від одної на сталу величину.

Доведення. 1. Нехай функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на проміжку $\langle a, b \rangle$, тоді за означенням $F'(x) = f(x)$. Оскільки похідна будь-якої сталої величини C дорівнює нулю, то функція $\Phi(x) = F(x) + C \quad \forall C \in \mathbf{R}$ також є первісною для $f(x)$: $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$.

Отже, існування однієї первісної тягне за собою існування нескінченної множини інших первісних, які відрізняються одна від одної на довільну сталу C .

2. Нехай $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – деякі первісні для функції $f(x)$, тобто за означенням: $F_1'(x) = f(x)$ і $F_2'(x) = f(x)$. Розгляньмо допоміжну функцію $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Для будь-якого $x \in \langle a, b \rangle$ маємо:

$$\varphi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0. \quad (21.2)$$

Оскільки в кожній точці x із проміжку $\langle a, b \rangle$ $\varphi'(x) \equiv 0$, то $\varphi(x) = C$, тобто $F_1(x) - F_2(x) = C$, або $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Отже, якщо $F(x)$ – одна з первісних для $f(x)$, то множина всіх первісних для $f(x)$ має такий вигляд: $F(x) + C$. ■

Наприклад, для функції $f(x) = \sin 2x$ на всій числовій осі $\mathbf{R}$ первісними є функції $F_1(x) = \sin^2 x$ і $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ (*переконаймося!*). Хоча за виглядом вони є різними, проте відрізняються лише сталим доданком:

$$F_1(x) - F_2(x) = \sin^2 x - \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) = \sin^2 x + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) = \frac{1}{2}.$$

Отже, для визначення первісних заданої функції достатньо знати тільки одну, а кожна інша є сумою знайденої первісної й довільної дійсної сталої.

21.2. Невизначений інтеграл: означення, властивості, таблиця основних інтегралів

Множину всіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку $\langle a, b \rangle$ називають **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ (або від диференціала $f(x)dx$) і позначають:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (21.3)$$

де $\int$ – символ (знак) невизначеного інтеграла;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

dx – диференціал змінної інтегрування x ;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Щодо виразу $F(x) + C$ у правій частині рівності (21.3) кажуть, що він описує *однопараметричну сім'ю первісних* для функції $f(x)$.



Сучасне позначення невизначеного інтеграла знаком $\int$ було запропоновано Лейбніцем, який утворив цей символ із першої літери слова *summa* (сума).

Теорема 21.2 (теорема існування невизначеного інтеграла). Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на проміжку $\langle a, b \rangle$, то для неї існує невизначений інтеграл як множина функцій, похідна кожної з яких дорівнює $f(x)$.

Теорему наводьмо без доведення.

Із геометричного погляду, будь-яка первісна – це лінія $y = F(x)$, тоді невизначений інтеграл – це сім'я ліній $y = F(x) + C$, яку отримано зсувом однієї з ліній паралельно самій собі вздовж осі Oy (рис. 21.1).

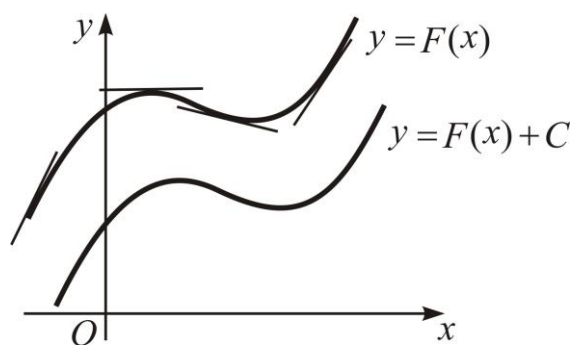


Рис. 21.1. Геометричний зміст невизначеного інтеграла

За геометричним змістом похідної, маємо: $F'(x)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до кривої $y = F(x)$ у точці з абсцисою x . Тоді визначити первісну для функції $f(x)$ означає знайти таку криву $y = F(x)$, кутовий коефіцієнт дотичної до якої в довільній точці x дорівнював би значенню функції $f(x)$ у цій точці.

Основні властивості невизначеного інтеграла випливають з означення первісної, співвідношення (21.3) із залученням властивостей похідної.

1 (про похідну невизначеного інтеграла). Похідна від невизначеного інтеграла за змінною інтегрування дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x) dx \right)'_x = f(x). \quad (21.4)$$

Дійсно, згідно з рівностями (21.3) і (21.2), маємо:

$$\left(\int f(x) dx \right)'_x = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

2 (про диференціал невизначеного інтеграла). Диференціал від невизначеного інтеграла за змінною інтегрування дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx, \quad (21.5)$$

тому що диференціал функції – це добуток похідної функції з диференціалом аргументу.

3 (про невизначений інтеграл від диференціала). Невизначений інтеграл від диференціала будь-якої функції, що має похідну, є однопараметричною сім'єю цієї функції:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (21.6)$$

Обґрунтування таке саме, як і для властивості 2.

4 (про невизначений інтеграл від похідної). Невизначений інтеграл від похідної будь-якої диференційовної функції є однопараметричною сім'єю цієї функції:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C. \quad (21.7)$$

Наведені далі властивості, які називають також **правилами інтегрування**, доводять за допомогою порівняння множин, які відповідають лівій і правій частинам рівностей, або диференціюванням лівої та правої частин рівностей, які треба довести.

5 (про сталий множник). Сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int a f(x)dx = a \int f(x)dx, \quad a = \text{const}, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \quad (21.8)$$

Здиференціюймо ліву і праву частини рівності (21.8). Для лівої частини, за властивістю **1**, маємо:

$$(\int a f(x)dx)' = a f(x).$$

Аналогічно для правої частини:

$$(a \int f(x)dx)' = a (\int f(x)dx)' = a f(x).$$

Отже, похідні від обох частин рівності (21.8) дорівнюють одна одній, тобто описують одну й ту саму множину первісних (*обміркуймо* випадок $a = 0$).

6 (про невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій). Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від доданків цієї суми:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx. \quad (21.9)$$

Здиференціюймо ліву і праву частини рівності (21.9). Для лівої частини, за властивістю **1**, маємо:

$$(\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx)' = f_1(x) \pm f_2(x).$$

Аналогічно для правої частини:

$$(\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx)' = (\int f_1(x)dx)' \pm (\int f_2(x)dx)' = f_1(x) \pm f_2(x). \quad (21.10)$$

Як бачимо, похідні від обох частин рівності (21.9) збігаються, отже, правильною є й сама рівність.

Властивість **6** можна узагальнити на будь-яке скінченна кількість доданків.

7 (про невизначений інтеграл від функції складеного лінійного аргументу). Якщо відомий невизначений інтеграл від функції $f(x)$, то невизначений інтеграл від цієї самої функції з аргументом $kx + b$ ($k, b - \text{const}$) породжується тією самою первісною, але від аргументу $kx + b$ і з коефіцієнтом $1/k$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C. \quad (21.11)$$

Для встановлення справедливості рівності (21.11) застосуємо властивість **1** про похідну невизначеного інтеграла:

$$\left(\frac{1}{k} F(\underbrace{kx + b}_t) + C \right)'_x = \frac{1}{k} \cdot F'_t(t) \cdot t'_x = \frac{1}{k} \cdot f(kx + b) \cdot k = f(kx + b),$$

де t – проміжний аргумент.

Наприклад, безпосереднє застосування ф-ли (21.11) дає:

$$\int \cos(3x - 5)dx = \frac{1}{3} \sin(3x - 5) + C,$$

оскільки $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8 (про інваріантність формули невизначеного інтеграла). Вигляд формули інтегрування не залежить від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною, чи функцією від неї:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow t = \varphi(x): \int f(t)dt = F(t) + C. \quad (21.12)$$

Покажімо, що формула інтегрування за змінною $t = \varphi(x)$ є справедливою. Для цього здиференціюймо ліву і праву частини рівності $\int f(t)dt = F(t) + C$ за змінною x :

$$\left[\begin{aligned} \left(\int f(t)dt \right)'_x &= \left(\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx \right)'_x = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(t) \cdot t'_x \\ (F(t) + C)'_x &= F'_t(t) \cdot t'_x = f(t) \cdot t'_x \end{aligned} \right] \Rightarrow \int f(t)dt = F(t) + C.$$

Наприклад, оскільки $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, бо $(\ln|x|)'_x = \frac{1}{x}$, тоді:

$$\int \frac{1}{\sin x} d\sin x = \ln|\sin x| + C, \text{ де } \varphi(x) = t = \sin x.$$

До таблиці основних невизначених інтегралів належать, зазвичай, ті інтеграли, які можна отримати безпосередньо за таблицею похідних, якщо прочитати її справа наліво. У табл. 21.1 до таких інтегралів ще додано ф-ли (7), (8), (15) і (16). Повний перелік інтегралів від елементарних функцій можна побачити в довіднику з вищої математики.

Таблиця 21.1

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	10. $\int e^x dx = e^x + C$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases}$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$
5. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}$
6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$	14. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}$
7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$	15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$

Справедливість кожної формули табл. 21.1 як і загалом результату інтегрування, можна перевірити диференціюванням, згідно із властивістю **1** (*про похідну невизначеного інтеграла*).

Перевірмо, наприклад, справедливість ф-ли (16), для чого знайдемо похідну від правої частини цієї рівності:

$$\begin{aligned} \left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) \sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}. \end{aligned}$$

Отже, маємо підінтегральну функцію, що й треба було довести.

Інтегрування функцій як операція, обернена до диференціювання, є значно складнішою задачею, ніж знаходження похідної. Для визначення похідних добутку або частки функцій є певні співвідношення (правила диференціювання), тоді як для інтегрування таких виразів подібних правил немає. Незалежно від складності виразу, його похідну завжди можна визначити, чого не можна стверджувати щодо інтегрування.

Оволодіння технікою інтегрування передбачає насамперед знання невизначених інтегралів основних елементарних функцій, наведених у табл. 21.1, і властивостей невизначених інтегралів **1 – 8**.

21.3. Метод безпосереднього інтегрування

Безпосереднім інтегруванням називають знаходження невизначених інтегралів за допомогою таблиці основних інтегралів у поєднанні з основними властивостями невизначеного інтеграла і тотожними перетвореннями підінтегрального виразу. Цей підхід, зазвичай, не викликає утруднень, але охоплює лише вузький клас функцій.

Загальний порядок безпосереднього інтегрування є таким:

- 1) *аналізуємо* підінтегральний вираз, із метою встановлення того, які властивості невизначених інтегралів треба застосувати й які алгебраїчні перетворення слід виконати, щоб скористатися табличним інтегралом;
- 2) *виконуємо* належні дії;
- 3) *застосовуємо* відповідні табличні формули.

Запис процесу знаходження невизначеного інтеграла виконують ланцюжком, можливо з наведенням довідкових відомостей.



Розгляньмо декілька прикладів застосування методу безпосереднього інтегрування:

$$1) I_1 = \int tg^2 x dx = \left| 1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right| = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx =$$

$$= tgx + C_1 - (x + C_2) = tgx - x + C.$$

Різницю параметрів C_1 і C_2 замінено одним: $C = C_1 - C_2$, оскільки різниця двох довільних сталих з $\mathbf{R}$ теж є довільною сталою з $\mathbf{R}$.

Перевірмо правильність інтегрування за допомогою диференціювання отриманої первісної:

$$(I_1)' = (tgx - x + C)'_x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x = f(x).$$

Оскільки похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, то доходьмо висновку, що інтегрування виконано правильно;

$$2) I_2 = \int \left(2 \sin x - 4 + 3\sqrt{x} + \frac{5}{x^2 + 4} - \frac{1}{x} \right) dx = 2 \int \sin x dx - 4 \int dx + 3 \int \sqrt{x} dx +$$

$$+ 5 \int \frac{dx}{x^2 + 4} - \int \frac{dx}{x} = -2 \cos x - 4x + 3 \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{5}{2} \arctg \frac{x}{2} - \ln|x| + C =$$

$$= -2 \cos x - 4x + 2x\sqrt{x} + \frac{5}{2} \arctg \frac{x}{2} - \ln|x| + C.$$

У цьому прикладі було використано властивості **5** і **6**, після чого застосовано відповідні формули таблиці основних інтегралів. Пропонуймо самостійно перевірити, чи є результат інтегрування правильним;

$$3) I_3 = \int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -ctgx - tgx + C.$$

Під час перетворення підінтегральної функції було використано співвідношення $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ та ф-ли (6) і (5) таблиці основних інтегралів.

21.4. Метод інтегрування заміною змінної

Знаходження невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ за допомогою переходу від змінної інтегрування x до нової змінної t , із метою зведення його до простішого або навіть табличного, називають **методом заміни змінної**, або **методом підстановки**. Основою цього, найбільш потужного, методу є властивість **8** (*про інваріантність формули невизначеного інтеграла*) (див. ф-лу (21.12)).

Зв'язок між змінними інтегрування – вихідною x і новою t , – залежно від вигляду підінтегральної функції, описують співвідношенням, розв'язаним відносно t або x . Тому розрізняють два типи підстановки: $t = \varphi(x)$ або $x = \psi(t)$.

1. **Підстановку $t = \varphi(x)$** виконують у випадках, якщо підінтегральна функція є добутком складеної функції $f(\varphi(x))$ із похідною проміжного аргументу $\varphi(x)$ або виразом, що відрізняється від похідної сталим множником:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \int f(t) dt. \quad (21.13)$$

Після знаходження інтеграла за змінною t обов'язково слід повернутися до вихідної змінної x :

$$\int f(t) dt = F(t) + C \Big|_{t = \varphi(x)} = F(\varphi(x)) + C. \quad (21.14)$$



Знайдімо невизначені інтеграли:

$$1. I_4 = \int x^2 \sin(x^3) dx.$$

Візуальний аналіз показує, що підінтегральна функція містить складену функцію $\sin(x^3)$ і множник x^2 , який відрізняється від похідної $(x^3)' = 3x^2$ сталим множником 3, тому доцільно застосувати підстановку $t = x^3$:

$$I_4 = \int \sin(x^3) x^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = \frac{1}{3} (-\cos t) + C = -\frac{1}{3} \cos(x^3) + C.$$

Слід зазначити, що без належних попередніх тотожних перетворень підінтегральної функції не завжди вдається зробити вибір відповідної підстановки.

$$I_5 = \int \sqrt{\frac{\arccos 2x}{1-4x^2}} dx = \int \frac{(\arccos 2x)^{1/2}}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx = \int (\arccos 2x)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \arccos 2x \\ dt = -\frac{2dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} \end{array} \right| = \int t^{1/2} \cdot \left(-\frac{1}{2} dt\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{\arccos^3 2x} + C.$$

2. Підстановку $x = \psi(t)$ виконують переважно для здійснення переходу від одного класу функцій до іншого, а саме: від ірраціональних функцій до раціональних, від степеневих до тригонометричних, від показникових до степеневих тощо. Водночас для повернення до вихідної змінної x функція $x = \psi(t)$ повинна мати обернену функцію $t = \psi^{-1}(x)$:

$$I = \int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \psi(t) \\ dx = \psi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = F(t) + C =$$

$$= \left| t = \psi^{-1}(x) \right| = F(\psi^{-1}(x)) + C. \quad (21.15)$$



Знайдімо такий невизначений інтеграл: $I_6 = \int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} dx$.

Щоб позбутися ірраціональності, виконаймо підстановку: $x = 5 \sin t$, $t \neq \pi k \pm \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Тоді маємо:

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-25\sin^2 t} = 5 \cos t, \quad dx = 5 \cos t \, dt.$$

Отже,

$$I_6 = \int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} dx = \int \frac{5 \sin t}{5 \cos t} 5 \cos t \, dt = 5 \int \sin t \, dt = -5 \cos t + C = \left| t = \arcsin \frac{x}{5} \right| =$$

$$= -5 \cos \left(\arcsin \frac{x}{5} \right) + C. \quad (21.16)$$

Підстановка, за допомогою якої спрощують заданий невизначений інтеграл, може бути не єдиною:

$$I_6 = \int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} dx = \left| \begin{matrix} t = 25-x^2 \\ dt = -2x dx \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{25-x^2} + C. \quad (21.17)$$

Підсумовуючи розглянуте, наведемо загальний порядок інтегрування методом підстановки:

1) вибираймо прийнятну заміну змінної ($t = \varphi(x)$ або $x = \psi(t)$) і встановлюймо зв'язок між диференціалами нової та вихідної змінних ($dt = \varphi'_x dx$, $dx = \psi'_t dt$);

2) переходьмо в підінтегральному виразі до нової змінної t ;

3) знаходьмо невизначений інтеграл за новою змінною інтегрування;

4) повертаймося до вихідної змінної x ($t = \varphi(x)$, $t = \psi^{-1}(x)$).

Наведемо ілюстративний ланцюжок символічних записів, указуючи (у дужках) номер кожного кроку:

$$\int \frac{\varphi'_x(x)}{\varphi(x)} dx = \left| \begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'_x(x) dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C. \quad (21.18)$$

(1)
(2)
(3)
(4)

Співвідношення (21.18) часто використовують як готову формулу: якщо підінтегральною функцією є дріб, чисельник якого є похідною знаменника, то однією з первісних є натуральний логарифм модуля знаменника.

21.5. Метод інтегрування частинами

Теорема 21.3 (формула інтегрування частинами). Якщо в невизначеному інтегралі $I = \int f(x) dx$ підінтегральний вираз подано у вигляді добутку $u \cdot dv$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – диференційовні на деякому проміжку $\langle a, b \rangle$ функції, то справедливим є таке співвідношення:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (21.19)$$

Доведення. Якщо $u = u(x)$, $v = v(x)$ – диференційовні на $\langle a, b \rangle$ функції, тоді, за формулою диференціала добутку, маємо: $d(uv) = v du + u dv$, звідси $u dv = d(uv) - v du$.

Інтегруючи останню рівність, отримуємо:

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv + C - \int v du.$$

У ф-лі (21.19) довільну сталу C не пишуть, бо її «поглинає» сусідній інтеграл:

$$C = \int 0 du \Rightarrow C - \int v du = -\int (v - 0) du = -\int v du. \quad (21.20)$$

Знаходження невизначеного інтеграла $I = \int f(x) dx$ за допомогою ф-ли (21.19) називають **методом інтегрування частинами**.

Подання підінтегрального виразу $f(x) dx$ у вигляді $u \cdot dv$, яке називають **розбиттям його на частини**, виконують таким способом: за u беруть ту частину підінтегрального виразу, яка під час диференціювання спрощується, а за dv — ту, яка легко інтегрується. Якщо частини розбиття вибрано правильно, то невизначений інтеграл у правій частині формули буде не складнішим за вихідний інтеграл або навіть табличним.

Загальний порядок інтегрування частинами є таким:

1) *розбиваймо* підінтегральний вираз на частини u та dv , тобто якийсь фрагмент підінтегральної функції берімо за u , а те, що залишилося в підінтегральному виразі, — за dv ;

2) *визначаймо* диференціал функції $u = u(x)$, а за диференціалом $dv(x)$ інтегруванням *відновлюймо* одну з первісних $v(x)$;

3) *застосовуймо* формулу інтегрування частинами (21.19);

4) *берімо* невизначений інтеграл $\int v du$ і *записуймо* остаточну відповідь.



Розгляньмо приклади інтегрування частинами та зразок оформлення символічних записів:

$$\begin{aligned} 1) \quad I_7 &= \int \underbrace{(2x-1)}_u \cdot \underbrace{e^x dx}_{dv} = \left| \begin{array}{l} u = 2x-1 \Rightarrow du = u' dx = (2x-1)' dx = 2 dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = \\ &= uv - \int v du = \underbrace{(2x-1)e^x}_{(3)} - \underbrace{\int e^x \cdot 2 dx}_{(4)} = (2x-1)e^x - 2e^x + C = (2x-3)e^x + C. \end{aligned}$$

Якщо інтеграли $\int dv$ і $\int v du$ є громіздкими, то їх беруть окремо від ланцюжка записів;

$$2) I_8 = \int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = u' dx = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = uv - \int v du =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Формула інтегрування частинами має більш обмежену область застосування, ніж метод підстановки. Проте існують типи функцій, які інтегрують тільки частинами (табл. 21.2).

Таблиця 21.2

Типи інтегралів, до яких застосовують метод інтегрування частинами

I	II	III
1. $\int P_n(x) \cdot \begin{bmatrix} a^x dx \\ e^x dx \end{bmatrix}$	3. $\int P_n(x) \cdot \ln^m x dx, m \in \mathbf{N}$	5. $\int e^{\alpha x} \cdot \begin{bmatrix} \sin(\beta x) dx \\ \cos(\beta x) dx \end{bmatrix}$
2. $\int P_n(x) \cdot \begin{bmatrix} \sin x dx \\ \cos x dx \end{bmatrix}$	4. $\int P_n(x) \cdot \begin{bmatrix} \arcsin x dx \\ \arccos x dx \\ \operatorname{arctg} x dx \\ \operatorname{arcctg} x dx \end{bmatrix}$	Покладають: $u = e^{\alpha x}$ або $dv = e^{\alpha x} dx$
Покладають: $u = P_n(x)$	Покладають: $dv = P_n(x) dx$	6. $\int \begin{bmatrix} \sin(\ln \beta x) dx \\ \cos(\ln \beta x) dx \end{bmatrix}$ Покладають: $dv = dx$

До *першого типу* належать невизначені інтеграли, підінтегральні функції яких є добутком многочлена n -го степеня $P_n(x)$ із показниковою функцією (a^x , e^x) або тригонометричними функціями ($\sin x$, $\cos x$). Для таких функцій покладають $u = P_n(x)$, а dv містить другий множник (випадки 1, 2 в табл. 21.2). Так само діють, якщо аргументом другого множника є лінійна функція від x : a^{kx+b} , e^{kx+b} , $\sin(kx+b)$, $\cos(kx+b)$, де k , b – сталі з $\mathbf{R}$.

Другий тип охоплює невизначені інтеграли, підінтегральні функції яких є добутком многочлена $P_n(x)$ із натуральним степенем логарифмічної функції $\ln^m x$ ($m \in \mathbf{N}$) або оберненими тригонометричними функціями (випадки 3, 4 в табл. 21.2). У такому разі покладають $dv = P_n(x) dx$, а функцію u визначають другим співмножником підінтегрального виразу. Принципових змін не буде, якщо замість аргументу x взяти лінійну функцію від нього.

До *третього типу* належать невизначені інтеграли, двократне інтегрування яких за ф-лою (21.19) дає лінійне рівняння відносно вихідного інтеграла. Розв'язок цього рівняння і дає шуканий інтеграл. Для добутоків показникової функції $e^{\alpha x}$ із тригонометричними $\sin \beta x$, $\cos \beta x$, де $\alpha, \beta - \text{const}$ (випадок 5 у табл. 21.2) покладають $u = e^{\alpha x}$ або $dv = e^{\alpha x} dx$ (за уподобанням). Для невизначених інтегралів у випадку 6 (див. табл. 21.2) за dv беруть dx . У більш загальному випадку, замість αx і βx , може бути лінійна функція вигляду $kx + b$.



Наведімо приклади взяття невизначених інтегралів кожного типу:

$$\begin{aligned} 1) I_9 &= \int (x^2 - 3x + 1) \cdot \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow du = (2x - 3) dx \\ dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = uv - \int v du = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - 3x + 1) \cdot \sin 2x - \underbrace{\frac{1}{2} \int (2x - 3) \cdot \sin 2x dx}_{I_{10}} = \frac{1}{2} [(x^2 - 3x + 1) \cdot \sin 2x - I_{10}]. \end{aligned}$$

Виконуємо повторне інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int (2x - 3) \cdot \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x - 3 \Rightarrow du = 2 dx \\ dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = uv - \int v du = \\ &= -\frac{1}{2} (2x - 3) \cos 2x + \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} [(2x - 3) \cos 2x - \sin 2x] + C. \end{aligned}$$

У підсумку маємо таке:

$$I_9 = \frac{1}{2} [(x^2 - 3x + 0,5) \sin 2x + (x - 1,5) \cos 2x] + C.$$

Отже, невизначений інтеграл 1-го типу потребує n -кратного застосування формули інтегрування частинами, де n – степінь многочлена $P_n(x)$;

$$2) I_{11} = \int (x - 1) \cdot \arctg x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arctg x \Rightarrow du = \frac{1}{1 + x^2} dx \\ dv = (x - 1) dx \Rightarrow v = \frac{(x - 1)^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int v du = \frac{(x-1)^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(x-1)^2}{1+x^2} dx = \frac{(x-1)^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 2x + 1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \frac{(x-1)^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C;$$

$$3) I_{12} = \int e^{4x} \cos 5x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{4x} & \Rightarrow du = 4e^{4x} dx \\ dv = \cos 5x dx & \Rightarrow v = \frac{1}{5} \sin 5x \end{array} \right| = uv - \int v du =$$

$$= \frac{1}{5} e^{4x} \sin 5x - \frac{4}{5} \int e^{4x} \sin 5x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{4x} & \Rightarrow du = 4e^{4x} dx \\ dv = \sin 5x dx & \Rightarrow v = -\frac{1}{5} \cos 5x \end{array} \right| = uv - \int v du =$$

$$= \frac{1}{5} e^{4x} \sin 5x - \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{5} e^{4x} \cos 5x + \frac{4}{5} \underbrace{\int e^{4x} \cos 5x dx}_{I_{12}} \right) =$$

$$= \frac{1}{5} e^{4x} \sin 5x + \frac{4}{25} e^{4x} \cos 5x - \frac{16}{25} I_{12}.$$

Отже, двократне інтегрування частинами привело до рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$I_{12} = \frac{1}{5} e^{4x} \sin 5x + \frac{4}{25} e^{4x} \cos 5x - \frac{16}{25} I_{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{41}{25} I_{12} = \frac{1}{5} e^{4x} \sin 5x + \frac{4}{25} e^{4x} \cos 5x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{12} = \frac{5}{41} e^{4x} \sin 5x + \frac{4}{41} e^{4x} \cos 5x + C.$$



Ключові терміни

Первісна; інтегрування; невизначений інтеграл; властивості невизначеного інтеграла; таблиця основних інтегралів; методи інтегрування (безпосереднє інтегрування, заміни змінної (підстановки), частинами).



Запитання для самоперевірки

1. Яку функцію називають первісною для заданої функції?
2. Як формулюють теорему про множину первісних для заданої функції?
3. Що називають невизначеним інтегралом від заданої функції?
4. За яких умов існує невизначений інтеграл від заданої функції?
5. Чому дорівнює похідна (диференціал) від невизначеного інтеграла?
6. Чому дорівнює невизначений інтеграл від похідної (диференціала) заданої функції?
7. У чому полягає властивість невизначеного інтеграла щодо сталого множника?
8. Чому дорівнює невизначений інтеграл від функції складеного лінійного аргументу?
9. Чому дорівнює невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій?
10. У чому полягає інваріантність формули невизначеного інтеграла?
11. У чому полягає метод безпосереднього інтегрування, інтегрування заміною змінної та частинами?
12. Які типи заміни змінної є в невизначених інтегралах і чим вони відрізняються?
13. Який вигляд має формула інтегрування частинами?
14. Як відбувається розбиття підінтегрального виразу на частини в разі застосування методу інтегрування частинами?
15. Чи можливо використовувати метод інтегрування частинами до одного інтеграла багаторазово?
16. Чи можна поєднувати метод інтегрування частинами з методом заміни змінної в разі взяття невизначеного інтеграла?
17. До яких типів інтегралів можна застосовувати виключно метод інтегрування частинами?
18. Який із двох методів інтегрування – частинами чи заміною змінної – є складнішим для реалізації в разі взяття інтегралів, до яких можна застосувати обидва підходи?
19. Що, на вашу думку, є складнішим: визначення похідної (диференціювання) чи знаходження первісної (інтегрування)?



Тестові завдання до підрозділу 21

1. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то яке з наведених співвідношень є правильним:

а) $\int F'(x)dx = f(x) + C$;

б) $dF(x) = f'(x)dx$;

в) $f(x) = F'(x)$;

г) $\int F(x)dx = f(x) + C$?

2. Якщо функції $F(x)$, $\Phi(x)$ є первісними для функцій $f(x)$, $\varphi(x)$, відповідно, то якою із властивостей володіє невизначений інтеграл:

а) $\left(\int [f(x) + \varphi(x)]dx\right)' = F(x) + \Phi(x)$;

б) $\int (f(x) - \varphi(x))dx = F(x) - \Phi(x) + C$;

в) $\int (f(x) \cdot \varphi(x))dx = F(x) \cdot \Phi(x) + C$;

г) $\int f'(x)dx = F(x) + C$?

3. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то якою властивістю не володіє невизначений інтеграл ($k, b - \text{const}$):

а) $\int f(kx + b)dx = kF(kx + b) + C$;

б) $\left(\int kF(x)dx\right)' = kF(x)$;

в) $\int df(x) = f(x) - C$;

г) $d\left(\int f(kx + b)dx\right) = f(kx + b)dx$?

4. Укажіть, у якій із наведених формул допущено помилку:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\arccos \frac{x}{a} + C$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$;

$$\text{в) } \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

5. Укажіть, яка з наведених формул не містить помилки ($k, b - \text{const}$):

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\cos^2(x-b)} = -\frac{1}{\cos(x-b)} + C;$$

$$\text{б) } \int \operatorname{ctg}(kx+b) dx = \ln |\sin(kx+b)| + C;$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{(1-k)x^{k-1}} + C \quad (k \neq 1);$$

$$\text{г) } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

6. Укажіть, до якого з наведених невизначених інтегралів слід застосувати підстановку вигляду $t = \varphi(x)$:

$$\text{а) } \int \varphi(f(x)) \cdot f'(x) dx;$$

$$\text{б) } \int f(\varphi(x)) \cdot f'(x) dx;$$

$$\text{в) } \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx;$$

$$\text{г) } \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi(x) dx.$$

7. Укажіть, до якого з наведених невизначених інтегралів слід застосувати заміну змінної $t = \ln x$:

$$\text{а) } \int \frac{\ln x dx}{x^2};$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{x \ln^2 x};$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{\ln x};$$

$$\text{г) } \int \ln^2 x dx.$$

8. Укажіть, яка з наведених формул є правильною в разі інтегрування частинами ($u = u(x)$ і $v = v(x)$ – диференційовні функції):

а) $\int u dv = uv + \int v du$;

б) $\int u dv = uv - \int v du$;

в) $\int u dv = \int v du - uv$;

г) $\int (uv) dx = \int u dx \cdot \int v dx$.

9. Укажіть, до якого з наведених невизначених інтегралів слід застосувати метод інтегрування частинами:

а) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

б) $\int e^{\sin x} \cos x dx$;

в) $\int x \cdot \sin(x^2 + 5) dx$;

г) $\int (2x - 3) \arcsin 5x dx$.

10. Укажіть, у якому з наведених невизначених інтегралів правильно виконано розбиття підінтегрального виразу на частини u і dv :

а) $\int (3x - 1) \cdot \arctg x dx$, $u = 3x - 1$, $dv = \arctg x dx$;

б) $\int x^2 \ln x dx$, $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$;

в) $\int (x^2 - 5) \cdot e^x dx$, $u = e^x$, $dv = (x^2 - 5) dx$;

г) $\int x \cdot \sin(4x + 9) dx$, $u = \sin(4x + 9)$, $dv = x dx$.

Література: [1 – 4; 7 – 15; 17 – 23].

22. Інтегрування деяких класів елементарних функцій: раціональних, ірраціональних, тригонометричних

Основні питання:

22.1. Інтегрування елементарних раціональних алгебраїчних дробів (РАД).

22.2. Інтегрування раціональних алгебраїчних дробів.

22.3. Інтегрування деяких видів ірраціональних функцій.

22.4. Інтегрування функцій, що раціонально залежать від тригонометричних функцій.

22.1. Інтегрування елементарних раціональних алгебраїчних дробів (РАД)

Елементарними (найпростішими) РАД називають дробі таких чотирьох типів:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \quad \text{II. } \frac{B}{(x-b)^n}; \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

де A, B, a, b, p, q – дійсні числа, а квадратні тричлени не мають дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$ ($q - p^2/4 > 0$); $n \in \mathbf{N}, n > 1$.

Зазвичай, у разі інтегрування дробів I і II типів труднощів не виникає, це легко зробити, застосувавши метод безпосереднього інтегрування:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C. \quad (22.1)$$

$$\text{II. } \int \frac{B}{(x-b)^n} dx = B \int (x-b)^{-n} d(x-b) = -\frac{B}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-b)^{n-1}} + C. \quad (22.2)$$

На практиці такі невизначені інтеграли, зазвичай, беруть усно, тобто: умова – відповідь.



Розгляньмо приклади інтегрування елементарних дробів I і II типів:

$$\int \frac{5}{x-3} dx = 5 \ln|x-3| + C;$$

$$\int \frac{10}{(x+7)^6} dx = -\frac{2}{(x+7)^5} + C.$$

Аналогічно діють, якщо знаменники дробів є лінійними функціями від x загального вигляду: $kx + b$, де k і b – сталі:

$$\int \frac{A}{kx + b} dx = \frac{A}{k} \ln|kx + b| + C. \quad (22.3)$$

$$\int \frac{B}{(kx + b)^n} dx = -\frac{B}{k(n-1)} \cdot \frac{1}{(kx + b)^{n-1}} + C. \quad (22.4)$$

$$\text{III. } I = \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx.$$

У разі інтегрування найпростішого дробу III типу спочатку в знаменнику виділяють повний квадрат двочлена $(x + p/2)$:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

після чого вводять нову змінну $t = x + p/2$ і подають вихідний інтеграл I у вигляді суми двох невизначених інтегралів:

$$I = \left| \begin{array}{l} x + p/2 = t \\ x = t - p/2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} dt = \int \frac{At}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} dt + \int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} dt. \quad (22.5)$$

Оскільки многочлен знаменника не має дійсних коренів, то $q - p^2/4 > 0$, отже, сталу $q - p^2/4$ можна позначити через a^2 :

$$I = A \int \frac{t}{t^2 + a^2} dt + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2}.$$

Тоді перший з інтегралів обчислюють за ф-лою (21.18), а другий є табличним інтегралом (див. ф-лу (14) табл. 21.1).

Отже:

$$I = \frac{A}{2} \ln|t^2 + a^2| + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Повертаючись до вихідної змінної, маємо:

$$I = \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{2a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{2a} + C, \quad \text{де } a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$



Наведемо приклад узяття невизначеного інтеграла від дробу III типу:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx &= \int \frac{3x-1}{(x-2)^2+4} dx = \left| \begin{array}{l} x-2=t \\ x=t+2 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{3(t+2)-1}{t^2+4} dt = \int \frac{3t+5}{t^2+4} dt = \\ &= 3 \int \frac{t}{t^2+4} dt + 5 \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{3}{2} \ln(t^2+4) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C.\end{aligned}$$

Розглянутий підхід до інтегрування найпростіших дробів III типу без принципових змін переносять на деякі неелементарні дробу, знаменник яких містить квадратний тричлен, а саме:

1) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ – невизначений інтеграл, у якому квадратний тричлен

має додатний дискримінант: $p^2-4q > 0$. З урахуванням заміни змінної $x+p/2=t$, знаменник дробу x^2+px+q набуває вигляду: t^2-a^2 , а другий доданок у виразі (22.5) є табличним інтегралом (див. ф-лу (15) табл. 21.1);

2) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$ – невизначений інтеграл, у якому знаменник дробу

є квадратним тричленом загального виду, і тоді в ньому спочатку виносять за дужки коефіцієнт a (а за знак інтеграла $1/a$), а потім діють так само, як і в разі інтегрування елементарних дробів III типу;

3) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ – невизначений інтеграл, у якому квадратний тричлен

стоїть під знаком квадратного кореня, і тоді другий доданок у відповіді буде не арктангенсом, а довгим логарифмом (див. ф-лу (16) табл. 21.1).

IV. $I_n = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$. Інтегрування дробу IV типу загалом є дуже

громіздким: n -кратним інтегруванням частинами його зводять до інтеграла від дробу III типу.

Рекурентна формула для випадку $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ має такий вигляд:

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} I_{n-1}. \quad (22.6)$$

За відомим $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ можна знайти інтеграл I_n для будь-якого натурального показника n .



Знайдімо такий інтеграл: $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$.

За відомим $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$ за ф-лою (22.6), маємо:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

22.2. Інтегрування раціональних алгебраїчних дробів

Раціональним алгебраїчним дробом (РАД) $R(x)$ називають дробово-раціональну функцію від x (або відношення двох многочленів від змінної x):

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \quad (22.7)$$

де a_i (b_j) – коефіцієнти при степенях x – для всіх i (j) від 0 до n (m) є дійсними числами; $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbf{N}$.

Якщо всі коефіцієнти при степенях x , нижчих за степінь старшого члена, дорівнюють нулю, то многочлен перетворюється на одночлен.

РАД називають **правильним**, якщо степінь чисельника $P_n(x)$ є нижчим за степінь знаменника $Q_m(x)$, тобто $n < m$; інакше, якщо $n \geq m$, то дріб називають **неправильним**.

Неправильний дріб завжди можна подати у вигляді суми многочлена $T_{n-m}(x)$ і правильного дробу:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{P_{n_1}(x)}{Q_m(x)}, \quad (22.8)$$

де многочлен $T_{n-m}(x)$ називають **цілою частиною дробу** $R(x)$; $0 \leq n_1 \leq m-1$.

Подання РАД у вигляді (22.8) називають **виділенням цілої частини** дробу. Щоб його здійснити, треба виконати ділення чисельника дробу на його знаменник «сходінками», у цьому разі чисельник і знаменник дробу записують за спадними степенями змінної x .



Виділімо цілу частину неправильного дробу $R(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2 - x + 2}$.

Ділення «сходінками» дає:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 1 \\ - (2x^3 - 2x^2 + 4x) \\ \hline 2x^2 - 4x + 1 \\ - (2x^2 - 2x + 4) \\ \hline -2x - 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 2 \\ 2x + 2 \end{array} \right.$$

Отже, $R(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2 - x + 2} = 2x + 2 + \frac{-2x - 3}{x^2 - x + 2}$.

Оскільки інтегрування многочлена як суми степеневих функцій не викликає труднощів, то для інтегрування довільних РАД – правильних і неправильних – треба вміти зінтегрувати правильні дроби.

Наводьмо без доведення теорему вищої алгебри, яка дозволяє звести інтегрування будь-якого дробу до інтегрування розглянутих раніше найпростіших дробів.

Теорема 22.1 (про розкладання правильного РАД на суму елементарних дробів). Будь-який правильний РАД можна подати як суму елементарних дробів – розкласти на суму елементарних дробів.

Розкладання РАД $R(x)$ на суму елементарних дробів виконуймо так:

1) *розкладаймо* на прості множники знаменник дробу – многочлен $Q_m(x)$, тобто подаймо його у вигляді добутку лінійних множників і квадратичних множників із від’ємними дискримінантами:

$$Q_m(x) = (x - a)^k \cdot \dots \cdot (x - b)^l \cdot (x^2 + px + q)^s \cdot \dots \cdot (x^2 + cx + d)^r,$$

у якому однотипні множники можуть повторюватися;

2) *ставмо* у відповідність кожному множнику найпростіший раціональний алгебраїчний дріб або їхню суму (табл. 22.1) і *записуймо* $R(x)$ як суму всіх отриманих дробів.

Зауважмо, що в розкладі РАД $R(x)$ буде стільки дробів, скільки коренів має многочлен $Q_m(x)$, ураховуючи їхню кратність, а саме: $k + l + s + \dots + r$.

Відповідність між множниками знаменника і найпростішими дробами

Множники знаменника	Відповідні елементарні раціональні алгебраїчні дроби
$x - a$	$\frac{A}{x - a}$
$(x - b)^l$	$\frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x - b)^l}$
$x^2 + px + q$	$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$
$(x^2 + cx + d)^r$	$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + cx + d} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + cx + d)^2} + \dots + \frac{A_rx + B_r}{(x^2 + cx + d)^r}$

Отже, маємо:

$$\begin{aligned}
 \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{P_n(x)}{(x - a)^k \cdot \dots \cdot (x - b)^l \cdot (x^2 + px + q)^s \cdot \dots \cdot (x^2 + cx + d)^r} = \\
 &= \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k} + \dots + \frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x - b)^l} + \\
 &\quad + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_sx + N_s}{(x^2 + px + q)^s} + \dots + \\
 &\quad + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + cx + d} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + cx + d)^2} + \dots + \frac{C_rx + D_r}{(x^2 + cx + d)^r},
 \end{aligned}
 \tag{22.9}$$

де A_{i_1} ($i_1 = \overline{1, k}$), B_{i_2} ($i_2 = \overline{1, l}$), M_{i_3} , N_{i_3} ($i_3 = \overline{1, s}$), C_{i_4} , D_{i_4} ($i_4 = \overline{1, r}$) – деякі сталі величини, які називають **коефіцієнтами розкладу**;

3) *визначаймо* значення коефіцієнтів розкладу РАД. Цей крок здійснюють за допомогою так званого **методу невизначених коефіцієнтів**, згідно з яким обчислення коефіцієнтів розкладу зводять до розв’язання квадратних СЛАР.

В основі методу лежать такі *властивості*:

а) рівність не порушиться, якщо обидві її частини помножити на один і той самий вираз, визначений на множині дійсних чисел;

б) у рівних многочленів коефіцієнти при однакових степенях змінної є рівними між собою.



Розгляньмо приклади інтегрування РАД:

1. Знайдімо такий інтеграл: $\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} dx$.

Підінтегральна функція є правильним РАД, оскільки $n < m$ ($n=1$, $m=3$), тому до нього можна застосувати теорему 22.1:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Помножмо обидві частини рівності на знаменник $(x-1)(x-2)^2$, у результаті чого маємо:

$$x+1 = A(x-2)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-1). \quad (22.10)$$

Обчислімо коефіцієнти розкладу A , B , C , для чого в ліву та праву частини рівності (22.10) підставмо корені знаменника $x_1=1$ і $x_2=2$:

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 1+1 = A \cdot (1-2)^2 + B \cdot 0 + C \cdot 0 \Rightarrow A=2, \\ x=2 & 2+1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (2-1) \Rightarrow C=3. \end{array}$$

Залишилося визначити параметр B . Для цього прирівняймо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівності (22.10) (наприклад, при x^2):

$$x^2 \Big| \quad 0 = A + B \Rightarrow 0 = 2 + B \Rightarrow B = -2.$$

Отже, підінтегральна функція набуває такого вигляду:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} dx &= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} \right) dx = \\ &= 2 \int \frac{dx}{x-1} - 2 \int \frac{dx}{x-2} + 3 \int \frac{dx}{(x-2)^2} = 2 \ln|x-1| - 2 \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C. \end{aligned}$$

2. Знайдімо такий інтеграл: $\int \frac{x-1}{x(x^2+4)} dx$.

РАД під знаком інтеграла є правильним, оскільки $n < m$ ($n=1$, $m=3$), а його знаменник $x(x^2+4)$ має лише один дійсний корінь $x=0$, адже рівняння $x^2+4=0$ не має дійсних коренів. Тоді розклад вихідного РАД на суму елементарних має такий вигляд:

$$\frac{x-1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Знову помножмо обидві частини рівності на знаменник $x(x^2+4)$:

$$x-1 = A(x^2+4) + (Bx+C)x = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + Cx + 4A. \quad (22.11)$$

Визначаймо коефіцієнти A , B , C . Підставмо в ліву та праву частини останньої рівності корінь знаменника $x=0$:

$$x=0 \mid 0-1 = A(0+4) \Rightarrow A = -1/4.$$

Прирівняймо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівності (22.11):

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A+B \Rightarrow B = -A = 1/4, \\ x & 1 = C \Rightarrow C = 1. \end{array}$$

Остаточно запишімо вихідний інтеграл у вигляді суми двох інтегралів від двох найпростіших дробів, які легко знайти:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x(x^2+4)} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} + \int \frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2+4} dx = -\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{1}{8} \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{dx}{x^2+4} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{1}{8} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

22.3. Інтегрування деяких видів ірраціональних функцій

Ірраціональним називають алгебраїчний вираз, який містить операцію добування кореня, або, що те саме, дробові показники степеня.

I. Інтегрування найпростіших ірраціональностей. Так називають узяття невизначеного інтеграла від функцій, що залежать від дробових степенів змінної x або степенів лінійної та дробово-лінійної функцій від x .

1. Невизначений інтеграл від функції, раціонально залежної від *дробових степенів змінної* x , має такий вигляд:

$$I = \int R(x, x^{m_1/n_1}, \dots, x^{m_s/n_s}) dx, \quad (22.12)$$

де m_i, n_i – цілі числа ($i = \overline{1, s}$).

Такий інтеграл зводять до інтеграла від раціональної функції відносно нової змінної t (*раціоналізують*) за допомогою підстановки $x = t^k$, де k – найменше спільне кратне (НСК) знаменників дробових показників степеня.

Дійсно, у разі заміни вихідної змінної x на t^k всі показники степеня нової змінної в підінтегральній функції стають цілими числами, оскільки число k ділиться без остачі на всі числа n_i ($i = \overline{1, s}$):

$$I = \left| \begin{array}{l} x = t^k, \quad t = \sqrt[k]{x} \\ dx = kt^{k-1} dt \end{array} \right| = k \int R(t^k, t^{km_i/n_i}, \dots, t^{km_i/n_i}) \cdot t^{k-1} dt = \int r(t) dt,$$

де $r(t)$ – раціональна функція від t , тобто многочлен або РАД.



Знайдімо такий інтеграл: $I = \int \frac{dx}{x^{2/3} - x^{1/2}} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}.$

Аналіз степенів змінної x із дробовими показниками дає: $n_1 = 3, n_2 = 2, k = \text{НСК}(3, 2) = 6$. Тоді застосуємо таку підстановку $x = t^6$:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6, \quad t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t - 1} = 6 \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t - 1} dt = \\ &= 6 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t - 1} \right) dt = 6 \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t - 1| \right) + C = \left| t = \sqrt[6]{x} \right| = \\ &= 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C. \end{aligned}$$

Варто звернути увагу, що виділення цілої частини неправильного дробу $\frac{t^2}{t-1}$ ($n=2, m=1, n>m$) у цьому прикладі було виконано не діленням «сходінками», а за допомогою тотожних перетворень.

2. Невизначений інтеграл від функції, раціонально залежної від *дробових степенів лінійної функції* змінної x , має такий вигляд:

$$I = \int R(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, \dots, (ax+b)^{m_s/n_s}) dx, \quad (22.13)$$

де m_i, n_i – цілі числа ($i = \overline{1, s}$).

Такий невизначений інтеграл раціоналізують за допомогою підстановки $ax+b=t^k$, де, як і раніше, k – НСК знаменників дробових показників, тобто $k = \text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_s)$:

$$I = \left| \begin{array}{l} ax+b=t^k, \quad t=\sqrt[k]{ax+b} \\ x=\frac{t^k-b}{a}, \quad dx=\frac{k}{a}t^{k-1}dt \end{array} \right| = \frac{k}{a} \int R\left(\frac{t^k-b}{a}, t^{km_1/n_1}, \dots, t^{km_s/n_s}\right) \cdot t^{k-1} dt.$$

Узяття невизначеного інтеграла (22.13) нічим принципово не відрізняється від узяття інтеграла (22.12), але відповідні викладки – символічні записи – є більш громіздкими, особливо під час повернення до вихідної змінної x .



Нехай у попередньому прикладі в ролі змінної x буде лінійна функція від x , наприклад, $5x-1$, тоді маємо:

$$I = \left| \begin{array}{l} 5x-1=t^6, \quad t=\sqrt[6]{5x-1} \\ x=\frac{t^6+1}{5}, \quad dx=\frac{6}{5}t^5dt \end{array} \right| = \frac{6}{5} \int \frac{t^2}{t-1} dt,$$

і тоді первісна під знаком радикала буде містити не просто x , а вираз $5x-1$.

3. Невизначений інтеграл від функції, що раціонально залежить від *дробових степенів дробово-лінійної функції* змінної x , має такий вигляд:

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_s/n_s}\right) dx, \quad \text{де } \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}, \quad (22.14)$$

раціоналізують підстановкою: $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, у якій $k = \text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_s)$.

Заміну змінної виконують з урахуванням таких перетворень:

$$I = \left| \begin{array}{l} \frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} \\ x = \frac{d \cdot t^k - b}{a - c \cdot t^k}, \quad dx = \frac{ad - bc}{(a - ct^k)^2} k t^{k-1} dt \end{array} \right| = \int r(t) dt, \quad (22.15)$$

де $r(t)$ – раціональна функція від змінної t .



Знайдімо такий інтеграл: $\int x \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$.

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx &= \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \\ x+1 = xt^2 \Rightarrow x = \frac{1}{t^2-1} \Rightarrow dx = -\frac{2tdt}{(t^2-1)^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{1}{t^2-1} \cdot t \cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt = -2 \int \frac{t^2}{(t^2-1)^3} dt. \end{aligned}$$

Отже, підінтегральна функція під знаком останнього інтеграла є правильним раціональним алгебраїчним дробом.



Замість трьох невизначених інтегралів (22.13) – (22.15) можна було б розглядати тільки останній: інші є його окремими випадками.

Невизначені інтеграли, первісні яких не можна подати через скінченну кількість елементарних функцій, називають **інтегралами, що не беруть у скінченному вигляді**. До таких інтегралів, наприклад, належать:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}. \quad (22.16)$$

22.4. Інтегрування функцій, що раціонально залежать від тригонометричних функцій

Нехай $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ – довільні функції від змінної x . Функцію $y = f(x)$ називають **раціонально залежною** від функцій $\varphi_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$), якщо у її аналітичному виразі над ними виконують тільки арифметичні операції: додавання, віднімання, множення (зокрема піднесення до цілочислового степеня), ділення, і пишуть: $y = R(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$.

I. Інтегрування довільних раціональних функцій від $\sin x$, $\cos x$:

$$I = \int R(\sin x, \cos x) dx. \quad (22.17)$$

Загальний підхід до інтегрування таких функцій полягає в застосуванні підстановки $t = \operatorname{tg}(x/2)$, яку називають **універсальною тригонометричною підстановкою**. За допомогою неї підінтегральна функція стає раціональним алгебраїчним дробом $r(t)$. Дійсно:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow \left(x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right),$$

як бачимо, dx є раціональною функцією від змінної t .

Із залученням тригонометричних формул подання функцій $\sin x$, $\cos x$ через тангенс половинного кута:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

заданий інтеграл набуває такого вигляду:

$$I = \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int r(t) dt,$$

оскільки результатами арифметичних операцій над дробами є дробі.



Наведімо приклади застосування універсальної тригонометричної підстановки до інтегралів такого вигляду:

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}, \quad \int \frac{dx}{\sin^n x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^n x}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x + 5} &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \frac{2t}{1+t^2} + 5} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2 \int \frac{dt}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} + C; \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^3} = \frac{1}{4} \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2t^2} + 2 \ln|t| + \frac{t^2}{2} \right) + C = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2} \right) + C;$$

$$3) \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \left| \cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \right| = \int \frac{1}{\sin^3 \left(\frac{\pi}{2} + x \right)} dx = \left| \begin{matrix} z = \frac{\pi}{2} + x \\ dz = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{\sin^3 z} dz =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2}} + 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{z}{2}}{2} \right) + C = \left| z = \frac{\pi}{2} + x \right| =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)} + 2 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right) + C;$$

$$4) \int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{1 - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{1+t^2-2t+1-t^2}{1+t^2+2t-1+t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2-2t}{2t^2+2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{1-t}{t^2+t} \cdot \frac{dt}{1+t^2}.$$

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом. Виконаймо його розкладання на суму найпростіших:

$$\frac{1-t}{(t^2+t)(1+t^2)} = \frac{1-t}{t(t+1)(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

Після множення обох частин рівності на $t(t+1)(1+t^2)$ маємо:

$$1-t = A(t+1)(t^2+1) + Bt(t^2+1) + (Ct+D)t(t+1).$$

Визначаймо коефіцієнти A, B, C, D , для чого підставмо в ліву та праву частини останньої рівності корені знаменника:

$$\begin{array}{l|l} t=0 & 1=A, \\ t=-1 & 2=-2B \Rightarrow B=-1. \end{array}$$

Для обчислення параметрів C і D прирівняймо коефіцієнти при однакових степенях t в лівій і правій частинах рівності, у результаті чого дістанемо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{array}{l|l} t^3 & A+B+C=0, \\ t & A+B+D=-1. \end{array}$$

Підставляймо в систему $A=1, B=-1$. Тоді $C=0, D=-1$.

Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x} dx &= 2 \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= 2(\ln|t| - \ln|t+1| - \arctg t) + C = 2 \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| - 2 \arctg t + C = \\ &= 2 \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| - 2 \arctg \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C = 2 \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| - 2x + C. \end{aligned}$$

Універсальна тригонометрична підстановка часто призводить до громіздких виразів, тому доцільно розглянути окремі випадки інтегралів типу $I = \int R(\sin x, \cos x) dx$.

II. Інтегрування функцій, непарних (парних) щодо синуса або (і) косинуса. Функцію $R(\sin x, \cos x)$ називають **непарною** щодо функції $\sin x$ ($\cos x$), якщо виконано таку умову:

$$\begin{aligned} R(-\sin x, \cos x) &= -R(\sin x, \cos x) \\ (R(\sin x, -\cos x) &= -R(\sin x, \cos x)), \end{aligned}$$

тобто знак функції змінюється на протилежний, якщо в ній замінити $\sin x$ на $(-\sin x)$ ($\cos x$ на $(-\cos x)$).

Функцію $R(\sin x, \cos x)$ називають **парною** щодо функцій $\sin x$ і $\cos x$, якщо виконано таку умову:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

тобто функція не змінюється, якщо в ній одночасно замінити $\sin x$ на $(-\sin x)$, а $\cos x$ на $(-\cos x)$.

Правило введення нової змінної. Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$:

1) є *непарною* щодо функції $\sin x$ ($\cos x$), то виконують підстановку $t = \cos x$ ($t = \sin x$) і застосовують тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) є *парною* щодо функцій $\sin x$ і $\cos x$, то виконують підстановку $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$ і застосовують такі тотожності:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad (22.18)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}. \quad (22.19)$$



Знайдімо такий невизначений інтеграл: $I_1 = \int \frac{dx}{\cos x (1 + \sin^2 x)}$.

Підінтегральна функція є непарною щодо функції $\cos x$:

$$R(-\cos x, \sin x) = \frac{1}{-\cos x (1 + \sin^2 x)} = -\frac{1}{\cos x (1 + \sin^2 x)},$$

тому виконуємо підстановку $t = \sin x$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{\cos x (1 + \sin^2 x)} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x, \quad dt = \cos x \, dx \\ 1 + \sin^2 x = 1 + t^2 \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{(t^2 - 1)(t^2 + 1)} = \\ &= -\int \frac{dt}{(t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)} = -\int \left(\frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t + 1} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1} \right) dt. \end{aligned}$$

Пропонуймо самотійно визначити невідомі коефіцієнти в чисельниках елементарних РАД і виконати інтегрування суми дробів.

Якщо в підінтегральній функції інтеграла I_1 показник степеня косинуса збільшити на одиницю, то вона стане парною щодо $\cos x$ і $\sin x$, і тоді слід виконати підстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \sin^2 x)} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, \quad dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ 1 + \sin^2 x = 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 + 2t^2}{1 + t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{t^2 + 1}{2t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(2t^2 + 1) + 1}{2t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{(\sqrt{2}t)^2 + 1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) \right) + C = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) \right) + C. \end{aligned}$$

III. Інтегрування добутку цілих степенів синуса й косинуса:

$$I = \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx, \quad m \in \mathbf{Z}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad \text{крім } m = n = 0. \quad (22.20)$$

Такі невизначені інтеграли є окремим випадком розглянутих раніше (див. II випадок).

Вибір прийнятної підстановки залежить від непарності (парності) показників степенів множників, тому якщо:

- 1) m є непарним, то покладаймо $t = \cos x$;
- 2) n є непарним, то покладаймо $t = \sin x$;
- 3) m і n є парними, то покладаймо $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$.

У третьому випадку часто, замість запропонованих підстановок, використовують формули зниження степеня (тригонометричних функцій), які дозволяють у ряді випадків уникнути введення нової змінної:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \\ \sin x \cdot \cos x &= \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x). \end{aligned} \quad (22.21)$$



Знайдімо такий інтеграл: $\int \sin^{-4} x \cos^5 x dx$.

Оскільки підінтегральна функція містить $\cos x$ у непарному степені ($n=5$), то виконуймо підстановку $t = \sin x$, а $\cos^5 x$ подаймо як добуток $\cos x \cdot \cos^4 x$ і застосуємо тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\begin{aligned} \int \sin^{-4} x \cos^5 x dx &= |n=5| = \int \frac{\cos^4 x \cos x}{\sin^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x, dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{(1-t^2)^2}{t^4} dt = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt = \\ &= \int (t^{-4} - 2t^{-2} + 1) dt = \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{2t^{-1}}{-1} + t + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C. \end{aligned}$$

IV. Інтегрування добутку перших степенів синусів і косинусів, що мають різні аргументи:

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx, \int \cos mx \cdot \cos nx dx, \int \sin mx \cdot \sin nx dx, \quad (22.22)$$

де m і n – дійсні числа.

Узяття інтегралів (22.22) виконують методом безпосереднього інтегрування за допомогою таких тригонометричних формул:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = 1/2 \cdot [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = 1/2 \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = 1/2 \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$



Наприклад, візьмімо інтеграл від добутку синусів різних аргументів:

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \cdot \sin 8x dx &= |\alpha = 5x, \beta = 8x| = \frac{1}{2} \int (\cos(5x - 8x) - \cos(5x + 8x)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos 3x - \cos 13x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{13} \sin 13x \right) + C = \\ &= \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{26} \sin 13x + C. \end{aligned}$$

V. Інтегрування натуральних степенів тангенса і котангенса:

$$\int \operatorname{tg}^n x dx, \int \operatorname{ctg}^n x dx \quad (2 \leq n \in \mathbf{N}). \quad (22.23)$$

Узяття таких інтегралів виконують уведенням нової змінної $t = \operatorname{tg} x$,
 $t = \operatorname{ctg} x$, відповідно:

$$\int \operatorname{ctg}^n x dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{ctg} x, x = \operatorname{arccctg} t \\ dx = -\frac{1}{1+t^2} dt \end{array} \right| = -\int \frac{t^n}{t^2+1} dt = -\int r(t) dt, \quad (22.24)$$

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{t^n}{t^2+1} dt = \int r(t) dt, \quad (22.25)$$

де підінтегральна функція $r(t)$ є неправильним РАД, тому її інтегрування потребує виділення цілої частини цього дробу.



Знайдімо такий інтеграл: $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^6 x dx &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{ctg} x, x = \operatorname{arccctg} t \\ dx = -\frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{t^6}{t^2+1} dt = -\int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t + \operatorname{arccctg} t \right) + C = -\left(\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x + x \right) + C. \end{aligned}$$

До взяття розглянутих інтегралів (22.24) і (22.25) зводять невизначені інтеграли такого вигляду:

$$\int \frac{1}{\sin^{2n} x} dx, \int \frac{1}{\cos^{2n} x} dx \quad (2 \leq n \in \mathbf{N}). \quad (22.26)$$

Дійсно, якщо використати співвідношення (22.18), (22.19), то отримаємо:

$$\int \frac{1}{\sin^{2n} x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)^n dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^n dx,$$

$$\int \frac{1}{\cos^{2n} x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^n dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^n dx.$$

Після розкриття дужок маємо невизначений інтеграл від суми степенів $\operatorname{ctg} x$ чи $\operatorname{tg} x$.



Знайдімо такий інтеграл: $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^4 x} dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^2 + 1} dt = \int (t^2 + 1) dt = \frac{t^3}{3} + t + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

VI. Інтегрування квадратичних ірраціональностей (тригонометричні підстановки). Загальний підхід до раціоналізації відповідних інтегралів:

$$\int R\left(x, \sqrt{\pm a^2 \pm x^2}\right) dx, \quad (22.27)$$

у яких розглядають усі пари знаків, крім $(-, -)$, полягає в застосуванні підстановок виду $x = \psi(t)$, за допомогою яких підінтегральна функція стає раціонально залежною від тригонометричних функцій.

У табл. 22.2 наведено відповідні заміни змінної.

Таблиця 22.2

Тригонометричні підстановки для раціоналізації невизначених інтегралів

№ з/п	Види невизначених інтегралів	Відповідні підстановки	
		перша	друга
1	$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$	$x = a \cdot \sin t, dx = a \cdot \cos t dt,$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cdot \cos t$	$x = a \cdot \cos t$
2	$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$	$x = a \cdot \operatorname{tg} t, dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt,$ $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{a}{\cos t}$	$x = a \cdot \operatorname{ctg} t$
3	$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$	$x = \frac{a}{\sin t}, dx = -\frac{a \cos t}{\sin^2 t} dt,$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = a \cdot \operatorname{ctg} t$	$x = \frac{a}{\cos t}$

Аналізуючи підстановки, переконуймося, що x , dx і квадратні корені із двочленів є раціонально залежними від функцій $\sin x$, $\cos x$.

Наприклад:

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx = \int R(asint, acost) acost dt = \int r(sint, cost) dt.$$

Для того щоб позбутися кореня в інтегралах 1, 2, 3 (див. табл. 22.2), використовують, відповідно, такі тригонометричні формули:

$$1) \begin{cases} 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \\ 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 = \operatorname{ctg}^2 \alpha \\ \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha \end{cases}.$$



Знайдімо такий інтеграл: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$.

Під знаком радикала маємо суму квадратів, тому покладаймо $x = 3\operatorname{tg} t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}} &= \left| \begin{array}{l} x = 3\operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{3}{\cos^2 t} dt \\ \sqrt{x^2 + 9} = 3\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \frac{3}{\cos t} \end{array} \right| = \int \frac{1}{3\operatorname{tg} t} \cdot \frac{\cos t}{3} \cdot \frac{3}{\cos^2 t} dt = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sin t} dt = \frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \left| t = \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \right| = \frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg}(x/3)}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Відповідь можна дещо спростити, якщо задіяти формулу тангенса половинного кута та деякі інші співвідношення:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{t}{2} &= \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} - \operatorname{ctg} t = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t} - \operatorname{ctg} t = \\ &= \left| \operatorname{tg} t = \frac{x}{3} \Rightarrow \operatorname{ctg} t = \frac{3}{x} \right| = \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} - \frac{3}{x} = \frac{\sqrt{9 + x^2} - 3}{x}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{9 + x^2} - 3}{x} \right| + C.$$



Ключові терміни

Раціональні алгебраїчні дробу (елементарні, правильні, неправильні); виділення цілої частини дробу; розкладання правильного дробу на суму елементарних; метод невизначених коефіцієнтів; раціоналізація підінтегральної функції; інтеграли, що не беруть у скінченному вигляді; універсальна тригонометрична підстановка; найпростіші ірраціональності; тригонометричні підстановки для раціоналізації.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають раціональним алгебраїчним дробом (РАД)?
2. Які РАД називають правильними (неправильними)?
3. Як виконують виділення цілої частини неправильного РАД?
4. Як відбувається розкладання правильного РАД на суму елементарних дробів?
5. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів для встановлення параметрів розкладу правильного РАД на суму елементарних?
6. Як інтегрують елементарні РАД I, II і III типів?
7. Якими підстановками раціоналізують найпростіші алгебраїчні ірраціональності?
8. Про які інтеграли кажуть, що їх «не можна взяти в скінченному вигляді»?
9. Якими тригонометричними підстановками інтегрують квадратичні ірраціональності виду: $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$?
10. Як раціоналізують інтеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$? Яку підстановку називають універсальною тригонометричною?
11. Як інтегрують добуток цілих степенів синуса й косинуса одного аргументу?
12. Які підстановки застосовують для взяття інтеграла, якщо підінтегральна функція є непарною щодо синуса; непарною щодо косинуса; парною щодо синуса та косинуса?
13. Як інтегрують добуток перших степенів синусів і косинусів, що мають різні аргументи?
14. Як беруть інтеграли від натуральних степенів тангенса й котангенса?



Тестові завдання до підрозділу 22

1. Укажіть, у якому символічному записі під час інтегрування елементарних РАД I та II типів допущено помилку:

а) $\int \frac{4}{x+2} dx = 4 \ln|x+2| + C$;

б) $\int \frac{8}{(x-3)^2} dx = -\frac{8}{x-3} + C$;

в) $\int \frac{10}{(x+1)^6} dx = -\frac{2}{(x+1)^5} + C$;

г) $\int \frac{9}{(x-4)^7} dx = \frac{3}{2 \cdot (x-4)^6} + C$.

2. Укажіть, який із дробів є найпростішим дробом III типу:

а) $\frac{4x-3}{x^2+4x+9}$;

б) $\frac{2x+1}{x^2-6x-16}$;

в) $\frac{5x-2}{x^2-10x+25}$;

г) $\frac{9x+8}{(x^2+8x+17)^2}$.

3. Укажіть, який розклад РАД $\frac{8x+5}{(x^2-3x-4)(x+1)^2}$ на суму елементарних

дробів є правильним:

а) $\frac{A}{(x+1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2-3x-4}$;

б) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-3x-4}$;

в) $\frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3};$

г) $\frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}.$

4. За допомогою якої підстановки раціоналізують інтеграл $\int \frac{\sqrt{2x+5}}{1+\sqrt[4]{2x+5}} dx:$

а) $x=t^8;$

б) $2x+5=t^4;$

в) $t=x^4;$

г) $2x+5=t^2?$

5. За допомогою якої підстановки раціоналізують інтеграл $\int \sqrt{\frac{x+1}{(x-3)^3}} dx:$

а) $x-3=t^2;$

б) $\frac{x+1}{x-3}=t^2;$

в) $x=t^2;$

г) $\frac{x+1}{x-3}=t^3?$

6. Для інтегрування якої ірраціональності слід застосувати підстановку $x=a \cdot \operatorname{tg} t:$

а) $\sqrt{a^2+x^2};$

б) $\sqrt{a^2-x^2};$

в) $\sqrt{x^2-a^2};$

г) $\sqrt{x+a}?$

7. За допомогою якої підстановки раціоналізують інтеграл $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}}{6 \cdot \sqrt[4]{x^5}} dx:$

а) $x=t^{20};$

б) $t=x^6;$

в) $x = t^{12}$;

г) $t = x^{10}$?

8. Яку підстановку слід застосувати для взяття інтеграла $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$:

а) $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

б) $t = \sin x$;

в) $t = \cos x$;

г) $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$?

9. Укажіть, до якого з інтегралів слід застосувати заміну $t = \sin x$ ($n \in \mathbf{N}$):

а) $\int (\sin x)^{2n} (\cos x)^{2n+1} dx$;

б) $\int (\sin x)^{2n+1} \cdot (\cos x)^{2n} dx$;

в) $\int (\sin x)^{2n} \cdot (\cos x)^{2n} dx$;

г) $\int \frac{(\cos x)^{2n}}{(\sin x)^{2n+1}} dx$.

10. Укажіть, до якого з інтегралів слід застосувати заміну $t = \operatorname{ctg} x$ ($n \in \mathbf{N}$):

а) $\int \frac{1}{(\cos x)^{2n}} dx$;

б) $\int \operatorname{tg}^n x dx$;

в) $\int (\sin x)^{2n} dx$;

г) $\int \operatorname{ctg}^n x dx$.

Література: [1 – 4; 7 – 15; 17 – 23].

23. Визначений інтеграл. Теорема Ньютона – Лейбніца. Методи інтегрування

Основні питання:

23.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.

23.2. Основні властивості визначеного інтеграла.

23.3. Зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами. Формула Ньютона – Лейбніца.

23.4. Методи обчислення визначеного інтеграла.

23.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Нехай невід'ємна функція $y = f(x)$ є визначеною і неперервною на відрізку $[a, b]$, де a і b – скінченні числа.

1. Задача про площу криволінійної трапеції. Нехай плоску фігуру обмежено зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу – віссю Ox , із боків – вертикальними прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 23.1). Описану фігуру називають **криволінійною трапецією** для $f(x)$ на $[a, b]$. Потрібно обчислити її площу.

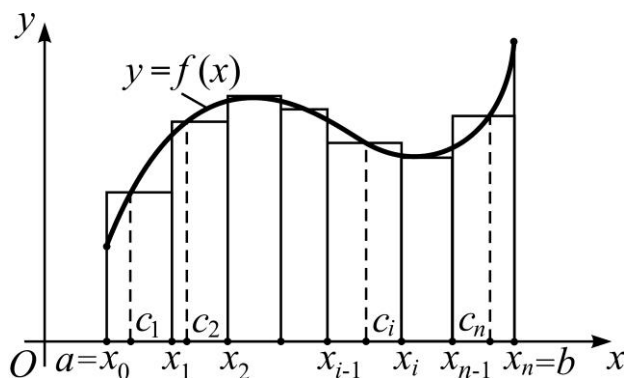


Рис. 23.1. Побудова інтегральної суми для $f(x)$ на $[a, b]$

Для розв'язання задачі виконаймо такі дії:

1) розбиймо відрізок $[a, b]$ на довільних n частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b;$$

2) виберімо на кожному з часткових відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, довільну точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Довжину часткового відрізка $[x_{i-1}, x_i]$ позначмо через Δx_i :
 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;

3) *обчислимо* значення функції $f(x)$ у точках c_i і *складімо* суму добутків цих значень із довжинами часткових відрізків:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_i)\Delta x_i + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i. \quad (23.1)$$

Суму S_n називають **інтегральною сумою** для функції $f(x)$ на відрізок $[a, b]$. Геометричний зміст цієї суми є очевидним – це сума площ прямокутників з основами $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ та висотами $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)$;

4) *визначмо* границю суми S_n за умови, що найбільша з довжин часткових відрізків прямує до нуля ($\max \Delta x_i \rightarrow 0$), а кількість точок розбиття необмежено зростає ($n \rightarrow \infty$).

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n за умови, що $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$, то її приймають за числове значення площі S криволінійної трапеції для $f(x)$ на $[a, b]$:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i. \quad (23.2)$$

2. Задача про пройдений шлях. Нехай швидкість прямолінійного руху матеріальної точки задано як функцію часу $v(t) = f(t)$.

Потрібно визначити шлях S , який пройде точка за проміжок часу від T_1 до T_2 .

Якщо швидкість не змінюється протягом часу, тобто $f(t)$ є сталою величиною, то шлях ΔS , пройдений точкою за проміжок часу $[t, t + \Delta t]$, обчислюють за такою формулою: $\Delta S = f(t)\Delta t$.

У разі змінної швидкості виконують ті самі дії, що й у попередній задачі:

1) *розбиймо* відрізок $[T_1, T_2]$ на n часткових проміжків часу $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$, точками:

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T_2;$$

2) *виберімо* на кожному з відрізків часу $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$, довільну точку $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$;

3) *обчислимо* значення швидкості $f(t)$ у точках $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$, тобто $f(c_i)$ та *визначмо* шлях ΔS_i , пройдений точкою за проміжок часу

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, як добуток $\Delta S_i = f(c_i)\Delta t_i$. Тоді весь шлях S , пройдений за час $[T_1, T_2]$, наближено визначають як інтегральну суму S_n для функції $v(t) = f(t)$ на відрізок $[T_1, T_2]$:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta t_i; \quad (23.3)$$

4) *визначмо* границю інтегральної суми S_n за умови, що $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n за умови, що $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$, то її приймають за числове значення шляху S , пройденого матеріальною точкою за проміжок часу $[T_1, T_2]$:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta t_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta t_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta t_i. \quad (23.4)$$

3. Задача про обсяг продукції. Нехай функція $z = f(t)$ описує залежність продуктивності праці z деякого виробництва від часу t .

Потрібно визначити обсяг продукції U , виробленої за проміжок часу $[0, T]$.

Якщо продуктивність праці не змінюють протягом часу, тобто $f(t)$ є сталою величиною, то обсяг продукції ΔU , виробленої за проміжок часу $[t, t + \Delta t]$, обчислюють за такою формулою: $\Delta U = f(t)\Delta t$.

У разі, якщо продуктивність праці протягом часу змінюють, то виконують ті самі дії, що й у двох попередніх задачах:

1) *розбиймо* відрізок $[0, T]$ на довільні проміжки часу $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$, точками:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T;$$

2) *виберімо* на кожному з відрізків $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$, довільну точку $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$;

3) *обчислимо* продуктивність праці в кожній точці $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, тобто $f(c_i)$, та *визначмо* обсяг продукції ΔU_i , виробленої за проміжок часу $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, як добуток $\Delta U_i = f(c_i)\Delta t_i$. Тоді повний обсяг продукції U ,

виробленої за проміжок часу $[0, T]$, наближено визначають як інтегральну суму для функції $z = f(t)$ на відрізку $[0, T]$:

$$U_n = \sum_{i=1}^n \Delta U_i = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta t_i; \quad (23.5)$$

4) визначмо границю інтегральної суми U_n за умови, що $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми U_n за умови, що $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$, то її приймають за числове значення обсягу продукції U , виробленої за проміжок часу $[0, T]$:

$$U = \lim_{\substack{\max \Delta t_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} U_n = \lim_{\substack{\max \Delta t_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta t_i. \quad (23.6)$$

Слід зазначити, що під час розв'язання всіх трьох розглянутих задач, було виконано одні й ті самі дії, у результаті яких кожного разу виникала потреба визначити границю відповідної інтегральної суми.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, визначена за умови, що найбільша з довжин часткових відрізків прямує до нуля ($\max \Delta x_i \rightarrow 0$), а кількість точок розбиття необмежено зростає ($n \rightarrow \infty$), то цю границю називають **визначеним інтегралом** функції $f(x)$

на відрізку $[a, b]$ і позначають $\int_a^b f(x) dx$.

Отже, за означенням:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\max \Delta t_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta t_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad (23.7)$$

де a, b – межі інтегрування (a – нижня, b – верхня);

$[a, b]$ – відрізок (шлях, область) інтегрування;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

dx – диференціал змінної інтегрування;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Теорема 23.1 (теорема існування визначеного інтеграла). Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$ або обмеженою на ньому і має скінченну кількість точок розриву I роду, то існує скінченна границя інтегральної суми (тобто визначений інтеграл), і вона не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a, b]$ на частини, ні від вибору точок усередині них для складання інтегральної суми.

Теорему існування визначеного інтеграла наводьмо без доведення.

Функцію $y = f(x)$, для якої на відрізку $[a, b]$ існує визначений інтеграл, називають **інтегрованою** на цьому відрізку.

Із задачі про площу криволінійної трапеції випливає *геометричний зміст визначеного інтеграла*: визначений інтеграл від невід'ємної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ чисельно дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

23.2. Основні властивості визначеного інтеграла

Доведення всіх властивостей визначеного інтеграла ґрунтується на властивостях границь (у застосуванні до інтегральних сум) із залученням, для наочності та кращого розуміння, геометричного змісту визначеного інтеграла.

1 (про інтеграл із рівними межами інтегрування). Для будь-якої інтегрованої функції $f(x)$ визначений інтеграл із рівними межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad (23.8)$$

адже криволінійна трапеція вироджується у вертикальний відрізок.

2 (про зміну знака). Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл змінить свій знак на протилежний:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad (23.9)$$

це можна пояснити тим, що в інтегральній сумі прирости $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$ змінять знак на протилежний.

3 (про сталий множник). Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx, \quad k - \text{const}, \quad (23.10)$$

оскільки k як спільний множник доданків інтегральної суми можна винести за символ суми і, відповідно, за знак границі.

4 (про визначений інтеграл від суми функцій). Інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (23.11)$$

Справедливість рівності (23.11) випливає з того, що інтегральну суму лівої частини рівності можна подати у вигляді алгебраїчної суми двох інтегральних сум:

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) \pm \varphi(x_i)) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i \pm \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \cdot \Delta x_i,$$

а за властивістю границі суми функцій і маємо (23.11).

Властивість **4** можна поширити на будь-яку скінченну кількість доданків.

5 (про адитивність). Якщо відрізок інтегрування $[a, b]$ розбито на дві частини, які не мають спільних внутрішніх точок, то визначений інтеграл на $[a, b]$ дорівнює сумі інтегралів на частинах розбиття:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b, \quad (23.12)$$

оскільки за геометричним змістом визначеного інтеграла такому розбиттю відповідають дві криволінійні трапеції, сума площ яких дорівнює площі вихідної трапеції.

Властивість **5** також можна поширити на будь-яку скінченну кількість частин розбиття.

6 (про перехід до визначеного інтеграла в нерівностях). Якщо на відрізку $[a, b]$ значення функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ є пов'язаними нерівністю $f(x) \leq \varphi(x)$

($f(x) \geq \varphi(x)$), то такою самою за знаком нерівністю пов'язано визначені інтеграли від цих функцій:

$$\begin{aligned} f(x) \leq \varphi(x) &\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx \\ \left(f(x) \geq \varphi(x) &\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx \right). \end{aligned} \quad (23.13)$$

Дійсно, для одного й того самого розбиття відрізка $[a, b]$ на частини доданки інтегральної суми для $f(x)$ і $\varphi(x)$ будуть пов'язаними тим самим знаком нерівності, що й самі функції, а граничний перехід не змінить знака нерівності.

7 (про межі значень визначеного інтеграла). Якщо M і m , відповідно, найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ ($a < b$), то:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a). \quad (23.14)$$

За теоремою 14.7 (див. підрозд. 14): якщо функція $f(x)$ є визначеною і неперервною на відрізку $[a, b]$, то серед її значень на цьому відрізку існують найменше (m) і найбільше (M), тобто $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ (рис. 23.2).

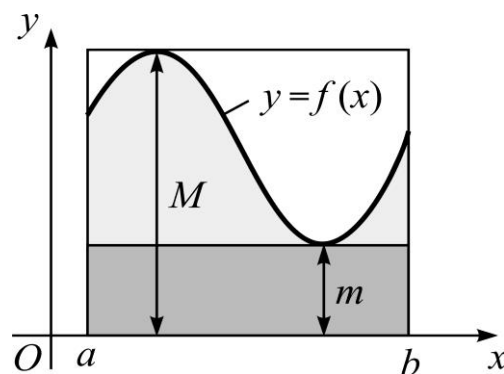


Рис. 23.2. Межі значень визначеного інтеграла

На цій підставі площа криволінійної трапеції для $f(x)$ на $[a, b]$ (тобто визначений інтеграл від $f(x)$ на $[a, b]$) не може бути меншою (більшою), ніж площа прямокутника з основою $(b - a)$, висота якого є найменшим m (найбільшим M) значенням функції на $[a, b]$, звідси й випливає справедливість теореми.

8 (теорема про середнє значення). Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$, то на ньому існує така точка $\xi \in [a, b]$, що:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b - a). \quad (23.15)$$

Таких точок на відрізку $[a, b]$ може бути декілька.

Геометрично це означає, що площа криволінійної трапеції для $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ дорівнює площі прямокутника з основою $(b - a)$ і висотою $f(\xi)$ (рис. 23.3).

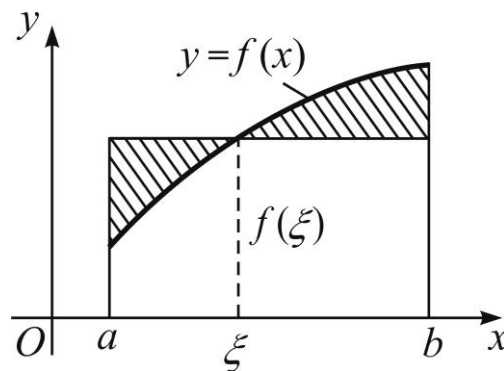


Рис. 23.3. Середнє значення функції $f(x)$ на $[a, b]$

Величину

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \quad (23.16)$$

називають **середнім значенням** функції на відрізку $[a, b]$.

23.3. Зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами.

Формула Ньютона – Лейбніца

Якщо функція $y = f(x)$ є інтегрованою на відрізку $[a, b]$, тоді вона є інтегрованою на будь-якому відрізку $[a, x]$, де $x \in [a, b]$. Тобто для довільного $x \in [a, b]$ існує інтеграл $\int_a^x f(u)du$, який є функцією від x . Позначмо її через $F(x)$:

$$F(x) = \int_a^x f(u)du. \quad (23.17)$$

Інтеграл (23.17) називають **інтегралом зі змінною верхньою межею**, у ньому змінну інтегрування позначмо через u , щоб не плутати її з верхньою межею x , адже визначений інтеграл як число не залежить від того, якою буквою позначити змінну інтегрування.

За умови, що $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$ функція $F(x)$ геометрично дорівнює площі криволінійної трапеції, основою якої є проміжок $[a, x]$ (рис. 23.4).

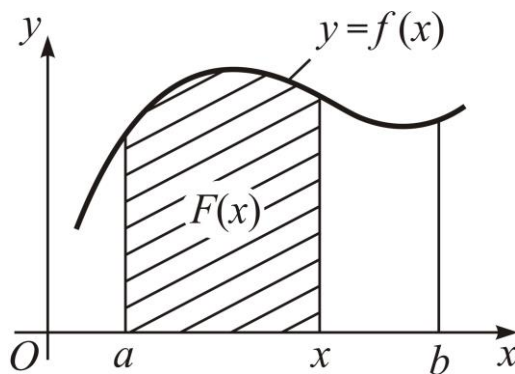


Рис. 23.4. Змінна площа криволінійної трапеції

Зрозуміло, що $F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$, а $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ – це площа криволінійної трапеції для $f(x)$ на $[a, b]$.

Теорема 23.2. Похідна визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею за верхньою межею дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(u) du \right)' = f(x). \quad (23.18)$$

Доведення. За умовою функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$, тому вона є неперервною на будь-якому відрізку $[a, x]$, $x \in [a, b]$. Надаймо аргументу x приріст Δx , тоді функція $F(x)$ також отримає деякий приріст $\Delta F(x)$. За властивістю 5 (про адитивність) визначеного інтеграла, маємо:

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(u) du - \int_a^x f(u) du = \\ &= \int_a^x f(u) du + \int_x^{x+\Delta x} f(u) du - \int_a^x f(u) du = \int_x^{x+\Delta x} f(u) du. \end{aligned}$$

Застосуємо до приросту $\Delta F(x)$ властивість **8** (теорему про середнє значення) на відрізку $[x, x + \Delta x]$:

$$\Delta F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(u) du = f(\xi)[(x + \Delta x) - x] = f(\xi)\Delta x,$$

де $\xi \in [x, x + \Delta x]$.

Визначмо границю відношення $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ за умови, що $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi).$$

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $x + \Delta x \rightarrow x$ і $\xi \rightarrow x$, тому, із неперервності функції $f(x)$, остаточно маємо:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x). \blacksquare$$

Рівність $F'(x) = f(x)$ означає, що функція $F(x)$ є однією з первісних для $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, тому, згідно з означенням невизначеного інтеграла як однопараметричної сім'ї первісних, маємо:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(x) dx = \int_a^x f(u) du + C. \quad (23.19)$$

Ф-ла (23.19) описує зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами, а саме: невизначений інтеграл є сумою визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування та довільної дійсної сталої.

Теорема 23.3 (основна формула інтегрального числення). Якщо функція $f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a, b]$, то визначений інтеграл від $f(x)$ на $[a, b]$ є різницею значень будь-якої з її первісних $F(x)$ у точках b і a :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (23.20)$$

Ф-ла (23.20) має назву **формули Ньютона – Лейбніца**.

Доведення ґрунтується на співвідношенні (23.19), яке дозволяє будь-яку первісну для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ записати так:

$$F(x) = \int_a^x f(u) du + C.$$

Підставляючи замість x по черзі a і b , маємо ф-лу (23.20):

$$\left[\begin{array}{l} x = a: F(a) = \int_a^a f(u) du + C = C, \\ x = b: F(b) = \int_a^b f(u) du + C \end{array} \right. \Rightarrow \int_a^b f(u) du = F(b) - C = F(b) - F(a),$$

бо змінну інтегрування можна позначати будь-якою буквою. ■

Оскільки всі первісні відрізняються одна від одної лише константою, то різниця $F(b) - F(a)$ не залежить від вибору $F(x)$.

Для позначення різниці $F(b) - F(a)$ використовують символ подвійної підстановки $\Big|_a^b$, тому формулу Ньютона – Лейбніца записують ще й так:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (23.21)$$

Зауважмо, що саме формула Ньютона – Лейбніца відображає тісний зв'язок між невизначеним і визначеним інтегралами. За цією формулою обчислення визначеного інтеграла зведено до виконання *двох кроків*:

- 1) визначення однієї з первісних $F(x)$ для $f(x)$ на $[a, b]$ (по суті це взяття невизначеного інтеграла);
- 2) обчислення різниці значень $F(x)$ у точках b і a .



Обчислімо такий визначений інтеграл: $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$.

Зазвичай кроки 1 і 2 виконують одним ланцюжком:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

23.4. Методи обчислення визначеного інтеграла

Безпосереднє визначене інтегрування. Оскільки обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона – Лейбніца передбачає спочатку взяття невизначеного інтеграла, а потім виконання арифметичних дій, тому безпосереднє визначене інтегрування передбачає безпосереднє невизначене інтегрування (визначення однієї з первісних).



Обчислімо такі визначені інтеграли:

$$\begin{aligned} 1) \int_1^8 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx &= \int_1^8 \left(x + 2 \cdot \frac{x^{1/2}}{x^{1/3}} + \frac{1}{x^{2/3}} \right) dx = \int_1^8 x dx + 2 \int_1^8 x^{1/6} dx + \int_1^8 x^{-2/3} dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^{7/6}}{7/6} + \frac{x^{1/3}}{1/3} \right) \Big|_1^8 = \frac{x^2}{2} \Big|_1^8 + \frac{12}{7} \cdot (x \cdot \sqrt[6]{x}) \Big|_1^8 + 3 \cdot \sqrt[3]{x} \Big|_1^8 = \\ &= \frac{1}{2} (64 - 1) + \frac{12}{7} (8\sqrt{2} - 1) + 3(2 - 1) = \frac{1}{14} (459 + 192\sqrt{2}) \approx 52,18; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} &= \int_{-2}^{-1} (11+5x)^{-3} dx = \left(-\frac{1}{10(11+5x)^2} \right) \Big|_{-2}^{-1} = \\ &= -\frac{1}{10} \left(\frac{1}{(11+5 \cdot (-1))^2} - \frac{1}{(11+5 \cdot (-2))^2} \right) = -\frac{1}{10} \left(\frac{1}{36} - 1 \right) = \frac{7}{72}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int_0^1 \frac{x^2+2}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \frac{(x^2+1)+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = (x + \arctg x) \Big|_0^1 = \\ &= (1 + \arctg 1) - (0 + \arctg 0) = 1 + \frac{\pi}{4} \approx 1,79. \end{aligned}$$

Визначене інтегрування методом заміни змінної (або методом підстановки). Нагадаймо, що існує два види підстановок, які використовують у разі інтегрування із застосуванням нової змінної: $t = \varphi(x)$ і $x = \psi(t)$.

Нехай у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x) dx$ виконано підстановку $x = \psi(t)$.

Теорема 23.4 (про заміну змінної у визначеному інтегралі). Якщо:

1) функція $\psi(t)$ і її похідна $\psi'(t)$ є неперервними на відрізку $[\alpha, \beta]$;

2) $\psi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$ і $a < \psi(t) < b \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$;

3) складена функція $f(\psi(t))$ є неперервною на $[\alpha, \beta]$, то має місце така рівність:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t)) d\psi(t). \quad (23.22)$$

Доведення ґрунтується на зв'язку між невизначеним і визначеним інтегралами.

Оскільки:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

тому

$$\int f(\psi(t)) d\psi(t) = F(\psi(t)) + C,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t)) d\psi(t) = F(\psi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\psi(\beta)) - F(\psi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Порівнюючи результати інтегрування за змінними x і t , маємо справедливність ф-ли (23.22). ■



Зазначмо, що в разі обчислення визначеного інтеграла методом підстановки після відшукування первісної функції немає потреби повертатися до вихідної змінної, замість цього потрібно визначити межі інтегрування за новою змінною.

Підстановку $t = \varphi(x)$ у разі існування оберненої до $\varphi(x)$ функції зводять до розглянутої:

$$t = \varphi(x) \Rightarrow x = \varphi^{-1}(t) = \psi(t).$$



Обчислимо такі визначені інтеграли:

$$1) \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3, \quad dx = 3x^2 dx, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{3} e^t \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (e - 1) \approx 0,57;$$

$$\begin{aligned}
2) \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x=3\cos t, dx=-3\sin t dt, \\ x=0 \Rightarrow t=\pi/2, \\ x=3 \Rightarrow t=0 \end{array} \right| = \int_{\pi/2}^0 \sqrt{9-9\cos^2 t} (-3\sin t) dt = \\
&= -9 \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} (1-\cos 2t) dt = \frac{9}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
&= \frac{9}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) = \frac{9\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Розгляньмо випадок, коли під час обчислення визначеного інтеграла відшукання первісної потребує застосування інтегрування частинами.

Теорема 23.5 (формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла). Якщо у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ підінтегральний вираз подано у вигляді добутку $u \cdot dv$, де $u=u(x)$ і $v=v(x)$ є диференційовними на відрізку $[a, b]$ функції, то справедливим є таке співвідношення:

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (23.23)$$

Доведення. Оскільки $(uv)' = u'v + uv'$, то, за властивістю 4 визначеного інтеграла, маємо:

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx.$$

Застосовуючи до лівої частини останньої рівності формулу Ньютона – Лейбніца, а також зважаючи на те, що $u'dx = du$, а $v'dx = dv$, маємо:

$$(uv) \Big|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv,$$

звідки остаточно маємо:

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad \blacksquare$$

Співвідношення (23.23) називають **формулою інтегрування частинами** у визначеному інтегралі.

Якщо межі інтегрування є симетричними відносно нуля, то для спрощення обчислень доцільно зважати на парність і непарність підінтегральної функції:

$$f(x) - \text{парна функція} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

$$f(x) - \text{непарна функція} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Це легко обґрунтувати, спираючись на формулу Ньютона – Лейбніца.



Обчислімо такі визначені інтеграли:

$$1) \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx.$$

Підінтегральна функція є парною, тобто $f(-x) = f(x)$, тому:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx &= 2 \int_0^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x} \end{array} \right| = \\ &= 2 \left(uv \Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} v du \right) = 2 \left(\frac{x}{\cos x} \Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} \right) = 2 \left(\frac{x}{\cos x} - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \Big|_0^{\pi/3} = \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{3 \cos(\pi/3)} - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} \right) \approx 3,12; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = (x \ln(x+1)) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx = \\ &= (e-1) \ln e - \int_0^{e-1} \frac{(x+1)-1}{x+1} dx = e-1 - (x - \ln|x+1|) \Big|_0^{e-1} = \\ &= e-1 - (e-1 - \ln e) = 1. \end{aligned}$$



Ключові терміни

Інтегральна сума; визначений інтеграл; основні властивості визначеного інтеграла; площа криволінійної трапеції; інтегровна функція; середнє значення функції на проміжку; інтеграл зі змінною верхньою межею; формула Ньютона – Лейбніца; методи визначеного інтегрування (безпосереднє інтегрування, заміною змінної, інтегрування частинами).



Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає задача про: площу криволінійної трапеції; пройдений шлях матеріальної точки; обсяг виробленої продукції?
2. Що називають інтегральною сумою функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$?
3. Що називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$?
4. Як виразити за допомогою визначеного інтеграла поняття, названі в запитанні 1?
5. У чому полягає теорема про існування визначеного інтеграла?
6. Як формулюють основні властивості визначеного інтеграла?
7. Як знайти середнє значення функції на проміжку $[a, b]$?
8. У чому полягає геометричний, механічний та економічний зміст визначеного інтеграла?
9. У чому полягає принципова різниця між визначеним і невизначеним інтегралами?
10. Що називають інтегралом зі змінною верхньою межею інтегрування?
11. У чому полягає геометричний зміст інтеграла зі змінною верхньою межею за умови, що $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$?
12. Чому дорівнює похідна від визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею за цією межею?
13. Який вигляд має формула Ньютона – Лейбніца й на чому ґрунтується її доведення?
14. У чому полягає метод заміни змінної у визначеному інтегралі?
15. У чому полягає відмінність у реалізації методу заміни змінної у визначеному й невизначеному інтегралах?
16. У чому полягає метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі та який вигляд має для нього формула інтегрування частинами?



Тестові завдання до підрозділу 23

1. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то який із символічних записів не є правильним:

а) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad c_i \in [x_{i-1}, x_i];$

б) $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b);$

в) $\int_a^b f(x)dx - \int_b^a f(x)dx = 0;$

г) $\int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(u)du + C?$

2. Укажіть, яке з наведених співвідношень є правильним:

а) $\int_b^b f(x)dx = 0;$

б) $f(-x) = f(x) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 0;$

в) $f(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \geq 0;$

г) $\exists \xi \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f'(\xi)(b-a).$

3. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то у якому з наведених співвідношень допущено помилку:

а) $\int_a^b u dv + \int_a^b v du = (uv) \Big|_a^b;$

б) $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx;$

в) $a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

г) $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)?$

4. Укажіть, яке з наведених співвідношень не містить помилку:

а) $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow m(a-b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(a-b);$

б) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx;$

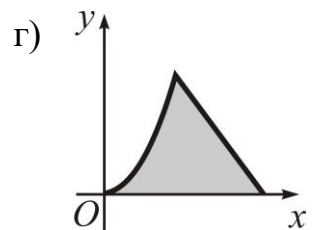
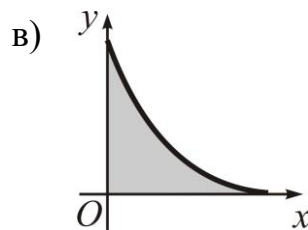
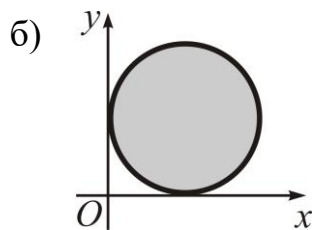
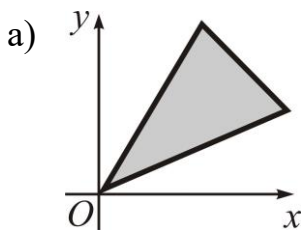
в) $\left(\int_a^x f(u)du \right)' = f(a);$

г) $\int_a^b (f(x) - k\varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx - k \int_a^b \varphi(x)dx, \text{ де } k - \text{const.}$

5. Укажіть значення параметра k , розв'язавши рівняння $\int_0^k \frac{dx}{4+x^2} = \frac{\pi}{8}:$

а) $k=2;$ б) $k=1;$ в) $k=\pi/4;$ г) $k=\pi/2.$

6. Укажіть, площу якої фігури можна обчислити, спираючись безпосередньо на геометричний зміст визначеного інтеграла:



7. Укажіть середнє значення визначеного інтеграла $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx:$

а) $\pi/3;$ б) $2/3;$ в) $\frac{4}{3\pi};$ г) $3/\pi.$

8. За властивістю 7 (про межі визначеного інтеграла), оцініть заданий визначений інтеграл $I = \int_{-1}^1 \sqrt{8+x^3} dx$:

- а) $4 \leq I \leq 6$;
- б) $\sqrt{7} \leq I \leq 3$;
- в) $2\sqrt{7} \leq I \leq 6$;
- г) $2\sqrt{2} \leq I \leq 9$.

9. Знайдіть похідну заданої функції $y = \int_x^0 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$:

- а) $y' = -\frac{2x}{1+x^2}$;
- б) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
- в) $y' = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;
- г) $y' = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$.

10. Укажіть, який із наведених визначених інтегралів не можна обчислити заміною $x = \sin t$:

- а) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;
- б) $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
- в) $\int_0^2 x^2 \cdot \sqrt{1-x^2} dx$;
- г) $\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx$.

Література: [1 – 4; 7 – 15; 17 – 23].

24. Застосування визначеного інтеграла в деяких геометричних та економічних задачах

Основні питання:

- 24.1. Обчислення площі плоскої фігури.
- 24.2. Обчислення об'ємів тіл за відомими площами поперечних перерізів.
- 24.3. Обчислення об'єму тіла обертання.
- 24.4. Обчислення довжини дуги плоскої кривої.
- 24.5. Застосування інтегралів у деяких економічних задачах.
- 24.6. Наближене обчислення визначених інтегралів.

24.1. Обчислення площі плоскої фігури

Обчислення площі плоскої фігури в декартових координатах спирається на геометричний зміст визначеного інтеграла.

1. Якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ є невід'ємною, тобто $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$ (див. рис. 23.1), то визначений інтеграл від $f(x)$ на $[a, b]$ чисельно дорівнює площі S криволінійної трапеції, обмеженої зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу – віссю Ox , із боків – вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (24.1)$$

2. Якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ є недодатною, тобто $f(x) \leq 0$ $\forall x \in [a, b]$ (рис. 24.1), то визначений інтеграл від такої функції також буде числом недодатним і тоді площа криволінійної трапеції буде дорівнювати значенню визначеного інтеграла із протилежним знаком:

$$S = - \int_a^b f(x) dx. \quad (24.2)$$

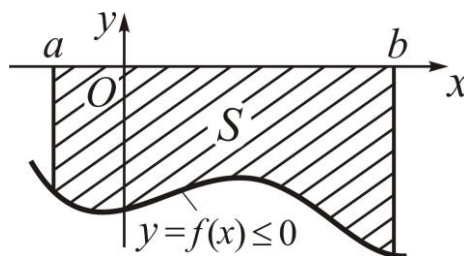


Рис. 24.1. Криволінійна трапеція для $f(x) \leq 0$ на $[a, b]$

3. Якщо криволінійну трапецію обмежено графіком неперервної на відрізку $[c, d]$ функції $x = \varphi(y)$, віссю Oy і прямими $y = c$, $y = d$, причому $\varphi(y) \geq 0 \forall y \in [c, d]$ (рис. 24.2), то її площу обчислюють за такою формулою:

$$S = \int_c^d \varphi(y) dy. \quad (24.3)$$

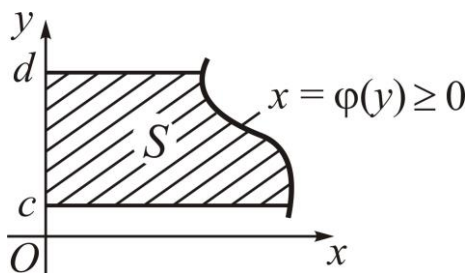


Рис. 24.2. Криволінійна трапеція для $\varphi(y) \geq 0$ на $[c, d]$

4. Якщо фігуру Φ обмежено графіком функції $y = f(x)$, яка на відрізку $[a, b]$ змінює свій знак скінченну кількість разів, і віссю Ox , то відрізок $[a, b]$ слід розбити на проміжки, на яких функція зберігає знак (рис. 24.3), і застосувати ф-ли (24.1) і (24.2):

$$S_{\Phi} = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} + S_{\Phi_3} = \int_a^{c_1} f(x) dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^b f(x) dx, \quad (24.4)$$

де c_1, c_2 — абсциси точок перетину $f(x)$ із віссю Ox , для визначення яких треба розв'язати рівняння $f(x) = 0$.

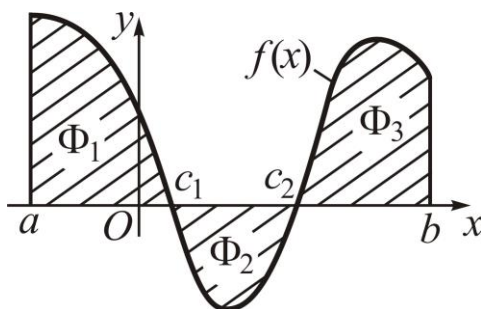


Рис. 24.3. Фігура Φ як об'єднання криволінійних трапецій: $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3$

Варто зазначити, що ф-ли (24.1) і (24.2) можна об'єднати в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (24.5)$$

5. Якщо фігуру Φ на відрізку $[a, b]$ обмежено двома кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, причому $f_1(x) \leq f_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$, то площа такої фігури є різницею площ двох криволінійних трапецій (рис. 24.4):

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx, \quad (24.6)$$

де межі інтегрування a, b є абсцисами точок перетину кривих, які визначають як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = f_1(x), \\ y = f_2(x). \end{cases}$$

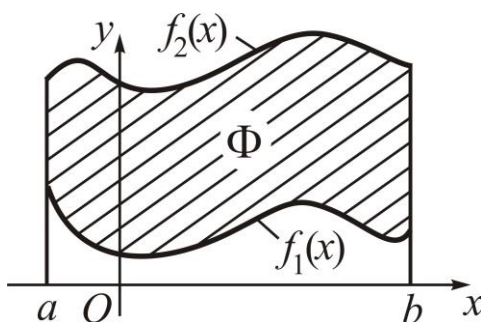


Рис. 24.4. Фігура Φ як різниця криволінійних трапецій

6. Якщо фігура Φ є об'єднанням двох (чи більшої кількості) криволінійних трапецій: $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ (рис. 24.5), то площа такої фігури є сумою площ криволінійних трапецій:

$$S = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} = \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_2(x) dx, \quad (24.7)$$

де точка c є розв'язком рівняння $f_1(x) = f_2(x)$.

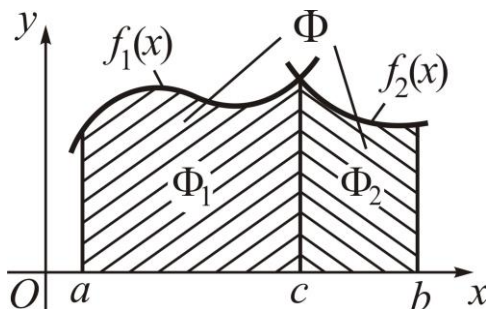


Рис. 24.5. Фігура Φ як об'єднання криволінійних трапецій



Обчислімо площу фігури Φ_1 , обмеженої графіком функції $y = x^3$, прямою $x = 1$ та віссю Ox (рис. 24.6).

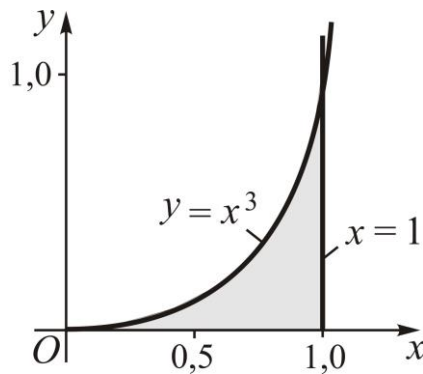


Рис. 24.6. Зображення фігури

Візуальний аналіз рис. 24.6 показує, що задана фігура є криволінійною трапецією, обмеженою зверху графіком функції $y = x^3$, знизу – відрізком $[0, 1]$ осі Ox , із боків – вертикальними прямими $x = 0$ (вісь Oy) і $x = 1$, отже, межі інтегрування такі: $a = 0$, $b = 1$.

Оскільки функція $y = x^3$ є невід'ємною на відрізку $[0, 1]$, то за ф-лою (24.1) маємо:

$$S = \int_0^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4} \text{ (кв. од.)}.$$



Обчислімо площу фігури, обмеженої такими лініями: $y = x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$ та $x = 2$ (рис. 24.7).

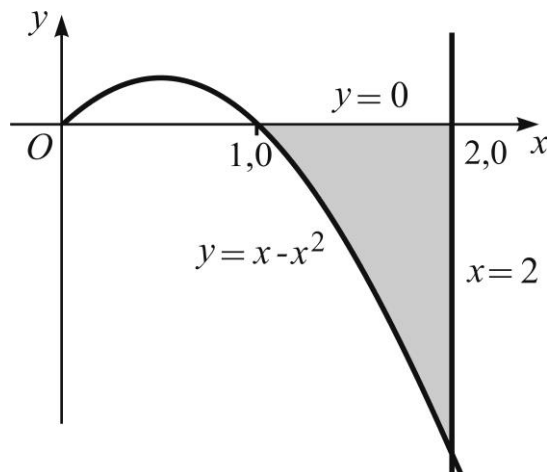


Рис. 24.7. Зображення фігури

Фігура, площу якої потрібно обчислити, є криволінійною трапецією для функції $y = x - x^2$ на відрізку $[1, 2]$, тому межі інтегрування такі: $a=1$, $b=2$.

Оскільки функція $y = x - x^2$ на відрізку $[1, 2]$ є недодатною, то, за ф-лою (24.2), маємо:

$$S = -\int_1^2 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6} \text{ (кв. од.)}.$$



Обчислимо площу фігури, обмеженої такими лініями: $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ (рис. 24.8).

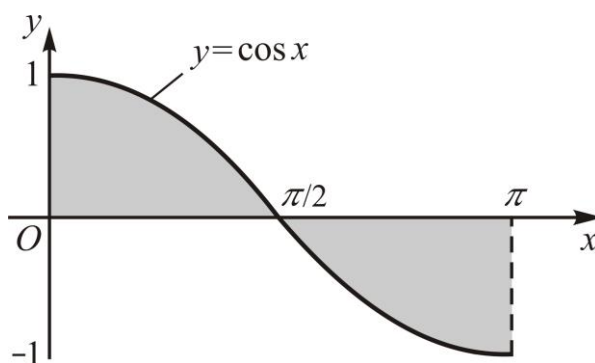


Рис. 24.8. Зображення фігури

Функція $y = \cos x$ на відрізку $[0, \pi]$ змінює свій знак у точці $x = \pi/2$. Тому, за ф-лою (24.5), маємо:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = (1 - 0) - (0 - 1) = 2 \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$



Обчислимо площу фігури, що обмежена такими лініями: $y = x^2 - 4x + 2$, $y = x - 2$ (рис. 24.9).

Для визначення меж інтегрування знаходимо точки перетину ліній, для чого розв'яжімо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2, \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, & y_1 = -1, \\ x_2 = 4, & y_2 = 2. \end{cases}$$

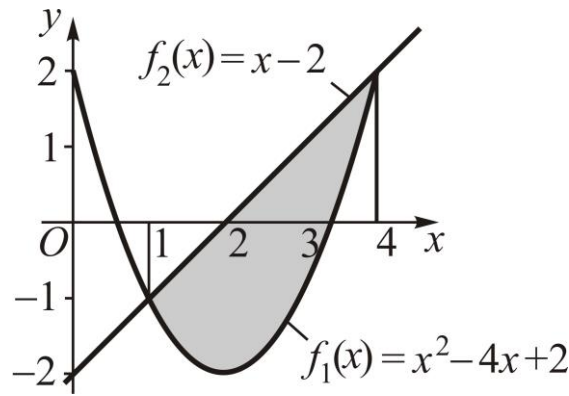


Рис. 24.9. Зображення фігури

Згідно з ф-лою (24.6), маємо:

$$S = \int_1^4 ((x-2) - (x^2 - 4x + 2)) dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_1^4 = \left(-\frac{64}{3} + 40 - 16 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right) = 4,5 \text{ (кв. од.)}.$$

Підкреслимо, що у ф-лі (24.6) як $f_2(x)$ завжди буде функція, графік якої обмежує фігуру зверху.

7. Нехай криволінійну трапецію обмежено кривою, заданою в *параметричній формі*, тобто залежність y від x задано за допомогою двох неперервних функцій $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ від допоміжної змінної (параметра) t :

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

які мають на відрізку $[\alpha, \beta]$ неперервні похідні $x'(t)$, $y'(t)$.

Якщо функція $\varphi(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ є монотонною, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то для обчислення площі криволінійної трапеції потрібно у ф-лі (24.1) зробити заміну змінної: $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$.

У результаті будемо мати:

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (24.8)$$



Обчислімо площу фігури, обмеженої еліпсом: $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$.

Оскільки еліпс є симетричним відносно осей координат, то обчислімо спочатку $\frac{1}{4}$ всієї площі – площу фігури, розташованої в першій координатній чверті (рис. 24.10).

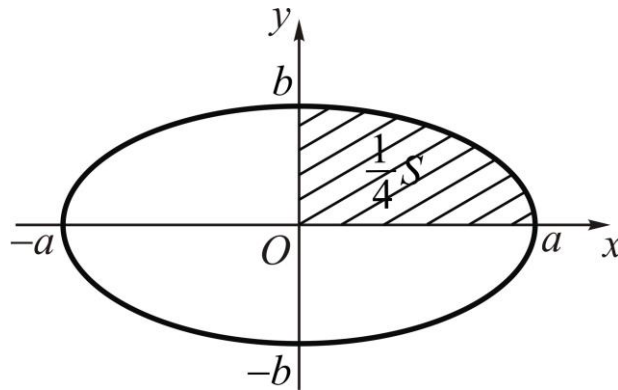


Рис. 24.10. Фігура, обмежена еліпсом

За ф-лою (24.8) обчислюймо площу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}S &= \int_0^a y dx = \left| \begin{array}{l} x = a \cos t, dx = -a \sin t dt \\ y = b \sin t \\ x = 0 \Rightarrow 0 = a \cos t \Rightarrow t = \pi/2 \\ x = a \Rightarrow a = a \cos t \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = \int_{\pi/2}^0 b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = \\ &= -ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{ab}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Звідси площа всієї фігури, обмеженої еліпсом, дорівнює:

$$S = \pi ab \text{ (кв. од.)}. \quad (24.9)$$

8. Площа криволінійного сектора. Разом із добре відомою декартовою (прямокутною) системою координат xOy , у якій кожній точці площини відповідає пара чисел (x, y) – проєкцій точки на координатні осі, використовують також *полярну систему координат*.

Зафіксуймо на площині деяку точку O – *полюс* і промінь OP – *полярну вісь*. Виберімо довільним чином відмінну від полюса точку M (рис. 24.11).

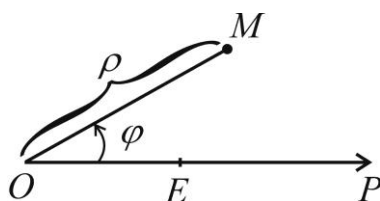


Рис. 24.11. Полярні координати

Відстань ρ від полюса O до точки M називають **полярним радіусом** точки M : $\rho = OM \geq 0$. Кут нахилу φ полярного радіуса до полярної осі називають **полярним кутом** точки M . У самої точки O полярний кут є невизначеним. Числа ρ і φ називають **полярними координатами** точки M , і пишуть: (ρ, φ) або $M(\rho, \varphi)$. Полюс O і полярну вісь OP із масштабним (одиничним) відрізком OE називають **полярною системою координат** $\rho O\varphi$.

Полярний кут визначено неоднозначно: для заданого $\rho \neq 0$ точки з координатами $(\rho, \varphi + 2k\pi)$, де $k \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, збігаються. Зазвичай значення φ беруть із проміжку $[0, 2\pi)$ або $(-\pi, \pi]$ і називають їх **головними значеннями** полярного кута.

Рівняння $F(\rho, \varphi) = 0$ називають **рівнянням лінії** L у полярних координатах, якщо координати будь-якої точки $M(\rho, \varphi)$ на лінії задовольняють його, і навпаки, якщо пара чисел (ρ, φ) задовольняє рівняння, то ρ і φ є координатами точки, яка належить лінії:

$$(\rho, \varphi) \in L \Leftrightarrow F(\rho, \varphi) = 0, \quad (24.10)$$

де ρ і φ – *поточні координати* точок лінії (координати будь-якої точки лінії);

F – закон, який відображає властивість точок лінії.

У разі розв'язності рівняння $F(\rho, \varphi) = 0$ відносно ρ або φ маємо задання лінії рівнянням у явній формі: $\rho = \rho(\varphi)$ або $\varphi = \varphi(\rho)$.

Зв'язок між координатами точки в полярній $\rho O\varphi$ і декартовій xOy системах координат легко встановити, якщо полюс збігається з початком декартової системи координат, полярна вісь лежить на осі абсцис (рис. 24.12), а масштабні відрізки систем є однаковими.

Із $\triangle OAM$ ($\angle A = 90^\circ$) маємо *формули переходу від декартових до полярних координат*:

$$\begin{cases} x/\rho = \cos \varphi, \\ y/\rho = \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (\rho \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi] \text{ або } \varphi \in (-\pi, \pi]). \quad (24.11)$$

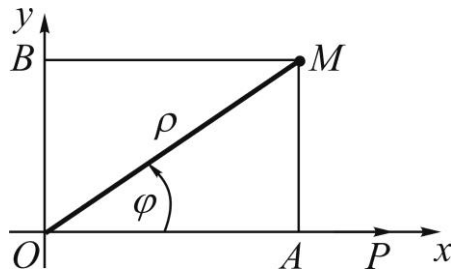


Рис. 24.12. Зв'язок між полярними й декартовими координатами

Фігуру, яка обмежена двома променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ і лінією $\rho = \rho(\varphi)$, де $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, називають **криволінійним сектором** для функції $\rho = \rho(\varphi)$ на $[\alpha, \beta]$ у полярній системі координат $\rho O\varphi$ (рис. 24.13).

Обчислимо площу цього сектора.

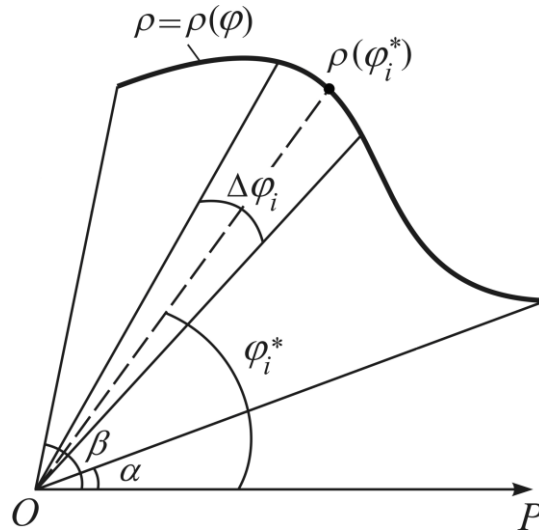


Рис. 24.13. Криволінійний сектор

Виконаймо ті самі кроки, які було здійснено під час розв'язання задачі про обчислення площі криволінійної трапеції:

1) *розбиймо* криволінійний сектор для $\rho = \rho(\varphi)$ на $[\alpha, \beta]$ довільним чином на n довільних частин променями $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$, ..., $\varphi = \varphi_{n-1}$, $\varphi = \varphi_n$, де $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$;

2) *виберімо* на кожному із часткових секторів довільний промінь $\varphi_i^* \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, $i = \overline{1, n}$;

3) *обчислимо* площу ΔS_i кругового сектора радіуса $\rho(\varphi_i^*)$ із центральним кутом $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$, за формулою: $\Delta S_i = \frac{1}{2} \rho^2(\varphi_i^*) \Delta\varphi_i$.

Тоді сума всіх ΔS_i дорівнює площі ступінчастого сектора і є інтегральною сумою для функції $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho^2(\varphi_i^*) \Delta \varphi_i;$$

4) визначмо границю суми S_n (якщо вона існує) за умови, що $\max \Delta \varphi_i \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n за умови, що $\max \Delta \varphi_i \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$, то її приймають за числове значення площі S криволінійного сектора для функції $\rho = \rho(\varphi)$ на $[\alpha, \beta]$:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta \varphi_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho^2(\varphi_i^*) \Delta \varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (24.12)$$



Обчислімо площу фігури, яка обмежена полярною віссю та першим витком спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$, де a – додатне число (рис. 24.14).

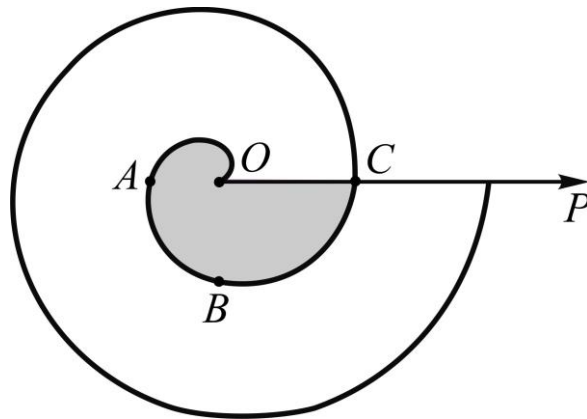


Рис. 24.14. Криволінійний сектор $OABC$

Аналізуємо задану фігуру $OABC$ і зробимо висновок, що вона є криволінійним сектором для функції $\rho = a\varphi$ на $[0, 2\pi]$.

Отже, за ф-лою (24.12), маємо:

$$S_{OABC} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 \text{ (кв. од.)}.$$

24.2. Обчислення об'ємів тіл за відомими площами поперечних перерізів

Нехай треба обчислити об'єм тіла V , якщо відомі площі S перерізів цього тіла площинами, перпендикулярними до осі Ox : $S = S(x)$, $a \leq x \leq b$ (рис. 24.15).

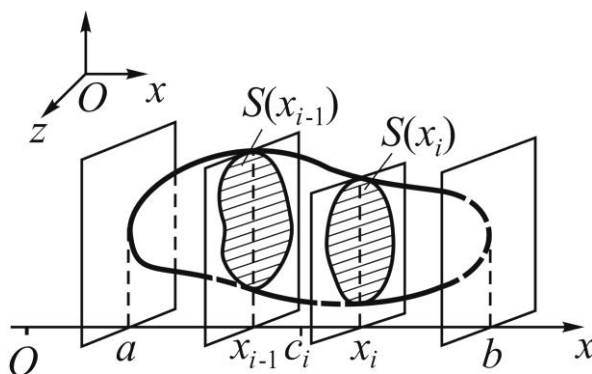


Рис. 24.15. Просторове тіло

Для виведення формули обчислення об'єму тіла V складімо відповідну інтегральну суму аналогічно тому, як це було зроблено під час означення визначеного інтеграла:

1) *розбиймо* тіло V довільним чином на n частин (шарів) площинами: $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n = b$, де $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$;

2) *виберімо* на кожному частковому проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, і для кожної такої точки побудуймо циліндр, твірною якого є паралельною осі Ox , а напрямною є контур перерізу тіла V площиною $x = c_i$ (на рис. 24.15 його не зображено);

3) *обчислимо* об'єм ΔV_i циліндра із площею основи $S(c_i)$ і висотою Δx_i : $\Delta V_i = S(c_i)\Delta x_i$.

Тоді сума всіх ΔV_i , $i = \overline{1, n}$, є інтегральною сумою для функції $S = S(x)$ на відрізку $[a, b]$:

$$V_n = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n S(c_i)\Delta x_i;$$

4) *визначмо* границю суми V_n (якщо вона існує) за умови, що $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$, яка і дає об'єм тіла за площами поперечних перерізів:

$$V = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n S(c_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x) dx. \quad (24.13)$$



Обчислимо об'єм тіла, обмеженого площинами $z = 0$ і $z = h$ та однопо-

рожнинним гіперболоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Перерізом гіперболоїда площиною $z = l$, паралельною площині xOy , є еліпс (рис. 24.16), рівняння якого має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{l^2}{c^2}.$$

Запишімо це рівняння в канонічному вигляді:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

де $a_1 = \frac{a\sqrt{c^2 + l^2}}{c}$, $b_1 = \frac{b\sqrt{c^2 + l^2}}{c}$.

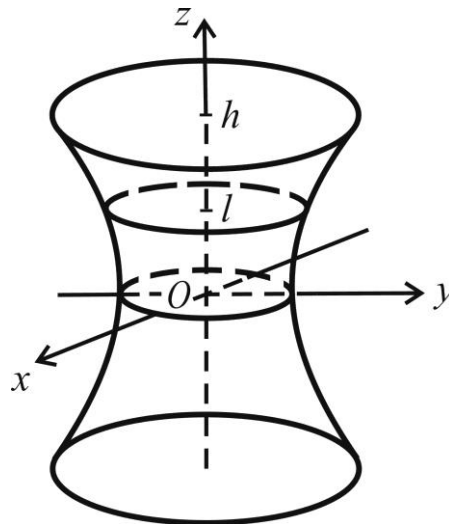


Рис. 24.16. Одноповерхнинний гіперболоїд

Площу перерізу обчислимо як площу фігури, обмеженої еліпсом, за ф-лою (24.9): $S = \pi a_1 b_1$.

Тоді об'єм тіла V визначмо за ф-лою (24.13), у якій змінною інтегрування буде змінна l :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi a_1 b_1 dl = \pi \int_0^h \frac{a\sqrt{c^2 + l^2}}{c} \cdot \frac{b\sqrt{c^2 + l^2}}{c} dl = \pi \frac{ab}{c^2} \int_0^h (c^2 + l^2) dl = \\ &= \pi \frac{ab}{c^2} \left(c^2 l + \frac{l^3}{3} \right) \Big|_0^h = \pi \frac{ab}{c^2} \left(c^2 h + \frac{h^3}{3} \right) = \pi abh \left(1 + \frac{h^2}{3c^2} \right) \text{ (куб. од.)}. \end{aligned}$$

24.3. Обчислення об'єму тіла обертання

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано неперервну функцію $y = f(x)$.

Обчислимо об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції для функції $y = f(x)$ на $[a, b]$ навколо осі Ox . Геометричну фігуру, утворену обертанням криволінійної трапеції навколо деякої осі, називають **тілом обертання** (рис. 24.17).

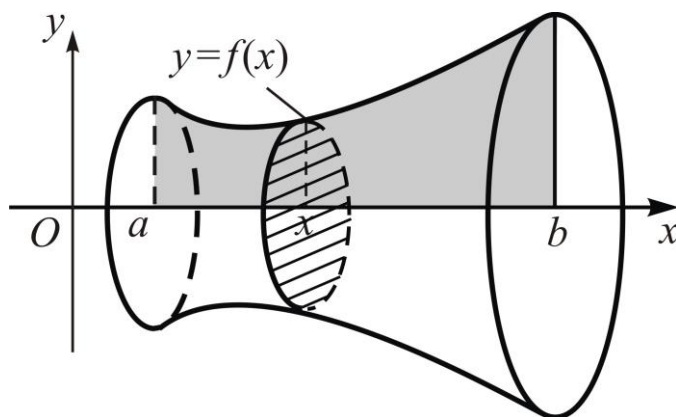


Рис. 24.17. Тіло обертання

У разі обертання криволінійної трапеції навколо осі Ox кожна точка дуги кривої $y = f(x)$ описує коло, а поперечним перерізом тіла обертання є круг із радіусом y із центром на осі Ox , площа якого дорівнює:

$$S = S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x).$$

Тоді, згідно з ф-лою (24.13), маємо формулу об'єму тіла обертання навколо осі Ox :

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (24.14)$$



Обчислимо об'єм кулі радіусом R . Будемо розглядати таку кулю як результат обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої півколом $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ на відрізку $[-R, R]$, тому її об'єм визначмо за ф-лою (24.14):

$$V_x = \pi \int_{-R}^R f^2(x) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ (куб. од.)}.$$

Якщо тіло утворено обертанням криволінійної трапеції для неперервної функції $x = \varphi(y)$ на $[c, d]$ навколо осі Oy (див. рис. 24.2), то аналогічно маємо:

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \quad (24.15)$$

У разі обертання криволінійної трапеції для $f(x)$ на $[a, b]$ навколо осі Oy і криволінійної трапеції для $\varphi(y)$ на $[c, d]$ навколо осі Ox об'єми тіл обертання обчислюють за *формулами Гульдена* (наводьмо їх без виведення):

$$\begin{aligned} V_{Oy} &= 2\pi \int_a^b x \cdot y dx = \left| y = f(x) \right| = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx, \\ V_{Ox} &= 2\pi \int_c^d x \cdot y dy = \left| x = \varphi(y) \right| = 2\pi \int_c^d \varphi(y) \cdot y dy. \end{aligned} \quad (24.16)$$

24.4. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Нехай функція $y = f(x)$ та її похідна $y' = f'(x)$ є неперервними на відрізку $[a, b]$.

Обчислимо довжину лінії, що відповідає графіку заданої функції на цьому відрізку.

Розбиймо відрізок $[a, b]$ довільним чином на n частин точками поділу $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ і впишімо в дугу кривої ламану лінію так, щоб абсцисами вершин ламаної були значення $x_0, x_1, \dots, x_n$ (рис. 24.18). **Довжиною дуги** називають границю довжини вписаної ламаної лінії за умови, що кількість ланок ламаної необмежено зростає, а довжина найбільшої з них прямує до нуля.

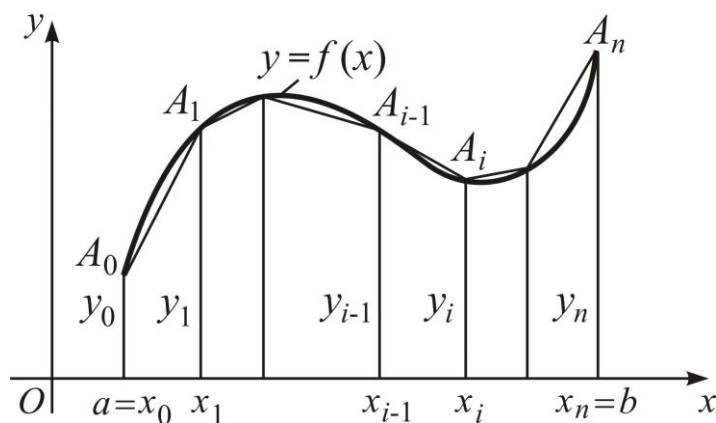


Рис. 24.18. Дуга кривої $y = f(x)$

Довжину однієї ланки ламаної ΔL_i обчислимо за теоремою Піфагора із трикутника з катетами Δx_i і Δy_i :

$$\Delta L_i = A_{i-1}A_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Запишімо вираз для ΔL_i дещо інакше:

$$\Delta L_i = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2}.$$

На кожному частковому відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа, тому існує така точка $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, що:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i).$$

Тоді $\Delta L_i = \sqrt{1 + (y'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i$, а довжина L_n усієї ламаної лінії дорівнює сумі довжин усіх її ланок:

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (y'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

і є інтегральною сумою для функції $\varphi(x) = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$ на $[a, b]$.

Визначмо границю суми L_n (якщо вона існує) за умови, що $\max \Delta L_i \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$. Зазначмо, що умова $\max \Delta L_i \rightarrow 0$ тягне за собою умову $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, адже $\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$, отже, $|\Delta x_i| < \Delta L_i$.

У результаті маємо формулу обчислення довжини дуги кривої, що відповідає графіку функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} L_n = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (y'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i = \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \end{aligned} \quad (24.17)$$

Якщо криву задано рівняннями в *параметричній формі*:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

де функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ та їхні похідні $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ є неперервними на відрізку $[\alpha, \beta]$, а $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то довжину дуги такої кривої визначають за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2} dt. \quad (24.18)$$

Нехай дугу кривої задано рівнянням у *полярних координатах*:

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

де функція $\rho(\varphi)$ та її похідна $\rho'(\varphi)$ є неперервними на відрізку $[\alpha, \beta]$.

Якщо в рівностях $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, що пов'язують декартові та полярні координати, кут φ уважати параметром, то криву можна задати в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} x'_\varphi = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi, \\ y'_\varphi = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}.$$

За ф-лою (24.18), остаточно маємо:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi, \quad (24.19)$$

де α і β – значення полярного кута φ , що відповідають кінцям дуги.

Довжину дуги гладкої просторової кривої, заданої рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

обчислюють за формулою, аналогічною ф-лі (24.18):

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt.$$



Обчислимо довжину дуги кривої $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}$ (рис. 24.19):

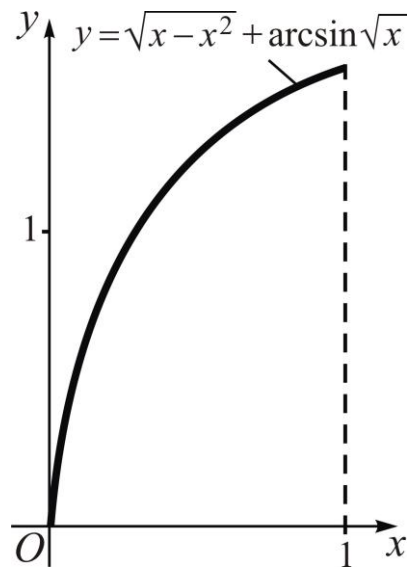


Рис. 24.19. Дуга кривої

Установлюймо область визначення заданої функції, розв'язавши таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} x - x^2 \geq 0, \\ -1 \leq \sqrt{x} \leq 1, \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-1) \leq 0, \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1,$$

що одночасно дає межі інтегрування: $a=0$, $b=1$.

Знайдімо похідну y' та сформуємо підінтегральну функцію в інтегралі (24.17):

$$y' = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} = \frac{1-x}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}},$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{x(1-x)}} = \sqrt{1 + \frac{1-x}{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

За ф-лою (24.17), остаточно маємо:

$$l = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x}} dx = \int_0^1 x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2 \text{ (од.)}.$$



Обчислимо довжину астроїди $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$ (рис. 24.20):

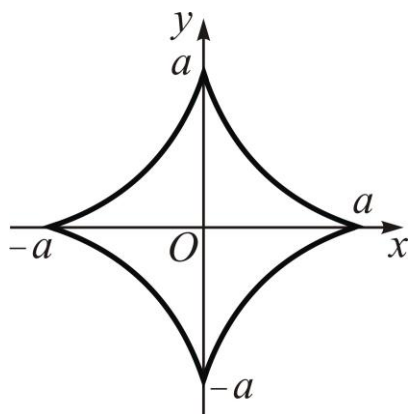


Рис. 24.20. Астроїда

Зважаймо на те, що астроїда є симетричною відносно обох осей координат, і визначмо довжину 1/4 всієї кривої, а саме тієї частини, що розташована в першій координатній чверті. Тоді параметр t змінюється від $t = 0$ до $t = \pi/2$.

Знайдімо похідні $x'(t)$, $y'(t)$ і сформуємо підінтегральну функцію в інтегралі (24.18):

$$\begin{aligned} \begin{cases} x'_t = -3a \cos^2 t \sin t, \\ y'_t = 3a \sin^2 t \cos t \end{cases} &\Rightarrow \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} = \\ &= 3a \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t} = 3a \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 3a \cos t \sin t. \end{aligned}$$

За ф-лою (24.18), обчислюймо:

$$\frac{1}{4}l = \int_0^{\pi/2} 3a \cos t \sin t dt = \frac{3}{2}a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -\frac{3a}{4} (\cos 2t) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{3a}{4} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{3a}{2} \text{ (од.)}.$$

Отже, довжина всієї астроїди дорівнює:

$$l = 4 \cdot \frac{3a}{2} = 6a \text{ (од.)}.$$



Знайдемо довжину кардіоїди $\rho = 2a(1 + \cos \varphi)$ (рис. 24.21):

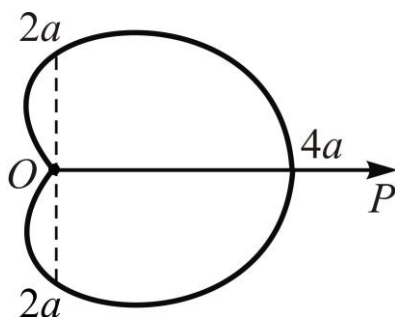


Рис. 24.21. Кардіоїда

Кардіоїда є симетричною відносно полярної осі OP , тому обчислимо довжину половини кривої, якій відповідає значення полярного кута $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Оскільки $\rho' = -2a \sin \varphi$, то:

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} &= \sqrt{4a^2(1 + \cos \varphi)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi} = 2a\sqrt{1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \\ &= 2\sqrt{2}a \cdot \sqrt{1 + \cos \varphi} = 2\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = 4a \cos \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

За ф-лою (24.19), маємо:

$$\frac{1}{2}l = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 8a \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 8a \text{ (од.)}.$$

Тоді довжина всієї кардіоїди дорівнює:

$$l = 2 \cdot 8a = 16a \text{ (од.)}.$$

24.5. Застосування інтегралів у деяких економічних задачах

Інтегрування в економіці має широкий спектр застосувань. Наприклад, його використовують для знаходження функцій витрат, прибутку або споживання за умови, що відомо відповідні функції граничних витрат, граничного прибутку, граничного споживання тощо. Для визначення довільної сталої інтегрування необхідна додаткова умова. У разі знаходження функції витрат застосовують таку умову: якщо обсяг продукції $x = 0$, то значення функції витрат дорівнює фіксованим витратам, тоді як у разі знаходження функції прибутку

використовують іншу умову: якщо обсяг продукції $x = 0$, то значення функції прибутку дорівнює нулю (якщо продукцію не реалізовано – прибутку немає).

Розгляньмо ряд економічних задач, для розв'язання яких використовують поняття невизначеного та визначеного інтегралів.

1. Виробнича функція. Згадаймо, що виробничою функцією називають математичне відображення залежності між обсягом використаних виробничих ресурсів (факторів виробництва) та обсягом виробленої продукції.



Для певного підприємства є відомою функція граничного прибутку:

$R'(x) = 30 - 0,02x$, де x – обсяг виробленої продукції.

Потрібно визначити функцію прибутку $R(x)$ цього підприємства.

Розв'язання. Функція прибутку $R(x)$ підприємства є первісною для функції граничного прибутку, отже:

$$R(x) = \int R'(x)dx = \int (30 - 0,02x)dx = 30x - 0,01x^2 + C.$$

Для визначення сталої C скористаймося умовою $R(0) = 0$, тобто, якщо обсяг продукції дорівнює нулю, то функція прибутку теж дорівнює нулю:

$$x = 0 \Rightarrow R(0) = 30 \cdot 0 - 0,01 \cdot 0^2 + C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Отже, функція прибутку набуває такого вигляду:

$$R(x) = 30x - 0,01x^2.$$



Нехай функція граничних витрат підприємства під час виробництва x од. продукції має вигляд: $f'(x) = 60 - 0,04x + 0,003x^2$.

Потрібно: 1) визначити функцію витрат, якщо витрати на 100 од. продукції становлять 7 тис. грн; 2) обчислити фіксовані витрати; 3) установити витрати на виробництво 250 од. продукції; 4) обчислити максимальне значення прибутку, якщо ціна становить 65,5 грн за од. продукції.

Розв'язання.

1) функцію витрат підприємства визначмо як первісну функції граничних витрат:

$$f(x) = \int (60 - 0,04x + 0,003x^2)dx = 60x - 0,02x^2 + 0,001x^3 + C.$$

Значення довільної сталої C установимо за умовою, що витрати на 100 од. продукції становлять 7 тис. грн, тобто: $f(100) = 7\,000$.

Тоді

$$7\,000 = 60 \cdot 100 - 0,02 \cdot 100^2 + 0,001 \cdot 100^3 + C \Rightarrow C = 200.$$

Отже, функція витрат підприємства має такий вигляд:

$$f(x) = 60x - 0,02x^2 + 0,001x^3 + 200;$$

2) для визначення фіксованих витрат обчислимо значення функції витрат $f(x)$ для $x = 0$:

$$f(0) = 60 \cdot 0 - 0,02 \cdot 0^2 + 0,001 \cdot 0^3 + 200 = 200;$$

3) витрати на виробництво 250 од. продукції обчислимо як значення функції витрат для $x = 250$:

$$f(250) = 60 \cdot 250 - 0,02 \cdot 250^2 + 0,001 \cdot 250^3 + 200 = 29\,375;$$

4) прибуток підприємства обчислимо за формулою:

$$P(x) = px - f(x),$$

де p – ціна одиниці продукції.

$$P(x) = 65,5x - 60x + 0,02x^2 - 0,001x^3 - 200 = 5,5x + 0,02x^2 - 0,001x^3 - 200.$$

Для обчислення максимального значення прибутку проведемо дослідження функції прибутку $P(x)$ на екстремум.

Знайдемо похідну і критичні точки функції $P(x)$:

$$P'(x) = 5,5 + 0,04x - 0,003x^2,$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 5,5 + 0,04x - 0,003x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 50, \\ x_2 = -36,7 < 0. \end{cases}$$

Знайдемо другу похідну функції прибутку і встановимо її знак у критичній точці:

$$P''(x) = 0,04 - 0,006x,$$

$$x = 50 \Rightarrow P''(50) = 0,04 - 0,006 \cdot 50 = -0,26.$$

Оскільки $P''(50) < 0$, то в точці $x = 50$ функція прибутку має максимум:

$$P_{\max} = P(50) = 5,5 \cdot 50 + 0,02 \cdot 50^2 - 0,001 \cdot 50^3 - 200 = 0.$$

Тобто, якщо реалізовувати продукцію за ціною 65,5 грн за од., то підприємство не буде мати прибутку.



Відомо, що витрати виробництва $f(x)$, залежно від його обсягу x , описують функцією $f(x) = 1000 + 2x + 0,06x^2$.

Потрібно обчислити середні витрати виробництва, якщо його обсяг зміниться зі 100 до 200 од.

Розв'язання. Для визначення середніх витрат виробництва скористаймося ф-лою (23.16):

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

у якій підінтегральною функцією буде функція витрат $f(x) = 1000 + 2x + 0,06x^2$, а межами інтегрування є значення $a = 100$, $b = 200$:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{200-100} \int_{100}^{200} (1000 + 2x + 0,06x^2) dx = \frac{1}{100} (1000x + x^2 + 0,02x^3) \Big|_{100}^{200} = \\ &= \frac{1}{100} ((2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 16 \cdot 10^4) - (10^5 + 10^4 + 2 \cdot 10^4)) = 2700. \end{aligned}$$

Отже, середні витрати виробництва становлять 2700 грн. од.

2. Крива Лоренца. Розгляньмо одну з відомих економічних задач – задачу визначення коефіцієнта Джині, який характеризує ступінь нерівності в розподілі доходів населення країни. Нехай функція $y = f(x)$ описує залежність відсотка сукупного доходу (y) від відсотка населення (x), що має цей дохід. Цю функцію називають **кривою Лоренца** (рис. 24.22).

Наприклад, якщо $y(0,8) = 0,6$, то це означає, що 80 % населення мають 60 % сукупного доходу. Очевидно, що $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $y \leq x$.

Якщо розподіл доходів є рівномірним (ідеальним), то функцією, яка описує такий розподіл, є пряма лінія $y = x$. Відхилення реального розподілу від ідеального вимірюють відношенням k площі фігури, обмеженої прямою $y = x$

і кривою Лоренца (на рис. 24.22 цю фігуру заштриховано), до площі трикутника OCA , утвореного прямими $y = x$, $x = 1$ і віссю Ox :

$$k = \frac{S_{O\check{A}B}}{S_{\Delta OCA}}. \quad (24.20)$$

Це число k називають **коефіцієнтом Джині**. Він завжди задовольняє нерівність: $0 \leq k \leq 1$. Якщо $k = 0$, то розподіл доходів серед населення є рівномірним, якщо ж $k = 1$, то нерівномірність розподілу доходів є найбільшою.

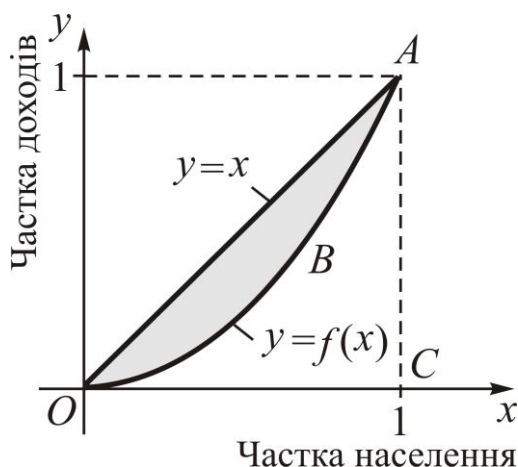


Рис. 24.22. Крива Лоренца і пряма $y = x$



Криву Лоренца деякої країни задано рівнянням $y = x^2$. Потрібно зробити висновок щодо рівномірності розподілу доходів серед населення цієї країни.

Розв'язання. Визначмо коефіцієнт Джині k за ф-лою (24.20).

Обчислимо площу фігури (див. рис. 24.22), обмеженої прямою $y = x$ і параболою $y = x^2$ (кривою Лоренца) за ф-лою (24.6):

$$S_{O\check{A}B} = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ (кв. од.)}.$$

Площу трикутника OCA обчислимо як площу прямокутного трикутника, обидва катети якого дорівнюють 1: $S_{\Delta OCA} = 1/2$ (кв. од.).

Тоді, за ф-лою (24.20), маємо:

$$k = \frac{S_{O\check{A}B}}{S_{\Delta OCA}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Значення коефіцієнта Джині $k = 1/3$ указує на помірну нерівність у розподілі доходів серед населення країни, тобто в країні є певні відмінності в доходах, але вони не є суттєвими.

3. Крива навчання. Розгляньмо деякі питання, що виникають під час освоєння виробництва нової продукції. Нехай функція $T = F(x)$ визначає час, витрачений на виробництво x -ї од. продукції, тоді функція $f(x) = F'(x)$ показує, як змінюється час на виготовлення наступної $(x+1)$ -ї од. продукції.

Зазвичай використовують функції такого виду:

$$f(x) = ax^b,$$

де a – витрати часу на виробництво першої од. продукції ($a > 0$);

b – показник виробничого процесу, який визначає швидкість зниження витрат ($-1 \leq b < 0$).

Графік такої функції $f(x) = ax^b$ ($a > 0, -1 \leq b < 0$) називають **кривою навчання** (рис. 24.23).

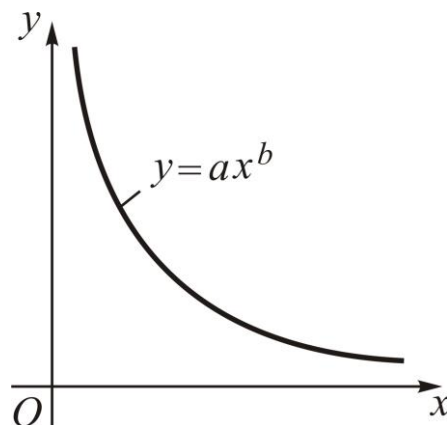


Рис. 24.23. Крива навчання

Зазвичай функція $f(x)$ є спадною, адже з кожним новим виробом час на його виготовлення скорочується, завдяки зростанню кількості повторів, освоєнню технологій та зменшенню кількості помилок.

Отже, час, який буде витрачено на виробництво одиниць продукції з номерами від $(n_1 + 1)$ до n_2 , визначають за такою формулою:

$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x) dx. \quad (24.21)$$



Після виробництва 100 годинників з'ясувалося, що час, потрібний для виробництва наступних виробів, спадає за такою формулою: $y = 15x^{-0,14}$.

Слід визначити час, який буде витрачено на виробництво наступних 20 годинників.

Розв'язання. За відомою функцією навчання $f(x) = 15x^{-0,14}$ для $n_1 = 100$ і $n_2 = 200$, за ф-лою (24.21), маємо:

$$\Delta T = \int_{100}^{120} 15x^{-0,14} dx = \frac{15x^{0,86}}{0,86} \Big|_{100}^{120} = \frac{1500}{86} (120^{0,86} - 100^{0,86}) = 155,4 \text{ (год)}.$$

Отже, на виготовлення наступних 20 годинників знадобиться 155,4 год.

4. Закон попиту та пропозиції. Розгляньмо економічну модель, що описує процес ціноутворення на ринку – модель «попит – пропозиція». Будь-який споживач хотів би купити товар якомога дешевше, але для кожного з них є максимальна ціна, яку він згоден заплатити за деяку одиницю товару, перш ніж відмовиться від її купівлі. Таку ціну називають **ціною попиту** p . Сукупність цін попиту всіх споживачів утворює **криву попиту** $p = f(x)$.

Разом із тим усі споживачі, незалежно від їхніх цін попиту, купують товар за єдиною ринковою ціною p_0 . Різниця між індивідуальною ціною попиту та ринковою ціною становить **виграш споживача (споживчий надлишок)** у разі купівлі цієї одиниці товару. Це свого роду **прибуток споживача**.

Будь-який виробник хотів би продати товар якомога дорожче, але для кожного з них є мінімальна ціна, за якою він ще погодиться продавати цю одиницю товару, перш ніж відмовиться від її виробництва та продажу. Таку ціну називають **ціною пропозиції** p . Сукупність цін пропозиції всіх виробників утворює **криву пропозиції** $p = g(x)$.

Нехай криву попиту на деякий товар описано функцією $p = f(x)$, а криву пропозиції на той самий товар – функцією $p = g(x)$.

Потрібно визначити виграш споживачів і виграш виробників (постачальників).

Традиційно криву попиту позначають літерою D (від англ. *Demand*), а криву пропозиції – літерою S (від англ. *Supply*) (рис. 24.24), водночас уздовж осі Ox відкладають кількість товару (x), а вздовж осі Oy – його вартість (p). Точку перетину цих кривих (x_0, p_0) називають **точкою рівноваги**, їй відповідає ринкова ціна продукції p_0 .

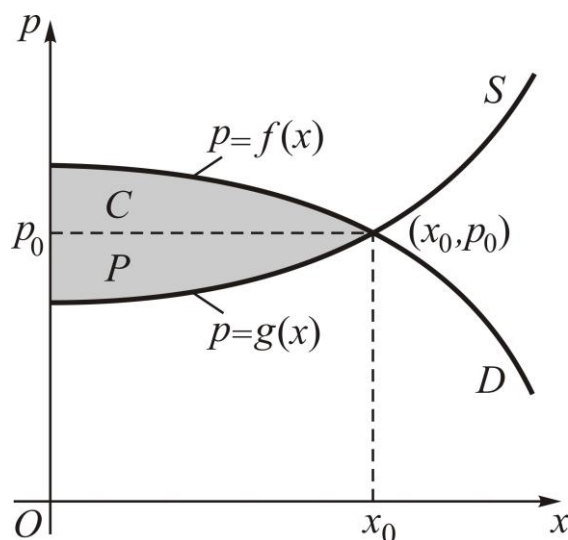


Рис. 24.24. Крива попиту, крива пропозиції та точка рівноваги

Зрозуміло, що деякі споживачі зможуть заплатити за товар ціну, вищу за p_0 ($p > p_0$).

Визначмо виграш споживачів від установленної ціни p_0 .

Розбиймо відрізок $[0, x_0]$ на n частин точками:

$$0 = x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n < x_{n+1} = x_0.$$

Виберімо на кожному частковому відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n}$, довільну точку u_i . Виграш споживачів на цьому відрізку становить $(f(u_i) - p_0) \cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Тоді середній виграш на усьому проміжку $[0, x_0]$ дорівнює сумі:

$$\sum_{i=1}^n (f(u_i) - p_0) \cdot \Delta x_i,$$

яка є інтегральною сумою для функції $f(x) - p_0$ на відрізку $[0, x_0]$.

Якщо функція попиту є неперервною і $n \rightarrow \infty$, а $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, то ця сума має границю, яка визначає виграш споживачів C :

$$C = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n (f(u_i) - p_0) \cdot \Delta x_i = \int_0^{x_0} (f(x) - p_0) dx.$$

Отже, виграш споживачів дорівнює:

$$C = \int_0^{x_0} f(x) dx - p_0 x_0. \quad (24.22)$$

Аналогічно обчислюють виграш постачальників:

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x) dx. \quad (24.23)$$

Очевидно, що виграш споживачів C дорівнює площі між кривою попиту D та прямою $p = p_0$. Виграш постачальників P дорівнює площі між прямою $p = p_0$ та кривою пропозиції S .



Нехай функція попиту на певну продукцію має вигляд: $f(x) = 116 - x^2$, а функція пропозиції – $g(x) = \frac{5}{3}x + 20$.

Потрібно обчислити виграші споживачів та постачальників.

Розв'язання. Визначмо точку ринкової рівноваги як точку перетину кривої попиту і кривої пропозиції:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 116 - x^2 = \frac{5}{3}x + 20 \Rightarrow 3x^2 + 5x - 288 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 9, \\ x = -32/3 < 0. \end{cases}$$

Отже, $x_0 = 9$, а $p_0 = f(9) = 116 - 9^2 = 53$.

За ф-лою (24.22), обчислимо виграш споживачів:

$$\begin{aligned} C &= \int_0^9 (116 - x^2) dx - 35 \cdot 9 = \left(116x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^9 - 315 = \\ &= 1044 - 243 - 315 = 486 \text{ (гр. од.)}. \end{aligned}$$

За ф-лою (24.23) обчислимо виграш постачальників:

$$\begin{aligned} P &= 315 - \int_0^9 \left(\frac{5}{3}x + 20 \right) dx = 315 - \left(\frac{5}{6}x^2 + 20x \right) \Big|_0^9 = \\ &= 315 - \frac{5}{6} \cdot 81 - 180 = 67,5 \text{ (гр. од.)}. \end{aligned}$$

5. Задача дисконтування. Інтегральне числення застосовують також і в задачі дисконтування, яка є однією із ключових у реальній економіці. **Дисконтуванням** називають визначення початкової суми капіталовкладень за її кінцевим значенням, отриманим через певний проміжок часу t (зазвичай, у роках)

за відомим річним відсотком, або відсотковою ставкою p . Інакше кажучи, дисконтування дозволяє визначити вартість усіх майбутніх грошових потоків, яку б вони мали на початковий момент часу. Ця задача є важливою в разі аналізу економічної ефективності капіталовкладень.

Нехай обчислення прибутків відбувається протягом періоду $[0, T]$.

Тоді K_t – сума, яка накопичена за t років (майбутня вартість), K – сума, дисконтована на початок періоду (початкова вартість), $i = p/100$ – питома відсоткова ставка, або *ставка дисконту*. Оскільки у фінансовому плануванні часові проміжки зазвичай визначають у роках, тому розрахунки виконують за формулою складних відсотків (відсотки нараховують не тільки на основний капітал, але й на відсотки попереднього періоду).

Отже, сума наприкінці t -го року буде становити: $K_t = K \cdot (1 + i)^t$.

Із останньої рівності визначмо початкову вартість:

$$K = \frac{K_t}{(1 + i)^t}.$$

Якщо надходження відбуваються щорічно протягом певного проміжку часу, то дисконтовану вартість розраховують як суму за всіма періодами надходження грошей:

$$PV = \frac{K_1}{1 + i} + \frac{K_2}{(1 + i)^2} + \dots + \frac{K_n}{(1 + i)^n} = \sum_{t=1}^n \frac{K_t}{(1 + i)^t}, \quad (24.24)$$

де PV – поточна вартість (*present value*).

Ф-ла (24.24) передбачає, що стала відсоткова ставка діє протягом усього періоду $[0, T]$. Однак, якщо щорічний прибуток змінюється із часом, то доцільно розглядати майбутні надходження як неперервний грошовий потік, який має певну *інтенсивність* – прибуток за одиницю часу.

Нехай миттєву інтенсивність потоку в момент часу t задано функцією $f(t)$. Розбиймо період часу $[0, T]$ на рівні проміжки тривалістю $\Delta t = T/n$. На достатньо малому проміжку часу $[t, t + \Delta t]$ інтенсивність потоку можна вважати сталою, середнє значення якої дорівнює $f(t_k)$, $k = \overline{1, n}$, де $t_k \in [t, t + \Delta t]$.

Тоді величина надходжень за цей період дорівнює $f(t_k) \cdot \Delta t$, а їхня поточна вартість становить:

$$PV_k = f(t_k) \cdot \Delta t \cdot (1 + i)^{-t_k}.$$

Для наближеного розрахунку загальної вартості грошових потоків, яка відповідає поточному моменту, використовують таке співвідношення:

$$PV \approx \sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot (1+i)^{-t_k} \cdot \Delta t. \quad (24.25)$$

Права частина наближеної рівності (24.25) є інтегральною сумою. Визначмо границю цієї суми (якщо вона існує) за умови, що $n \rightarrow \infty$ і $\Delta t \rightarrow 0$, у результаті чого отримаємо точну формулу для визначення сучасної вартості:

$$PV = \int_0^T f(t)(1+i)^{-t} dt. \quad (24.26)$$

Якщо замість ставки дисконту застосувати іншу характеристику – силу зростання $\rho = \ln(1+i)$, то маємо таке співвідношення:

$$PV = \int_0^T f(t)e^{-\rho t} dt. \quad (24.27)$$



Припустімо, що фірма планує випуск продукції протягом одного року та очікує отримати за цей період прибуток у розмірі 100 млн грн. Продаж продукції відбувається рівномірно протягом усього року.

Потрібно обчислити поточну вартість прибутку за ставки дисконту 15 %.

Розв'язання. Поточну вартість майбутніх надходжень можна оцінити наближено, якщо розглядати дискретний грошовий потік із періодом 1 рік.

Тоді, за ф-лою (24.24), для $t = 1$ маємо:

$$PV_1 \approx \frac{100}{1 + 0,15} = 86,96 \text{ (млн грн)}.$$

Такий результат є наближеним, оскільки грошовий потік є неперервним. За умовою задачі кошти від реалізації продукції надходять регулярно протягом року, тому будемо вважати інтенсивність потоку сталою величиною, що дорівнює 100 млн грн / рік. З огляду на те, що сила зростання становить $\rho = \ln 1,15 = 0,14$, за ф-лою (24.27), маємо:

$$PV = \int_0^1 100 \cdot e^{-0,14t} dt = -\frac{100}{0,14} e^{-0,14t} \Big|_0^1 = 93,32 \text{ (млн грн)}.$$

Значення $PV = 93,32$ означає, що загальний прибуток, який фірма планує мати протягом року і який ми оцінюємо в 100 млн грн, на початку року становить 93,32 млн грн.

24.6. Наближене обчислення визначених інтегралів

Формула Ньютона – Лейбніца є ключовим інструментом для обчислення визначеного інтеграла за умови, що визначення первісної не спричиняє труднощів. Якщо ж невизначений інтеграл «не береться», тобто первісну неможливо подати у вигляді скінченного набору елементарних функцій, або підінтегральну функцію задано графіком чи таблицею, то використовують наближені формули. Ці формули ґрунтуються на геометричному змісті визначеного інтеграла як площі відповідної криволінійної трапеції.

1. Формула прямокутників. Нехай треба обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ від неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$. Поділімо відрізок $[a, b]$ на n однакових частин довжини $h = \frac{b-a}{n}$ точками $x_i = a + i \cdot h$, $i = \overline{0, n}$, й обчислимо значення функції $f(x)$ у цих точках: $y_i = f(x_i)$ (рис. 24.25).

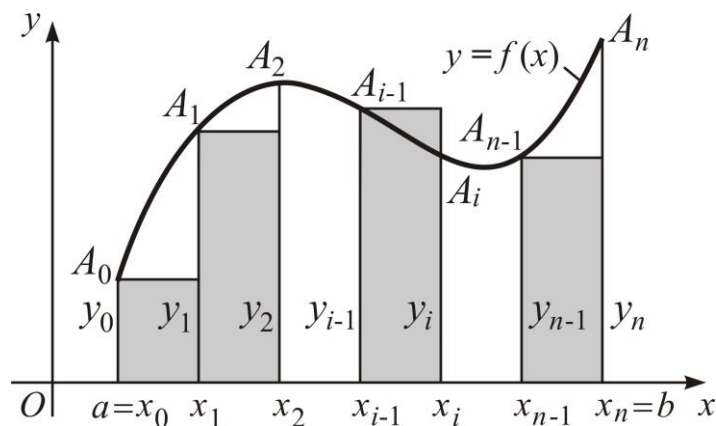


Рис. 24.25. Графічна ілюстрація формули прямокутників

Тоді площа криволінійної трапеції для функції $f(x)$ на $[a, b]$, а разом із тим і визначений інтеграл від функції $f(x)$ на $[a, b]$ наближено дорівнює сумі площ n прямокутників із висотами $f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, й однаковими основами довжини h :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i). \quad (24.28)$$

Ф-лу (24.28) називають **формулою прямокутників** із висотами $f(x_i)$, $i = \overline{0, n-1}$, обчисленими на лівій межі часткових відрізків.

Якщо висоти прямокутників узяти рівними значенням функції $f(x_i)$, $i = \overline{1, n}$, на правій межі часткових інтервалів, то формула прямокутників буде мати такий вигляд:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (24.29)$$

Абсолютну похибку Δ наближеної рівності (24.28) можна оцінити за такою формулою:

$$\Delta = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right|.$$

Аналогічно для рівності (24.29):

$$\Delta = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right|.$$

Відносну похибку δ визначають як відношення абсолютної похибки до обчисленого значення інтеграла і подають у відсотках.

2. Формула трапецій. Формулу трапецій отримують аналогічно формулі прямокутників, але на кожному частковому відрізку криволінійну трапецію замінюють звичайною.

Поділімо відрізок $[a, b]$ на n однакових частин довжини $h = \frac{b-a}{n}$ точками $x_i = a + i \cdot h$, $i = \overline{0, n}$, й обчислимо в них значення функції $y_i = f(x_i)$ (рис. 24.26).

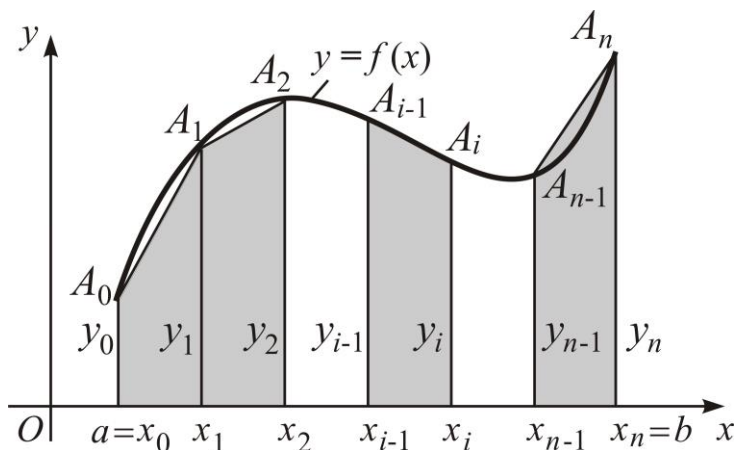


Рис. 24.26. Графічна ілюстрація формули трапецій

На кожному частковому відрізку побудуємо прямокутну трапецію з висотою $\Delta x_i = h = \frac{b-a}{n}$ і основами $f(x_{i-1})$ та $f(x_i)$, $i = \overline{1, n}$, площа якої дорівнює $\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \Delta x_i$.

Тоді площа криволінійної трапеції для $f(x)$ на $[a, b]$ наближено буде дорівнювати сумі площ усіх прямокутних трапецій:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right). \end{aligned} \quad (24.30)$$

Ф-лу (24.30) називають **формулою трапецій**.

Якщо функція $f(x)$ має на $[a, b]$ неперервну похідну $f'(x)$ і $|f'(x)| \leq M_1$ $\forall x \in [a, b]$, то абсолютну похибку ф-л (24.28) – (24.30) оцінюють такою формулою:

$$\Delta \leq \frac{M_1(b-a)^2}{4n}. \quad (24.31)$$

Якщо функція $f(x)$ має на $[a, b]$ неперервну другу похідну $f''(x)$ і $|f''(x)| \leq M_2$ $\forall x \in [a, b]$, то для абсолютної похибки цих формул має місце така оцінка:

$$\Delta \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}. \quad (24.32)$$

3. Формула Сімпсона. Поділімо відрізок $[a, b]$ на парну кількість $2n$ однакових частин (рис. 24.27). Функцію $y = f(x)$ на відрізку $[x_0, x_2]$ замінімо параболою $y = Ax^2 + Bx + C$, яка проходить через точки $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, із віссю симетрії, паралельною осі Oy (рис. 24.28).

Аналогічні параболі будуймо і для всіх інших пар часткових відрізків, тоді площа криволінійної трапеції для $f(x)$ на $[a, b]$ буде наближено дорівнювати сумі площ часткових криволінійних трапецій, обмежених параболою.

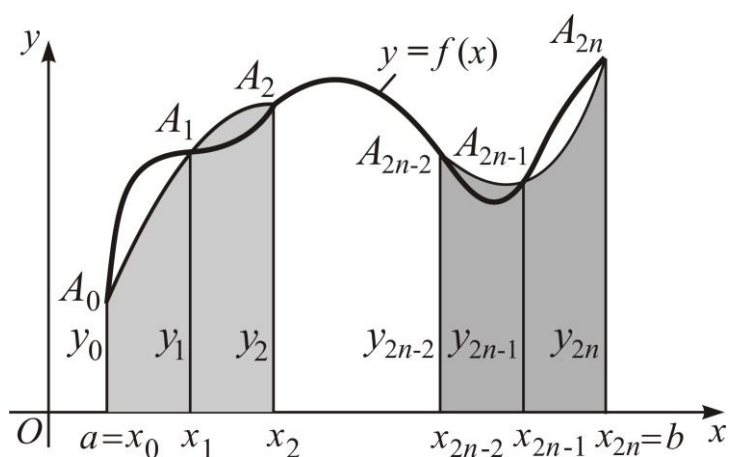


Рис. 24.27. Графічна ілюстрація формули Сімпсона

Покажімо, що площа криволінійної трапеції, яка обмежена зверху параболою, що проходить через три точки A_0 , A_1 , A_2 , дорівнює:

$$S = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)), \quad h = \frac{b-a}{2n}, \quad (24.33)$$

де h – довжина відрізка $[x_0, x_1]$, а $[-h, h]$ – проміжок інтегрування.

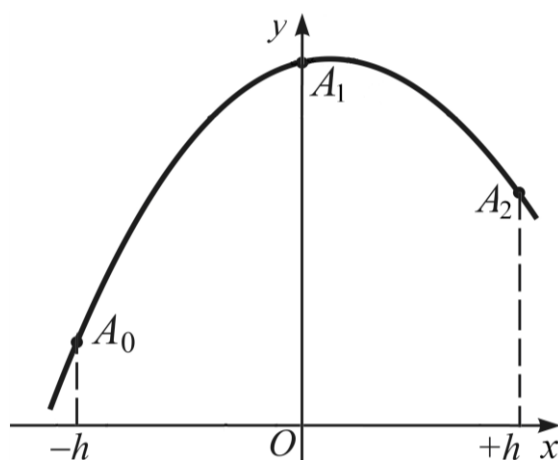


Рис. 24.28. Криволінійна трапеція, обмежена параболою, на $[-h, h]$

Коефіцієнти параболі A , B , C і значення функції $y = f(x)$ у точках з абсцисами x_0 , x_1 , x_2 пов'язано такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x_0 = -h &\Rightarrow y_0 = f(x_0) = Ah^2 - Bh + C; \\ x_1 = 0 &\Rightarrow y_1 = f(x_1) = C; \\ x_2 = h &\Rightarrow y_2 = f(x_2) = Ah^2 + Bh + C. \end{aligned} \quad (24.34)$$

Обчислимо площу криволінійної трапеції для $y = Ax^2 + Bx + C$ на відрізку $[-h, h]$:

$$S = \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx = \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx \right) \Big|_{-h}^h = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

З урахуванням співвідношень (24.34), вираз для S набуває такого вигляду:

$$S = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

отже, маємо ф-лу (24.33).

Застосуємо на кожному відрізку $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, $i = \overline{1, n}$, ф-лу (24.33) для $h = \Delta x = \frac{b-a}{2n}$, тоді маємо:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \quad \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4), \dots, \quad (24.35)$$

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Додаймо, відповідно, ліві та праві частини рівностей (24.35), у результаті чого буде:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots y_{2n-2})] = \\ &= \frac{b-a}{6n} \left[y_0 + y_{2n} + 4 \sum_{i=1}^n y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^n y_{2i} \right]. \end{aligned} \quad (24.36)$$

Ф-лу (24.36) називають **формулою Сімпсона**, або **формулою парабол**.

Якщо функція $f(x)$ має на $[a, b]$ неперервну четверту похідну $f^{(4)}(x)$ і $|f^{(4)}(x)| \leq M_3 \quad \forall x \in [a, b]$, то для абсолютної похибки формули Сімпсона має місце така оцінка:

$$\Delta \leq \frac{M_3(b-a)^5}{180(2n)^4}. \quad (24.37)$$



Зазначмо, що, порівняно з формулами прямокутників або трапецій, у разі однакової кількості часткових відрізків розбиття проміжку інтегрування формула Сімпсона дає найкраще наближення до точного значення інтеграла.



Обчислімо такий інтеграл: $\int_0^4 x^2 dx$.

За формулою Ньютона – Лейбніца, маємо:

$$\int_0^4 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{64}{3} \approx 21,33.$$

Обчислімо цей самий інтеграл за формулами прямокутників, трапецій, парабол для $n = 10$ і визначмо абсолютні та відносні похибки цих обчислень.

Розбиймо відрізок інтегрування $[0, 4]$ на 10 однакових частин точками $x_i = i \cdot h$ ($i = \overline{0, 10}$), де $h = \frac{4-0}{10} = 0,4$, й обчислімо значення функції $y = x^2$ в цих точках (табл. 24.1).

Таблиця 24.1

Таблиця значень функції $y = x^2$ в точках розбиття

x_i	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
y_i	0,00	0,16	0,64	1,44	2,56	4,00	5,76	7,84	10,24	12,96	16,00

За ф-лою прямокутників (24.28) із висотами $f(x_i)$ ($i = \overline{0, n-1}$), обчисленими на лівій межі часткових відрізків, маємо:

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0,4 \cdot (0,00 + 0,16 + 0,64 + 1,44 + 2,56 + 4,00 + 5,76 + 7,84 + 10,24 + 12,96) = 18,24.$$

За ф-лою прямокутників (24.29) із висотами $f(x_i)$ ($i = \overline{1, n}$), обчисленими на правій межі часткових відрізків, маємо дещо інше значення:

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0,4 \cdot (0,16 + 0,64 + 1,44 + 2,56 + 4,00 + 5,76 + 7,84 + 10,24 + 12,96 + 16,00) \approx 24,64.$$

За ф-лою трапецій (24.30), маємо:

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0,4 \cdot \left(\frac{0,00 + 16,00}{2} + 0,16 + 0,64 + 1,44 + 2,56 + 4,00 + 5,76 + \right. \\ \left. + 7,84 + 10,24 + 12,96 \right) = 21,44.$$

За ф-лою парабол (24.36), маємо:

$$\int_0^4 x^2 dx \approx \frac{0,4}{3} (0,00 + 16,00 + 4(0,16 + 1,44 + 4,00 + 7,84 + 12,96) + \\ + 2(0,64 + 2,56 + 5,76 + 10,24)) = 21,33.$$

Визначмо абсолютну похибку Δ і відносну похибку δ обчислень за кожною наближеною формулою:

1) за ф-лою прямокутників (24.28):

$$\Delta = |21,33 - 18,24| = 3,09, \quad \delta = \frac{3,09}{21,33} \cdot 100 \% = 14,49 \%;$$

2) за ф-лою прямокутників (24.29):

$$\Delta = |24,64 - 21,33| = 3,31, \quad \delta = \frac{3,31}{21,33} \cdot 100 \% = 15,52 \%;$$

3) за ф-лою трапецій (24.30):

$$\Delta = |21,44 - 21,33| = 0,11, \quad \delta = \frac{0,11}{21,33} \cdot 100 \% = 0,52 \%;$$

4) за ф-лою парабол (24.36):

$$\Delta = |21,33 - 21,33| = 0,00, \quad \delta = 0,00 \%.$$

Підсумкова таблиця (табл. 24.2) переконливо підтверджує, що формула парабол дійсно дає найбільшу точність у разі наближеного обчислення визначених інтегралів. Зазвичай, якщо підінтегральна функція є відмінною від многочлена 2-го чи 3-го степеня, то похибки не будуть нульовими. Якщо ж порівнювати обсяг обчислювальної роботи, то в цьому формула Сімпсона не має переваг над іншими формулами.

**Порівняння абсолютної та відносної похибок обчислень
за формулами прямокутників, трапецій, парабол**

Формули Похибки	Прямокутників (24.28)	Прямокутників (24.29)	Трапецій (24.30)	Парабол (24.36)
Абсолютна (Δ)	3,09	3,31	0,11	0,00
Відносна (δ %)	14,49	15,52	0,52	0,00



Ключові терміни

Криволінійна трапеція; площа фігури; полярні координати; криволінійний сектор; тіло обертання; об'єм просторового тіла; довжина дуги; коефіцієнт Джині; крива Лоренца; крива навчання; крива попиту; крива пропозиції; точка рівноваги; дисконтування; ставка дисконту; інтенсивність грошового потоку; формула прямокутників; формула трапецій; формула парабол (Сімпсона); абсолютна похибка; відносна похибка.



Запитання для самоперевірки

1. Як обчислити площу фігури, обмеженої графіком неперервної функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox , якщо: а) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$; б) $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$; в) $f(x)$ на $[a, b]$ змінює свій знак скінченну кількість разів?
2. Як обчислити площу фігури, обмеженої графіком неперервної функції $x = \varphi(y)$, прямими $y = c$, $y = d$ і віссю Oy , якщо: а) $\varphi(y) \geq 0 \quad \forall y \in [c, d]$; б) $\varphi(y) \leq 0 \quad \forall y \in [c, d]$?
3. Як обчислити площу фігури, обмеженої графіками неперервних функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$) і прямими $x = a$, $x = b$?
4. Як обчислити площу фігури, яка є об'єднанням декількох криволінійних трапецій з основами на осі Ox (Oy)?
5. Як обчислити площу фігури, обмеженої неперервною кривою, заданою параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox ?
6. Як обчислити площу криволінійного сектора, обмеженого кривою, заданою в полярній системі координат неперервною функцією $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$?

7. Як обчислити довжину дуги кривої: а) у декартовій системі координат; б) у полярній системі координат; в) у разі параметричного задання кривої?
8. Як обчислити об'єм тіла за відомими площами поперечних перерізів?
9. Як обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції з основою на осі Ox (Oy) навколо осі Ox (Oy)?
10. Як обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції з основою на осі Ox (Oy) навколо осі Oy (Ox)?
11. Які приклади застосування визначеного інтеграла в економічних дослідженнях ви знаєте?
12. Як обчислити визначений інтеграл за: а) формулою прямокутників; б) формулою трапецій; в) формулою Сімпсона (парабол)?
13. Як різні форми апроксимації підінтегральної функції впливають на точність кожної формули?
14. Як розраховують та оцінюють абсолютну та відносну похибки для формули прямокутників (трапецій, парабол) у разі наближеного обчислення визначеного інтеграла?
15. Як за допомогою визначеного інтеграла оцінити прибуток підприємства, якщо відомі функції граничного доходу та граничних витрат?
16. Як за допомогою визначеного інтеграла можна знайти загальний дохід підприємства, якщо відомо функцію граничного доходу?



Тестові завдання до підрозділу 24

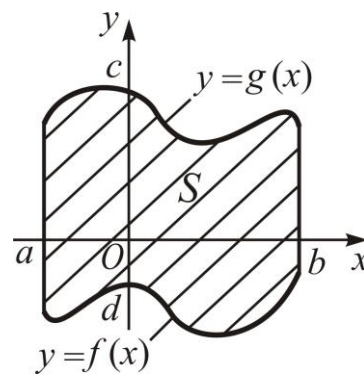
1. Укажіть, за якою формулою можна обчислити площу фігури, зображеної на рисунку:

а) $S = \int_a^b (f(x) + g(x))dx;$

б) $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx;$

в) $S = \int_c^d (g(x) - f(x))dy;$

г) $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$



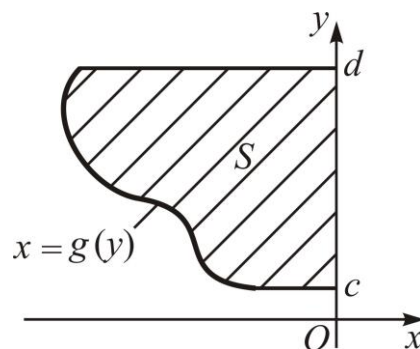
2. Укажіть, за якою формулою можна обчислити площу фігури, зображеної на рисунку:

а) $S = -\int_c^d g(y) dy;$

б) $S = \int_d^c g(y) dy;$

в) $S = \int_c^d g(y) dy;$

г) $S = \int_c^d g(y) dx.$



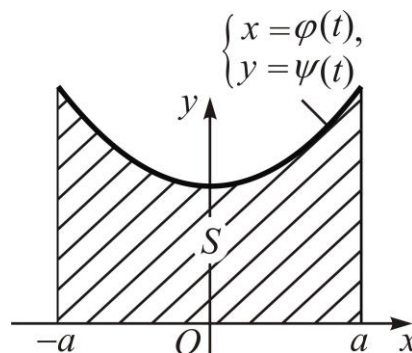
3. Укажіть, за якою формулою можна обчислити площу фігури, зображеної на рисунку:

а) $S = \int_{-a}^a \psi(t) \varphi'(t) dt;$

б) $S = \int_{-a}^a \psi(t) dt;$

в) $S = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt, \varphi(\alpha) = 0, \varphi(\beta) = a;$

г) $S = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \psi'(t) dt, \psi(\alpha) = -a, \psi(\beta) = a.$



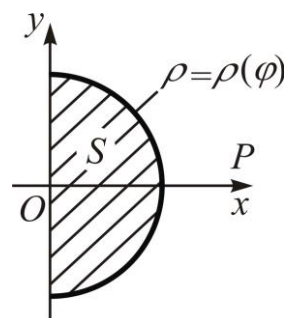
4. Укажіть, за якою формулою можна обчислити площу фігури, зображеної на рисунку:

а) $S = \int_0^{2\pi} \rho^2(\varphi) d\varphi;$

б) $S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi;$

в) $S = \int_0^{\pi/2} \rho^2(\varphi) d\varphi;$

г) $S = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\varphi) d\varphi.$



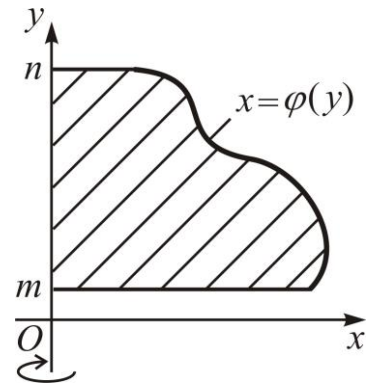
5. Укажіть, за якою формулою можна обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, зображеної на рисунку:

а) $V = \int_m^n x \cdot y(x) dx;$

б) $V = \pi \int_m^n y^2(x) dx;$

в) $V = \pi \int_n^m \varphi^2(y) dy;$

г) $V = \pi \int_m^n \varphi^2(y) dy.$



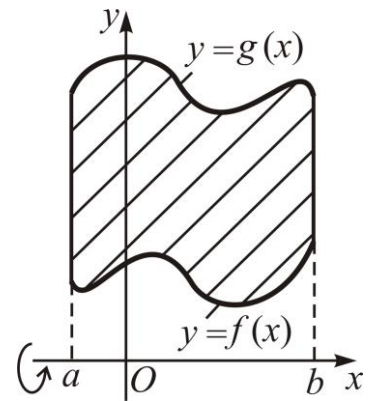
6. Укажіть, за якою формулою можна обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, зображеної на рисунку:

а) $V = \pi \int_a^b (g(x) - f(x)) dx;$

б) $V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx;$

в) $V = \pi \int_a^b (g(x) - f(x))^2 dx;$

г) $V = \pi^2 \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$



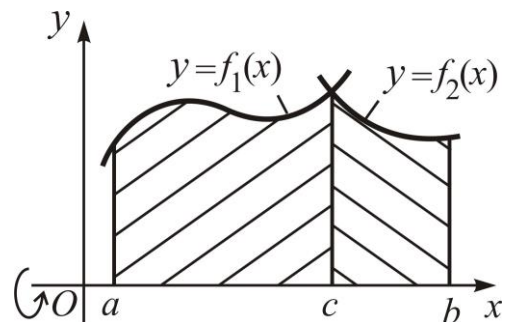
7. Укажіть, за якою формулою можна обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, зображеної на рисунку:

а) $V = \pi \int_a^c f_1^2(x) dx - \pi \int_c^b f_2^2(x) dx;$

б) $V = \pi \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))^2 dx;$

в) $V = \pi \int_a^b (f_1^2(x) + f_1^2(x)) dx;$

г) $V = \pi \int_a^c f_1^2(x) dx + \pi \int_c^b f_2^2(x) dx.$



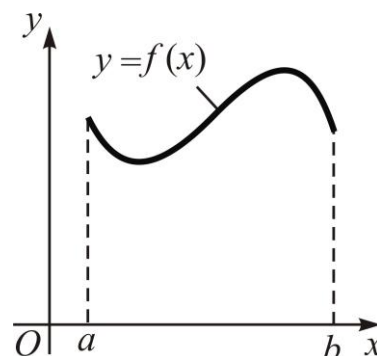
8. Укажіть, за якою формулою можна обчислити довжину дуги кривої, зображеної на рисунку:

а) $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx;$

б) $l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dx;$

в) $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)} dx;$

г) $l = \int_a^b \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx.$



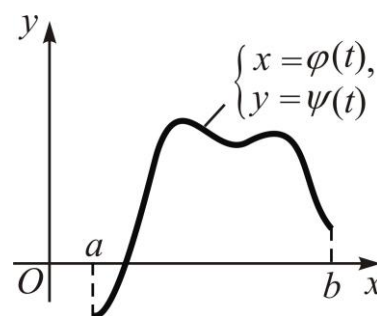
9. Укажіть, за якою формулою можна обчислити довжину дуги кривої, зображеної на рисунку:

а) $l = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt;$

б) $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b;$

в) $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \psi'(t)} dt, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b;$

г) $l = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} dx.$



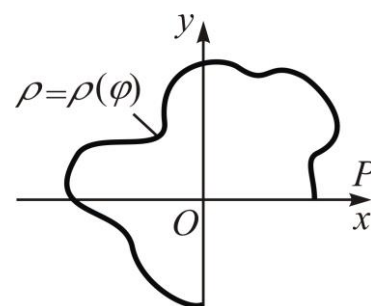
10. Укажіть, за якою формулою можна обчислити довжину дуги кривої, зображеної на рисунку:

а) $l = \int_0^{2\pi} [\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2] d\varphi;$

б) $l = \int_{-\pi/2}^0 \sqrt{1 + \rho^2(\varphi)} d\varphi;$

в) $l = \int_0^{3\pi/2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi;$

г) $l = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sqrt{\rho(\varphi) + \rho'(\varphi)} d\varphi.$



Література: [1 – 4; 7 – 15; 17 – 23].

25. Невласні інтеграли. Інтеграл Ейлера – Пуассона

Основні питання:

25.1. Інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли I-го роду).

25.2. Інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли II-го роду).

Поняття «невласний інтеграл» пов'язано з порушенням умов теореми 23.1 (про існування визначеного інтеграла). Залежно від того, яку саме із двох умов існування порушено, розглядають невластні інтеграли I-го і II-го роду.

Розрізняють такі випадки:

1) замість скінченного відрізка $[a, b]$, розглядають нескінченні півінтервали $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$, або інтервал $(-\infty, +\infty)$;

2) замість неперервної або обмеженої на $[a, b]$ функції, яка має на ньому скінченну кількість точок розриву I-го роду, розглядають функцію, що має на $[a, b]$ нескінченні розриви, тобто розриви II-го роду.

25.1. Інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли I-го роду)

Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на проміжку $[a, +\infty)$.

Тоді, за теоремою 23.1, вона є інтегровною на будь-якому відрізку $[a, \beta] \subset [a, +\infty)$, де $\beta > a$, тобто існує визначений інтеграл від функції $f(x)$ на $[a, \beta]$:

$$I(\beta) = \int_a^{\beta} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{\beta} \quad (F'(x) = f(x)).$$

Невласним інтегралом I-го роду функції $f(x)$ на проміжку $[a, +\infty)$ називають границю визначеного інтеграла $I(\beta)$ за умови, що верхня межа інтегрування прямує до $+\infty$, тобто:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta). \quad (25.1)$$

Якщо границя $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta)$ є скінченною (нескінченною або її зовсім не існує), то інтеграл (25.1) називають **збіжним (розбіжним)**, або кажуть, що він **збігається (розбігається)**.

Співвідношення (25.1), з урахуванням формули Ньютона – Лейбніца, можна записати так:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} F(x) \Big|_a^\beta = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} F(\beta) - F(a) = F(+\infty) - F(a), \quad (25.2)$$

де позначено $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} F(\beta) = F(+\infty)$.

Аналогічно інтегралу (25.1) визначають невластний інтеграл I-го роду на проміжку $(-\infty, b]$.

Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною на проміжку $(-\infty, b]$, тоді вона є інтегрованою на будь-якому відрізку $[\alpha, b] \subset (-\infty, b]$, де $\alpha < b$, тобто існує ви-

значений інтеграл $I(\alpha) = \int_{\alpha}^b f(x) dx$.

Невластним інтегралом I-го роду функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty, b]$ називають границю визначеного інтеграла $I(\alpha)$ за умови, що нижня межа інтегрування прямує до $-\infty$, тобто:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} F(x) \Big|_{\alpha}^b = F(b) - \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} F(\alpha) = F(b) - F(-\infty), \quad (25.3)$$

де позначено $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} F(\alpha) = F(-\infty)$.

Нехай функція $f(x)$ є визначеною і неперервною на проміжку $(-\infty, +\infty)$, тоді подаймо інтеграл на цьому проміжку як суму двох невластних інтегралів на проміжках $(-\infty, c)$ і $(c, +\infty)$, де c – довільне дійсне число (найчастіше беруть $c = 0$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx. \quad (25.4)$$

Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ є збіжним лише тоді, якщо є збіжними обидва інтеграли

$\int_{-\infty}^c f(x) dx$ і $\int_c^{+\infty} f(x) dx$. Якщо хоча б один з інтегралів у правій частині ф-ли (25.4) розбігається, то розбіжним є й інтеграл у лівій частині.

З урахуванням формули Ньютона – Лейбніца, невластний інтеграл на проміжку $(-\infty, +\infty)$ визначають таким співвідношенням:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty). \quad (25.5)$$

Загальний порядок визначення невластного інтеграла I-го роду містить два кроки:

- 1) обчислюймо визначений інтеграл від $f(x)$ на $[\alpha, b]$ ($[a, \beta]$), де α – змінна нижня межа інтегрування (β – змінна верхня межа інтегрування);
- 2) визначаймо границю визначеного інтеграла для $\alpha \rightarrow -\infty$ ($\beta \rightarrow +\infty$).

Якщо функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $[a, +\infty)$ і набуває на ньому невід’ємних значень, а інтеграл (25.1) збігається, то, спираючись на геометричний зміст визначеного інтеграла, природно вважати, що невластний інтеграл чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції для функції $y = f(x)$, основою якої є проміжок $[a, +\infty)$.



Обчислімо невластні інтеграли або встановімо їхню розбіжність:

$$\begin{aligned} 1) \quad I_1 &= \int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} \cos x dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\sin \beta - \sin 0) = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \sin \beta. \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \sin \beta$ не існує, то інтеграл I_1 є розбіжним;

$$\begin{aligned} 2) \quad I_2 &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_2^{\beta} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\ln |\ln x|) \Big|_2^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\ln |\ln \beta| - \ln \ln 2) = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\ln |\ln \beta|) - \ln \ln 2 = \ln \ln(+\infty) - \ln \ln 2 = +\infty. \end{aligned}$$

Оскільки границя $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_2^{\beta} \frac{dx}{x \ln x}$ не дорівнює скінченному числу, то зробі-

мо висновок, що інтеграл I_2 є розбіжним;

$$\begin{aligned}
3) I_3 &= \int_{-\infty}^{\pi/4} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^{\pi/4} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x, dt = \frac{dx}{1+x^2} \\ x = \alpha \Rightarrow t = \operatorname{arctg} \alpha \\ x = \pi/4 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\operatorname{arctg} \alpha}^1 t^2 dt = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left(\frac{t^3}{3} \right) \Big|_{\operatorname{arctg} \alpha}^1 = \frac{1}{3} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (1 - \operatorname{arctg}^3 \alpha) = \\
&= \frac{1}{3} (1 - \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}^3 \alpha) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{\pi}{2} \right)^3 \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\pi^3}{8} \right) \approx 1,63.
\end{aligned}$$

Оскільки границя $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^{\pi/4} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$ дорівнює скінченному числу, то інтеграл I_3 є збіжним.

Під дослідженням невластних інтегралів на збіжність розуміють установлення факту його збіжності чи розбіжності. Здебільшого для цього буває достатнім не обчислити сам інтеграл (бо він може бути таким, що «не береться» в скінченному вигляді), а порівняти його з невластним інтегралом, збіжність (чи розбіжність) якого вже є відомою.

Наведемо **ознаки порівняння** невластних інтегралів I-го роду, які наводьмо без доведення.

Теорема 25.1 (ознака порівняння у формі нерівностей). Якщо на проміжку $[a, +\infty)$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то зі збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а з розбіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$.

Невластний інтеграл, збіжність чи розбіжність якого є наперед відомою, називають **еталонним інтегралом**, а його підінтегральну функцію – **еталонною функцією**.

Як еталонний невластний інтегралу I-го роду часто беруть інтеграл такого вигляду:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k}, \quad k \in \mathbf{R} \setminus \{1\}. \quad (25.6)$$

Покажімо, що збіжність (розбіжність) цього інтеграла залежить від значень параметра k :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{x^k} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-k}}{1-k} \right|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{k-1}, & k > 1, \\ \infty, & k < 1. \end{cases} \quad (25.7)$$

Для $k = 1$ інтеграл (25.6) розбігається:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln 1 = \ln(+\infty) = +\infty.$$

Отже, інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k}$ збігається, якщо $k > 1$; і розбігається, якщо $k \leq 1$.

III Дослідімо на збіжність такий інтеграл: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$.

Як еталонний інтеграл візьмімо інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, який є збіжним, адже $k = 2 > 1$ (див. ф-лу (25.7)).

Для $x \geq 1$ маємо: $\frac{1}{x^2(1+3^x)} < \frac{1}{x^2}$, тоді, за теоремою 25.1, інтеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$ також є збіжним.

III Дослідімо на збіжність інтеграл Ейлера – Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx. \quad (25.8)$$

Цей інтеграл не можна подати у вигляді скінченної кількості елементарних функцій, тому дослідити його на збіжність за загальним алгоритмом неможливо. Доведемо, що цей інтеграл збігається, застосувавши теорему 25.1.

Як еталонну функцію візьмімо функцію $\varphi(x) = e^{-x}$. Зважаймо також на парність підінтегральної функції $f(x) = e^{-x^2/2}$ (рис. 25.1), тоді

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

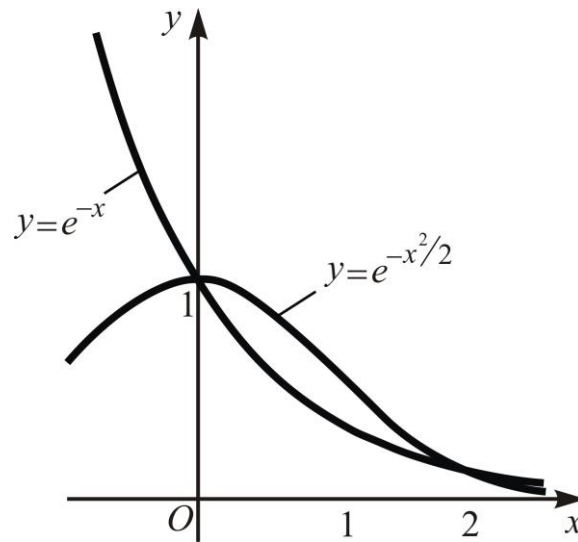


Рис. 25.1. Графіки функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$

Порівняймо функції $f(x) = e^{-x^2/2}$ і $\varphi(x) = e^{-x}$: обидві функції є додатними $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ і для $x \geq 2$ задовольняють умову $0 < f(x) \leq \varphi(x)$, оскільки $-x^2/2 \leq -x$, тому застосувати теорему 25.1 можна тільки на проміжку $[2, +\infty)$.

Дослідімо на збіжність інтеграл від еталонної функції $\varphi(x) = e^{-x}$ на $[2, +\infty)$:

$$\int_2^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_2^{+\infty} = -(e^{-\infty} - e^{-2}) = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{e^2}.$$

Отже, еталонний інтеграл $\int_2^{+\infty} e^{-x} dx$ збігається на $[2, +\infty)$, тоді, за теоремою 25.1, інтеграл $\int_2^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$ також збігається.

Оскільки

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_0^2 e^{-x^2/2} dx + \int_2^{+\infty} e^{-x^2/2} dx,$$

то інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$ відрізняється від інтеграла $\int_2^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$ тільки сталою

$\int_0^2 e^{-x^2/2} dx$, яка дорівнює площі криволінійної трапеції для $f(x)$ на відрізку $[0, 2]$, отже, інтеграл Ейлера – Пуассона теж є збіжним.

У підрозд. 26 буде доведено, що:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}. \quad (25.9)$$

Теорема 25.2 (ознака порівняння в граничній формі). Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ є невід'ємними на проміжку $[a, +\infty)$ та існує відмінна від нуля скінченна границя їхнього відношення:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = p = \text{const} \quad (0 < p < \infty),$$

то інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ і $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.



Дослідимо на збіжність такий інтеграл: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}.$

Виберімо еталонний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2/3}}$, який є розбіжним, адже $k = 2/3 < 1$ (див. ф-лу (25.7)), й обчислімо границю:

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2 + 2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 1 \quad (p \neq 0, p \neq 1).$$

Оскільки ця границя є скінченним числом, відмінним від нуля, то, за теоремою 25.2, зробимо висновок, що інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}$ також розбігається.

У теоремах 25.1 і 25.2 було розглянуто невід'ємні інтеграли від невід'ємних функцій. Для невід'ємного інтеграла від знакозмінної функції $f(x)$ на нескінченному проміжку справедливою є така теорема.

Теорема 25.3 (про абсолютну збіжність невід'ємних інтегралів I-го роду).

Якщо невід'ємний інтеграл від модуля заданої функції $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ збігається,

то збігається й інтеграл від самої функції $\int_a^{+\infty} f(x) dx.$

Невласний інтеграл від функції $f(x)$ на $[a, +\infty)$, що задовольняє умову теореми 25.3, називають **абсолютно збіжним**.



Дослідімо на збіжність такий інтеграл: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^3} dx$.

Підінтегральна функція $f(x) = \frac{\sin x^3}{x^3}$ є знакозмінною, бо знакозмінним для $x \geq 1$ є її чисельник.

Розгляньмо невластний інтеграл від модуля заданої функції $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x^3|}{x^3} dx$

і порівняймо функцію $|f(x)| = \frac{|\sin x^3|}{x^3}$ із функцією $\varphi(x) = \frac{1}{x^3}$:

$$\frac{|\sin x^3|}{x^3} \leq \frac{1}{x^3},$$

оскільки $|\sin x^3| \leq 1$.

Еталонний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ є збіжним, адже $k = 3 > 1$ (див. ф-лу (25.7)),

тому, за теоремою 25.3, заданий інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^3} dx$ також є збіжним і до того ж абсолютним.

25.2. Інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли II-го роду)

Нехай функція $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ має скінченну кількість точок нескінченного розриву – точок розриву II-го роду. Це означає, що хоча б одна з односторонніх границь функції $y = f(x)$ у цих точках дорівнює нескінченності, тобто в разі наближення до точок розриву функція $f(x)$ або необмежено спадає, або необмежено зростає. Такі точки називають **особливими точками** функції.

Особливою точкою (позначмо її через c) на відрізку $[a, b]$ може бути:
а) лівий кінець відрізка ($c = a$); б) правий кінець відрізка ($c = b$); в) будь-яка внутрішня точка відрізка ($c \in (a, b)$) (рис. 25.2).

У геометричному змісті пряма $x = c$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$.

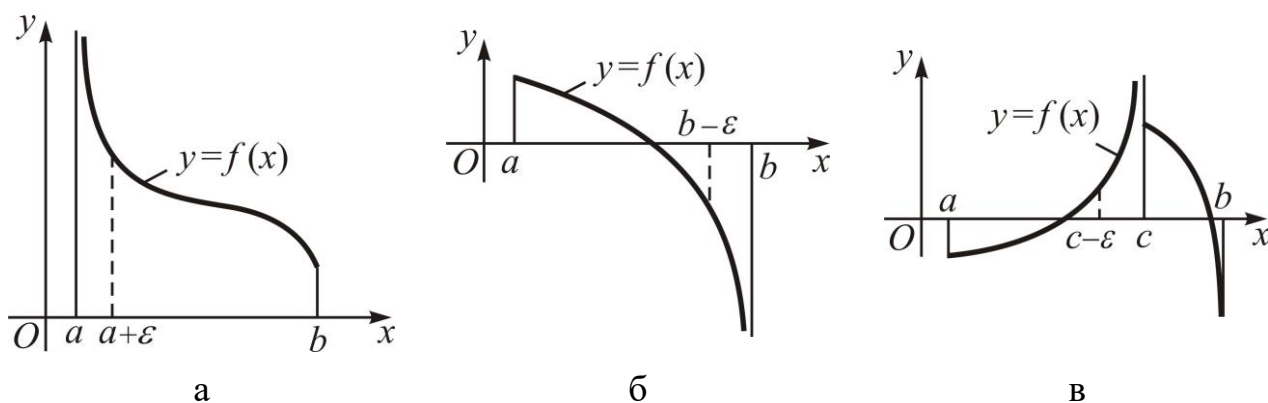


Рис. 25.2. Особливі точки: а) $c = a$; б) $c = b$; в) $c \in (a, b)$

Щоб уникнути «ускладнень», пов'язаних із необмеженістю функції в разі наближення до особливої точки, чинять так: вибирають деяке додатне число $\varepsilon > 0$ і розглядають, відповідно, відрізки $[a + \varepsilon, b]$ (рис. 25.2а), $[a, b - \varepsilon]$ (рис. 25.2б) і $[a, c - \varepsilon]$ (рис. 25.2в), на яких підінтегральна функція $f(x)$ є обмеженою і неперервною, отже, існує визначений інтеграл від такої функції.

Невласним інтегралом II-го роду від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, де a – особлива точка, називають границю визначеного інтеграла від $f(x)$ на проміжку $[a + \varepsilon, b]$ за умови, що ε прямує до нуля:

$$\int_a^b f(x) dx = |a = c| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (25.10)$$

Аналогічно визначають невластний інтеграл у разі, якщо особливою точкою є правий кінець відрізка інтегрування:

$$\int_a^b f(x) dx = |b = c| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (25.11)$$

Якщо границі в правих частинах ф-л (25.10) і (25.11) є скінченними (нескінченними або зовсім не існують), то невластні інтеграли в лівих частинах цих формул називають **збіжними (розбіжними)**, або кажуть, що вони *збігаються (розбігаються)*.

Якщо особлива точка є внутрішньою точкою відрізка інтегрування ($c \in (a, b)$), то невластний інтеграл визначають за такою формулою:

$$\int_a^b f(x) dx = |c \in (a, b)| = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (25.12)$$

Інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є збіжним лише тоді, якщо є збіжними обидва інтеграли $\int_a^c f(x)dx$ і $\int_c^b f(x)dx$. Якщо ж хоча б один із інтегралів у правій частині ф-ли (25.12) розбігається, то розбіжним є й інтеграл у лівій частині.

Порядок обчислення невластних інтегралів II-го роду принципово нічим не відрізняється від порядку взяття невластних інтегралів I-го роду: обчислюють відповідний визначений інтеграл і визначають його границю за умови, що $\varepsilon \rightarrow 0$.



Обчислімо невластні інтеграли або встановімо їхню розбіжність:

$$1) I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Підінтегральна функція має особливу точку на правому кінці відрізка інтегрування: $c = 1$. Тоді, за ф-лою (25.11), маємо:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin 1 = \pi/2. \end{aligned}$$

Оскільки границя $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ дорівнює скінченному числу, то заданий невластний інтеграл збігається і його значення дорівнює $\pi/2$;

$$2) I_2 = \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}.$$

Підінтегральна функція є неперервною всюди на відрізку $[0, 2]$, за винятком точки $x = 1$, у якій знаменник дробу перетворюється на нуль, отже, особлива точка $c = 1$ є внутрішньою точкою відрізка інтегрування.

Тоді, за ф-лою (25.12), маємо:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}.$$

Розгляньмо перший з інтегралів у правій частині:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x+1)^2 - 2^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x+1)-2}{(x+1)+2} \right| \right) \Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \right) \Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \left| \frac{(1-\varepsilon)-1}{(1-\varepsilon)+3} \right| - \ln \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \left| \frac{-\varepsilon}{4-\varepsilon} \right| - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{4} \left(-\infty - \ln \frac{1}{3} \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Оскільки перший інтеграл розбігається, то немає потреби обчислювати другий. Остаточню зробимо висновок, що заданий інтеграл I_2 є розбіжним.

Якщо первісну для підінтегральної функції не можна подати у вигляді скінченної суми елементарних функцій, то, як і для невластних інтегралів I-го роду, для дослідження невластних інтегралів II-го роду застосовують ознаки порівняння.

Теорема 25.4 (ознака порівняння у формі нерівностей): якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ на проміжку $(a, b]$ є неперервними, задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ і мають особливу точку $c = a$, то, зі збіжності інтеграла $\int_a^b \varphi(x) dx$, випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(x) dx$, а, з розбіжності інтеграла $\int_a^b \varphi(x) dx$, – розбіжність інтеграла $\int_a^b f(x) dx$.

Аналогічне твердження має місце в разі, якщо особливою точкою є правий кінець відрізка інтегрування: $c = b$.

Як еталонні інтеграли, тобто такі, про які наперед відомо, збігаються вони чи розбігаються, часто беруть невластні інтеграли від степеневих функцій:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^k}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}, \quad (k \in \mathbf{R} \setminus \{1\}).$$

Для першого і другого еталонних інтегралів особливою точкою є нижня межа відрізка інтегрування, а для третього – верхня.

Проведімо дослідження інтеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$ на збіжність:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{x^{1-k}}{1-k} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1-k} - \frac{\varepsilon^{1-k}}{1-k} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-k}, & k < 1; \\ +\infty, & k > 1. \end{cases} \quad (25.13)$$

Якщо $k = 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln|x|) \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \varepsilon = +\infty.$$

Зробімо висновок, що інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$ збігається, якщо $k < 1$; і розбігається, якщо $k \geq 1$.

Аналогічно маємо: інтеграли $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$ і $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ збігаються, якщо $k < 1$; і розбігаються, якщо $k \geq 1$.



Дослідімо на збіжність такий інтеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{5x^4 + \sqrt{x}}$.

Функція $f(x) = \frac{1}{5x^4 + \sqrt{x}}$ на проміжку $(0, 1]$ є неперервною, додатною і має особливу точку $c = 0$ на лівому кінці відрізка інтегрування.

Для неї є справедливою нерівність:

$$\frac{1}{5x^4 + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x \in (0, 1].$$

Еталонний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ збігається, адже $k = 1/2 < 1$ (див. ф-лу (25.13)),

тому, за теоремою 25.4, досліджуваний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{5x^4 + \sqrt{x}}$ також є збіжним.

Теорема 25.5 (ознака порівняння в граничній формі): якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ на проміжку $[a, b)$ є неперервними, додатними, мають особливу точку $x = b$ та існує відмінна від нуля скінченна границя їхнього відношення:

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = p - \text{const} \quad (p \neq 0, p \neq \infty),$$

то інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b \varphi(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Аналогічне твердження має місце, якщо особливою точкою є лівий кінець відрізка інтегрування: $c = a$.



Дослідімо на збіжність такий інтеграл: $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^3} dx$.

Функція $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^3}$ на проміжку $(0, 1]$ є неперервною, додатною і має особливу точку $c = 0$.

Виберімо еталонний інтеграл $\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx$, який є розбіжним, адже $k = 1$, й обчислимо границю:

$$p = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1.$$

Оскільки ця границя є скінченним числом, відмінним від нуля ($0 < p < \infty$), то, за теоремою 25.5, зробімо висновок, що інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^3} dx$ розбігається, як і еталонний інтеграл.

Підсумовуючи розглянуте, зазначмо, що невласні інтеграли є потужним інструментом моделювання складних економічних процесів, які охоплюють необмежені часові інтервали або великі обсяги даних. Їх застосовують для аналізу поточної вартості потоків доходів, що тривають нескінченно довго, або для розрахунку розподілу ризиків у фінансових моделях. Завдяки невласним інтегралам, економісти можуть оцінювати ефективність політик, прогнозувати довгострокові тенденції та ухвалювати рішення в умовах невизначеності.



Ключові терміни

Невласні інтеграли I-го і II-го роду; збіжний (розбіжний) інтеграл; ознаки порівняння (у формі нерівностей, у граничній формі); еталонний інтеграл; еталонна функція; абсолютно збіжний інтеграл; інтеграл Ейлера – Пуассона; особливі точки функції.



Запитання для самоперевірки

1. Які інтеграли називають невласними інтегралами I-го роду?
2. Як означають невласні інтеграли I-го роду на проміжку: а) $[a, +\infty)$; б) $(-\infty, b]$; в) $(-\infty, +\infty)$?
3. У якому разі кажуть, що невласний інтеграл I-го роду збігається (розбігається)?
4. Що розуміють під дослідженням невласних інтегралів на збіжність?
5. Із яких кроків складається загальний алгоритм дослідження невласних інтегралів на збіжність?
6. Як формулюють ознаки порівняння невласних інтегралів I-го роду: а) у формі нерівностей; б) у граничній формі?
7. Які інтеграли використовують як еталонні в разі дослідження невласних інтегралів I-го роду на збіжність?
8. Які невласні інтеграли називають абсолютно збіжними?
9. Який невласний інтеграл називають інтегралом Ейлера – Пуассона?
10. Які інтеграли називають невласними інтегралами II-го роду?
11. Як означають невласні інтеграли II-го роду, якщо на відрізку інтегрування $[a, b]$ особливою точкою є: а) точка a ; б) точка b ; в) точка $c \in (a, b)$?
12. У якому разі кажуть, що невласний інтеграл II-го роду збігається (розбігається)?
13. Як формулюють ознаки порівняння невласних інтегралів II-го роду: а) у формі нерівностей; б) у граничній формі?
14. Які інтеграли використовують як еталонні в разі дослідження невласних інтегралів II-го роду на збіжність?



Тестові завдання до підрозділу 25

1. Який символічний запис не є означенням невласного інтеграла I-го роду від функції $f(x)$:

а) $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^b f(x) dx;$

б) $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(x) dx;$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^c f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_c^{\beta} f(x) dx \quad (c \in \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)); \\ \text{г)} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} |f(x)| dx? \end{aligned}$$

2. Який символічний запис є означенням невластного інтеграла II-го роду $\int_a^b f(x) dx$, якщо функція $f(x)$ має нескінченний розрив у точці $x = b$:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx; \\ \text{б)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b+\varepsilon} f(x) dx; \\ \text{в)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a-\varepsilon}^b f(x) dx; \\ \text{г)} \quad \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) dx? \end{aligned}$$

3. За якої умови невластні інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ і $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ від невід'ємних на проміжку $[a, +\infty)$ функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ збігаються або розбігаються одночасно:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \text{якщо існує границя} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_a^{+\infty} f(x) dx}{\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx} \right) &= 1; \\ \text{б)} \quad \text{якщо існує границя} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= p \quad (0 < p < \infty); \\ \text{в)} \quad \text{якщо існує границя} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \varphi(x)) &= 1; \\ \text{г)} \quad \text{якщо існує границя} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \varphi(x)) &= 0? \end{aligned}$$

4. Укажіть, який із наведених інтегралів слід узяти як еталонний у разі дослідження невластного інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^6 + 4}}$ на збіжність:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^6}; & \qquad \text{б)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}; \\ \text{в)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}; & \qquad \text{г)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

5. Який символний запис є означенням невластного інтеграла II-го роду $\int_a^b f(x)dx$, якщо функція $f(x)$ має нескінченний розрив у точці $c \in (a, b)$:

$$\text{а) } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^c f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx;$$

$$\text{б) } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx;$$

$$\text{в) } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right);$$

$$\text{г) } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx?$$

6. Серед наведених далі інтегралів:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} x^2 dx, \quad I_2 = \int_1^e \ln x dx, \quad I_3 = \int_0^2 x \ln x dx, \quad I_4 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}, \quad I_5 = \int_1^2 \frac{dx}{x+1},$$

$$I_6 = \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x-3}}, \quad I_7 = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 6x}, \quad I_8 = \int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x dx, \quad I_9 = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \quad I_{10} = \int_1^e \frac{dx}{x \ln x},$$

укажіть ті, які є невластими:

а) I_1 і I_4 ;

б) $I_1, I_3, I_4, I_8, I_9, I_{10}$;

в) усі, крім I_2, I_5 та I_7 ;

г) I_1, I_4, I_8, I_9 .

7. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ на проміжку $(a, b]$ є неперервними, задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ і мають особливу точку $c = a$.

Укажіть, яке з наведених тверджень є правильним для інтегралів

$$I_1 = \int_a^b f(x)dx \text{ і } I_2 = \int_a^b \varphi(x)dx:$$

а) зі збіжності інтеграла I_2 випливає збіжність інтеграла I_1 ;

б) із розбіжності інтеграла I_2 випливає розбіжність інтеграла I_1 ;

- в) зі збіжності інтеграла I_1 випливає збіжність інтеграла I_2 ;
г) із розбіжності інтеграла I_2 випливає збіжність інтеграла I_1 .

8. Укажіть, який із наведених інтегралів слід узяти як еталонний у разі дослідження невластного інтеграла $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+8x^3}}$ на збіжність:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$;

б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$;

в) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

г) $\int_0^1 \sqrt{x} dx$.

9. Укажіть значення параметра a ($a > 0$), якщо $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{ax}} = 5$:

а) $a = 5$;

б) $a = 0,2$;

в) $a = 0,5$;

г) $a = 1,5$.

10. Укажіть, за якого значення параметра a пряма $x = a$ ділить площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{8}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$ ($x \geq 2$), у відношенні 2:1:

а) 4;

б) $3/2$;

в) 6;

г) 8.

Література: [1 – 4; 7 – 15; 17 – 23].

26. Подвійний інтеграл та його застосування

Основні питання:

- 26.1. Подвійний інтеграл у декартових координатах: означення, теорема існування.
- 26.2. Геометричний зміст подвійного інтеграла.
- 26.3. Основні властивості подвійного інтеграла.
- 26.4. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах.
- 26.5. Подвійний інтеграл у полярних координатах.
- 26.6. Деякі застосування подвійного інтеграла.

26.1. Подвійний інтеграл у декартових координатах: означення, теорема існування

Поняття «подвійний інтеграл» є природним узагальненням поняття «визначений інтеграл» на випадок функції двох змінних. Тому його означення принципово не відрізняється від означення визначеного інтеграла і вводять його аналогічним способом.

Нехай функція $z = f(x, y)$, або $z = f(M)$, де $M = M(x, y)$, є визначеною і неперервною в замкненій області D площини xOy , тобто на множині точок координатної площини, яка обмежена зімкнутою лінією (або лініями) Γ , з урахуванням точок лінії Γ – межі області.

Виконаймо таку (стандартну) процедуру:

1) *розбиймо* область D довільним чином якими-небудь лініями на n часткових областей із площами Δs_i , $i = \overline{1, n}$, (або просто – на n площинок Δs_i) і найбільшу з відстаней між двома точками межі площинки назвімо **діаметром площинки** λ_i , $i = \overline{1, n}$, а максимальний серед них $\lambda = \max_i \{\lambda_i\}$ – **діаметром розбиття області D** (рис. 26.1);

2) *виберімо* на кожній із площинок довільним чином по точці $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$, обчислимо $f(M_i)$ і визначмо добутки $f(M_i) \cdot \Delta s_i$;

3) *складімо* суму всіх таких добутків

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta s_i, \quad (26.1)$$

яку назвімо **інтегральною сумою** для функції $f(x, y)$ в області D ;

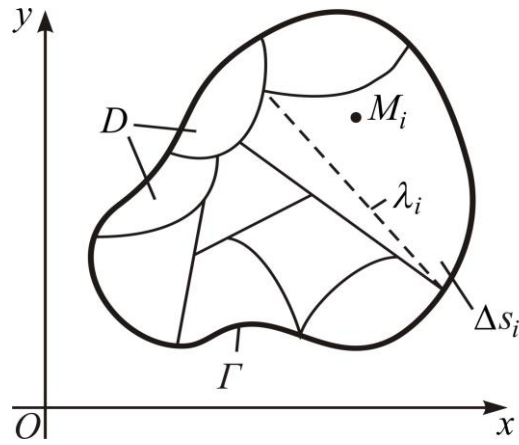


Рис. 26.1. Розбиття області

4) *обчислімо* границю (якщо вона існує) суми S_n за умови, що діаметр розбиття прямує до нуля в разі необмеженого зростання n , тобто $\lambda \rightarrow 0$ разом із $n \rightarrow \infty$.

Скінченну границю I інтегральної суми S_n , якщо $\lambda \rightarrow 0$, а $n \rightarrow \infty$, називають **подвійним інтегралом** (від) функції $f(x, y)$ по області D і позначають:

$$\iint_D f(M) ds \quad \text{або} \quad \iint_D f(x, y) ds,$$

де $\iint$ – знак (символ) подвійного інтеграла;

D – область інтегрування;

$f(M) = f(x, y)$ – підінтегральна функція;

$f(x, y) ds$ – підінтегральний вираз;

x, y – змінні інтегрування;

ds – елемент (диференціал) площі.

Отже, за означенням, маємо:

$$\iint_D f(x, y) ds = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} S_n = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta s_i. \quad (26.2)$$

Теорема 26.1 (існування подвійного інтеграла). Якщо функція $f(x, y)$ є неперервною в розглядуваній замкненій області, то існує скінченна границя інтегральної суми S_n (тобто подвійний інтеграл), і вона не залежить ні від способу розбиття області на площинки, ні від вибору точок у них для складання інтегральної суми.

Функцію $z = f(x, y)$, для якої існує подвійний інтеграл по області D , називають **інтегровною** на цій області.

Згідно з теоремою 26.1, розбиття області D виконують найпростішим із можливих способом, а саме: у декартовій системі координат xOy – прямими, паралельними координатним осям (рис. 26.2). У цьому разі площинка є прямокутником зі сторонами Δx , Δy , який утворено під час переходу від точки $M(x, y)$ до точки $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$, де $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$.

Тому $\Delta s = \Delta x \cdot \Delta y$, а $ds = \Delta s = dx \cdot dy$, бо прирости незалежних змінних x , y дорівнюють їхнім диференціалам: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$.

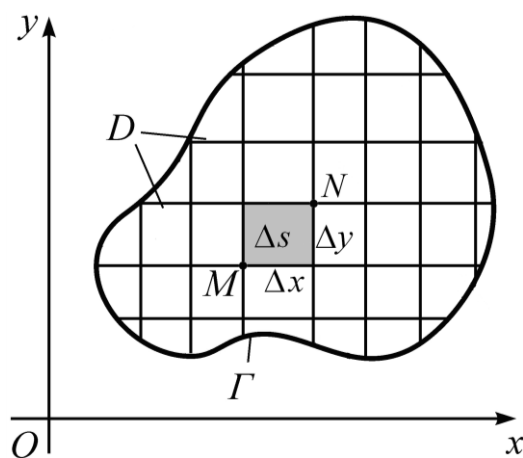


Рис. 26.2. Диференціал площі в декартовій системі координат

Отже, можна записати:

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_D ds = \iint_D dx \cdot dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

26.2. Геометричний зміст подвійного інтеграла

Тіло, обмежене поверхнею $z = f(x, y)$, площиною $z = 0$ і циліндричною поверхнею, твірна якої є паралельною осі Oz , а напрямною є межа Γ області D (рис. 26.3), називають **циліндричним тілом** для функції $f(x, y)$ на області D .

Аналізуючи з геометричного погляду процедуру, яка передувала означенню подвійного інтеграла для невід'ємної в області D функції ($f(x, y) \geq 0 \forall (x, y) \in D$), доходимо висновку: кожний доданок $f(M_i) \cdot \Delta s_i$ інтегральної суми чисельно дорівнює об'єму прямої призми із площею основи Δs_i і висотою $N_i M_i = f(M_i)$ (див. рис. 26.3), а вся інтегральна сума чисельно дає наближене значення V_n об'єму V циліндричного тіла для функції $f(x, y)$ на області D .

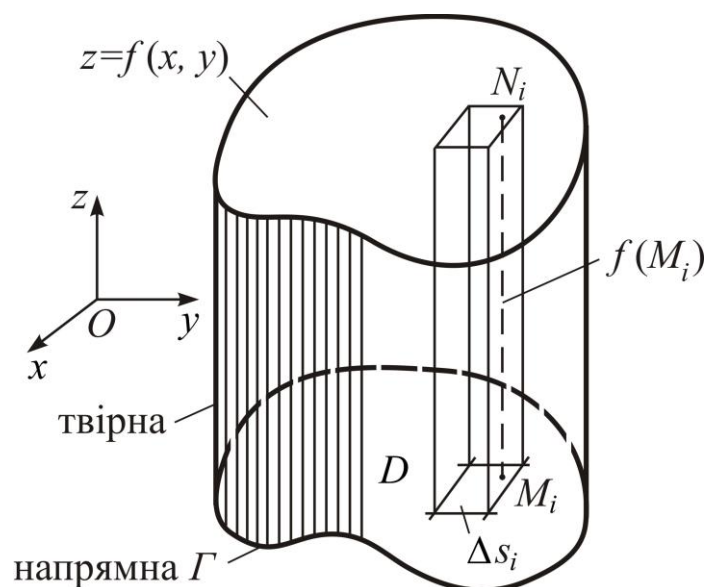


Рис. 26.3. Циліндричне тіло

Указане наближення є тим кращим, чим меншими будуть Δs_i , тому природно покласти, що $V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} V_n$, отже, подвійний інтеграл від функції $f(x, y) \geq 0$ по області D чисельно дорівнює об'єму циліндричного тіла для функції $f(x, y)$ на області D (геометричний зміст подвійного інтеграла):

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (26.3)$$

26.3. Основні властивості подвійного інтеграла

Оскільки означення подвійного інтеграла та означення визначеного інтеграла за своєю структурою є аналогічними, то властивості подвійного інтеграла, а також їхнє доведення майже не відрізняються від властивостей визначеного інтеграла.

Наведемо ці властивості.

1. Подвійний інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кількості функцій дорівнює алгебраїчній сумі подвійних інтегралів від доданків:

$$\begin{aligned} & \iint_D (f_1(x, y) + f_2(x, y) + \dots + f_n(x, y)) dx dy = \\ &= \iint_D f_1(x, y) dx dy + \iint_D f_2(x, y) dx dy + \dots + \iint_D f_n(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (26.4)$$

2. Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D cf(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy, \quad c = \text{const}. \quad (26.5)$$

3. Якщо область D розбити на дві області D_1 і D_2 , які не мають спільних внутрішніх точок, і функція $f(x, y)$ є неперервною в області D , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy. \quad (26.6)$$

4. Якщо в області D функція $f(x, y) \geq 0$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0. \quad (26.7)$$

5. Якщо в кожній точці області D функції $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ є неперервними й задовольняють умову $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D \varphi(x, y) dx dy. \quad (26.8)$$

6. Якщо функція $f(x, y)$ є неперервною в області D , яка має площу S , і задовольняє подвійну нерівність $m \leq f(x, y) \leq M$, де m та M , відповідно, найменше та найбільше значення функції $f(x, y)$ в області D , то

$$m \cdot S \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S. \quad (26.9)$$

7. Якщо функція $f(x, y)$ є неперервною в області D , яка має площу S , то в цій області існує така точка (ξ, η) , що

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot S. \quad (26.10)$$

Величину

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy$$

називають **середнім значенням функції** $f(x, y)$ в області D .

26.4. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

Обчислення подвійного інтеграла за ф-лою (26.2) як границі інтегральної суми пов'язано зі значними труднощами. Щоб уникнути їх, обчислення подвійного інтеграла зводять до обчислення так званого повторного інтеграла.

Припустимо, що в кожній точці області D функція $f(x, y) \geq 0$. Тоді, згідно з ф-лою (26.3), подвійний інтеграл від функції $f(x, y)$ по області D чисельно дорівнює об'єму циліндричного тіла для функції $f(x, y)$ на області D .

Обчислимо цей об'єм, скориставшись формулою об'єму тіла за відомими площами його паралельних перерізів:

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad (26.11)$$

де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною осі Ox ;
 $x = a$ і $x = b$ – рівняння площин, які обмежують циліндричне тіло.

Область D площини xOy називають **правильною в напрямку осі Oy** , якщо її обмежено прямими $x = a$, $x = b$ ($a < b$) та двома неперервними кривими $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ ($y_1(x) \leq y_2(x)$), а будь-яка пряма $x = x_0$ ($a < x_0 < b$), що проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Oy , перетинає кожен із цих кривих тільки в одній точці (рис. 26.4).

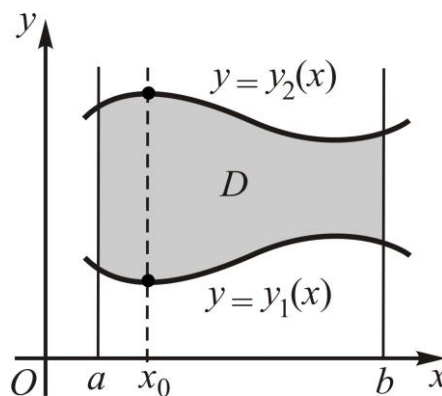


Рис. 26.4. Область, правильна в напрямку осі Oy

Розглянемо циліндричне тіло для функції $f(x, y)$ на правильній у напрямку осі Oy області D . Проведемо через точку $(x, 0, 0)$, де $x \in [a, b]$, площину, паралельну площині yOz (рис. 26.5).

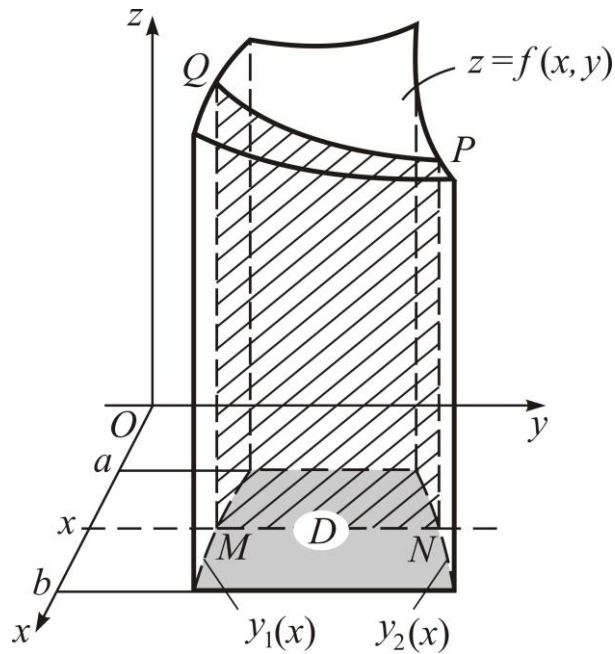


Рис. 26.5. Переріз циліндричного тіла площиною

У перерізі циліндричного тіла цією площиною маємо криволінійну трапецію $MNPQ$, площа якої дорівнює визначеному інтегралу від функції $f(x, y)$, де x є фіксованим, а y змінюється від $y_1(x)$ до $y_2(x)$.

Отже, площа перерізу дорівнює:

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Підставимо значення $S(x)$ у ф-лу (26.11):

$$V = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

З іншого боку, на підставі геометричного змісту подвійного інтеграла, маємо:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Зіставляючи останні дві формули, остаточно отримуємо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

або в більш зручній для використання формі:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (26.12)$$

Праву частину ф-ли (26.12) як визначений інтеграл від визначеного інтеграла називають **двократним**, або **повторним**, інтегралом від функції $z = f(x, y)$ по області D . У ньому інтеграл за змінною y називають **внутрішнім**, а інтеграл за змінною x – **зовнішнім**.

У разі обчислення подвійного інтеграла за ф-лою (26.12) спочатку виконують інтегрування за змінною y , тобто беруть внутрішній інтеграл

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \text{ уважаючи } x \text{ сталою величиною, а потім уже обчислюють зовніш-}$$

ній інтеграл, тобто попередньо визначену функцію від x інтегрують за змінною x у межах від a до b . Слід зазначити, що зовнішній інтеграл завжди має сталі межі інтегрування.

Область D площини xOy називають **правильною в напрямку осі Ox** , якщо її обмежено прямими $y = c$, $y = d$ ($c < d$) та двома неперервними кривими $x = x_1(y)$ і $x = x_2(y)$ ($x_1(y) \leq x_2(y)$), а будь-яка пряма $y = y_0$ ($c < y_0 < d$), що проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Ox , перетинає кожен із цих кривих тільки в одній точці (рис. 26.6).

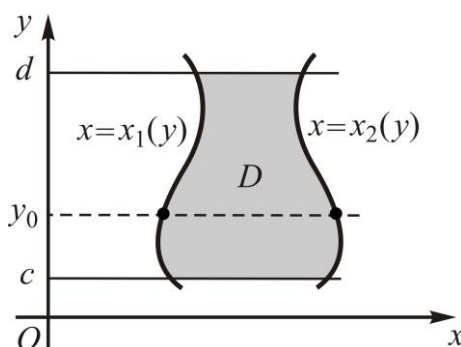


Рис. 26.6. Область, правильна в напрямку осі Ox

Обчислення подвійного інтеграла по такій області зводять до обчислення двократного інтеграла за такою формулою:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (26.13)$$

Як підсумок розглянутого наведемо **загальний порядок обчислення подвійного інтеграла**:

- 1) *будуємо* область інтегрування D , обмежену заданими лініями;
- 2) *аналізуємо* її, із метою встановлення того, чи є вона правильною в напрямку хоча б однієї з осей координат, і *визначаємо* межі інтегрування;
- 3) *обчислюємо* подвійний інтеграл зведенням до повторного інтеграла за ф-лою (26.12) або (26.13).

Якщо область D не є правильною, то її подають у вигляді об'єднання правильних областей, здійснивши її розбиття на частини прямими, паралельними координатним осям, і застосовують властивість 3 подвійного інтеграла:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy. \quad (26.14)$$

Під час обчислення подвійного інтеграла по деякій області D (не обов'язково правильній) можна вибирати будь-який порядок інтегрування (зовнішні інтеграли брати за змінною x , внутрішні – за y , чи навпаки) і це не вплине на остаточний результат, хоча з технічного боку, зазвичай, один із підходів виявляється більш прийнятним, ніж другий.

Формули зведення подвійного інтеграла до повторних (26.12) і (26.13) суттєво спрощуються, якщо область інтегрування D є прямокутником зі сторонами, паралельними осям координат (рис. 26.7).

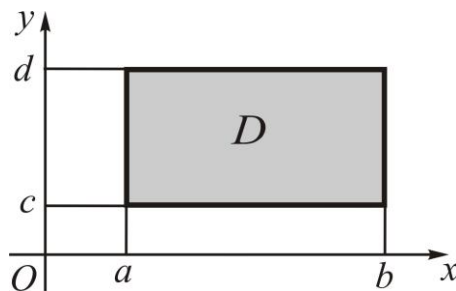


Рис. 26.7. Прямокутна область інтегрування

У цьому разі межі інтегрування є сталими не тільки для зовнішнього, але й внутрішнього інтеграла, тому, у якому порядку зінтегрувати: спочатку за змінною x , а потім за змінною y чи навпаки, не має значення:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (26.15)$$



Обчислімо $\iint_D e^{x+\sin y} \cos y dx dy$, якщо область D – прямокутник:
 $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2$.

За ф-лою (26.15), маємо:

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x+\sin y} \cos y dx dy &= \int_0^\pi dx \int_0^{\pi/2} e^x \cdot e^{\sin y} \cos y dy = \int_0^\pi e^x dx \int_0^{\pi/2} e^{\sin y} \cos y dy = \\ &= \int_0^\pi e^x (e^{\sin y}) \Big|_0^{\pi/2} dx = \int_0^\pi e^x (e^{\sin \pi/2} - e^{\sin 0}) dx = (e-1) \int_0^\pi e^x dx = (e-1) \cdot e^x \Big|_0^\pi = \\ &= (e-1) \cdot (e^\pi - 1) \approx 38,04. \end{aligned}$$



Обчислімо $\iint_D \frac{x}{y} dx dy$, якщо область D є обмеженою такими лініями:
 $y = e^x, y = e^{2x}$ і $x = 2$ (рис. 26.8).

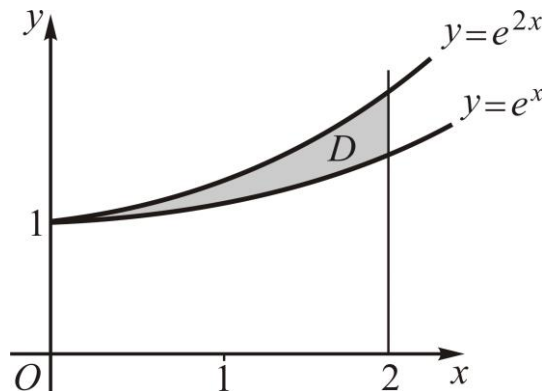


Рис. 26.8. Область інтегрування

Аналізуймо область D і зробімо висновок, що вона є правильною в напрямку осі Oy , тому внутрішнє інтегрування виконуємо за змінною y , а зовнішнє – за змінною x :

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{y} dx dy &= \int_0^2 x dx \int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{dy}{y} = \int_0^2 x \cdot (\ln|y|) \Big|_{e^x}^{e^{2x}} dx = \int_0^2 x \cdot (\ln e^{2x} - \ln e^x) dx = \\ &= \int_0^2 x \cdot (2x - x) dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$



Обчислімо $\iint_D x\sqrt{y} \, dx dy$, якщо область D є обмеженою такими лініями:
 $y = x$, $y = 3x$ і $y = 1$ (рис. 26.9).

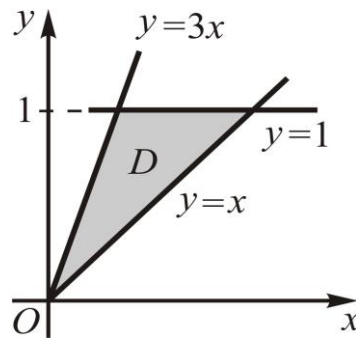


Рис. 26.9. Область інтегрування

За рис. 26.9 установлюймо, що область D є правильною в напрямку осі Ox , тому внутрішнє інтегрування виконуймо за змінною x , а зовнішнє – за змінною y :

$$\begin{aligned} \iint_D x\sqrt{y} \, dx dy &= \int_0^1 \sqrt{y} dy \int_{y/3}^y x dx = \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{y/3}^y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \left(y^2 - \frac{y^2}{9} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \frac{8}{9} y^2 dy = \frac{4}{9} \int_0^1 y^{5/2} dy = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{7} y^{7/2} \Big|_0^1 = \frac{8}{63} (\sqrt{1^7} - 0) = \frac{8}{63}. \end{aligned}$$



Обчислімо $\iint_D y \, dx dy$, якщо область D є обмеженою такими лініями:
 $y = \sqrt{x}$, $y = -x$ і $x - y = 2$ (рис. 26.10).

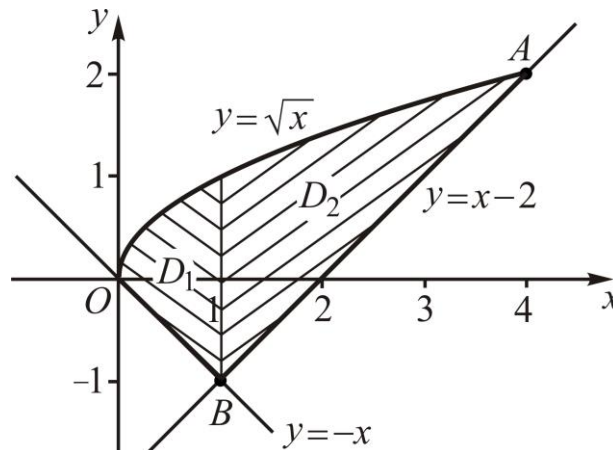


Рис. 26.10. Область інтегрування

Визначмо координати точок перетину кожної пари ліній, що описують область D :

$$\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x \quad (y \geq 0), \\ y^2 = (x - 2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow A(4, 2);$$

$$\begin{cases} y = -x, \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x, \\ -x = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(1, -1);$$

$$\begin{cases} y = -x, \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow O(0, 0).$$

Аналізуємо область D і зробимо висновок, що вона не є правильною в напрямку осі Oy , бо нижня ділянка її межі складається з відрізків двох різних прямих: $y = -x$ і $y = x - 2$. Але її можна подати у вигляді об'єднання двох правильних у напрямку Oy областей D_1 і D_2 , на які область D розбиває пряма $x = 1$: $D = D_1 \cup D_2$.

Тоді, за ф-лою (26.14), маємо:

$$\begin{aligned} \iint_D y \, dx \, dy &= \iint_{D_1} y \, dx \, dy + \iint_{D_2} y \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{\sqrt{x}} y \, dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} y \, dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-x}^{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x-2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^2) dx + \frac{1}{2} \int_1^4 (x - (x-2)^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(x-2)^3}{3} \right) \Big|_1^4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(8 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

26.5. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Нехай у замкненій області D , яку віднесено до полярної системи координат $\rho O \varphi$, де ρ – полярний радіус ($0 \leq \rho < \infty$), φ – полярний кут ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), O – полюс (початок координат), задано неперервну функцію $z = F(\rho, \varphi)$, або $z = F(M)$, де $M = M(\rho, \varphi)$.

Як і в декартовій системі координат xOy (див. п. 26.1) виконаймо такі дії:

1) розбиймо область D на площинки Δs_i ($i = \overline{1, n}$) із діаметром λ ;

2) виберімо на кожній із них точки $M_i(\rho_i, \varphi_i)$;

3) складімо інтегральну суму $S_n = \sum_{i=1}^n F(M_i) \cdot \Delta s_i$;

4) обчислімо границю інтегральної суми S_n (якщо вона існує) за умови, що $\lambda \rightarrow 0$ разом із $n \rightarrow \infty$.

Скінченну границю I інтегральної суми S_n , якщо $\lambda \rightarrow 0$, а $n \rightarrow \infty$, називають **подвійним інтегралом** (від) функції $z = F(\rho, \varphi)$ по області D в полярній системі координат і позначають:

$$I = \iint_D F(M) ds \quad \text{або} \quad I = \iint_D F(\rho, \varphi) ds. \quad (26.16)$$

Це означення повністю повторює означення подвійного інтеграла в декартових координатах (26.2), тому і в системі $\rho O \varphi$ достатньою умовою існування I є неперервність функції $F(M) \quad \forall M \in D$.

Оскільки в разі існування подвійного інтеграла границя I не залежить від способу розбиття області D на площинки, то його виконують найпростішим способом – координатними лініями: концентричними колами ($\rho = \text{const}$) і променями ($\varphi = \text{const}$) із початком у точці O (рис. 26.11).

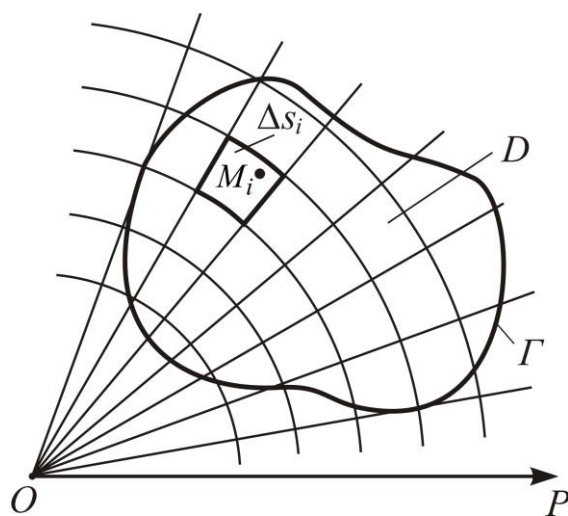


Рис. 26.11. Область D та її площинка Δs у полярних координатах

Елемент (диференціал) площі ds у полярних координатах через диференціали незалежних змінних $d\rho = \Delta\rho$, $d\varphi = \Delta\varphi$ описують співвідношенням:

$$ds = \rho d\rho d\varphi. \quad (26.17)$$

Тоді ф-ла (26.16) набуває такого вигляду:

$$I = \iint_D F(\rho, \varphi) ds = \iint_D F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (26.18)$$

Саме таке подання подвійного інтеграла в полярних координатах дозволяє звести його обчислення до вираховування повторних інтегралів, за аналогією з обчисленням подвійного інтеграла в декартових координатах.

Замкнену область D в системі $\rho O\varphi$ називають **правильною за ρ** , якщо її обмежено двома променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha, \beta - \text{const}$) і дугами двох неперервних кривих $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, причому будь-який промінь $\varphi = \varphi_0$, що проходить через внутрішню точку M ($M \notin \Gamma$) області D , перетинає її межу лише у двох точках (рис. 26.12). Насправді область D як множина точок є різницею двох криволінійних секторів, які було розглянуто під час обчислення площ плоских фігур у полярних координатах.

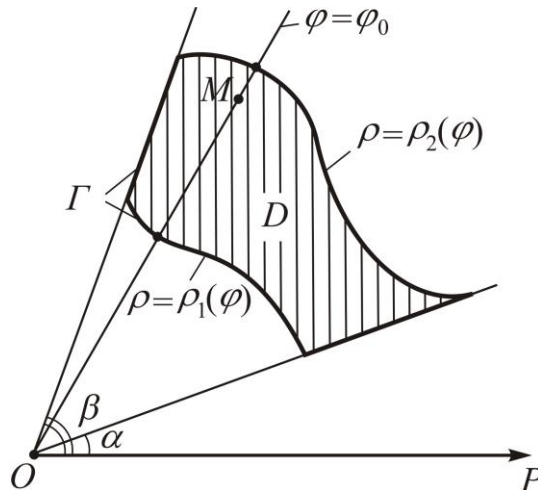


Рис. 26.12. Область, правильна за ρ

Замкнену область D у системі $\rho O\varphi$ називають **правильною за φ** , якщо її обмежено дугами двох концентричних кіл $\rho = \gamma$, $\rho = \delta$ ($\gamma, \delta - \text{const}$) і дугами двох неперервних кривих $\varphi = \varphi_1(\rho)$, $\varphi = \varphi_2(\rho)$, причому будь-яке коло $\rho = \rho_0$, що проходить через внутрішню точку M ($M \notin \Gamma$) області D , перетинає її межу лише у двох точках (рис. 26.13).

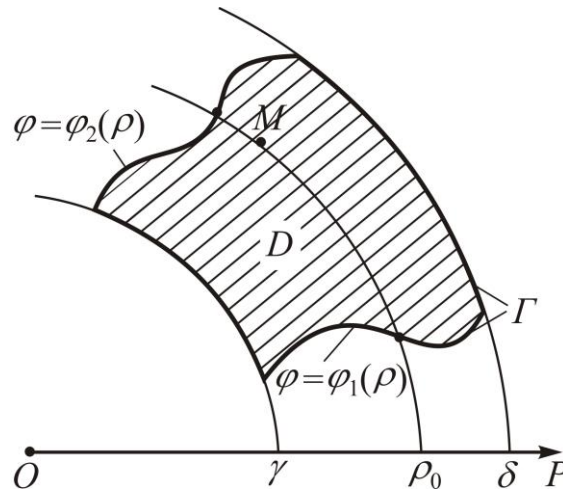


Рис. 26.13. Область, правильна за φ

Обчислення подвійного інтеграла по області D , правильною за $\rho(\varphi)$, виконують за такою формулою:

$$I = \iint_D F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho \right] d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho \quad (26.19)$$

$$\left(I = \iint_D F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\gamma}^{\delta} \left[\int_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} F(\rho, \varphi) d\varphi \right] \rho d\rho = \int_{\gamma}^{\delta} \rho d\rho \int_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} F(\rho, \varphi) d\varphi \right). \quad (26.20)$$

Довільну замкнену область D в полярних координатах завжди можна подати у вигляді об'єднання правильних областей, які утворюють розбиттям D на частини (підобласті) координатними лініями. Завдяки властивості адитивності, інтеграл по всій області D буде дорівнювати сумі інтегралів по її підобластях.

Отже, як і в декартових координатах, обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах зводять до його обчислення по правильних областях.

На практиці частіше застосовують такий порядок інтегрування, за якого внутрішній інтеграл беруть за змінною ρ , а зовнішній – за φ ; тому, якщо область D не є правильною, то її розбиття виконують на правильні за ρ підобласті.

Якщо область D обмежено зімкнутою лінією $\rho = \rho(\varphi)$ і початок координат O лежить усередині області, то маємо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho. \quad (26.21)$$



Перехід до полярних координат у подвійному інтегралі доцільно робити, якщо область інтегрування є кругом, кільцем або їхніми частинами, тобто межа області D містить дуги кіл і відрізки променів, що виходять із полюса O .



Обчислімо $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, де область D – круг $x^2 + y^2 \leq 4x$.

Зображаймо інтегрування область D , межею якої є коло з радіусом 2 із центром у точці $(2, 0)$: $x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4$ (рис. 26.14).

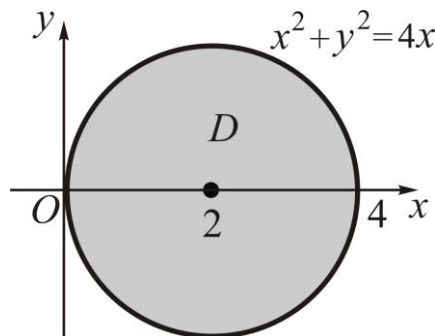


Рис. 26.14. Область інтегрування D

Застосуємо формули переходу від декартових координат до полярних: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $dx dy = \rho d\rho d\varphi$.

У координатах (ρ, φ) рівняння межі області D набуде такого вигляду:

$$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 \\ x = \rho \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \rho^2 = 4\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 4 \cos \varphi.$$

Аналізуємо область D і зробимо висновок, що вона є криволінійним сектором, обмеженим променями $\varphi_1 = -\pi/2$, $\varphi_2 = \pi/2$, а полярний радіус ρ змінюється від $\rho_1 = 0$ до $\rho_2 = 4 \cos \varphi$.

За ф-лою (26.19), маємо:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \left| \begin{matrix} x^2 + y^2 = \rho^2 \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi \end{matrix} \right| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} \rho^3 d\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\rho^4}{4} \right) \bigg|_0^{4 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 64 \cos^4 \varphi d\varphi = 64 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = 16 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 16 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = 16 \left(\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\
&= 16 \left[\left(\frac{3\pi}{4} + \sin \pi + \frac{1}{8}\sin 2\pi \right) - \left(-\frac{3\pi}{4} - \sin \pi - \frac{1}{8}\sin 2\pi \right) \right] = 16 \cdot \frac{3\pi}{2} = 24\pi.
\end{aligned}$$



Обчислімо інтеграл Ейлера – Пуассона: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Для цього залучімо такий подвійний інтеграл:

$$I_1 = \iint_{D_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy,$$

де D_1 – чверть круга $x^2 + y^2 \leq R^2$ деякого радіуса R , розташованого в першій координатній чверті (рис. 26.15).

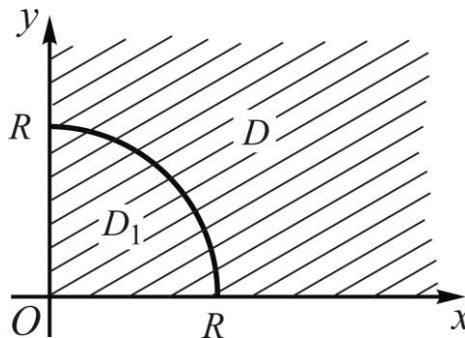


Рис. 26.15. Області інтегрування D_1 і D

Обчислімо інтеграл I_1 у полярних координатах:

$$\begin{aligned}
I_1 = \iint_{D_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy &= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R e^{-\rho^2/2} \rho d\rho = \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(-e^{-\rho^2/2} \right) \Big|_0^R d\varphi = \left(1 - e^{-R^2/2} \right) \int_0^{\pi/2} d\varphi = \left(1 - e^{-R^2/2} \right) \cdot \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \left(1 - e^{-R^2/2} \right).
\end{aligned}$$

Якщо тепер необмежено збільшувати радіус R ($R \rightarrow \infty$), то дістанемо невластний інтеграл по всій першій чверті (див. рис. 26.15), бо область D_1 розширюється так, що будь-яка точка області D потрапить у D_1 і залишиться в ній:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2/2} \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e^{\infty}} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

З іншого боку, якщо $R \rightarrow \infty$, то $x \rightarrow \infty$ і $y \rightarrow \infty$, тому можна записати:

$$I_1 = \iint_D e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2,$$

оскільки визначений інтеграл (а з ним і невластний) не залежить від позначення змінної інтегрування.

Зважаймо на те, що:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{I}{2}.$$

Отже:

$$I_1 = \left(\frac{I}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I^2 = 2\pi \Rightarrow I = \sqrt{2\pi}.$$

26.6. Деякі застосування подвійного інтеграла

1. Обчислення площі плоскої фігури. Якщо у ф-лі (26.3), яка виражає геометричний зміст подвійного інтеграла:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

як об'єм відповідного циліндричного тіла, покласти $f(x, y) \equiv 1 \quad \forall (x, y) \in D$, то циліндричне тіло «перетвориться» на прямий циліндр із висотою $H=1$. Як відомо, об'єм такого циліндра чисельно дорівнює площі S основи D .

Отже, маємо формулу для обчислення площі області D :

$$S = \iint_D dx dy. \quad (26.22)$$



Обчислімо площу фігури D , обмеженої лініями: $xy = 4$, $x + y = 5$.

Побудуємо фігуру D (рис. 26.16) і визначмо точки перетину заданих ліній – гіперболи та прямої – як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(5 - x) = 4, \\ y = 5 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ y = 5 - x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 4, \\ y = 5 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} A(1, 4), \\ B(4, 1). \end{bmatrix}$$

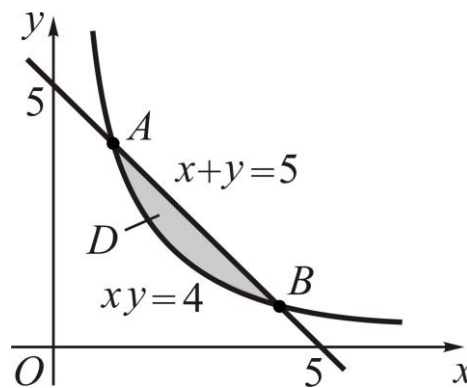


Рис. 26.16. Фігура $D = \{(x, y) \mid x \cdot y \geq 4, x + y \leq 5\}$

Другу гілку гіперболи $xy = 4$ на рис. 26.16 не зображено, бо вона не має спільних точок із прямою $x + y = 5$.

Задана фігура є областю, правильною і в напрямі осі Ox , і в напрямі осі Oy . Для обчислення її площі скористаймося ф-лою (26.22), у якій зовнішній інтеграл візьмімо за змінною x від $x = 1$ до $x = 4$, а внутрішній – за змінною y від $y = 4/x$ до $y = 5 - x$:

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_1^4 dx \int_{4/x}^{5-x} dy = \int_1^4 (y) \Big|_{4/x}^{5-x} dx = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x} \right) dx = \\ &= \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4 \ln|x| \right) \Big|_1^4 = 20 - 8 - 4 \ln 4 - 5 + \frac{1}{2} + 4 \ln 1 = \frac{15}{2} - 4 \ln 4 \approx 1,95 (\text{кв. од.}). \end{aligned}$$



Обчислимо площу фігури D , обмеженої лініями: $x^2 + y^2 \leq 2y$, $y \geq \sqrt{3}x$.

Побудуємо фігуру D , попередньо проаналізувавши рівняння ліній, які її обмежують: $x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$ – коло з радіусом 1 із центром у точці $(0, 1)$; $y = \sqrt{3}x$ – пряма, що проходить через початок координат і утворює з додатним напрямком осі Ox кут $\pi/3$.

Отже, задана фігура є множиною точок площини xOy , що лежать усередині кола $x^2 + (y-1)^2 = 1$ вище за пряму $y = \sqrt{3}x$ (рис. 26.17).

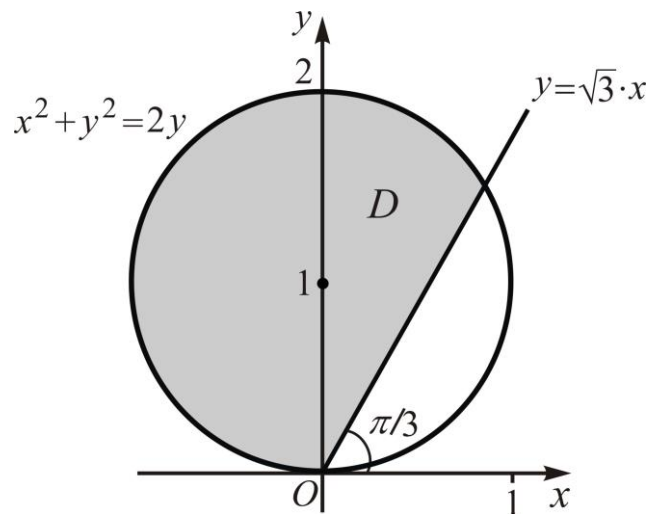


Рис. 26.17. Фігура $D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y, y \geq \sqrt{3} \cdot x \}$

Оскільки задана фігура є частиною круга, то обчислення її площі доцільно виконувати в полярних координатах.

Запишімо рівняння кола $x^2 + y^2 = 2y$ у координатах (ρ, φ) :

$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \rho^2 = 2\rho \sin \varphi \Rightarrow \rho = 2 \sin \varphi.$$

Шукану площу обчислимо за ф-лою (26.22), виконавши в ній перехід до полярних координат, водночас інтегрування за змінною ρ буде відбуватися в межах від $\rho = 0$ до $\rho = 2 \sin \varphi$, а за змінною φ – у межах від $\varphi = \pi/3$ до $\varphi = \pi$:

$$S = \iint_D dx dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| = \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_{\pi/3}^{\pi} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} \rho d\rho = \int_{\pi/3}^{\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \bigg|_0^{2 \sin \varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^{2\sin\varphi} d\varphi = \int_{\pi/3}^{\pi} 2\sin^2\varphi d\varphi = \int_{\pi/3}^{\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{\pi/3}^{\pi} =$$

$$= \left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin(2\pi/3)}{2} \right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 2,53 \text{ (кв. од.)}.$$

2. Обчислення об'єму просторового тіла ґрунтується на геометричному смислі подвійного інтеграла (див. п. 26.2) як об'ємі V циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ є невід'ємною і неперервною в області D ; із боків – циліндричною поверхнею, твірна якої є паралельною осі Oz , а напрямною є межа області D ; знизу – областю D площини xOy – основою тіла:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$



Обчислімо об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

Проаналізуємо рівняння поверхонь і побудуємо область інтегрування D . Задане просторове тіло обмежено: зверху – площиною $z = 4 - x$, паралельною осі Oy ; із боків – двома параболічними циліндрами $y^2 = x$ і $y^2 = 4x$ ($x \geq 0$), твірні яких є паралельними осі Oz ; знизу – областю D , яку «вирізають» на площині xOy циліндричні поверхні та площина $z = 4 - x$ (рис. 26.18).

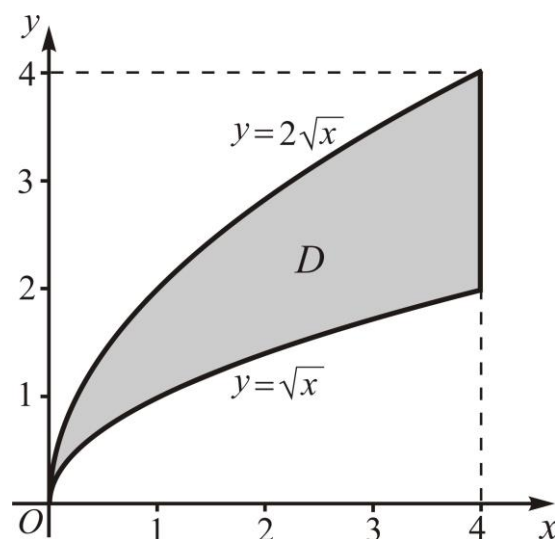


Рис. 26.18. Область інтегрування D (проекція тіла на xOy)

За ф-лою (26.3), маємо:

$$V = \iint_D (4-x) dx dy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x) dy = \int_0^4 (4-x) dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^4 (4-x) \cdot (y) \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^4 (4-x) \sqrt{x} dx = \int_0^4 (4\sqrt{x} - x\sqrt{x}) dx = \left(\frac{8\sqrt{x^3}}{3} - \frac{2\sqrt{x^5}}{5} \right) \Big|_0^4 = \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{128}{15} \text{ (куб. од.)}.$$



Обчислимо об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $y = x$, $y = \sqrt{3} \cdot x$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

Проаналізуємо рівняння поверхонь, що обмежують задане тіло: $z = 1 - x^2 - y^2$ – параболоїд обертання з вершиною в точці $(0, 0, 1)$ і порожниною, напрямленою донизу; $y = x$ і $y = \sqrt{3} \cdot x$ – площини, що містять вісь Oz ; $z = 0$ – площина xOy .

Побудуємо область інтегрування D – проєкцію тіла на площину xOy (рис. 26.19).

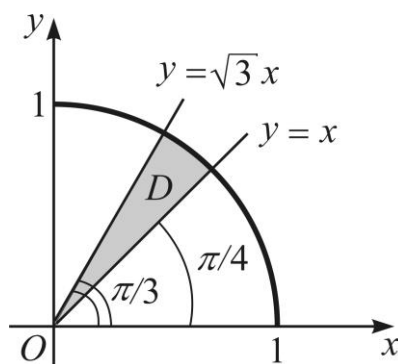


Рис. 26.19. Область інтегрування D

Обчислимо об'єм V за ф-лою (26.3), виконавши перехід до полярних координат, водночас зважаймо, що рівняння кола $x^2 + y^2 = 1$ у системі $\rho O\varphi$ набуде вигляду $\rho = 1$, а прямі $y = x$ і $y = \sqrt{3} \cdot x$ утворюють із віссю Ox кути $\pi/4$ і $\pi/3$, відповідно:

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho d\rho =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_0^1 (\rho - \rho^3) \rho d\rho = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi = \frac{1}{4} \varphi \bigg|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{48} \approx 0,065 \text{ (куб. од.)}.$$

3. Деякі застосування подвійного інтеграла в економічній галузі:

1) нехай D – ділянка-область посівів деякої сільськогосподарської культури. У кожній точці $M(x, y) \in D$ є відомою врожайність $q(x, y)$ цієї культури (наприклад, за спостереженнями з космосу).

Тоді величина

$$Q = \iint_D q(x, y) dx dy$$

чисельно дорівнює врожаю, зібраному з області D за відсутності втрат;

2) якщо функція $p(x, y)$ описує щільність населення в точці $M(x, y)$ деякого регіону-області D , то величина

$$P = \iint_D p(x, y) dx dy$$

дорівнює чисельності населення цього регіону.

В обох задачах аналітичний вираз підінтегральної функції устанавлюють як емпіричну формулу.

Підбиваючи підсумки теми «подвійний інтеграл», зазначмо, що разом із подвійними існують також і багатовимірні (m -вимірні, $m \geq 3$) інтеграли. Означення відповідних інтегралів уводять аналогічно тому, як це було зроблено за означення подвійного інтеграла, а їхнє обчислення зводять до обчислення m -кратних визначених інтегралів. Найбільш поширеними є потрійні інтеграли від функції $u = f(x, y, z)$ по просторовій (тривимірній) області V , обмеженій деякою замкненою поверхнею. Узяття потрійного інтеграла зводять до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.



Ключові терміни

Розбиття області; діаметр; інтегральна сума; подвійний інтеграл; інтегрована на області функція; циліндричне тіло; властивості подвійного інтеграла; середнє значення функції в області; правильні області; двократний (повторний) інтеграл; зовнішній і внутрішній інтеграли.



Запитання для самоперевірки

1. Які кроки (дії) передують означенню подвійного інтеграла від функції $f(x, y)$ по області D ?
2. Що називають інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ в області D ?
3. Що називають подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D ?
4. Як формулюють теорему існування подвійного інтеграла?
5. Якими основними властивостями володіє подвійний інтеграл і на чому ґрунтується загальний підхід до їхнього доведення?
6. Яке тіло називають циліндричним і якою чисельною характеристикою такого тіла є подвійний інтеграл?
7. У чому полягає геометричний зміст подвійного інтеграла?
8. Яку область називають правильною в напрямку осі Ox (Oy) (наведіть словесне формулювання і надайте геометричне зображення)?
9. За якими формулами обчислюють подвійні інтеграли, якщо область інтегрування є правильною?
10. Що називають двократним, або повторним, інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D ?
11. Який загальний порядок обчислення подвійних інтегралів?
12. Якими співвідношеннями пов'язані декартові й полярні координати в суміщених системах координат?
13. Чим принципово відрізняються означення подвійного інтеграла в декартових і полярних координатах?
14. У яких випадках доцільно виконувати перехід у подвійному інтегралі до полярних координат?
15. Чому дорівнює елемент площі в полярних координатах?
16. Яку область у полярній системі координат називають правильною за $\rho(\varphi)$ (наведіть словесне формулювання і надайте геометричне зображення)?
17. Як виконують перехід у подвійному інтегралі від декартових координат до полярних?
18. За якою формулою обчислюють подвійний інтеграл по області, правильній за $\rho(\varphi)$ у полярній системі координат?
19. Як за допомогою подвійного інтеграла обчислюють: а) площу плоскої фігури; б) об'єм просторового тіла?
20. Які економічні застосування подвійного інтеграла вам є відомими?



Тестові завдання до підрозділу 26

1. Укажіть, який символічний запис є означенням подвійного інтеграла від функції $z = f(x, y)$ по області D :

а) $\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^{\infty} f(M_i) \Delta S_i$;

б) $\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x_i$;

в) $\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta y_i$;

г) $\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta S_i$.

2. Укажіть, у якому з наведених співвідношень допущено помилку:

а) $\iint_D (k \cdot f_1(x, y) + f_2(x, y)) dx dy = k \cdot \iint_D f_1(x, y) dx dy + \iint_D f_2(x, y) dx dy$ ($k = \text{const}$);

б) $\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$;

в) $\iint_D f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx dy \cdot \iint_D f_2(x, y) dx dy$;

г) $f_1(x, y) \leq f_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \Rightarrow \iint_D f_1(x, y) dx dy \leq \iint_D f_2(x, y) dx dy$.

3. Укажіть, яке з наведених співвідношень не містить помилки:

а) $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx + \iint_D f(x, y) dy$;

б) $\exists (\xi, \eta) \in D \Rightarrow f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy$, де S – площа області D ;

в) $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx \cdot \iint_D f(x, y) dy$;

г) $\iint_D \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} dx dy = \frac{\iint_D f_1(x, y) dx dy}{\iint_D f_2(x, y) dx dy} \quad \left(\iint_D f_2(x, y) dx dy \neq 0 \right)$.

4. Укажіть, який символічний запис відповідає області D , яка є правильною в напрямку осі Oy :

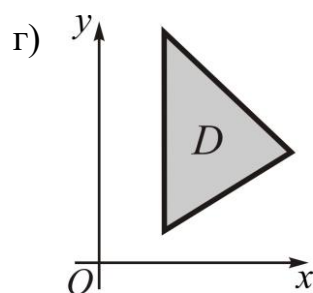
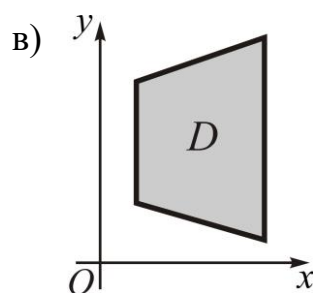
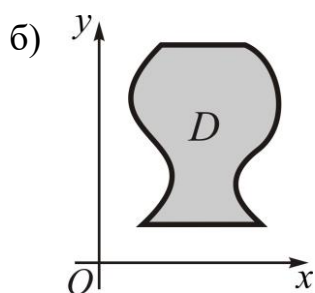
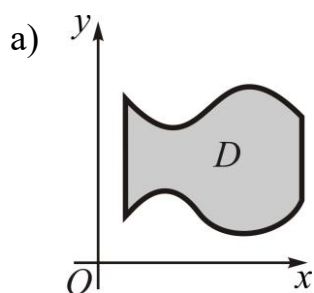
а) $D = \{(x, y) \mid a \leq y \leq b, \varphi_1(x) \leq x \leq \varphi_2(x)\}$;

б) $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(y) \leq y \leq \varphi_2(y)\}$;

в) $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$;

г) $D = \{(x, y) \mid a \leq y \leq b, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$.

5. Укажіть, яка з областей є правильною в напрямку осі Ox :



6. Укажіть, за якою формулою обчислюють подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$, якщо область D є правильною в напрямку осі Ox :

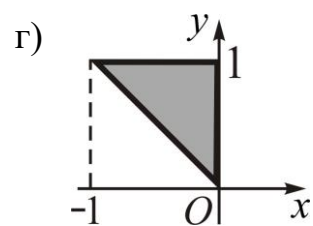
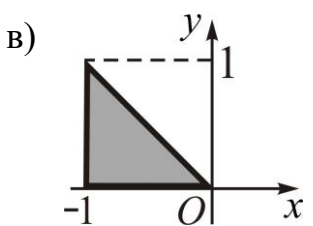
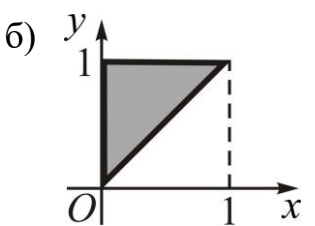
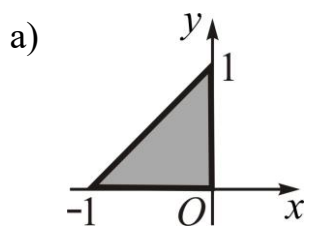
а) $\int_c^d dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy$;

б) $\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$;

в) $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy \int_c^d f(x, y) dx$;

г) $\int_c^d dx \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dy$.

7. Укажіть, площу якої фігури можна обчислити за допомогою двократного інтеграла $\int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} dy$:



8. Укажіть, який вигляд буде мати подвійний інтеграл $\int_0^2 dy \int_{y/2}^1 f(x, y) dx$,

якщо в ньому змінити порядок інтегрування, тобто записати його так, щоб зовнішнє інтегрування відбувалося за змінною x , а внутрішнє – за змінною y :

а) $\int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy$;

б) $\int_0^1 dx \int_0^2 f(x, y) dy$;

в) $\int_0^2 dx \int_1^x f(x, y) dy$;

г) $\int_0^1 dx \int_{x/2}^2 f(x, y) dy$.

9. Укажіть, за якою формулою обчислюють подвійний інтеграл $\iint_D F(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi$ у полярній системі координат, якщо область D є правильною

за змінною ρ :

а) $\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} d\varphi \int_{\alpha}^{\beta} F(\rho, \varphi) \rho d\rho$;

б) $\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{\alpha}^{\beta} F(\rho, \varphi) d\varphi$;

в) $\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho d\rho$;

г) $\int_{\alpha}^{\beta} F(\rho, \varphi) d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho$.

10. Укажіть, який вигляд буде мати подвійний інтеграл $\iint_D \frac{y dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ по обла-

сті $D: x^2 + y^2 \leq 8x, y \geq 0$, у разі переходу в ньому до полярних координат:

а) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho$;

б) $\int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^8 \rho d\rho$;

в) $\int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{8 \cos \varphi} \rho d\rho$;

г) $\int_0^{\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} \rho d\rho$.

Література: [1 – 4; 7 – 15; 17 – 23].

Розв'язання задач економічного змісту

6.1. Нехай відома функція граничного прибутку деякого підприємства, залежно від обсягу продукції x : $R'(x) = 25 - 0,08x$.

Визначте функцію прибутку та закон попиту на продукцію.

Розв'язання. Функція прибутку $R(x)$ підприємства є первісною функцією для функції граничного прибутку, отже:

$$R(x) = \int R'(x)dx = \int (25 - 0,08x)dx = 25x - 0,04x^2 + C.$$

Для визначення сталої C скористаймося умовою $R(0) = 0$, адже функція прибутку дорівнює нулю, якщо не реалізовано жодного виробу:

$$x = 0 \Rightarrow R(0) = 25 \cdot 0 - 0,04 \cdot 0^2 + C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Отже, функція прибутку має такий вигляд: $R(x) = 25x - 0,04x^2$.

Якщо p – ціна одиниці продукції, то прибуток визначають за формулою $R(x) = px$, де x – обсяг виробленої продукції. Поділивши функцію прибутку $R(x)$ на x , визначмо функцію попиту:

$$P(x) = 25 - 0,04x.$$

6.2. Функція продуктивності праці малого підприємства має такий вигляд: $f(x) = x^2 + e^{-x}$.

Визначте обсяг продукції, що буде виробляти мале підприємство: а) за перші три години; б) за другу годину роботи.

Розв'язання. Як відомо, функція продуктивності праці $f(x)$ показує швидкість виробництва продукції, залежно від часу x . Обсяг виробленої продукції за проміжок часу $[0, T]$ обчислимо за формулою: $P = \int_0^T f(x)dx$.

Тоді:

а) обсяг продукції, що буде виробляти мале підприємство за перші три години, обчислимо як визначений інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[0, 3]$:

$$P = \int_0^3 (x^2 + e^{-x})dx = \left(\frac{x^3}{3} - e^{-x} \right) \Big|_0^3 = 9 - e^{-3} + e^0 = 10 - e^{-3} \approx 9,95 \text{ (у. о.)};$$

б) обсяг продукції, виробленої за другу годину, обчислимо як визначений інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[1, 2]$:

$$P = \int_1^2 (x^2 + e^{-x}) dx = \left(\frac{x^3}{3} - e^{-x} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} - e^{-2} \right) - \left(\frac{1}{3} - e^{-1} \right) = \\ = \frac{7}{3} - e^{-2} + e^{-1} \approx 2,57 \text{ (у. о.).}$$

6.3. На виготовлення перших 100 поштових конвертів (одиниці продукції) було витрачено 50 хв. У подальшому час виготовлення продукції змінювався за такою формулою: $f(x) = 50x^{-0,25}$, де x – кількість уже виготовлених одиниць продукції.

Скільки хвилин буде потрібно для виготовлення ще 300 конвертів, якщо вже було виготовлено 400 конвертів?

Розв'язання. Функція $f(x) = 50x^{-0,25}$ визначає швидкість виробництва, тобто час на виготовлення кожної наступної одиниці продукції (у нас це 100 конвертів). Тоді час, потрібний для виготовлення додаткових 300 конвертів, якщо 400 конвертів вже виготовлено, обчислимо як визначений інтеграл від функції $f(x) = 50x^{-0,25}$ на проміжку $[4, 7]$:

$$\int_4^7 50x^{-0,25} dx = 50 \frac{x^{0,75}}{0,75} \Big|_4^7 = \frac{200}{3} (7^{0,75} - 4^{0,75}) = 98,34 \text{ (хв).}$$

6.4. Відомо, що витрати виробництва $f(x)$, залежно від його обсягу x , можна описати такою функцією: $f(x) = 2x^2 + 3x + 8$.

Обчисліть середнє значення витрат, якщо обсяг виробництва змінюється від 3 до 5 у. о. й укажіть, за якого обсягу виробництва витрати набувають середнього значення?

Розв'язання. За ф-лою (26.13) обчислимо середнє значення функції $f(x) = 2x^2 + 3x + 8$ на відрізку $[3, 5]$:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_3^5 (2x^2 + 3x + 8) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 8x \right) \Big|_3^5 = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{250}{3} + \frac{75}{2} + 40 - 18 - \frac{27}{2} - 24 \right) = \frac{158}{3} \text{ (гр. од.).}$$

Отже, середні витрати виробництва становлять $\frac{158}{3}$ (гр. од.).

Визначмо обсяг виробництва продукції, за якого витрати набувають значення $\frac{158}{3}$, тобто розв'яжімо таке рівняння:

$$2x^2 + 3x + 8 = \frac{158}{3} \Rightarrow 6x^2 + 9x - 134 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-9 + \sqrt{3\,297}}{12} \approx 4, \\ x_2 = \frac{-9 - \sqrt{3\,297}}{12} < 0. \end{cases}$$

Оскільки обсяг виробництва продукції не може бути від'ємним, то зробимо висновок, що для $x \approx 4$ (у. о.) витрати набувають середнього значення.

6.5. Функція граничних витрат для виробництва продукції має такий вигляд: $f'(x) = 50 + 0,08x$, де x – обсяг виробництва. Фіксовані витрати становлять 1 200 гр. од. на місяць, а вартість одного виробу – 98 гр. од.

Визначте функцію витрат для виробництва x од. продукції.

Обчисліть витрати на виробництво 200 од. продукції та визначте максимальний прибуток, який можна отримати.

Розв'язання. Функцію витрат для виробництва продукції визначмо як первісну функцію для функції граничних витрат $f'(x) = 50 + 0,08x$:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (50 + 0,08x)dx = 50x + 0,04x^2 + C.$$

Згідно з умовою, фіксовані витрати становлять 1 200 гр. од. на місяць, тобто $f(0) = 1200$:

$$f(0) = 50 \cdot 0 + 0,04 \cdot 0^2 + C = 1200 \Rightarrow C = 1200.$$

$$\text{Тоді } f(x) = 50x + 0,04x^2 + 1200.$$

Обчислимо витрати на виробництво 200 од. продукції:

$$f(200) = 50 \cdot 200 + 0,04 \cdot 200^2 + 1200 = 12\,800 \text{ (гр. од.)}.$$

Прибуток $P(x)$, залежно від обсягу продукції x , визначмо як різницю між доходами $R(x)$ і витратами $f(x)$: $P(x) = R(x) - f(x)$.

Оскільки вартість одного виробу 98 гр. од., то дохід від продажу x виробів становить: $R(x) = 98x$ гр. од., а прибуток $P(x)$ визначають такою функцією:

$$P(x) = R(x) - f(x) = 98x - (50x + 0,04x^2 + 1200) = 48x - 0,04x^2 - 1200.$$

Для визначення максимального прибутку проведемо дослідження функції прибутку $P(x)$ на екстремум. Знайдемо похідну і критичні точки цієї функції:

$$P'(x) = (48x - 0,04x^2 - 1200)' = 48 - 0,08x.$$

Далі, за необхідною умовою екстремуму, маємо:

$$48 - 0,08x = 0 \Rightarrow x = 600.$$

Якщо $x = 600$, то прибуток буде максимальним, адже $P''(600) = -0,08 < 0$ і буде становити:

$$P(600) = 48 \cdot 600 - 0,04 \cdot 600^2 - 1200 = 13\,200 \text{ (гр. од.)}.$$

6.6. За відомим законом попиту $p(x) = 80 - x^2$ і законом пропозиції $q(x) = \frac{2}{3}x + \frac{32}{3}$ визначте виграш споживача та виграш постачальника.

Розв'язання. Визначмо точку ринкової рівноваги x , для якої $p = q$:

$$80 - x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{32}{3} \Rightarrow 3x^2 + 2x - 208 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 + 50}{6} = 8, \\ x_2 = \frac{-2 - 50}{6} < 0. \end{cases}$$

Кількість продукції не може бути від'ємним числом, тому залишаймо лише значення $x = 8$, а його ринкова ціна становить: $p(8) = 80 - 8^2 = 16$ (гр. од.). Фактично споживач платить $16 \cdot 8 = 128$ гр. од. за 8 од. продукції.

Виграш споживача є різницею між тим, скільки споживач готовий заплатити за продукцію, і тим, що він фактично платить:

$$\begin{aligned} C &= \int_0^8 p(x) dx - 128 = \int_0^8 (80 - x^2) dx - 128 = \left(80x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^8 - 128 = \\ &= 640 - \frac{512}{3} - 128 = \frac{1024}{3} \approx 341,3 \text{ (гр. од.)}. \end{aligned}$$

Виграш постачальника є різницею між тим, скільки постачальник отримує за продукцію, і тим, у скільки йому обходиться її виробництво:

$$\begin{aligned} P &= 128 - \int_0^8 q(x) dx = 128 - \int_0^8 \left(\frac{2}{3}x + \frac{32}{3} \right) dx = 128 - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{32}{3}x \right) \Big|_0^8 = \\ &= 128 - \left(\frac{64}{3} + \frac{256}{3} \right) = \frac{64}{3} \approx 21,3 \text{ (гр. од.)}. \end{aligned}$$

Отже, виграш споживача наближено становить 341 (гр. од.), а виграш поставальника – 21,3 (гр. од.).

6.7. Сукупні витрати підприємства та попит на товар задають функціями $C(x) = 600 + 92x + 2x^2$ і $p(x) = 260 - 3x - x^2$, відповідно.

Визначте обсяг виробництва, за якого підприємство отримає максимальний прибуток.

Розв'язання. Прибуток підприємства $P(x)$ визначають як різницю між його доходом від продажу $R(x) = p(x) \cdot x$, де x – кількість одиниць продукції, та сукупними витратами $C(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) = p(x) \cdot x - C(x) = (260 - 3x - x^2) \cdot x - (600 + 92x + 2x^2) = \\ &= -x^3 - 5x^2 + 168x - 600. \end{aligned}$$

Щоб визначити обсяг виробництва, за якого прибуток буде максимальним, потрібно дослідити функцію $P(x)$ на екстремум.

Знайдімо похідну і критичні точки цієї функції:

$$\begin{aligned} P'(x) &= -3x^2 - 10x + 168, \\ P'(x) = 0 &\Rightarrow 3x^2 + 10x - 168 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-10 + 46}{6} = 6, \\ x_2 = \frac{-10 - 46}{6} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Кількість продукції не може бути від'ємним числом, тому залишаймо лише значення $x = 6$.

Для $x = 6$ прибуток буде максимальним, оскільки $P''(x) = -6x - 10$, а $P''(6) = -46 < 0$.

6.8. Визначте дисконтований (початковий) прибуток за 5 років, якщо ставка дисконту становить 8 %, а річний прибуток є функцією часу: $f(t) = t$.

Розв'язання. Для визначення дисконтованого прибутку за 5 років, скористаймося ф-лою (24.26):

$$PV = \int_0^T f(t)(1+i)^{-t} dt.$$

За умовою задачі, маємо: функція річного прибутку $f(t) = t$, ставка дисконту $i = 8\% = 0,08$, а проміжок часу $[0, T] = [0, 5]$, тому:

$$PV = \int_0^5 t \cdot (1 + 0,08)^{-t} dt = \int_0^5 t \cdot 1,08^{-t} dt.$$

Для обчислення визначеного інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} PV &= \int_0^5 t \cdot 1,08^{-t} dt = \left| \begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = 1,08^{-t} dt \Rightarrow v = -\frac{1,08^{-t}}{\ln 1,08} \end{array} \right| = \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du = \\ &= \left(-t \cdot \frac{1,08^{-t}}{\ln 1,08} \right) \Big|_0^5 + \frac{1}{\ln 1,08} \int_0^5 1,08^{-t} dt = \left(-t \cdot \frac{1,08^{-t}}{\ln 1,08} - \frac{1,08^{-t}}{\ln^2 1,08} \right) \Big|_0^5 = \\ &= \left(-\frac{1,08^{-t}}{\ln 1,08} \left(t + \frac{1}{\ln 1,08} \right) \right) \Big|_0^5 = -\frac{1,08^{-5}}{\ln 1,08} \cdot \left(5 + \frac{1}{\ln 1,08} \right) + \frac{1}{\ln^2 1,08} \approx 9,71 \text{ (гр. од.)}. \end{aligned}$$

Отже, якщо ставка дисконту дорівнює 8 %, то дисконтований прибуток за 5 років буде становити 9,71 гр. од.

6.9. Розподіл доходу в деякій країні визначають кривою Лоренца:
 $y = 0,79x^2 + 0,21x$.

Яку частку доходу отримують 10 % найбільш незахищеного населення?

Обчисліть коефіцієнт нерівномірного розподілу сукупного доходу.

Розв'язання. Визначмо частку доходу, яку отримують 10 % найбільш незахищеного населення:

$$y(0,1) = 0,79 \cdot (0,1)^2 + 0,21 \cdot 0,1 = 0,0289.$$

Цей результат означає, що 10 % найбільш незахищеного населення отримують 2,89 % сукупного доходу.

Обчислимо коефіцієнт нерівномірного розподілу сукупного доходу, який дорівнює відношенню площі S_1 фігури, обмеженої кривою $y = 0,79x^2 + 0,21x$ і прямою $y = x$, до площі S_2 фігури, обмеженої прямими $y = x$, $x = 1$, $y = 0$ (див. рис. 24.22).

Отже, коефіцієнт Джині дорівнює: $k = S_1/S_2$.

Обчислимо площі S_1 і S_2 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 (x - 0,79x^2 - 0,21x) dx = \int_0^1 (0,79x - 0,79x^2) dx = 0,79 \int_0^1 (x - x^2) dx = \\ &= 0,79 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 0,79 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 0,79 \cdot \frac{1}{6} \approx 0,1317, \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0,5 \text{ як площа прямокутного трикутника } OCA.$$

Тоді

$$k = \frac{S_1}{S_2} = \frac{0,1317}{0,5} = 0,2634.$$

Значення коефіцієнта Джині $k=0,2634$ близьке до 0, що свідчить про порівняно рівномірний розподіл доходів у суспільстві. Це означає, що різниця між доходами різних груп населення не є занадто значною.

6.10. Після виготовлення 50 мобільних телефонів виявилось, що час на виготовлення наступних телефонів зменшується за формулою $f(x) = 8x^{-0,12}$.

Визначте час, потрібний для виготовлення ще 10 телефонів.

Розв'язання. Час, потрібний на виробництво одиниць продукції з номерами від $(n_1 + 1)$ до n_2 визначають за такою формулою:

$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x) dx.$$

За умовою задачі, установлюймо, що $n_1 = 50$, $n_2 = 60$, а $f(x) = 8x^{-0,12}$.

Отже:

$$\Delta T = \int_{50}^{60} 8x^{-0,12} dx = \frac{8x^{0,88}}{0,88} \Big|_{50}^{60} = \frac{100}{11} (60^{0,88} - 50^{0,88}) = 49,47 \text{ (од. часу)}.$$

Зробімо висновок, що на виготовлення додаткових 10 телефонів потрібно витратити 49,47 од. часу.

Завдання для самостійного розв'язання

Знайдіть невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

$$6.12. \int (9x^2 - 10\sqrt[4]{x} + 3\sqrt{x}) dx. \quad 6.13. \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 16}} \right) dx.$$

$$6.14. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}. \quad 6.15. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$6.16. \int \frac{\sin 9x - \sin 5x}{\cos 7x} dx. \quad 6.17. \int (1-3x)^{17} dx.$$

$$6.18. \int \sqrt[4]{(12x-5)^3} dx. \quad 6.19. \int e^{3x-5} dx.$$

$$6.20. \int \frac{dx}{11-4x}. \quad 6.21. \int \frac{2x-3}{x^2-3x+8} dx.$$

$$6.22. \int \frac{dx}{\sin^2(7x-2)}. \quad 6.23. \int \frac{3\sin x}{1-2\cos x} dx.$$

$$6.24. \int \frac{3x^3}{2x^4+3} dx. \quad 6.25. \int \frac{dx}{x^2-10}.$$

Знайдіть невизначені інтеграли методом заміни змінної (підстановки):

$$6.26. \int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+2}} dx. \quad 6.27. \int e^{4\sin x} \cos x dx.$$

$$6.28. \int \frac{\ln^5(3x-2)}{3x-2} dx. \quad 6.29. \int \frac{e^{3x}}{4-e^{6x}} dx.$$

$$6.30. \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx. \quad 6.31. \int x \cos(x^2-1) dx.$$

$$6.32. \int (x^2+1)^5 x dx. \quad 6.33. \int \frac{dx}{\arcsin^4 x \sqrt{1-x^2}}.$$

$$6.34. \int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}. \quad 6.35. \int \frac{dx}{\sqrt{3+4x^2}}.$$

$$6.36. \int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx. \quad 6.37. \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}} dx.$$

Знайдіть невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

6.38. $\int x \ln x dx.$

6.39. $\int (x-7) \sin x dx.$

6.40. $\int (1-3x) \cos 2x dx.$

6.41. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$

6.42. $\int (4-x) e^{-3x} dx.$

6.43. $\int \ln(1+x^2) dx.$

6.44. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx.$

6.45. $\int x^2 e^{-2x} dx.$

6.46. $\int e^x \sin x dx.$

6.47. $\int \sqrt{4+x^2} dx.$

Знайдіть невизначені інтеграли від квадратних тричленів:

6.48. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$

6.49. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 10x + 28}}.$

6.50. $\int \frac{6x-1}{x^2 - 4x + 13} dx.$

6.51. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx.$

6.52. $\int \frac{3-5x}{4x^2 + 16x - 9} dx.$

6.53. $\int \frac{7-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx.$

Знайдіть невизначені інтеграли від раціональних алгебраїчних дробів:

6.54. $\int \frac{3x+8}{(x-2)(x+5)} dx.$

6.55. $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$

6.56. $\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^2 (x-1)} dx.$

6.57. $\int \frac{x^2 - 7x - 6}{(x^2 + 9)(x-3)} dx.$

6.58. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + x)}.$

6.59. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$

6.60. $\int \frac{7x-15}{x(x^2 - 2x + 5)} dx.$

6.61. $\int \frac{x^3 - 7x^2 + 8}{(x^2 + 4)x^2} dx.$

Знайдіть невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$6.62. \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}.$$

$$6.63. \int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}.$$

$$6.64. \int \frac{dx}{3 + 5\cos x}.$$

$$6.65. \int \sin 2x \cos 4x dx.$$

$$6.66. \int \sin^3 x dx.$$

$$6.67. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx.$$

$$6.68. \int \cos^4 x dx.$$

$$6.69. \int \operatorname{tg}^4 x dx.$$

$$6.70. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx.$$

$$6.71. \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{2 + 5\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Знайдіть невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$6.72. \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx.$$

$$6.73. \int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}.$$

$$6.74. \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}}.$$

$$6.75. \int \sqrt{\frac{x}{x+5}} \cdot \frac{dx}{x^2}.$$

$$6.76. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

$$6.77. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}.$$

$$6.78. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(9+x^2)^5}}.$$

$$6.79. \int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6} dx.$$

Обчисліть визначені інтеграли за формулою Ньютона – Лейбніца:

$$6.80. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

$$6.81. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}.$$

$$6.82. \int_0^{\pi/3} \sin 3x dx.$$

$$6.83. \int_0^4 \frac{dx}{25-x^2}.$$

$$6.84. \int_4^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}.$$

$$6.85. \int_1^4 \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

$$6.86. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

$$6.87. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 3x \cos 5x dx.$$

Обчисліть визначені інтеграли методом заміни змінної (підстановки):

$$6.88. \int_4^5 x \sqrt{x^2 - 16} dx.$$

$$6.89. \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx.$$

$$6.90. \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$6.91. \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx.$$

$$6.92. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}.$$

$$6.93. \int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx.$$

$$6.94. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 - 3 \cos x}.$$

$$6.95. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx.$$

Обчисліть визначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$6.96. \int_0^{\pi} x \cdot \sin(x/2) dx.$$

$$6.97. \int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x dx.$$

$$6.98. \int_0^1 \arcsin x dx.$$

$$6.99. \int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx.$$

$$6.100. \int_{-1}^0 (2x + 3) \cdot e^{-x} dx.$$

$$6.101. \int_0^{e-1} \ln(x + 1) dx.$$

Обчисліть невластні інтеграли або встановіть їхню розбіжність:

$$6.102. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}.$$

$$6.103. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$6.104. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$6.105. \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$6.106. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 9}.$$

$$6.107. \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}.$$

Обчисліть площі фігур, обмежених заданими лініями:

6.108. $y = 3 \cdot x^{-1}$, $x + y = 4$.

6.109. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

6.110. $y = \sqrt{1 - x}$, $y = x + 1$, $y = 0$.

6.111. $y = x^2$, $xy = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

6.112. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

6.113. $\rho = 2a(1 + \cos \varphi)$.

Обчисліть довжину дуги заданої кривої:

6.114. $y = \ln \sin x$ ($\pi/3 \leq x \leq \pi/2$).

6.115. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 3/4$).

6.116. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

6.117. $\rho = 2 \sin \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi/3$).

Обчисліть об'єми тіл, утворених обертанням навколо осі Ox фігур, обмежених заданими лініями:

6.118. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

6.119. $y = 3 \sin x$, $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

6.120. $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

6.121. $y = x^2$, $xy = 8$, $x = 4$, $y = 0$.

Обчисліть подвійні інтеграли по області, обмеженої заданими лініями:

6.122. $\iint_D \sin(x - y) dx dy$, $y = x$, $y = 2x$, $x = \pi$.

6.123. $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, $y = x$, $y = 1/x$, $x = 2$.

$$6.124. \iint_D e^{x+y} dx dy, \quad y = x, \quad y = 2, \quad x = \ln 2.$$

$$6.125. \iint_D x dx dy, \quad y = x + 2, \quad y = x^2.$$

$$6.126. \iint_D y dx dy, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = -x, \quad x - y = 2.$$

Обчисліть площі плоских областей, обмежених заданими лініями:

$$6.127. y = x^2, \quad x + y = 6.$$

$$6.128. y = 3x^2, \quad y = 4x - x^2.$$

$$6.129. y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad x = 4.$$

$$6.130. y^2 = -x, \quad x = -4.$$

Розв'яжіть такі задачі:

6.131. Продуктивність праці робітника протягом дня задано функцією:
 $f(t) = -0,0324t^2 + 0,4t + 0,2$ (од./год), де t – час від початку роботи, $0 \leq t \leq 8$.

Визначте функцію, яка характеризує обсяг продукції, та обчисліть обсяг продукції, виробленої протягом робочого дня.

6.132. Вартість перевезення вантажу на один кілометр визначено функцією: $f(x) = \frac{25}{x+3}$ (гр. од./км).

Обчисліть витрати на перевезення вантажу на відстань 15 км.

6.133. Визначте функцію доходу підприємства і рівняння попиту, якщо функція граничного доходу має такий вигляд: $f(x) = 25 - 0,02x - 0,003x^2$.

6.134. Обчисліть середнє значення витрат виробництва $C(x) = 3x^2 + 5x - 8$, визначених у грошових одиницях, якщо його обсяг змінюють від 0 до 4 гр. од.

Обчисліть обсяг виробництва, за якого витрати набувають середнього значення.

6.135. Обчисліть середнє значення витрат на виробництво деякого обсягу продукції, за умови, що витрати $f(x) = 3x^2 + 8x + 1$ змінюються, залежно від обсягу виробництва, який зростає від 0 до 3 гр. од.

6.136. Продуктивність праці характеризується функцією: $f(t) = \frac{4}{2t+3} + 3$.

Обчисліть обсяг продукції, виробленої працівником: а) за третю годину робочого дня; б) за перші три години робочого дня.

6.137. Підрахуйте запас товару на складі, який накопичують протягом доби, якщо швидкість надходження товару визначено такою функцією: $f(t) = 3t^2 + 4t + 5$, де t – час від початку надходження товару.

6.138. Нехай річний прибуток становить 10 000 гр. од.

Обчисліть дисконтований (початковий) прибуток за 10 років, якщо відсоткова ставка дорівнює 5 % і відсотки нараховують неперервно.

6.139. Розподіл прибуткового податку в деякій країні визначено кривою Лоренца $y = f(x)$, де x – частка населення, що сплачує податки; y – частка загального податку.

Визначте, яку частку загального податку сплачують 15 % найбіднішого населення? Обчисліть коефіцієнт Джині, якщо криву Лоренца описано функцією: а) $y = 0,83x^2 + 0,17x$; б) $y = \frac{8}{15}x^2 + \frac{7}{15}x$.



Відповіді

6.12. $3x^3 - 8\sqrt[4]{x^5} + 2\sqrt{x^3} + C.$

6.13. $e^x - \ln|x + \sqrt{x^2 - 16}| + C.$

6.14. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$

6.15. $-x + \operatorname{tg} x + C.$

6.16. $-\cos 2x + C.$

6.17. $\frac{(1-3x)^{18}}{-54} + C.$

6.18. $\frac{\sqrt[4]{(12x-5)^7}}{21} + C.$

6.19. $\frac{1}{3}e^{3x-5} + C.$

6.20. $\frac{\ln|11-4x|}{-4} + C.$

6.21. $\ln(x^2 - 3x + 8) + C.$

6.22. $\frac{-\operatorname{ctg}(7x-2)}{7} + C.$

6.23. $\frac{3}{2}\ln|1-2\cos x| + C.$

$$6.24. \frac{3}{8} \ln(2x^4 + 3) + C.$$

$$6.25. \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{10}}{x + \sqrt{10}} \right| + C.$$

$$6.26. \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2 + 2)^2} + C.$$

$$6.27. \frac{1}{4} e^{4 \sin x} + C.$$

$$6.28. \frac{1}{18} \ln^6(3x - 2) + C.$$

$$6.29. \frac{1}{12} \ln \left| \frac{e^{3x} + 2}{e^{3x} - 2} \right| + C.$$

$$6.30. e^{\operatorname{tg} x} + C.$$

$$6.31. \frac{1}{2} \sin(x^2 - 1) + C.$$

$$6.32. \frac{1}{12} (x^2 + 1)^6 + C.$$

$$6.33. -\frac{1}{3 \arcsin^3 x} + C.$$

$$6.34. \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}} + C.$$

$$6.35. \frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{3 + 4x^2}| + C.$$

$$6.36. e^{\sqrt{2x-1}} + C.$$

$$6.37. \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

$$6.38. \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

$$6.39. (7 - x) \cos x + \sin x + C.$$

$$6.40. \frac{1-3x}{2} \sin 2x - \frac{3 \cos 2x}{4} + C.$$

$$6.41. x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C.$$

$$6.42. \frac{3x-11}{9} e^{-3x} + C.$$

$$6.43. x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C.$$

$$6.44. \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

$$6.45. -\frac{e^{-2x}}{2} \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) + C.$$

$$6.46. \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

$$6.47. \frac{x\sqrt{4+x^2}}{2} + 2 \ln |x + \sqrt{4+x^2}| + C.$$

$$6.48. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

$$6.49. \ln |x + 5 + \sqrt{x^2 + 10x + 28}| + C.$$

$$6.50. 3 \ln(x^2 - 4x + 13) + \frac{11}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C.$$

$$6.51. 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} + C.$$

$$6.52. \frac{13}{20} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+9} \right| - \frac{5}{8} \ln |4x^2 + 16x - 9| + C.$$

$$6.53. 6 \arcsin \frac{x-1}{2} + \sqrt{3+2x-x^2} + C.$$

$$6.54. 2 \ln |x-2| + \ln |x+5| + C.$$

$$6.55. 4 \ln |x-1| + 5 \ln |x-4| - 7 \ln |x+3| + C.$$

$$6.56. -\frac{3}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \ln |x+1| + \frac{3}{4} \ln |x-1| + C.$$

$$6.57. \ln(x^2 + 9) - \ln |x-3| - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.$$

$$6.58. \ln |x| - \frac{1}{2} \ln |x+1| - \frac{1}{4} \ln (x^2 + 1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$6.59. \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln |x| + 5 \ln |x-2| - 3 \ln |x+2| + C.$$

$$6.60. \frac{3}{2} \ln (x^2 - 2x + 5) - 3 \ln |x| + 2 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$$

$$6.61. \frac{1}{2} \ln (x^2 + 4) - \frac{9}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{2}{x} + C.$$

$$6.62. C - \frac{1}{2 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

$$6.63. \frac{1}{3} \operatorname{arctg} (3 \operatorname{tg} x) + C.$$

$$6.64. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + C.$$

$$6.65. \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12} + C.$$

$$6.66. \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

$$6.67. \frac{1}{7 \cos^7 x} - \frac{1}{5 \cos^5 x} + C.$$

$$6.68. \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

$$6.69. \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

$$6.70. \frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^5 x} + \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + C.$$

$$6.71. \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + \frac{2}{3}} \right| + C.$$

$$6.72. 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$$

$$6.73. \frac{3}{2} \ln(\sqrt[3]{x^2} + 1) + C.$$

$$6.74. 6\sqrt[6]{x} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$$

$$6.75. -\frac{2}{5} \sqrt{\frac{x+5}{x}} + C.$$

$$6.76. -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

$$6.77. \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C.$$

$$6.78. \frac{x^3}{27 \cdot \sqrt{(9+x^2)^3}} + C.$$

$$6.79. C - \frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}.$$

$$6.80. \frac{17}{6}.$$

$$6.81. 7/32.$$

$$6.82. 2/3.$$

$$6.83. \frac{1}{10} \ln 9.$$

$$6.84. \pi/6.$$

$$6.85. \pi/12.$$

$$6.86. \pi/6.$$

$$6.87. 0.$$

$$6.88. 9.$$

$$6.89. 2.$$

$$6.90. 1/4.$$

$$6.91. 1/4.$$

$$6.92. 2.$$

$$6.93. 1.$$

$$6.94. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2.$$

$$6.95. \frac{81}{8} \pi.$$

$$6.96. 4.$$

$$6.97. 1/9.$$

$$6.98. \pi/2 - 1.$$

$$6.99. \frac{e^2 - 5}{e}.$$

$$6.100. 3e - 5.$$

$$6.101. 1.$$

$$6.102. 1/4.$$

$$6.103. \text{Розбігається.}$$

$$6.104. 1/2.$$

$$6.105. \text{Розбігається.}$$

$$6.106. \pi/6.$$

$$6.107. 4.$$

$$6.108. 4 - 3 \ln 3 \text{ (кв. од.)}.$$

$$6.109. 9 \text{ (кв. од.)}.$$

$$6.110. \frac{7}{6} \text{ (кв. од.)}.$$

$$6.111. \frac{1}{3} + \ln 3 \text{ (кв. од.)}.$$

$$6.112. \frac{3\pi a^2}{8} \text{ (кв. од.)}.$$

$$6.113. 6\pi a^2 \text{ (кв. од.)}.$$

$$6.114. \frac{1}{2} \ln 3 \text{ (од.)}.$$

$$6.115. \sqrt{2} \text{ (од.)}.$$

6.116. 8 (од.).

6.117. $\frac{2\pi}{3}$ (од.).

6.118. $\frac{3\pi}{10}$ (куб. од.).

6.119. $4\pi^2$ (куб. од.).

6.120. $\frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$ (куб. од.).

6.121. $\frac{112\pi}{5}$ (куб. од.).

6.122. $-\pi$.

6.123. $9/4$.

6.124. $\frac{(e^2 - 2)^2}{2}$.

6.125. $9/4$.

6.126. $7/3$.

6.127. $125/6$ (кв. од.).

6.128. $2/3$ (кв. од.).

6.129. $16/3$ (кв. од.).

6.130. $32/3$ (кв. од.).

6.131. $u(t) = -0,0108t^3 + 0,2t^2 + 0,2t$; 124 (од.).

6.132. 44,8 (гр. од.).

6.133. $u = 25x - 0,01x^2 - 0,001x^3$; $p = 25 - 0,01x - 0,001x^2$.

6.134. $f(c) = 18$ (гр. од.), $x = 2,23$ (од.). 6.135. 22 грн.

6.136. а) $2\ln\frac{9}{7} + 3$; б) $2\ln 3 + 9$.

6.137. 15 096 (од.).

6.138. 78 694 (гр. од.).

6.139. а) $y(0,15) = 0,0442$; $k = 0,2766$; б) $y(0,15) = 0,082$; $k = 0,1778$.

Відповіді до тестових завдань

Номери підрозділів	Номери тестових завдань									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	в	б	а	г	в	в	б	б	г	б
22	г	б	в	б	б	а	в	а	а	г
23	в	а	г	г	а	в	в	в	б	в
24	б	а	в	в	г	б	г	а	б	в
25	г	а	б	б	г	б	а	в	б	в
26	г	в	б	в	б	б	а	а	в	в

Розділ 7. Диференціальні рівняння

Здебільшого випадків закони, яким підпорядковані ті чи ті природні явища, можна подати у формі диференціальних рівнянь. Ісаак Ньютон, який першим почав застосовувати математичні методи в природознавстві, розглядав дві задачі

У першій із них для заданої функції визначали відповідну їй похідну.

Отже, це задача диференціального числення.

Друга задача передбачає, що за рівнянням, яке містить похідні деякої функції, визначають співвідношення між функцією та аргументом.

Отже, у цьому разі маємо задачу теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Своє відкриття в цій галузі Ньютон уважав таким важливим, що відомості про нього надав лише в зашифрованому вигляді. У перекладі зміст цього відкриття є таким: «Розв'язувати диференціальні рівняння корисно».



Після вивчення цього розділу ви зможете:

- розрізняти типи диференціальних рівнянь і знати методи їхнього розв'язання;
- засвоїти поняття диференціальних рівнянь як інструмент розв'язання задач в економіці, обґрунтовувати доцільність їхнього застосування;
- застосовувати диференціальні рівняння під час опрацювання різних моделей в економіці;
- досліджувати динаміку економічних процесів на основі застосування диференціальних рівнянь;
- знати основні класичні моделі в економіці, що подані у формі диференціальних рівнянь.

27. Диференціальні рівняння 1-го порядку

Основні питання:

27.1. Основні поняття та означення.

27.2. Рівняння з відокремлюваними змінними.

27.3. Однорідні диференціальні рівняння.

27.4. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння Бернуллі.

27.5. Рівняння в повних диференціалах.

27.1. Основні поняття та означення

Диференціальним рівнянням називають рівняння, яке пов'язує незалежні змінні, невідому функцію від них та похідні (диференціали) цієї функції. Якщо незалежна змінна одна, то рівняння називають **звичайним**, якщо незалежних змінних декілька, то – **диференціальним рівнянням у частинних похідних**.

Порядок найвищої (старшої) похідної невідомої функції, що входить до диференціального рівняння, називають його **порядком**.

У цьому розділі розглядають диференціальні рівняння для функції лише однієї змінної, тому далі термін «звичайне» щодо диференціального рівняння будуть пропускати.

Диференціальним рівнянням 1-го порядку називають рівняння, яке пов'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y = y(x)$ і її похідну $y' = y'(x)$:

$$F(x, y, y') = 0, \quad (27.1)$$

де F – закон (правило), яким пов'язані змінні x , y , y' .

Функцію $y = \varphi(x)$, визначену на інтервалі (a, b) , підстановку якої, замість $y(x)$, у рівняння (27.1) перетворює його на тотожність, називають **розв'язком**, або **інтегралом**, рівняння на інтервалі (a, b) , а графік функції $y = \varphi(x)$ – **інтегральною кривою**.

Якщо рівняння (27.1) подано в такому вигляді:

$$y' = f(x, y), \quad (27.2)$$

то його називають **розв'язаним відносно похідної**.

Рівняння (27.2) має просту *геометричну інтерпретацію*. Нехай функція двох змінних $f(x, y)$ є визначеною в деякій області D (рис. 27.1).

Оскільки $y = \varphi(x)$ є розв'язком рівняння (27.2), то в кожній точці (x, y) із D , через яку проходить інтегральна крива, тотожність $\varphi'(x) = f(x, y)$ визначає кутовий коефіцієнт дотичної до кривої, або, інакше, *напрямок дотичної до кривої*, у точці, що розглядають.

На рис. 27.1 це показано жирними рисочками.

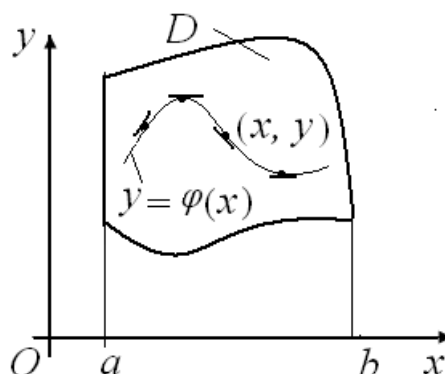


Рис. 27.1. Геометрична інтерпретація диференціального рівняння і його розв'язку

Сукупність (множину) цих напрямків називають **полем напрямків**. Тому кажуть, що в *геометричному змісті* розв'язане відносно похідної рівняння $y' = f(x, y)$ описує поле напрямків інтегральних кривих.

Процес знаходження розв'язків рівняння називають **інтегруванням** цього рівняння.

Теорема 27.1 (існування і єдиності розв'язку). Якщо функція $f(x, y)$ – права частина рівняння $y' = f(x, y)$ – є неперервною в деякій області D і має неперервну частинну похідну $f'_y(x, y)$ у цій області, то якою б не була точка $(x_0, y_0) \in D$, існує єдина інтегральна крива – єдиний розв'язок рівняння – $y = \varphi(x)$, яка проходить через точку (x_0, y_0) , де $y_0 = \varphi(x_0)$.

Якщо функція $f(x, y)$ в області D задовольняє умови теореми 27.1, то рівняння $y' = f(x, y)$ має безліч розв'язків. Дійсно, уважаючи x_0 сталим і змінюючи значення y_0 , отримаємо для кожної ординати y свій розв'язок $y = \varphi(x)$.

Щоб виокремити з усієї нескінченної множини розв'язків один розв'язок (одну інтегральну криву), задають точку, через яку проходить інтегральна крива, тобто вказують значення аргументу $x = x_0$ і відповідне значення функції $y|_{x=x_0} = y_0$.

Співвідношення

$$y|_{x=x_0} = y_0 \text{ або } y_0 = y(x_0), \quad (27.3)$$

де $(x_0, y_0) \in D$ називають **початковою умовою** для розв'язку $y = \varphi(x)$.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (27.2) називають таку функцію:

$$y = \varphi(x, C), \quad (27.4)$$

яка містить довільну сталу $C \in \mathbf{R}$ і таку, що:

- 1) задовольняє рівняння (27.2) за довільних дійсних значень C ;
- 2) якою б не була початкова умова $y_0 = y(x_0)$, $(x_0, y_0) \in D$, можна обчислити таке значення C_0 , що функція $\varphi(x, C_0)$ задовольняє задану початкову умову: $\varphi(x, C_0)|_{x=x_0} = y_0$.

Частинним розв'язком називають розв'язок, який отримують із загального розв'язку рівняння за певного значення сталої C .

Знаходження частинного розв'язку за заданою початковою умовою називають **задачею Коші**.

Зазначмо, що загальний розв'язок рівняння описує множину всіх інтегральних кривих; частинний розв'язок виокремлює одну з них; задача Коші із множини інтегральних кривих виділяє одну криву, яка проходить через задану точку (x_0, y_0) .

Точки площини, у яких не виконують умови теореми 27.1, називають **особливими точками**.

Особливим розв'язком диференціального рівняння 1-го порядку називають такий розв'язок, у кожній точці якого порушують умову єдиності (наприклад, $f(x, y)$ або $f'_y(x, y)$ є розривними). Це означає, що через кожну особливу точку проходять принаймні дві інтегральні криві.

Особливі розв'язки не можна отримати із загального розв'язку диференціального рівняння за жодного значення довільної сталої C . Графіком особливого розв'язку є *обвідна сім'ї інтегральних кривих* (якщо вона існує), тобто лінія, яка в кожній своїй точці дотикається принаймні до однієї інтегральної кривої.



Покажімо, що загальним розв'язком рівняння $y' + y = 0$ є функція $y = \varphi(x, C) = Ce^{-x}$.

Справді, якщо $y = \varphi(x, C) = Ce^{-x}$, то $y' = -Ce^{-x}$, а сума $y' + y$ дає нуль для всіх дійсних значень $C \in \mathbf{R}$.

Отже, щодо $\varphi(x, C) = Ce^{-x}$ першу умову загального розв'язку (27.4) виконано.

Задаймо деяку початкову умову $y_0 = y(x_0)$ і підставмо значення x_0, y_0 у функцію $y = Ce^{-x}$:

$$y_0 = Ce^{-x_0} \Rightarrow C = C_0 = y_0 e^{x_0}.$$

Як бачимо, для будь-яких значень x_0, y_0 сталу C_0 визначено; отже, функція $\varphi(x, C) = Ce^{-x}$ є загальним розв'язком рівняння $y' + y = 0$. Якщо в ньому покласти, наприклад, $C = 7$, то отримаємо один із безлічі частинних розв'язків $y = 7e^{-x}$.

Розв'яжімо задачу Коші за початковою умовою $y|_{x=0} = 5$, або $y(0) = 5$, тобто знайдемо інтегральну криву, яка проходить через точку $(x_0, y_0) = (0, 5)$. Для цього в загальний розв'язок $y = \varphi(x, C) = Ce^{-x}$ підставмо $x = x_0 = 0$, $y = y_0 = 5$ і знайдемо значення C_0 параметра C : $C_0 = 5$.

Розв'язком задачі Коші є $y = 5e^{-x}$.

Часто під час розв'язування диференціальних рівнянь загальний розв'язок отримують у неявній формі: $\Phi(x, y, C) = 0$, із якої не завжди вдається обчислити y через x і C . Співвідношення $\Phi(x, y, C) = 0$, яке неявно визначає загальний розв'язок, називають **загальним інтегралом** рівняння.

Отримане із загального інтеграла співвідношення за конкретного значення параметра $C = C_0$: $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називають **частинним інтегралом** рівняння.



Припустімо, що для деякого підприємства під час виробництва A од. продукції залежність граничної капіталоємності L праці від обсягу капіталу K описують такою функцією:

$$\frac{dL}{dK} = -\frac{A}{K^2}.$$

Визначмо функцію, що описує взаємозамінність праці й капіталу за сталого обсягу випуску продукції. Цю задачу зводять до визначення первісної за її відомою похідною.

Отже,

$$L'_K = -\frac{A}{K^2} \Rightarrow L = \frac{A}{K} + C,$$

де C – довільна стала, яка за задання початкової умови $A|_{K=K_0} = A_0$ набирає певного значення, завдяки чому й знаходять відповідну первісну.



Знайдімо розв'язок задачі Коші, якщо відомо, що функція $y = y(x)$ задовольняє диференціальне рівняння $y' = x$ та умову $y(2) = 4$.

Спочатку визначмо функцію $y(x)$, для якої похідна 1-го порядку дорівнює x , тобто $y' = x$. Це функції вигляду $y = 0,5x^2 + C$, де C – довільна стала.

Тож ми знайшли загальний розв'язок диференціального рівняння, якому відповідає сім'я інтегральних кривих (рис. 27.2).

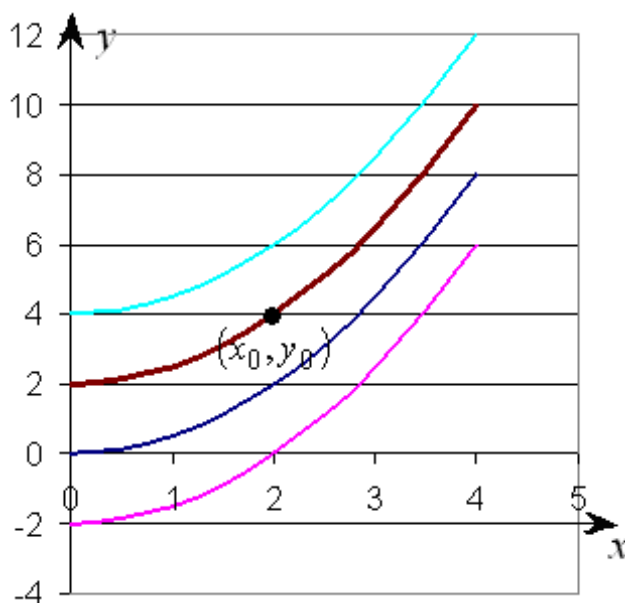


Рис. 27.2. Сім'я інтегральних кривих

Оскільки функція, яка є розв'язком задачі Коші, має задовольняти початкову умову $y(2) = 4$, то підставивши ці значення у вираз для функції, отримаємо $C = 2$.

Отже, у сім'ї кривих, які описують функціями $y = 0,5x^2 + C$, знайдено ту криву $y = 0,5x^2 + 2$, яка проходить через точку $(2, 4)$.

27.2. Рівняння з відокремлюваними змінними

Розв'язане відносно похідної диференціальне рівняння 1-го порядку $y' = f(x, y)$, залежно від виду правої частини, породжує різні типи рівнянь із різними підходами до їхнього розв'язання.

Для інтегрування рівняння його ліву частину – y' – звичайно записують як відношення диференціалів: $y' = dy/dx$. Відповідне зображення рівняння $y' = f(x, y)$ називають **диференціальною формою** рівняння.

Диференціальне рівняння такого вигляду:

$$M(x)dx = N(y)dy, \quad (27.5)$$

у якому множник при dx є функцією тільки від x , а множник при dy є функцією тільки від y , називають **рівнянням із відокремленими змінними**.

Зведення диференціальних рівнянь до вигляду (27.5), називають **відокремленням змінних**. До розв'язання рівнянь з відокремленими змінними, в остаточному підсумку, зводять, зазвичай, усі диференціальні рівняння.

Рівняння в диференціальній формі такого вигляду:

$$M_1(x)N_1(y)dy + M_2(x)N_2(y)dx = 0 \quad (27.6)$$

називають **рівнянням із відокремлюваними змінними**.

Рівняння (27.6) є дуже важливим, оскільки деякі інші типи рівнянь зводять за допомогою заміни змінних до рівнянь саме такого типу.

Характеристичною (визначальною) властивістю цих рівнянь є те, що множники при dx і dy є добутками функцій, що залежать тільки від x і тільки від y .

Якщо рівняння (27.6) подати у вигляді, розв'язаному відносно похідної $y' = f(x, y)$, то його правою частиною буде відношення добутків функцій, що залежать тільки від x і тільки від y , що теж є *визначальною властивістю*:

$$y' = -\frac{M_2(x)N_2(y)}{M_1(x)N_1(y)}. \quad (27.7)$$

Розгляньмо порядок розв'язання диференціальних рівнянь (27.6):

1. Поділімо ліву і праву частини рівняння на добуток $M_1(x) \cdot N_2(y)$ за умови, що цей добуток не дорівнює нулю. Отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{N_1(y)}{N_2(y)} dy = -\frac{M_2(x)}{M_1(x)} dx. \quad (27.8)$$

2. Зінтегруймо ліву та праву частини рівняння (27.8):

$$\int \frac{N_1(y)}{N_2(y)} dy = -\int \frac{M_2(x)}{M_1(x)} dx + C,$$

у результаті чого отримаємо розв'язки рівняння у вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$ або $y = \varphi(x, C)$.

Розв'язки рівняння (27.6), знайдені за умови $M_1(x) \cdot N_2(y) = 0$, потребують окремого дослідження.



Розв'яжімо рівняння $x\sqrt{y^2 - 1} dx + y\sqrt{x^2 - 1} dy = 0$.

Поділімо обидві частини рівняння на добуток $\sqrt{y^2 - 1}\sqrt{x^2 - 1} \neq 0$:

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - 1}} = 0.$$

Оскільки змінні є відокремленими, то можна зінтегрувати рівняння по-членно:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \int 0 dx.$$

Загальний інтеграл рівняння має такий вигляд:

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} = C \quad (C > 0) - \text{це неявно задана функція } y = y(x).$$

Особливі розв'язки знаходьмо з такої умови: $\sqrt{y^2 - 1}\sqrt{x^2 - 1} = 0$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що сталі $x = \pm 1$ та $y = \pm 1$ є розв'язками рівняння, які приєднують до загального розв'язку.



Знайдімо розв'язок рівняння $y'(1-x) = y+1$.

Переходимо до диференціальної форми рівняння і відокремлюємо змінні за умови, що $(x-1)(y+1) \neq 0$:

$$(1+y)dx + (x-1)dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x-1} + \frac{dy}{y+1} = 0.$$

Після інтегрування отримуємо:

$$\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dy}{y+1} = C \Rightarrow \ln|x-1| + \ln|y+1| = C \Rightarrow \ln|(x-1)(y+1)| = C -$$

загальний інтеграл рівняння.

Довільну сталу $C \in (-\infty, +\infty)$ можна записати у вигляді логарифма відмінної від нуля сталої: $\ln|C|$, $C \neq 0$, бо $\ln|C| \in (-\infty, +\infty)$.

Такий вибір форми числового параметра C є зручним для остаточного запису відповіді:

$$\ln|(x-1)(y+1)| = \ln|C| \Rightarrow (x-1)(y+1) = C, C \neq 0.$$

Особливі розв'язки знаходимо з умови $(x-1)(y+1) = 0$: $x = 1$, $y = -1$. Їх приєднують до загального розв'язку.

27.3. Однорідні диференціальні рівняння

Функцію $f(x, y)$ називають **однорідною n -го виміру** (або **виміру n**), якщо для будь-якого $\lambda \neq 0$ виконано тотожність $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Диференціальні рівняння такого вигляду:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ \text{або } M(x, y)dx + N(x, y)dy &= 0, \end{aligned} \tag{27.9}$$

де $f(x, y)$ – неперервна однорідна функція нульового виміру;

$M(x, y)$, $N(x, y)$ – неперервні однорідні функції однакового виміру, їх називають **однорідними**.

За умови однорідності нульового виміру функцію $f(x, y)$ у рівнянні (27.9) подають у вигляді функції відношення її аргументів: $f(x, y) = \varphi(y/x)$. У цьому разі рівняння (27.9) набуває такого вигляду:

$$y' = \varphi(y/x). \quad (27.10)$$

Це рівняння легко перетворити на рівняння з відокремленими змінними, якщо застосувати таку підстановку: $u = y/x$, де $u = u(x)$.

Оскільки $y = ux$, то $y' = u + xu'$ і рівняння (27.10) запишімо так:

$$xu' + u = \varphi(u),$$

звідси

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}. \quad (27.11)$$

Це означає, що в рівнянні (27.11) змінні відокремлено. Зінтегруючи обидві частини (27.11), отримаємо:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Після інтегрування лівої частини рівності запишімо загальний інтеграл рівняння: $\Phi(x, u, C) = 0$. Повертаючись до вихідної змінної, згідно з підстановкою $u = y/x$, отримаємо загальний інтеграл заданого рівняння.



Розв'яжімо таке рівняння: $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

Перевіримо, чи є це рівняння однорідним:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{2(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{\lambda^2(x^2 + y^2)}{2\lambda^2 xy} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = f(x, y).$$

Отже, функція $f(x, y)$ є однорідною нульового виміру, а диференціальне рівняння є однорідним.

Поділімо чисельник і знаменник дробу на x^2 ($x \neq 0$):

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + (y/x)^2}{2y/x}.$$

Виконуємо підстановку $y/x = u$, тоді $y = ux$, а $y' = u + xu'$:

$$xu' = \frac{1+u^2}{2u} - u \Rightarrow \frac{2udu}{1-u^2} = \frac{dx}{x}, \quad x(1-u^2) \neq 0.$$

Зінтегруймо обидві частини рівняння:

$$-\ln|1-u^2| = \ln|x| + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0 \Rightarrow -\ln|1-u^2| = \ln|C_1x| \Rightarrow C_1x = \frac{1}{1-u^2}.$$

Повертаймося до вихідної змінної й отримуємо загальний інтеграл:

$$x^2 - y^2 = Cx,$$

де $C = \frac{1}{C_1} \neq 0$.

Особливі розв'язки знаходимо з умови $x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = 0$: $y = x, y = -x$.

Їх приєднують до загального розв'язку.



Знайдімо частинний розв'язок рівняння $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, який задовольняє початкову умову $y(6) = \pi$.

Спочатку знайдімо загальний розв'язок рівняння. Оскільки права частина рівняння є функцією відношення y/x , то рівняння є однорідним. Уведемо нову змінну $y/x = u$, тоді $y = ux$, а $y' = u + xu'$. Підставляючи отримані співвідношення у вихідне рівняння, маємо:

$$u + xu' = u + \operatorname{tg} u \Rightarrow \operatorname{ctg} u \, du = \frac{dx}{x}.$$

Зінтегруймо обидві частини рівняння:

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C|, \quad C \neq 0.$$

Повертаймося до вихідних змінних x, y :

$$\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = \ln|Cx| \Rightarrow \left|\sin\frac{y}{x}\right| = |Cx|.$$

Після зняття символу модуля маємо: $\sin\frac{y}{x} = \pm C \cdot x$.

Отже, ми отримали загальний інтеграл рівняння:

$$\sin\frac{y}{x} = C_1 x,$$

де $C_1 = \pm C$, $C_1 \neq 0$.

Тепер скористаймося початковою умовою $y(6) = \pi$:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 6C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{12}.$$

Отже, отримуємо частинний інтеграл, а з нього – частинний розв’язок:

$$\sin\frac{y}{x} = \frac{x}{12} \Rightarrow y = x \cdot \arcsin\frac{x}{12}.$$

До *однорідних* рівнянь зводять рівняння такого вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}, \quad (27.12)$$

де a, b, c, a_1, b_1, c_1 – задані сталі.

Якщо $c = c_1 = 0$, то рівняння (27.12) є однорідним; якщо $c \neq 0$ або $c_1 \neq 0$, то роблять заміну $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, де α, β – деякі сталі. Ураховуючи співвідношення $dx = du$, $dy = dv$, отримуємо:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{au + bv + a\alpha + b\beta + c}{a_1u + b_1v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}. \quad (27.13)$$

Сталі α, β підбирають так, щоб у чисельнику і знаменнику (27.13) зникли вільні члени, тобто щоб пара (α, β) була розв'язком такої системи:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0. \end{cases} \quad (27.14)$$

Тоді рівняння (27.13) стає однорідним:

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv}{a_1u + b_1v}. \quad (27.15)$$

Розв'язавши рівняння (27.15), повертаймося до змінних x, y .

Якщо система (27.14) є несумісною, тобто $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda \neq \frac{c_1}{c}$, то $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$, звідси

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}.$$

Тоді, за допомогою підстановки $z = ax + by$, це рівняння зводять до рівняння з відокремленими змінними. Дійсно, ураховуючи рівність $\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$, отримаємо:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b(z + c)}{\lambda z + c_1} + a.$$

Той самий підхід можна застосовувати до інтегрування рівняння такого вигляду:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

де права частина – деяка неперервна функція від змінних x, y .



Розв'яжімо таке диференціальне рівняння: $y' = \frac{x+y-3}{x-y-1}$.

Це рівняння вигляду (27.12), у якому $c = -3$, а $c_1 = -1$; його зводять до однорідного заміною $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, тоді $du = dx$, $dv = dy$.

Сталі α, β визначаймо як розв'язок такої системи:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 3 = 0, \\ \alpha - \beta - 1 = 0, \end{cases}$$

звідси $\alpha = 2$, $\beta = 1$; тоді $x = u + 2$, $y = v + 1$.

У нових змінних рівняння стає однорідним і набуває такого вигляду:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}.$$

Робімо заміну $v = tu$, $\frac{dv}{du} = t + u \frac{dt}{du}$, де $t = t(u)$, яка приводить до такого рівняння:

$$t + u \frac{dt}{du} = \frac{1+t}{1-t}, \text{ або } u \frac{dt}{du} = \frac{1+t^2}{1-t}.$$

Видокремлюймо змінні та зінтегруймо таке рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{1-t}{1+t^2} dt = \frac{du}{u} &\Rightarrow \arctg t - 0,5 \ln(1+t^2) = \ln|u| + \ln|C|, \quad C \neq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \arctg t = \ln\left(|Cu| \sqrt{1+t^2}\right). \end{aligned}$$

Повертаймося до змінних u, v , а потім до x, y :

$$\arctg \frac{v}{u} = \ln\left(|C| \sqrt{u^2 + v^2}\right) \Rightarrow \arctg \frac{y-1}{x-2} = \ln\left(|C| \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right) -$$

загальний інтеграл заданого диференціального рівняння.

27.4. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку.

Рівняння Бернуллі

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку називають рівняння, яке є лінійним відносно невідомої функції та її похідної:

$$y' + p(x)y = g(x), \quad (27.16)$$

де $p(x)$ та $g(x)$ – задані неперервні на деякому проміжку функції від x (вони можуть бути й сталими величинами).

Якщо $g(x) \equiv 0$, то таке рівняння:

$$y' + p(x)y = 0 \quad (27.17)$$

називають **лінійним однорідним, або без правої частини**. Воно є рівнянням із відокремлюваними змінними.

Є кілька методів інтегрування рівняння (27.16).

1. Метод допоміжних функцій (метод Бернуллі). Зміст методу полягає в тому, що розв'язок рівняння шукають у вигляді добутку двох функцій від x :

$$y = u(x)v(x).$$

За добутком для $y = u(x)v(x)$: $y = uv$ знаходять похідну y' :

$$y' = u'v + uv'$$

і підставляють вирази для y і y' у вихідне рівняння (27.16):

$$u'v + (v' + p(x)v)u = g(x). \quad (27.18)$$

Функцію $v(x)$ підбирають так, щоб множник при $u(x)$ у рівнянні (27.18) перетворився на нуль. Тоді для знаходження функцій $u(x)$ і $v(x)$ отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} v' + p(x) \cdot v = 0, \\ u' \cdot v = g(x). \end{cases} \quad (27.19)$$

Обидва рівняння системи є диференціальними рівняннями з відокремлюваними змінними.

Зінтегруймо перше рівняння системи й берімо найпростішу функцію $v(x)$, яка його задовольняє:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dx} + p(x)v &= 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln|v| &= -\int p(x)dx \Rightarrow v(x) = e^{-\int p(x)dx}.\end{aligned}$$

Підставляймо знайдений розв'язок $v(x)$ у друге рівняння системи із (27.19) і знаходьмо функцію $u(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= g(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow du = g(x)e^{\int p(x)dx} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow u(x) &= \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.\end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок лінійного рівняння (27.16) має такий вигляд:

$$y(x) = u(x)v(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int g(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right). \quad (27.20)$$

2. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Знайдімо загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння 1-го порядку (27.17), яке отримують із (27.16) за умови, що $g(x) \equiv 0$, і є рівнянням із відокремлюваними змінними:

$$y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \quad (27.21)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \neq 0. \quad (27.22)$$

У знайденому загальному розв'язку однорідного рівняння параметр C вважають невідомою диференційовною функцією $C = C(x)$, і загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (27.16) шукають у такому вигляді:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (27.23)$$

За виразом для y знаходять похідну y' , підставляють y і y' у задане рівняння $y' + p(x)y = g(x)$, зінтегрують його і знаходять функцію $C(x)$:

$$\begin{aligned} y' &= C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow \\ \Rightarrow C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} &= g(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow C'(x) &= g(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx + C. \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (27.16) має такий вигляд:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx, \quad (27.24)$$

де перший доданок є загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння, а другий – частинним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння.

Розгляньмо застосування обох методів на прикладі.



Знайдімо розв'язок такого рівняння: $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$.

За методом Бернуллі покладаймо: $y = uv$, де u і v – функції від x , тоді $y' = u'v + uv'$.

Підставляючи y і y' у вихідне рівняння, отримаємо:

$$u'v + uv' - uv \operatorname{tg} x = \cos x.$$

Згрупуємо члени, що містять u і винесімо u за дужки:

$$u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \cos x.$$

Покладімо вираз у дужках таким, що дорівнює нулю, у результаті чого отримуємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} v' - v \operatorname{tg} x = 0, \\ u'v = \cos x. \end{cases}$$

За першим рівнянням системи знаходьмо функцію v , для чого відокремимо змінні:

$$\frac{dv}{dx} = v \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx,$$

та зінтегруймо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{tg} x dx.$$

Берімо найпростіший (за виглядом) частинний розв'язок:

$$\ln|v| = -\ln|\cos x| \Rightarrow \ln|v| = \ln|\cos x|^{-1} \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}.$$

Знайдену функцію v підставляймо в друге рівняння системи, отримуємо диференціальне рівняння відносно функції u і розв'язуймо його:

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow du = \cos^2 x dx \Rightarrow \int du = \int \cos^2 x dx + C \Rightarrow u = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + C.$$

$$\text{Інтегрування нам дає: } u = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Отже, шуканий загальний розв'язок має такий вигляд:

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C \right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Розв'яжімо цей самий приклад методом варіації довільної сталої.

Спочатку складемо однорідне рівняння, яке відповідає початковому:

$$y' - y \operatorname{tg} x = 0,$$

і знаходьмо його загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x \, dx \Rightarrow \ln |y| = -\ln |\cos x| + \ln |C| \Rightarrow y = \frac{C}{\cos x}.$$

Уважаючи, що $C = C(x)$, загальний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді $y = \frac{C(x)}{\cos x}$. Знаходьмо y' і підставляймо y і y' в початкове рівняння:

$$y' = \frac{C'(x) \cos x - C(x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{C'(x) \cos x + C(x) \sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x} \operatorname{tg} x = \cos x.$$

Зводьмо подібні члени й отримуємо:

$$\frac{C'(x)}{\cos x} = \cos x \Rightarrow dC = \cos^2 x \cdot dx.$$

Ми вже знаходили функцію за таким диференціалом, отже, можемо записати:

$$C(x) = \frac{1}{2} x + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Підставляючи, замість довільної сталої у загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння знайдене значення $C = C(x)$, будемо мати загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння:

$$y = \left(\frac{1}{2} x + \frac{\sin 2x}{4} + C \right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Як бачимо, загальні розв'язки, знайдені різними способами, збігаються.



Розв'яжімо рівняння $(e^{y^2} y^3 + 2xy) y' = 1$.

Аналізуємо це рівняння, із метою встановлення його типу. Воно не є рівнянням із відокремлюваними змінними, бо множник при y' (а отже, і при dy) не розкладається на добуток функцій тільки від x і тільки від y ; не є однорідним, бо двочлен у дужках – неоднорідна функція. Рівняння є нелінійним відносно невідомої функції $y = y(x)$, але лінійним відносно функції $x = x(y)$:

$$(e^{y^2} y^3 + 2xy) \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow e^{y^2} y^3 + 2xy = \frac{dx}{dy} \Rightarrow x' - 2xy = e^{y^2} y^3.$$

За методом Бернуллі, його розв'язок будемо шукати у вигляді $x = u(y) \cdot v(y)$, звідси $x' = u'v + uv'$.

Підставляймо в рівняння x та x' і отримаємо:

$$u'v + uv' - 2uvy = e^{y^2} y^3.$$

Групуємо в лівій частині другий і третій доданки та виносимо за дужки u :

$$u'v + u(v' - 2vy) = e^{y^2} y^3.$$

Від рівняння переходимо до системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} v' - 2vy = 0, \\ u'v = e^{y^2} y^3. \end{cases}$$

Розв'язуймо перше рівняння цієї системи:

$$v' - 2vy = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dy} = 2vy \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2y dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|v| = y^2 \Rightarrow v = e^{y^2}.$$

За функцією v із другого рівняння системи, знайдемо функцію u :

$$u'e^{y^2} = e^{y^2} y^3 \Rightarrow u' = y^3 \Rightarrow du = y^3 dy \Rightarrow u = \int y^3 dy + C,$$

або

$$u = \frac{y^4}{4} + C.$$

Загальний інтеграл має такий вигляд:

$$x = \left(\frac{y^4}{4} + C \right) e^{y^2}.$$

Рівняння Бернуллі. Диференціальне рівняння такого вигляду:

$$y' + p(x)y = y^n g(x), \quad (27.25)$$

де $n \in \mathbf{R}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$ називають **рівнянням Бернуллі**.

У цьому рівнянні $p(x)$ та $g(x)$ – відомі інтегровні функції, які можуть бути й сталими. Рівняння Бернуллі є нелінійним рівнянням, оскільки невідома функція $y(x)$ у праву частину рівняння входить до степеня з відмінним від одиниці показником.

Зауважмо, що для додатних n функція $y = 0$ є частинним розв'язком рівняння (27.25); за $n = 0$ і $n = 1$ воно є лінійним відносно невідомої функції.

Рівняння Бернуллі розв'язують зведенням до лінійного за допомогою заміни змінної.

За умови $y \neq 0$ поділімо обидві частини рівняння (27.25) на y^n :

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = g(x). \quad (27.26)$$

Уведемо таку нову функцію:

$$z(x) = y^{1-n}. \quad (27.27)$$

Для першої похідної за змінною x маємо:

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y' = \frac{1}{1-n}y^n z'.$$

Підставмо у (27.26) вирази для y^{1-n} і y' , подані через z і z' , відповідно, і отримаємо лінійне рівняння відносно функції $z = z(x)$:

$$z' + (1-n)z p(x) = (1-n)g(x).$$

Після його розв'язання (методом Бернуллі або методом Лагранжа) у загальному інтегралі чи загальному розв'язку повертаймося до вихідної функції.



Знайдімо розв'язок рівняння $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$, $x \neq 0$.

Аналізуймо його і переконуймося, що це рівняння Бернуллі з параметром $n = 2$. За умови $y \neq 0$ поділімо обидві частини рівняння на y^2 :

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} y^{-1} = -x$$

і виконуймо заміну:

$$z = y^{-1} \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y' \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = -z'.$$

Рівняння набуває такого вигляду:

$$z' - \frac{1}{x} z = x \text{ — лінійне рівняння відносно } z = z(x).$$

Розв'язок його будемо шукати у вигляді $z = uv$, звідси $z' = u'v + uv'$.

Підставляймо в рівняння вирази для z і z' :

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x \Rightarrow u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x \Rightarrow \begin{cases} v' - \frac{v}{x} = 0, \\ u'v = x. \end{cases}$$

Знаходьмо найпростіший (за виглядом) розв'язок першого рівняння:

$$\begin{aligned}v' - \frac{v}{x} = 0 &\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \\&\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x| \Rightarrow v = x.\end{aligned}$$

Із другого рівняння системи знайдемо u :

$$u'v = x \Rightarrow u'x = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx.$$

Після інтегрування отримуємо: $u = x + C$.

Записуймо загальний розв'язок лінійного рівняння відносно $z(x)$ і повертаймося до змінної $y(x)$:

$$z = uv \Rightarrow z = (x + C)x \Rightarrow \left| y = \frac{1}{z} \right| \Rightarrow y = \frac{1}{x(C + x)} = \frac{1}{Cx + x^2}.$$

Зауважмо, що метод розв'язання потребував, щоб $y \neq 0$, однак функція $y = 0$ є розв'язком початкового рівняння, якого немає в знайденому загальному розв'язку, тобто $y = 0$ – особливий розв'язок.

27.5. Рівняння в повних диференціалах

Диференціальне рівняння такого вигляду:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{27.28}$$

називають **рівнянням у повних диференціалах**, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції двох змінних $U(x, y)$, $(x, y) \in D$, тобто:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y) = U'_x dx + U'_y dy. \tag{27.29}$$

Теорема 27.2 (необхідна і достатня умова існування $U(x, y)$). Рівняння (27.28) є рівнянням у повних диференціалах тоді й тільки тоді, якщо функції

$M(x, y)$, $N(x, y)$ є неперервними та мають неперервні частинні похідні M'_y , N'_x у деякій області D , причому:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (27.30)$$

Необхідність. Нехай виконано умову (27.29), тоді є справедливими такі рівності: $U'_x = M(x, y)$, $U'_y = N(x, y)$. За умови існування неперервних мішаних похідних 2-го порядку для $U(x, y)$, маємо:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

і за теоремою 18.1 (про рівність мішаних частинних похідних) отримуємо рівність (27.30).

Достатність. Нехай виконано умову (27.30): $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Покажімо існування функції $U(x, y)$ такої, що ліва частина рівняння (27.28) є її повним диференціалом, тобто:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y).$$

Відновлюймо функцію $U(x, y)$ інтегруванням за x першої рівності:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y), \quad (27.31)$$

де x_0 – абсциса будь-якої точки з області існування розв'язку рівняння.

Під час інтегрування за змінною x змінну y вважають параметром, тому й довільна стала інтегрування має залежати від y . Підберімо функцію $\varphi(y)$ так, щоб було виконано рівність $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$. Для цього здиференціюймо (27.31) за змінною y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y) \right) = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y),$$

тоді з урахуванням (27.30) дістаньмо:

$$N(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) \Rightarrow N(x, y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = N(x_0, y) \Rightarrow \varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Отже, шукана функція буде мати такий вигляд:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1, \quad C_1 \in \mathbf{R}, \quad (27.32)$$

де (x_0, y_0) – деяка точка з області існування розв'язку диференціального рівняння.

Згідно із (27.30), $U(x, y)$ – функція, диференціал якої дорівнює лівій частині рівняння (27.28), тому загальний інтеграл цього рівняння має такий вигляд:

$$U(x, y) = C, \text{ або } \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C, \quad C \in \mathbf{R}. \quad (27.33)$$

Зауважмо, що для знаходження загального інтеграла (27.33) часто, замість визначених інтегралів зі змінною верхньою межею, знаходять невизначені інтеграли.

Якщо умову (27.30) не виконано, то інколи вдається підібрати таку функцію $\mu(x, y)$, після множення на яку обох частин рівняння (27.28) ліва частина цього рівняння стає повним диференціалом. Функцію $\mu(x, y)$ називають **інтегрувальним множником** рівняння.

Помножмо рівняння (27.28) на $\mu(x, y)$:

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0.$$

Це рівняння буде рівнянням у повних диференціалах, якщо

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

тобто

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x} \Rightarrow M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \end{aligned} \quad (27.34)$$

Рівняння (27.34) відносно невідомої функції двох змінних $\mu(x, y)$, яке містить частинні похідні, називають **рівнянням у частинних похідних**.

Доведено, що за певних умов це рівняння має безліч розв'язків, тобто $\mu(x, y)$ існує, але в загальному випадку задача розв'язання (27.34) є складнішою, ніж задача розв'язання (27.28).

Розгляньмо окремі випадки, коли рівняння (27.34) спрощують. Нехай інтегрувальний множник залежить лише від y , тобто $\mu = \mu(y)$, тоді $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$, а співвідношення (27.34) набуває такого вигляду:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{M}. \quad (27.35)$$

Якщо права частина рівності (27.35) не залежить від змінної x , то

$$\mu(y) = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{M} dy}. \quad (27.36)$$

Аналогічно, якщо $\mu = \mu(x)$, то інтегрувальний множник обчислюють за такою формулою:

$$\mu(x) = e^{-\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{N} dx}. \quad (27.37)$$



Розв'яжімо таке диференціальне рівняння:

$$(2x + 3x^2 y) dx + (x^3 - 3y^2) dy = 0.$$

Це рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Дійсно (див. ф-лу (27.30)):

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2y) = 3x^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2.$$

Застосуємо ф-лу (27.31) для знаходження функції $U(x, y)$:

$$U(x, y) = \int (2x + 3x^2y) dx + \varphi(y) = x^2 + x^3y + \varphi(y),$$

звідси, згідно з умовою $N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$, маємо:

$$x^3 + \varphi'(y) = x^3 - 3y^2 \Rightarrow \varphi'(y) = -3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -y^3 + C_1.$$

Отже, $U(x, y) = x^2 + x^3y - y^3 + C_1$, а $x^2 + x^3y - y^3 = C$ – загальний інтеграл рівняння.



Розв'яжімо таке диференціальне рівняння:

$$(y + xy^2)dx - xdy = 0.$$

Задане рівняння вигляду (27.28): $\underbrace{(y + xy^2)}_{M(x, y)}dx + \underbrace{(-x)}_{N(x, y)}dy = 0$, але воно

не є рівнянням у повних диференціалах, бо для нього не виконано умову (27.30):

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y + xy^2) = 1 + 2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1.$$

Складімо вираз, що є правою частиною співвідношення (27.35):

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{M} = \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)} = -\frac{2}{y}.$$

Тоді, за ф-лою (27.35), маємо:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -\frac{2}{y} \Rightarrow \ln |\mu| = -2 \ln |Cy| \Rightarrow \mu = \frac{1}{C^2 x^2}, \quad C \neq 0.$$

Вибираймо, наприклад, $C=1$, тоді інтегрувальний множник дорівнює:
 $\mu=1/y^2$.

Помножмо вихідне рівняння на $\mu = \frac{1}{y^2}$:

$$\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0.$$

У цьому рівнянні $M(x, y) = \frac{1}{y} + x$, $N(x, y) = -\frac{x}{y^2}$, а отже, критерій повного диференціала (27.30) задовольняють, тому

$$U(x, y) = \int \left(\frac{1}{y} + x\right) dx + \varphi(y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y).$$

Згідно з умовою $N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$, маємо:

$$-\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C_1.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння є таким: $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$.



Ключові терміни

Звичайне диференціальне рівняння; рівняння в частинних похідних; рівняння, розв'язане відносно похідної; геометрична інтерпретація диференціального рівняння 1-го порядку; інтегральна крива; порядок диференціального рівняння; початкова умова; загальний розв'язок диференціального рівняння; частинний розв'язок диференціального рівняння; задача Коші; загальний інтеграл; сім'я інтегральних кривих; особливі точки; особливі розв'язки; обвідна сім'ї інтегральних кривих; рівняння з відокремленими змінними; рівняння з відокремлюваними змінними; однорідне рівняння 1-го порядку; лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку; метод Бернуллі; метод варіації довільної сталої; рівняння Бернуллі; рівняння в повних диференціалах.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають диференціальним рівнянням?
2. Яке диференціальне рівняння називають звичайним?
3. Яке диференціальне рівняння називають диференціальним рівнянням у частинних похідних?
4. Що називають диференціальним рівнянням 1-го порядку?
5. Який вигляд має символічний запис диференціальним рівнянням 1-го порядку?
6. Що називають розв'язком диференціального рівняння 1-го порядку?
7. Що називають загальним розв'язком диференціального рівняння 1-го порядку?
8. Який розв'язок рівняння називають частинним?
9. Які види диференціальних рівнянь 1-го порядку ви знаєте?
10. Який вигляд має диференціальне рівняння 1-го порядку, розв'язане відносно похідної?
11. Що таке «початкова умова для диференціального рівняння»?
12. Який зміст теореми існування та єдиності розв'язку?
13. Як формулюють задачу Коші для диференціального рівняння 1-го порядку?
14. У чому полягає геометрична інтерпретація задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку?
15. Який вигляд має диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними?
16. Як визначити, чи можна звести рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними?
17. Яку характеристичну (визначальну) властивість диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними?
18. Яке зображення диференціального рівняння називають диференціальною формою?
19. Що таке «особливі точки»? Який розв'язок називають особливим?
20. Яке диференціальне рівняння називають однорідним? Наведіть спосіб його інтегрування.
21. Яку функцію називають однорідною n -го виміру та яку тотожність для не виконують?
22. Яке рівняння 1-го порядку називають лінійним?
23. Яке рівняння 1-го порядку називають лінійним однорідним?

24. Як розв'язують лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку за методом Бернуллі?
25. У чому полягає метод варіації довільної сталої?
26. Як можна звести рівняння Бернуллі до лінійного диференціального рівняння?
27. Як інтегрують диференціальне рівняння в повних диференціалах?
28. Як формулюють теорему про необхідну й достатню умову існування повного диференціала функції двох змінних?
29. Яку функцію називають інтегрувальним множником рівняння?
30. Як перевірити правильність знайденого розв'язку диференціального рівняння?



Тестові завдання до підрозділу 27

- Диференціальним рівнянням називають рівняння, яке пов'язує:
 - функцію та незалежну змінну;
 - функцію, незалежну змінну та похідну 1-го порядку;
 - незалежну змінну, функцію та похідні або диференціали цієї функції;
 - незалежну змінну та похідну функції.
- Порядком диференціального рівняння називають:
 - найвищий порядок похідної невідомої функції;
 - найнижчий порядок похідної невідомої функції;
 - найвищий степінь вільної змінної;
 - найвищий степінь невідомої функції.
- Однорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку називають рівняння такого вигляду:
 - $M(x)dx = N(y)dy$; б) $y' = \varphi(y/x)$;
 - $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$; г) $y' + p(x)y = g(x)$.
- За якої умови щодо значень сталих диференціальне рівняння такого вигляду $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$ є однорідним:
 - $c = 0$; б) $c_1 = 0$; в) $c \neq 0$ або $c_1 \neq 0$; г) $c = c_1 = 0$.

5. Виберіть загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння 1-го порядку, який отримують за допомогою методу варіації довільної сталої (метод Лагранжа):

а) $y = p(x)e^{-\int C(x)dx}$; б) $y = C(x)e^{\int p(x)dx}$;

в) $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$; г) $y = p(x)e^{\int C(x)dx}$.

6. Диференціальне рівняння 1-го порядку $y' = f(x, y)$ є однорідним, якщо для функції $f(x, y)$ виконано тотожність:

а) $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$; б) $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$;

в) $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$; г) $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} f(x, y)$.

7. Для розв'язання однорідного диференціального рівняння $y' = \varphi(y/x)$ використовують таку підстановку:

а) $u = y/x$; б) $y = \frac{u}{v}$; в) $y = uv$; г) $y' = yu'$.

8. Метод допоміжних функцій (метод Бернуллі) полягає в тому, що розв'язок рівняння шукають у такому вигляді:

а) $y = ux$; б) $y = \frac{u}{v}$; в) $y = uv$; г) $y = u + v$.

9. Диференціальне рівняння такого вигляду $y' + p(x)y = y^n g(x)$ є рівнянням Бернуллі, якщо виконано умову для степеня n :

а) $n \in \mathbf{R}$; б) $n \in \mathbf{R}, n \neq 1$; в) $n \in \mathbf{R}, n \neq 0$; г) $n \in \mathbf{R}, n \neq 0, n \neq 1$.

10. Диференціальним рівнянням Бернуллі називають рівняння такого вигляду:

а) $y' = \varphi(y/x)$; б) $y' + p(x)y = y^n g(x)$;

в) $y' = f(x, y)$; г) $y' + p(x)y = g(x)$.

Література: [1 – 7; 10 – 14; 17 – 22].

28. Диференціальні рівняння вищих порядків

Основні питання:

28.1. Основні поняття та означення.

28.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку.

28.3. Однорідні лінійні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами.

28.4. Розв'язання однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

28.1. Основні поняття та означення

Диференціальним рівнянням порядку n (або n -го порядку) називають рівняння, яке пов'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y = y(x)$ та її похідні $y', y'', \dots, y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (28.1)$$

де F – закон зв'язку між указаними в дужках змінними.

Якщо рівняння (28.1) можна розв'язати відносно похідної $y^{(n)}$, то рівняння такого вигляду:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (28.2)$$

називають **розв'язаним відносно старшої похідної**.

Розв'язком диференціального рівняння n -го порядку на множині D називають n разів диференційовну на цій множині функцію $y = \varphi(x)$, підстановка якої, а також її похідних, у диференціальне рівняння перетворює його на тотожність (відносно змінної x із D).

Задача Коші для диференціального рівняння n -го порядку полягає в знаходженні розв'язку рівняння, який задовольняє n початкових умов:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (28.3)$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння n -го порядку називають таку функцію:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (28.4)$$

що залежить від x і n довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, $C_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$ і задовольняє такі умови:

1) функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ є розв'язком диференціального рівняння за будь-яких значень сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$;

2) для довільних початкових умов (28.3) існують такі сталі $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$, за яких розв'язок $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ буде задовольняти початкові умови.

Частинним розв'язком диференціального рівняння n -го порядку називають таку функцію:

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0), \quad (28.5)$$

яку отримують із загального розв'язку (28.4), якщо всім довільним сталим надати певних числових значень.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявній формі, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, то такий розв'язок називають **загальним інтегралом** диференціального рівняння.

Частинним інтегралом диференціального рівняння називають загальний інтеграл за фіксованих значень довільних сталих: $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0) = 0$.

Теорема Коші (достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші). Якщо в диференціальному рівнянні n -го порядку (28.2) функція $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ є неперервною та має неперервні частинні похідні за змінними $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ у деякій області $D \in \mathbf{R}^{n+1}$, що містить точку $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння, який задовольняє задані початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Зауважмо, що на відміну від диференціального рівняння 1-го порядку, через кожну точку простору $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) проходить не одна, а безліч інтегральних кривих диференціального рівняння n -го порядку.

Дійсно, нехай задано диференціальне рівняння 2-го порядку $y'' = f(x, y, y')$ із початковими умовами $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Зафіксуємо на площині xOy точку (x_0, y_0) ; через неї буде проходити єдина інтегральна крива з кутом нахилу α дотичної до осі абсцис, до того ж $\operatorname{tg} \alpha = y'_0$. Якщо змінювати y'_0 за незмінних (x_0, y_0) , то отримаємо безліч інтегральних кривих із різними кутами нахилу, що проходять через задану точку.

Рівняння назвімо **неповним**, якщо воно не містить у явному вигляді аргумент, чи невідому функцію, чи деякі її похідні, за винятком похідної $y^{(n)}$.

28.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

Під диференціальними рівняннями n -го порядку ($n \geq 2$), що *допускає зниження порядку*, розуміють рівняння, яке заміною змінної зводять до диференціального рівняння нижчого ніж n порядку.

Розгляньмо найпростіші випадки неповних диференціальних рівнянь, що допускають зниження порядку.

1. Рівняння містить тільки незалежну змінну x і старшу похідну $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x). \quad (28.6)$$

Загальний розв'язок цього рівняння можна знайти n -кратним інтегруванням початкового рівняння.



Розв'яжімо таке рівняння: $y'' = \cos x$.

Оскільки $y'' = (y')' = \cos x$, то $d(y') = \cos x dx$. Зінтегруючи обидві частини цього рівняння, отримаємо:

$$y' = \int \cos x dx \Rightarrow y' = \sin x + C_1.$$

За першою похідною знаходьмо саму функцію:

$$y = \int (\sin x + C_1) dx \Rightarrow y(x) = -\cos x + C_1 x + C_2 - \text{загальний розв'язок.}$$



Розгляньмо таку задачу Коші: знайдімо частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' = 3x^2$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Знаходьмо загальний розв'язок рівняння $y'' = 3x^2$. Для цього послідовно зінтегруймо його два рази. Після першого інтегрування отримуємо:

$$y' = \int 3x^2 dx = x^3 + C_1.$$

Звідси дістаймо диференціал функції: $dy = (x^3 + C_1)dx$. Зінтегруючи ще раз, маємо загальний розв'язок рівняння:

$$\int dy = \int (x^3 + C_1) dx + C_2 \Rightarrow y = \frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2.$$

Визначаймо довільні сталі C_1 і C_2 . Для цього знаходьмо похідну $y' = y'(x)$ загального розв'язку рівняння $y = y(x)$, складаймо систему рівнянь відносно C_1 , C_2 , зважаючи на початкові умови, і розв'язуймо її:

$$\begin{cases} y(x) = \frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2, \\ y'(x) = \frac{x^3}{1} + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2, \\ 1 = 0 + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Отже, розв'язком задачі Коші є функція $y = \frac{x^4}{4} + x + 2$.

2. Рівняння не містить явно шуканої функції і її похідних до $(k-1)$ -го порядку включно:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leq k < n. \quad (28.7)$$

Порядок такого рівняння можна знизити, якщо ввести таку нову функцію:

$$p(x) = y^{(k)}(x), \quad (28.8)$$

тоді

$$y^{(k+1)} = p', \dots, y^{(n)} = p^{(n-k)}. \quad (28.9)$$

Отже, вихідне рівняння зводять до рівняння порядку $(n-k)$ відносно невідомої функції $p(x)$:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0. \quad (28.10)$$



Розв'яжімо таке рівняння: $y'' = x - \frac{y'}{x}$.

Оскільки рівняння не містить невідомої функції $y(x)$, то для його розв'язання використаємо підстановку (28.8): $y' = p(x)$, тоді $y'' = p'(x)$. Отримаємо лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку відносно $p(x)$:

$$p'(x) + \frac{p(x)}{x} = x.$$

Розв'яжімо його методом Бернуллі.

Покладаймо: $p = u \cdot v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$, тоді $p' = u'v + v'u$ і рівняння набуває такого вигляду:

$$u'v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) = x.$$

Перейдімо до системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0, \\ u'v = x. \end{cases}$$

Із першого рівняння цієї системи отримуємо:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x^{-1}| \Rightarrow v = x^{-1}.$$

Підставляймо вираз для v у друге рівняння системи та знаходьмо u :

$$\frac{u'}{x} = x \Rightarrow du = x^2 dx \Rightarrow u(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1.$$

Отже, $p(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$. Оскільки $p(x) = \frac{dy}{dx}$, то $dy = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \right) dx$.

За диференціалом інтегруванням відновлюймо функцію $y = y(x)$:

$$y(x) = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2 - \text{загальний розв'язок заданого рівняння.}$$

3. Рівняння не містить явно незалежної змінної:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (28.11)$$

Такі рівняння допускають зниження порядку на одиницю, якщо покласти:

$$y'_x = p(y), \quad (28.12)$$

де $p(y)$ – складена функція від x із проміжним аргументом $y = y(x)$.

Дійсно, обчислюймо інші похідні для $y(x)$ через $p(y)$ і її похідні:

$$y''_x = \frac{dp}{dy} y'_x = \frac{dp}{dy} p, \quad y'''_x = \frac{d}{dx} \left(\frac{dp}{dy} p \right) = p''_y p^2 + (p'_y)^2 p, \quad \dots, \quad (28.13)$$

$$y^{(n)}_x = \left(y^{(n-1)}_x \right)'_y \cdot p,$$

і задане рівняння зводять до такого диференціального рівняння:

$$F_1(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0, \quad (28.14)$$

яке є рівнянням $(n-1)$ -го порядку відносно $p(y)$.



Розв'яжімо таке рівняння: $y''y = 1 + y'^2$.

Оскільки рівняння не містить аргументу x у явному вигляді, то покла-
даймо: $y' = p(y)$, тоді $y'' = p'(y)y' = p(y)p'(y)$. Підставляймо вирази для y'
та y'' в початкове рівняння і знаходьмо $p(y)$:

$$pp'y = 1 + p^2 \Rightarrow p \frac{dp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1 + p^2) = \ln|y| + \ln C_1, C_1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + p^2 = C_1^2 y^2 \Rightarrow p = \pm \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}.$$

Повернімося до вихідних змінних, зважаючи на те, що $p(y) = y'$:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx \Rightarrow \frac{1}{C_1} \ln \left| C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1} \right| = \pm (x + C_2) -$$

загальний інтеграл початкового диференціального рівняння.

4. Рівняння, однорідне відносно $y, y', \dots, y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (28.15)$$

де

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Рівняння цього типу допускають зниження порядку на одиницю за заміни
невідомої функції $y(x)$ на нову функцію $p(x) = \frac{y'}{y}$.



Розв'яжімо таке диференціальне рівняння: $3(y')^2 = 4yy'' + y^2$.

Рівняння є однорідним відносно y, y', y'' . Поділімо його на y^2 , $y \neq 0$, у результаті отримаємо рівняння в такому вигляді:

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 4\frac{y''}{y} + 1.$$

Зробімо таку заміну:

$$p(x) = \frac{y'}{y} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \Rightarrow \frac{y''}{y} = p' + p^2,$$

і розв'язуймо відповідне вихідному рівняння відносно функції $p(x)$:

$$3p^2 = 4p' + 4p^2 + 1 \Rightarrow -4p' = 1 + p^2 \Rightarrow \frac{dp}{1+p^2} = -\frac{1}{4}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arctg p = C_1 - \frac{1}{4}x \Rightarrow p = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{1}{4}x\right).$$

Зважаючи на співвідношення $p(x) = \frac{y'}{y}$, відновлюймо $y = y(x)$:

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{1}{4}x\right) \Rightarrow \frac{dy}{y} = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{1}{4}x\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = 4\ln\left|\cos\left(C_1 - \frac{1}{4}x\right)\right| + \ln|C_2| \quad (C_2 \neq 0) \Rightarrow y = C_2 \cos^4\left(C_1 - \frac{1}{4}x\right) -$$

загальний розв'язок рівняння.

Зауважмо, що $y = 0$ також є розв'язком рівняння, який неможливо отримати із загального, тобто $y = 0$ – особливий розв'язок.

28.3. Однорідні лінійні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Однорідним лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку зі сталими коефіцієнтами називають рівняння такого вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (28.16)$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ – дійсні числа.

Термін «лінійне» пов'язано з тим, що рівняння містить невідому функцію $y(x)$ і всі її похідні лише в першому степені.

Якщо за старшої похідної $y^{(n)}$ коефіцієнт є відмінним від одиниці, то, поділивши на нього ліву і праву частину рівняння, отримуємо рівняння (28.16).

Окремим випадком рівняння (28.16) є рівняння 2-го порядку:

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (28.17)$$

де коефіцієнти p та q – це сталі.

Розгляньмо властивості розв'язків рівняння (28.17).

Теорема 28.1. Якщо функція $y = y_1(x)$ є розв'язком рівняння (28.17), то й функція $y = Cy_1(x)$, де C – довільна стала, теж є розв'язком цього рівняння.

Доведення. Оскільки функція $y = y_1(x)$ є розв'язком рівняння (28.17), то

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0.$$

Підставмо в ліву частину рівняння (28.17) функцію $y = Cy_1(x)$ та її похідні $y' = Cy_1'$, $y'' = Cy_1''$:

$$Cy_1'' + Cpy_1' + Cqy_1 = C(y_1'' + py_1' + qy_1).$$

Вираз у дужках дорівнює нулю, тому $y = Cy_1(x)$ також є розв'язком рівняння (28.17).

Теорема 28.2. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками рівняння $y'' + py' + qy = 0$, то їхня сума $y = y_1(x) + y_2(x)$ теж є розв'язком цього рівняння.

Доведення. Підставмо в ліву частину вихідного рівняння, замість y , суму функцій $y_1 + y_2$ і виконаймо таке групування:

$$(y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) = (y_1'' + py_1' + qy_1) + (y_2'' + py_2' + qy_2) = 0.$$

Оскільки за умовою функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками рівняння (28.17), то вирази в круглих дужках дорівнюють нулю, отже, сума $y = y_1(x) + y_2(x)$ також є розв'язком цього рівняння.

Два ненульові розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називають **лінійно залежними** на інтервалі (a, b) , якщо їхнє відношення дорівнює сталому числу: $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$,

$\lambda - \text{const}$. Інакше розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називають **лінійно незалежними**:

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \lambda, \text{ де } \lambda - \text{const}.$$

Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ – деякі функції, то визначник 2-го порядку, елементами якого є самі функції та їхні похідні:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2, \quad (28.18)$$

називають **визначником Вронського (вронскіаном)** цих функцій. Оскільки $y_1(x)$, $y_2(x)$ – функції від x , то вронскіан теж є функцією від x : $W = W(x)$.

Теорема 28.3. Якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ є лінійно залежними на інтервалі (a, b) , то їхній вронскіан на цьому проміжку дорівнює нулю.

Доведення. Нехай $y_1(x) = \lambda y_2(x)$, $\lambda - \text{const}$, тоді $y_1' = \lambda y_2'$ і вронскіан буде мати два пропорційні стовпці, а тому буде дорівнювати нулю:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 28.4. Якщо вронскіан $W(y_1, y_2)$ розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$ рівняння (28.17) не дорівнює нулю за деякого значення незалежної змінної x_0 із (a, b) , то він не дорівнює нулю за жодного значення x на цьому проміжку.

Доведення. Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$ – це розв’язки рівняння (28.17), тоді мають місце такі рівності:

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0, \quad y_2'' + py_2' + qy_2 = 0.$$

Віднімімо із другого рівняння, помноженого на y_1 , перше рівняння, помножене на y_2 , й отримаємо:

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0.$$

У другому доданку лівої частини вираз у дужках є вронскіаном функцій y_1 , y_2 , а перший доданок – його похідною:

$$W'(y_1, y_2) = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1y_2'' - y_1''y_2,$$

отже, маємо диференціальне рівняння 1-го порядку відносно вронскіана:

$$W' + pW = 0.$$

Знайдімо його розв’язок, який задовольняє таку початкову умову: $W(x_0) = W_0 \neq 0$.

Якщо $W \neq 0$, то маємо:

$$\frac{dW}{W} = -pdx \Rightarrow \ln|W| = -px + \ln|C|, \quad C \neq 0 \Rightarrow W = Ce^{-px}.$$

$$W = W_0 \cdot e^{px_0 - px}. \quad (28.19)$$

За умовою теореми $W_0 \neq 0$, тому із (28.19) випливає, що $W \neq 0$ для будь-якого $x \in (a, b)$, бо областю значень показникової функції є нескінченний інтервал $(0, +\infty)$.

Теорема 28.5. Якщо розв’язки $y_1(x)$, $y_2(x)$ рівняння (28.17) є лінійно незалежними на (a, b) , то їхній вронскіан (28.18) не дорівнює нулю в жодній точці x цього проміжку.

Доведення теореми виконують від супротивного з використанням попередніх двох теорем.

Сукупність двох розв'язків рівняння (28.17), визначених і лінійно незалежних на деякій множині, називають **фундаментальною системою розв'язків**.

Теорема 28.6. Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (28.17), то його загальний розв'язок має такий вигляд:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (28.20)$$

де C_1, C_2 – це довільні сталі.

Дійсно, із властивостей розв'язків рівняння (28.17) випливає, що (28.20) є розв'язком рівняння (28.17) за довільних дійсних значеннях C_1, C_2 .

Доведімо, що для будь-яких початкових умов $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ можна підібрати значення сталих C_1, C_2 так, щоб відповідний частинний розв'язок $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ задовольняв початкові умови.

Підставмо задані початкові умови у (28.20):

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y'_0 = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0). \end{cases}$$

За теоремою 28.5, визначник системи – вронскіан $W(x_0)$ – не дорівнює нулю, тому вона має єдиний розв'язок, який визначає сталі C_1, C_2 .

Отже, загальний розв'язок рівняння (28.17) є лінійною комбінацією фундаментальної системи розв'язків.

Властивості, аналогічні розглянутим раніше властивостям розв'язків рівняння (28.17), є справедливими й для однорідних лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків ($n > 2$), але їхнє доведення потребує складніших викладок.

Розв'язки $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ рівняння (28.16) називають **лінійно незалежними** на інтервалі (a, b) , якщо їхня лінійна комбінація $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$ дорівнює нулю лише тоді, якщо всі сталі $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ дорівнюють нулю, тобто рівність

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

є можливою тільки за умови, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Сукупність n лінійно незалежних розв'язків рівняння (28.16) називають **фундаментальною системою розв'язків**.

Визначником Вронського системи функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називають визначник n -го порядку, елементами стовпців якого є функції системи та їхні похідні до $(n-1)$ -го порядку включно:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (28.21)$$

Як і в разі диференціальних рівнянь 2-го порядку, якщо функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ на інтервалі (a, b) є неперервними, $(n-1)$ раз диференційовними й утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (28.16), то вронскіан (28.21) цих функцій не дорівнює нулю в жодній точці x інтервалу (a, b) і навпаки.

Теорема 28.7 (про структуру загального розв'язку) Якщо система функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – це фундаментальна система розв'язків рівняння (28.16), то загальним розв'язком цього рівняння є така їхня лінійна комбінація:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (28.22)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – це довільні сталі.

28.4. Розв'язання однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Однорідні лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами: $y'' + py' + qy = 0$. Згідно з теоремою 28.6, для знаходження загального розв'язку рівняння треба побудувати його фундаментальну систему розв'язків: $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$.

Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді показникової функції $y = e^{kx}$, де k – числовий параметр.

Знаходьмо похідні цієї функції $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$ і підставляймо їх у таке рівняння:

$$k^2 e^{kx} + p \cdot k e^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx} (k^2 + pk + q) = 0.$$

Експонента $e^{kx} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$, тому другий множник дорівнює нулю, у результаті маємо квадратне рівняння відносно k :

$$k^2 + pk + q = 0, \quad (28.23)$$

яке називають **характеристичним рівнянням** однорідного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Корені характеристичного рівняння обчислюють за такою формулою:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \quad (28.24)$$

Розгляньмо різні випадки розв'язків характеристичного рівняння, від яких залежить вигляд частинних розв'язків диференціального рівняння.

1. Корені рівняння є дійсними та різними. Якщо характеристичне рівняння має додатний дискримінант: $D = \frac{p^2}{4} - q > 0$, то $k_1 \neq k_2$. У цьому разі $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння (28.17), оскільки їхнє відношення не є сталою величиною: $\frac{y_2}{y_1} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const}.$

Тоді загальний розв'язок рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (28.25)$$



Знайдімо загальний розв'язок такого рівняння: $y'' - y' - 6y = 0$.

Це однорідне лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Складімо для нього таке характеристичне рівняння: $k^2 - k - 6 = 0$. Корені рівняння є дійсними й різними: $k_1 = -2$; $k_2 = 3$.

Отже, їм відповідають два частинні розв'язки $y_1 = e^{-2x}$ та $y_2 = e^{3x}$, які є лінійно незалежними.

Загальний розв'язок описують такою функцією:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

2. Корені характеристичного рівняння є дійсними й рівними. Якщо

дискримінант характеристичного рівняння дорівнює нулю: $D = \frac{p^2}{4} - q = 0$, то рівняння має дійсні й рівні корені $k_1 = k_2 = k$, або, кажуть, один двократний корінь. У цьому разі маємо один частинний розв'язок: $y_1 = e^{kx}$. Другий частинний розв'язок, лінійно незалежний від першого, можна знайти в такому вигляді: $y_2 = xe^{kx}$.

Це легко перевірити безпосередньо підстановкою y_2 в рівняння (28.17):

$$\begin{aligned}(xe^{kx})'' + p(xe^{kx})' + q(xe^{kx}) &= (2ke^{kx} + k^2xe^{kx}) + p(e^{kx} + kxe^{kx}) + qxe^{kx} = \\ &= e^{kx} [x(k^2 + pk + q) + (2k + p)] \equiv 0.\end{aligned}$$

Вираз у квадратних дужках дорівнює нулю, бо $k = -p/2$ – двократний корінь характеристичного рівняння.

Відношення $\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const}$, отже, функції y_1 та y_2 є лінійно незалежними.

За теоремою 28.6, загальним розв'язком рівняння (28.17) є лінійна комбінація цих функцій:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx} (C_1 + C_2 x). \quad (28.26)$$



Знайдімо загальний розв'язок такого рівняння: $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Для цього запишімо його характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 4 = 0$. Корені рівняння є дійсними й рівними: $k_1 = k_2 = 2$; відповідні частинні й лінійно незалежні розв'язки такі: $y_1 = e^{2x}$ та $y_2 = xe^{2x}$.

Загальний розв'язок рівняння має такий вигляд: $y(x) = e^{2x} (C_1 + C_2 x)$.

3. Характеристичне рівняння не має дійсних коренів. Якщо $\frac{p^2}{4} - q < 0$,

то характеристичне рівняння має такі комплексно-спряжені корені:

$$k_1 = \alpha + \beta \cdot i, \quad k_2 = \alpha - \beta \cdot i,$$

де α – дійсна частина комплексного числа;

$+\beta$ і $-\beta$ – уявні частини комплексних чисел k_1 і k_2 , відповідно;

$i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, квадрат якої дорівнює -1 ($i^2 = -1$).

Згідно з ф-лою (28.24), маємо:

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуймося, що в цьому разі диференціальне рівняння має два дійсні частинні розв'язки, які є лінійно незалежними:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Покажімо, наприклад, що функція $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ є розв'язком рівняння (28.17).

Знайдімо похідні:

$$y_2' = e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x),$$

$$y_2'' = e^{\alpha x} (\alpha^2 \sin \beta x - \beta^2 \sin \beta x + 2\alpha\beta \cos \beta x).$$

Підставляючи y_2, y_2', y_2'' в рівняння (28.17), отримуємо:

$$\begin{aligned} & e^{\alpha x} (\sin \beta x (\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q) + \cos \beta x (2\alpha\beta + p\beta)) = \\ & = e^{\alpha x} (\sin \beta x (\frac{p^2}{4} - \frac{-p^2 + 4q}{4} + p \cdot \left(\frac{-p}{2}\right) + q) + \cos \beta x (2 \cdot \left(\frac{-p}{2}\right) \cdot \beta + p\beta)) = \\ & = e^{\alpha x} \sin \beta x (\frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{2} + q) \equiv 0. \end{aligned}$$

Отже, функція $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ є розв'язком рівняння (28.17).

Аналогічно доводять, що функція $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ також є розв'язком рівняння (28.17).

Оскільки розв'язки y_1 та y_2 є лінійно незалежними:

$$\frac{y_2}{y_1} = \operatorname{tg} \beta x \neq \operatorname{const},$$

то згідно з теоремою 28.6, загальний розв'язок рівняння має такий вигляд:

$$y = e^{ax} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (28.27)$$



Знайдімо загальний розв'язок такого рівняння: $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Запишімо відповідне характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 10 = 0$. Воно має комплексно-спряжені корені: $k_{1,2} = -1 \pm 3i$, звідси $\alpha = -1$, $\beta = 3$. Цим кореням відповідають два частинні розв'язки: $y_1 = e^{-x} \cos 3x$, $y_2 = e^{-x} \sin 3x$.

Загальний розв'язок рівняння має такий вигляд:

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$



Рівняння (28.17) можна розв'язувати інакше: воно не містить у явному вигляді аргумент x , отже, допускає зниження порядку введенням нової змінної. Перевага розглянутого підходу полягає в тому, що він не потребує операції інтегрування.

Однорідні лінійні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$. Знаходження загального розв'язку однорідного рівняння за $n > 2$, як і за $n = 2$, зводять (за теоремою 28.6) до побудови фундаментальної системи з n лінійно незалежних частинних розв'язків: $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ і виконують у такому самому порядку.

1. Складаймо характеристичне рівняння:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \Rightarrow k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (28.28)$$

і розв'язуймо його.

2. Будуймо фундаментальну систему лінійно незалежних частинних розв'язків, зважаючи на те, що:

1) кожному дійсному простому кореню k відповідає частинний розв'язок:

$$y = e^{kx};$$

2) кожному дійсному кореню k кратності $r \geq 2$ відповідають r лінійно незалежних частинних розв'язків:

$$y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}, \dots, y_r = x^{r-1}e^{kx};$$

3) кожній парі простих комплексно-спряжених коренів $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ відповідають два частинні розв'язки:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

4) кожній парі комплексно-спряжених коренів $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ кратності $r \geq 2$ відповідають $2r$ частинних розв'язків:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, y_r = x^{r-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ y_{r+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x, y_{r+2} = xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, y_{2r} = x^{r-1}e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Загальна кількість частинних розв'язків має дорівнювати порядку диференціального рівняння.

3. Записуймо загальний розв'язок рівняння як лінійну комбінацію функцій фундаментальної системи розв'язків:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

4. Розв'язуймо задачу Коші в разі задання початкових умов (28.3):

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$



Знайдімо частинний розв'язок рівняння $y''' + 4y'' + 5y' = 0$, якщо:

$$y(0) = -3, y'(0) = -1, y''(0) = -1.$$

Спочатку знайдімо загальний розв'язок цього рівняння.

Складаймо його характеристичне рівняння:

$$k^3 + 4k^2 + 5k = 0, \text{ або } k(k^2 + 4k + 5) = 0.$$

Визначаймо корені: $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$, $k_3 = 0$.

Фундаментальна система розв'язків є такою: комплексним кореням відповідають функції $y_1(x) = e^{-2x} \cos x$, $y_2(x) = e^{-2x} \sin x$; простому кореню $k_3 = 0$ – функція $y_3 = e^{k_3 x} = 1$.

Записуймо загальний розв'язок:

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + C_3.$$

Для знаходження C_1 , C_2 і C_3 використовуємо початкові умови:

$$y' = -2e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x}(C_2 \cos x - C_1 \sin x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = -e^{-2x}(2C_1 \cos x + 2C_2 \sin x + C_1 \sin x - C_2 \cos x);$$

$$y'' = 2e^{-2x}(2C_1 \cos x + 2C_2 \sin x + C_1 \sin x - C_2 \cos x) -$$

$$-e^{-2x}(-2C_1 \sin x + 2C_2 \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = e^{-2x}[(3C_1 - 4C_2) \cos x + (4C_1 + 3C_2) \sin x].$$

Складаймо систему рівнянь для визначення C_1 , C_2 , C_3 :

$$\begin{cases} y(0) = -3, \\ y'(0) = -1, \\ y''(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = C_1 + C_3, \\ -1 = -2C_1 + C_2, \\ -1 = 3C_1 - 4C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = -4. \end{cases}$$

Частинний розв'язок початкового рівняння є таким:

$$y = e^{-2x}(\cos x + \sin x) - 4.$$



Розв'яжімо таке диференціальне рівняння: $y^{(4)} - y = 0$.

Складаймо і розв'яжуймо характеристичне рівняння:

$$k^4 - 1 = 0 \Rightarrow (k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k - 1)(k + 1)(k - i)(k + i) = 0 \Rightarrow (k_1 = 1, k_2 = -1, k_{3,4} = \pm i).$$

Фундаментальна система розв'язків є такою: двом простим кореням відповідають функції $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$; комплексно-спряженим кореням – функції $y_3(x) = \cos x$, $y_4(x) = \sin x$.

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має такий вигляд:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$



Ключові терміни

Диференціальні рівняння 2-го і вищих порядків; загальний розв'язок; частинний розв'язок; загальний інтеграл; частинний інтеграл; задача Коші; достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші; неповні диференціальні рівняння; рівняння, що допускають зниження порядку; рівняння, що не містить явно визначеної функції і її похідних; рівняння, що не містить явно незалежної змінної; рівняння, що є однорідними відносно шуканої функції і її похідних; однорідні лінійні диференціальні рівняння 2-го і вищих порядків зі сталими коефіцієнтами; лінійно залежні розв'язки; лінійно незалежні розв'язки; визначник Вронського (вронскіан); фундаментальна система розв'язків; структура загального розв'язку; характеристичне рівняння; прості корені; кратні корені; комплексно-спряжені корені; уявна одиниця.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають диференціальним рівнянням n -го порядку?
2. Який вигляд має символічний запис диференціальним рівнянням n -го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної?

3. Що називають: розв'язком; загальним розв'язком; частинним розв'язком; загальним інтегралом; частинним інтегралом диференціального рівняння n -го порядку?
4. Що розуміють під задачею Коші для рівняння n -го порядку?
5. Як формулюють теорему Коші щодо достатніх умов існування та єдиності розв'язку задачі Коші?
6. Яке диференціальне рівняння називають неповним?
7. Які диференціальні рівняння n -го порядку допускають зниження порядку?
8. Як називають тип диференціального рівняння, що має символічний запис $y^{(n)} = f(x)$?
9. Який спосіб розв'язання диференціального рівняння такого вигляду $y^{(n)} = f(x)$?
10. Як називають тип диференціального рівняння такого вигляду $F(x, y', y'') = 0$?
11. Який спосіб розв'язання диференціального рівняння такого вигляду $F(x, y', y'') = 0$?
12. Як називають тип диференціального рівняння такого вигляду $F(y, y', y'') = 0$?
13. Який спосіб розв'язання диференціального рівняння такого вигляду $F(y, y', y'') = 0$?
14. Які ви знаєте властивості розв'язків лінійного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?
15. Який вигляд має однорідне лінійне диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами?
16. Який вигляд має однорідне лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?
17. Які функції називають лінійно незалежними, а які – лінійно залежними на деякому проміжку?
18. Що називають визначником Вронського (вронскіаном)?
19. Яке твердження щодо лінійної залежності або незалежності є істинним, якщо вронскіан: буде дорівнювати нулю; не буде дорівнювати нулю?
20. Що називають фундаментальною системою розв'язків?
21. Як формулюють теорему про структуру загального розв'язку?

22. Яке рівняння називають характеристичним для однорідного диференціального рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами?

23. Який вигляд має характеристичне рівняння для однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

24. Які частинні розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку, якщо корені характеристичного рівняння: а) є дійсними й різними; б) є дійсними й рівними; в) є комплексно-спряженими?

25. Як будують фундаментальну систему розв'язків однорідного лінійного диференціального рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами, залежно від коренів характеристичного рівняння?



Тестові завдання до підрозділу 28

1. Частинним інтегралом диференціального рівняння n -го порядку є функція такого виду:

а) $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$; б) $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0) = 0$;

в) $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$; г) $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$.

2. Яке з таких тверджень про розв'язок диференціального рівняння вигляду $y'' = f(x)$ є правильним:

а) розв'язок завжди містить лише одну довільну константу;

б) розв'язок не містить довільних констант;

в) розв'язок завжди містить дві довільні константи;

г) розв'язок залежить лише від вигляду функції $f(x)$?

3. Виберіть підстановку, яку потрібно виконати для розв'язання диференціального рівняння вигляду $F(x, y', y'') = 0$:

а) $y' = p(x) \cdot x$; б) $y' = \frac{p(x)}{x}$; в) $y' = p(x) \cdot y$; г) $y' = p(x)$.

4. Виберіть рівняння, яке складене за допомогою заміни $y' = p(y)$ для диференціального рівняння $yy'' + y = (y')^2$, серед таких:

а) $yp'p + y = p^2$; б) $yp'p + y = y^2$; в) $yp' + y = p^2$; г) $yp' + y = y^2$.

5. Якщо характеристичне рівняння $k^2 + pk + q = 0$ має два дійсні та різні корені, тоді загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами буде мати такий вигляд:

- а) $y = e^{kx}(C_1 + C_2x)$; б) $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$;
 в) $y = e^{ax}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$; г) $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_2x}$.

6. Якщо характеристичне рівняння $k^2 + pk + q = 0$ має два дійсні та рівні корені, тоді загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами буде мати такий вигляд:

- а) $y = e^{kx}(C_1 + C_2x)$; б) $y = e^{ax}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$;
 в) $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$; г) $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_2x}$.

7. Якщо характеристичне рівняння $k^2 + pk + q = 0$ не має дійсних коренів, тоді загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами буде мати такий вигляд:

- а) $y = e^{\beta x}(C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x)$; б) $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$;
 в) $y = e^{ax}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$; г) $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_2x}$.

8. Який вигляд має характеристичне рівняння для однорідного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 3y' + 2y = 0$?

- а) $k^2 + 2k - 3 = 0$; б) $k^2 + 3k - 2 = 0$; в) $k^2 - 2k + 3 = 0$; г) $k^2 - 3k + 2 = 0$?

9. Виберіть підстановку, яку потрібно виконати для розв'язання диференціального рівняння вигляду $F(x, y, y', y'') = 0$:

- а) $y' = p(x) \cdot y$; б) $y' = \frac{y}{p(x)}$; в) $y' = p(x)$; г) $y' = \frac{p(x)}{y}$.

10. Порядок диференціального рівняння $(y'')^3 + xy' = 4y'$ можна знизити за допомогою такої підстановки:

- а) $y'' = p(x)$; б) $y' = p(x)$; в) $y'' = p(y)$; г) $y' = p(y)$.

Література: [1; 3 – 7; 10 – 14; 17 – 22].

29. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Основні питання:

29.1. Структура розв'язку неоднорідних лінійних рівнянь.

29.2. Розв'язання неоднорідних лінійних рівнянь зі спеціальними правими частинами.

29.3. Розв'язання неоднорідних диференціальних рівнянь за методом варіації довільних сталих.

29.4. Системи диференціальних рівнянь.

29.1. Структура розв'язку неоднорідних лінійних рівнянь

Неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку зі сталими коефіцієнтами називають рівняння такого вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (29.1)$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n$ – сталі.

Однорідне рівняння, яке отримане із (29.1) за умови, що $f(x) \equiv 0$, називають **відповідним** неоднорідному рівнянню.

Теорема 29.1 (про структуру загального розв'язку неоднорідного рівняння). Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння n -го порядку дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $\bar{y}(x)$ і будь-якого частинного розв'язку $\tilde{y}(x)$ цього неоднорідного рівняння:

$$y(x) = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x). \quad (29.2)$$

Доведення. Нехай $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $\tilde{y}$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння, тоді виконують таке співвідношення:

$$\begin{aligned} \bar{y}^{(n)} + a_1 \bar{y}^{(n-1)} + \dots + a_n \bar{y} &= 0, \\ \tilde{y}^{(n)} + a_1 \tilde{y}^{(n-1)} + \dots + a_n \tilde{y} &= f(x). \end{aligned} \quad (29.3)$$

Додаймо почленно ліві та праві частини рівностей. Зважаючи на те, що похідна суми дорівнює сумі похідних, маємо:

$$(\bar{y} + \tilde{y})^{(n)} + a_1(\bar{y} + \tilde{y})^{(n-1)} + \dots + a_n(\bar{y} + \tilde{y}) = f(x). \quad (29.4)$$

Згідно з теоремою 28.6, функція $\bar{y}(x)$ є лінійною комбінацією функцій фундаментальної системи розв'язків (28.22):

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

що задовольняє однорідне рівняння за будь-яких значень довільних сталих $C_i, i = \overline{1, n}$.

З урахуванням доданка $\tilde{y}(x)$ – частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (29.1) – сума $\bar{y}(x) + \tilde{y}(x)$ буде задовольняти й неоднорідне рівняння за будь-яких $C_i, i = \overline{1, n}$. Це означає виконання першої умови означення загального розв'язку диференціального рівняння n -го порядку.

За заданих початкових умов, маємо:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

задача Коші завжди має розв'язок, бо вронскіан від лінійно незалежної системи функцій є відмінним від нуля.

Наведемо алгоритм знаходження загального розв'язку рівняння (29.1):

- 1) *розв'язуймо* відповідне заданому однорідне диференціальне рівняння, визначаючи таким способом $\bar{y}$;
- 2) *знаходьмо* будь-який частинний розв'язок $\tilde{y}$ неоднорідного рівняння;
- 3) *записуймо* суму знайдених раніше розв'язків і отримуймо загальний розв'язок неоднорідного рівняння;
- 4) *розв'язуймо* задачу Коші в разі задавання початкових умов.

29.2. Розв'язання неоднорідних лінійних рівнянь зі спеціальними правими частинами

Неоднорідне лінійне рівняння (29.1), права частина якого – функція $f(x)$ – має такий вигляд:

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx), \quad (29.5)$$

де a, b – дійсні сталі;

$P_n(x), Q_m(x)$ – многочлени степеня n і m , відповідно,

називають **неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням зі спеціальною правою частиною**.

Відповідно до структури загального розв'язку неоднорідного рівняння, питання зводять до знаходження частинного розв'язку рівняння $\tilde{y}(x)$, вигляд якого визначають за значеннями числових параметрів a, b, n, m правої частини.

Теорема 29.2 (про частинний розв'язок неоднорідного рівняння зі спеціальною правою частиною). Якщо неоднорідне рівняння (29.1) має спеціальну праву частину (29.5):

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx),$$

то його частинний розв'язок $\tilde{y}(x)$ може бути знайденим у такому вигляді:

$$\tilde{y}(x) = x^r e^{ax}(U_k(x)\cos bx + V_k(x)\sin bx), \quad (29.6)$$

де $U_k(x), V_k(x)$ – поліноми степеня $k = \max\{n, m\}$, а число r показує, зі скількома коренями характеристичного рівняння збігається число $a + bi$ ($i = \sqrt{-1}$).

Доведення теореми потребує відомостей із теорії комплексних чисел, яку ми не вивчаємо, тому наводити його не будемо.

Якщо зіставити вираз для $\tilde{y}(x)$ із правою частиною рівняння, то помітимо, що його будова, крім множника x^r , така сама, як і у $f(x)$, тобто є добутком показникової функції й суми добутків многочленів на косинус і синус, відповідно. Це полегшує встановлення загального вигляду частинного розв'язку.

Наприклад, якщо $f(x)$ є просто многочленом: $f(x) = P_n(x)$, то це означає, що $a = b = 0$ (за цих умов $e^{0x} \equiv 1$, $\sin 0x \equiv 0$, $\cos 0x \equiv 1$) і $\tilde{y} = x^r U_n(x)$:

$$U_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n, \quad (29.7)$$

де $U_n(x)$ – повний поліном n -го степеня.

За невеликих n коефіцієнти многочлена (29.7) записують буквами без індексів за алфавітом: $U_0(x) = A$, $U_1(x) = Ax + B$, $U_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ тощо.

Значення коефіцієнтів A_i , $i = \overline{0, k}$, обчислюють за умови, що $\tilde{y}(x)$ має бути розв'язком рівняння. За методом невизначених коефіцієнтів знаходження A_i , $i = \overline{0, k}$ зводять до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Окремі випадки правих частин рівняння (29.1), які часто трапляються на практиці, і відповідний вигляд частинних розв'язків наведено в табл. 29.1.

Таблиця 29.1

Праві частини рівняння і відповідний їм вигляд частинних розв'язків

№ з/п	Права частина рівняння та її параметри		Вигляд частинного розв'язку
	$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$	$a, b; n, m$	$\tilde{y} = x^r e^{ax}(U_k(x)\cos bx + V_k(x)\sin bx)$ $k = \max\{n, m\}$
1	$f(x) = P_n(x)$	$a = b = 0$	$\tilde{y} = x^r U_n(x)$
2	$f(x) = e^{ax} P_n(x)$	$b = 0$	$\tilde{y} = x^r e^{ax} U_n(x)$
3	$f(x) = P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx$	$a = 0$	$\tilde{y} = x^r (U_k(x)\cos bx + V_k(x)\sin bx)$
		$a = 0;$ $n = m = 0$	$\tilde{y} = x^r (U_0 \cos bx + V_0 \sin bx),$ U_0, V_0 – сталі
4	$f(x) = e^{ax}(P_0 \cos bx + Q_0 \sin bx),$ P_0, Q_0 – сталі	$n = m = 0$	$\tilde{y} = x^r e^{ax}(U_0 \cos bx + V_0 \sin bx)$
5	$f(x) = e^{ax} P_n \cos bx$	$Q_m \equiv 0$	$\tilde{y} = x^r e^{ax}(U_n(x)\cos bx + V_n(x)\sin bx)$
6	$f(x) = e^{ax} Q_m \sin bx$	$P_n \equiv 0$	$\tilde{y} = x^r e^{ax}(U_m(x)\cos bx + V_m(x)\sin bx)$

Щоб установити вигляд частинного розв'язку $\tilde{y}(x)$, треба проаналізувати праву частину заданого рівняння для того, щоб визначити:

- 1) значення параметрів a, b, n, m ;
- 2) число r – кратність числа $a + bi$ як кореня характеристичного рівняння.

Можливі випадки значень r для неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку такі:

$$(a + bi \neq k_1 \text{ і } a + bi \neq k_2) \Rightarrow r = 0,$$

$$(a + bi = k_1 \text{ або } a + bi = k_2) \Rightarrow r = 1,$$

$$(a + bi = k_1 = k_2 = k) \Rightarrow r = 2.$$



Якщо права частина неоднорідного диференціального рівняння (29.1) є сумою двох спеціальних функцій $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частинний розв'язок цього рівняння визначають як суму таких частинних розв'язків: $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$.



Знайдімо загальний розв'язок такого рівняння: $y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^x$.

Спочатку розв'язуємо відповідне однорідне рівняння. Для цього складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

й обчислюємо його корені: $k_1 = k_2 = 3$. Оскільки корінь є кратним, то загальний розв'язок однорідного рівняння має такий вигляд:

$$\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Права частина цього рівняння є сумою двох спеціальних функцій $f_1(x) = 3x$ та $f_2(x) = -8e^x$.

Аналізуймо $f_1(x) = 3x$, виявляймо значення параметрів a, b, n, m і визначаймо вигляд $\tilde{y}_1(x)$:

$$\left[\begin{array}{l} (a=b=0, n=1) \Rightarrow U_1(x)=Ax+B, \\ (a+bi=0 \neq k=3) \Rightarrow r=0 \end{array} \right. \Rightarrow \tilde{y}_1(x)=x^r U_1(x)=Ax+B.$$

Аналогічно, для $f_2(x) = -8e^x$ маємо (див. табл. 29.1):

$$\left[\begin{array}{l} (a=1, b=0, n=0) \Rightarrow U_0(x)=C, \\ (a+bi=1 \neq k=3) \Rightarrow r=0 \end{array} \right. \Rightarrow \tilde{y}_2(x)=x^r e^x U_0(x)=Ce^x.$$

Частинний розв'язок рівняння $\tilde{y}(x)$ є сумою двох таких функцій $\tilde{y}_1(x)$ і $\tilde{y}_2(x)$:

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 \Rightarrow \tilde{y} = Ax + B + Ce^x.$$

Знаходьмо першу та другу похідні функції $\tilde{y}(x)$ і підставляймо їх і саму функцію в початкове рівняння:

$$Ce^x - 6(A + Ce^x) + 9(Ax + B + Ce^x) = 3x - 8e^x.$$

Прирівняймо коефіцієнти при e^x та однакових степенях x обох частин рівняння й отримаймо систему лінійних рівнянь відносно невідомих параметрів:

$$\left. \begin{array}{l} e^x \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{cases} 4C = -8, \\ 9A = 3, \\ -6A + 9B = 0. \end{cases}$$

Розв'язуймо її: $A = 1/3$, $B = 2/9$, $C = -2$. Отже, $\tilde{y} = 1/3x + 2/9 - 2e^x$.

Тож маємо такий загальний розв'язок:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + x/3 + 2/9 - 2e^x.$$



Знайдімо загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y = \cos 2x - 3\sin 2x$.

Спочатку визначаймо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + 4y = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має такі уявні спряжені корені: $k_{1,2} = 0 \pm 2i$. Їм відповідають два лінійно незалежні частинні розв'язки: $y_1 = \cos 2x$ і $y_2 = \sin 2x$.

Звідси маємо загальний розв'язок однорідного рівняння в такому вигляді:

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Права частина рівняння – функція $f(x) = \cos 2x - 3\sin 2x$ – є функцією такого вигляду:

$$f(x) = e^{0x} (P_0 \cos 2x + Q_0 \sin 2x),$$

де $a = 0$, $b = 2$;

$$P_0 = 1, Q_0 = -3.$$

Водночас число $a + bi = 0 + 2i$ збігається з коренем характеристичного рівняння $k_1 = 0 + 2i$, тому $r = 1$.

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати в такому вигляді:

$$\tilde{y} = x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Знайдімо такі похідні:

$$\tilde{y}' = A \cos 2x + B \sin 2x + x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x),$$

$$\tilde{y}'' = -4A \sin 2x + 4B \cos 2x + x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x).$$

У задане рівняння підставляймо $\tilde{y}$ та $\tilde{y}''$ й отримуємо:

$$-4A \sin 2x + 4B \cos 2x = \cos 2x - 3 \sin 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при синусах і косинусах, отримуємо значення параметрів A, B :

$$\left. \begin{array}{l} \sin 2x \\ \cos 2x \end{array} \right| \begin{cases} -4A = -3, \\ 4B = 1 \end{cases} \Rightarrow (A = 3/4, B = 1/4).$$

Отже, частинним розв'язком цього рівняння є така функція:

$$\tilde{y} = \frac{1}{4}x(3\cos 2x + \sin 2x).$$

Тож загальний розв'язок рівняння має такий вигляд:

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x(3\cos 2x + \sin 2x).$$

29.3. Розв'язання неоднорідних диференціальних рівнянь за методом варіації довільних сталих

Якщо права частина неоднорідного рівняння (29.1) не є спеціальною функцією, то для знаходження його загального розв'язку застосовують метод варіації довільних сталих.

Зміст варіації залишається таким самим, як і під час використання цього методу до розв'язання лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку (див. п. 27.5):

1. Знаходьмо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння, відповідного такому заданому неоднорідному рівнянню:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

як лінійну комбінацію функцій фундаментальної системи розв'язків:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x). \quad (29.8)$$

2. Покладаймо в загальному розв'язку однорідного рівняння параметри C_i , $i = \overline{1, n}$ такими, що дорівнюють невідомим диференційовним функціям

$C_i = C_i(x)$, і загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаймо в такому вигляді:

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x), \quad (29.9)$$

де невідомі функції $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ визначають із системи рівнянь:

[illegible]

3. Розв'язуємо систему рівнянь (29.10) відносно похідних невідомих функцій: $C'_i = C'_i(x)$, $i = \overline{1, n}$.

4. Знаходьмо невизначеним інтегруванням функції $C_i = C_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, і запишуймо загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння.

Зазначмо, що, замість колишніх сталих, під час інтегрування «з'являться» нові довільні сталі, які також позначають через C_i або через $\overline{C}_i$, $i = \overline{1, n}$, або збільшують номери сталих: C_{i+n} , $i = \overline{1, n}$.



Знайдімо загальний розв'язок такого рівняння: $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ відповідного однорідного рівняння має корені $k_{1,2} = \pm i$.

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння є таким:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

де $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ – два його лінійно незалежні розв’язки.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаймо, згідно з методом варіації довільних сталих, у такому вигляді:

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

Знайдімо похідні функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ із такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Для розв'язання системи застосуємо правило Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \sin x.$$

Отже,

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \sin x.$$

Зінтегруючи отримані рівності, маємо:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right| + \sin x + C_3,$$

$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_4.$$

Підставляючи $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у загальний розв'язок однорідного рівняння, отримуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = C_3 \cos x + C_4 \sin x + \cos x \ln \left| \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right|.$$

29.4. Системи диференціальних рівнянь

Часто для опису досліджуваних процесів недостатньо одного диференціального рівняння, тому використовують їхню систему.

Системою лінійних диференціальних рівнянь називають сукупність n лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку, кожне з яких містить одні й ті самі невідомі функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ від незалежної змінної x та їхні похідні:

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = q_1, \\ y_2' + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n = q_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n' + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n = q_n, \end{cases} \quad (29.11)$$

де $a_{ij} = a_{ij}(x)$ – коефіцієнти при невідомих;

$q_i = q_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ – вільні члени.

Стисло її записують так:

$$y_i' + \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = q_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Якщо рівняння системи (29.11) розв'язано відносно похідних, то систему лінійних диференціальних рівнянь називають **нормальною**.

Якщо коефіцієнти системи (29.11) є сталими величинами, то таку систему називають **системою диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами**. За $q_i \equiv 0$, $i = \overline{1, n}$ систему називають **однорідною**, інакше – **неоднорідною**.

Набір функцій $\varphi_j = \varphi_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, називають **розв'язком системи** (29.11) на інтервалі (a, b) , якщо підстановка їх у рівняння системи, замість $y_j(x)$, перетворює всі рівняння на тотожності.

Загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (29.11) називають сукупність n диференційовних функцій від незалежної змінної x , які містять n довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ – числових параметрів:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2 &= y_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n &= y_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \end{aligned} \quad (29.12)$$

і таких, що:

1) задовольняють рівняння системи (29.11) за будь-яких дійсних значень параметрів C_i , $i = \overline{1, n}$;

2) для заданих початкових умов: $y_1(x_0) = b_1$, $y_2(x_0) = b_2$, ..., $y_n(x_0) = b_n$, завжди обчислюють значення сталих (C_i , $i = \overline{1, n}$), які визначають розв'язок системи, що задовольняє початкові умови.

Розв'язок системи, отриманий із загального розв'язку за фіксованих значень параметрів $C_1, C_2, \dots, C_n$, називають **частинним**.

Під задачею Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь розуміють знаходження такого частинного розв'язку системи (29.11), який задовольняє початкові умови: $y_1(x_0) = b_1$, $y_2(x_0) = b_2$, ..., $y_n(x_0) = b_n$.

Одним зі способів розв'язання системи є *метод виключення*, зміст якого полягає у зведенні системи n диференціальних рівнянь 1-го порядку до одного диференціального рівняння n -го порядку відносно однієї з невідомих функцій. Маючи в розпорядженні розв'язок цього рівняння, знаходять інші невідомі функції.



Покажімо реалізацію методу виключення на прикладі однорідної нормальної системи двох лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z, \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z. \end{cases}$$

Знаходьмо другу похідну функції $y = y(x)$ із *першого* рівняння:

$$y'' = 5y' + 4z'.$$

Підставляймо в отримане рівняння вираз для z' із *другого* рівняння системи:

$$y'' = 5y' + 4(4y + 5z) \Rightarrow y'' = 5y' + 16y + 20z.$$

Виключаймо функцію $z = z(x)$, обчислюючи її через y і y' із *першого* рівняння:

$$y'' = 5y' + 16y + 20z \Rightarrow \left| z = \frac{1}{4}(y' - 5y) \right| \Rightarrow \\ \Rightarrow y'' = 5y' + 16y + 5(y' - 5y) \Rightarrow y'' - 10y' + 9y = 0,$$

і приходьмо до однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $y = y(x)$ (див. п. 28).

Розв'язуймо отримане рівняння, для чого:

складаймо і розв'язуймо його характеристичне рівняння:

$$k^2 - 10k + 9 = 0 \Rightarrow (k_1 = 1, k_2 = 9);$$

записуймо загальний розв'язок як лінійну комбінацію функцій фундаментальної системи розв'язків:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

Знаходьмо $z = z(x)$, для чого здиференціюймо функцію $y = y(x)$ і підставляймо в перше рівняння системи y та y' :

$$y' = C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} \Rightarrow \left| z = \frac{1}{4}(y' - 5y) \right| \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \frac{1}{4}(C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} - 5C_1 e^x - 5C_2 e^{9x}) \Rightarrow z = C_2 e^{9x} - C_1 e^x.$$

Записуймо загальний розв'язок заданої системи таких диференціальних рівнянь:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \quad z = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

Розв'язування системи можна було б починати зі знаходження функції $z = z(x)$, диференціюючи не перше, а друге рівняння системи.

У прикладних задачах часто невідомі функції є функціями часу t : $y_j = y_j(t)$; їхні похідні за змінною t позначають через $\dot{y}_j$.

Щодо однорідних нормальних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\dot{y}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} y_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (29.13)$$

розгляньмо так званий *алгебраїчний метод* розв'язання, або *метод Ейлера*.

Нехай задано однорідну нормальну систему лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку:

[illegible]

де a_{ij} – сталі величини;

$$y_i = y_i(t) - \text{невідомі функції } (i, j = \overline{1, n}).$$

Систему (29.14) зручно стисло записувати у вигляді матричного рівняння:

$$\dot{Y} = A \cdot Y.$$

де

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Зміст методу Ейлера полягає в такому: частинні розв'язки системи знаходять у вигляді сукупності показникових функцій:

$$y_1 = \alpha_1 e^{kt}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{kt}, \dots, \quad y_n = \alpha_n e^{kt},$$

де k, α_i ($i = \overline{1, n}$) – невизначені сталі, які підбирають так, щоб функції $\varphi_i(t) = \alpha_i e^{kt}$ задавали розв’язок системи рівнянь.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n:$$

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 &+ \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 &+(a_{22}-k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \\ a_{n1}\alpha_1 &+ a_{n2}\alpha_2 &+ \dots + (a_{nn}-k)\alpha_n = 0, \end{cases} \quad (29.15)$$

13 ВИЗНАЧНИКОМ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11-k} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22-k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-k} \end{vmatrix}. \quad (29.16)$$

рівнює нулю.

Отже, для визначення k приходьмо до алгебраїчного рівняння n -го степеня:

$$\begin{vmatrix} a_{11-k} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22-k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-k} \end{vmatrix} = 0. \quad (29.17)$$

ціальних рівнянь, його корені – коренями характеристичного рівняння.

Розгляньмо випадок дійсних і різних коренів рівняння (29.17).

коефіцієнти $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}$. Оскільки ранг матриці системи дорівнює $(n-1)$,

то один із коефіцієнтів можна вибрати довільно. Зазвичай його беруть рівним одиниці.

Після розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (29.15) дістаємо частинні розв'язки системи таких диференціальних рівнянь:

для k_1 :

$$y_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, y_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t}, \dots, y_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t};$$

для k_2 :

$$y_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, y_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t}, \dots, y_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$

.....

для k_n :

$$y_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, y_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \dots, y_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}.$$

Сукупність (систему) n -х частинних розв'язків:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)}(t), & y_1^{(2)}(t), & ..., & y_1^{(n)}(t), \\ y_2^{(1)}(t), & y_2^{(2)}(t), & ..., & y_2^{(n)}(t), \\ \\ y_n^{(1)}(t), & y_n^{(2)}(t), & ..., & y_n^{(n)}(t), \end{bmatrix}$$

називають **фундаментальною системою розв’язків** на інтервалі (a, b) , якщо $\forall t \in (a, b)$ відповідний визначник не дорівнює нулю:

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(t) & y_1^{(2)}(t) & \dots & y_1^{(n)}(t) \\ y_2^{(1)}(t) & y_2^{(2)}(t) & \dots & y_2^{(n)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)}(t) & y_n^{(2)}(t) & \dots & y_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Відповідно, загальний розв'язок системи (29.14) має такий вигляд:

$$y_j(t) = C_1 \alpha_j^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_j^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_j^{(n)} e^{k_n t}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (29.18)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі.



Покажімо реалізацію методу Ейлера на прикладі однорідної нормальної системи двох лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

У матричній формі $\dot{Y} = A \cdot Y$, система має такий вигляд ($n = 2$):

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Складаймо характеристичне рівняння (29.17) і розв'язуймо його:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 - k & 1 \\ 3 & 4 - k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 - k)(4 - k) - 3 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow k^2 - 6k + 5 = 0 \Rightarrow (k_1 = 1, k_2 = 5).$$

Розв'язуймо систему таких алгебраїчних рівнянь (29.15)

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

для кожного значення k і запишемо відповідні частинні розв'язки системи:

$$k_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0, \\ 3\alpha_1^{(1)} + 3\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha_1^{(1)} = -\alpha_2^{(1)}) \Rightarrow | \text{покладемо } \alpha_2^{(1)} = 1 | \Rightarrow \\ \Rightarrow (\alpha_1^{(1)} = -1, \alpha_2^{(1)} = 1) \Rightarrow (y_1^{(1)} = -e^t, y_2^{(1)} = e^t);$$

$$k_2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} = 0, \\ 3\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow (3\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}) \Rightarrow | \text{покладаймо } \alpha_1^{(2)} = 1 | \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha_1^{(2)} = 1, \alpha_2^{(2)} = 3) \Rightarrow (y_1^{(2)} = e^{5t}, y_2^{(2)} = 3e^{5t}).$$

Записуємо таку фундаментальну систему розв'язків:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)}(t), & y_1^{(2)}(t), \\ y_2^{(1)}(t), & y_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1^{(1)} = -e^t, & y_1^{(2)} = e^{5t}, \\ y_2^{(1)} = e^t, & y_2^{(2)} = 3e^{5t} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -e^t, & e^{5t}, \\ e^t, & 3e^{5t} \end{bmatrix}$$

і їхню лінійну комбінацію для функцій кожного рядка:

$$y_1 = -C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \quad y_2 = C_1 e^t + 3C_2 e^{5t},$$

отримуючи таким способом **загальний розв'язок** заданої системи.

Для неоднорідної нормальної системи таких рівнянь:

$$y_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (29.19)$$

або в матричній формі:

$$\dot{Y} = A \cdot Y + Q,$$

де $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ – матриця вільних членів (відомих функцій) $q_i(t)$,

а структура загального розв'язку системи така сама, як і для одного неоднорідного рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами (29.1):

$$Y = \bar{Y} + \tilde{Y},$$

де $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T$ – матриця загального розв'язку відповідної однорідної системи рівнянь;

$\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)^T$ – матриця будь-якого частинного розв'язку неоднорідної системи рівнянь.

Якщо функції $\bar{y}_i = \bar{y}_i(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$ знайдено, то для знаходження час-

[illegible]



Ключові терміни

Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами; відповідне однорідне лінійне диференціальне рівняння; спеціальна права частина; метод варіації довільних сталих, якщо права частина неоднорідного диференціального лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами не є спеціальною функцією; метод невизначених коефіцієнтів; метод Лагранжа; нормальна система лінійних диференціальних рівнянь; однорідна система лінійних диференціальних рівнянь; неоднорідна система лінійних диференціальних рівнянь; загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь; задача Коші для системи диференціальних рівнянь; метод виключення; алгебраїчний метод розв'язання (метод Ейлера); характеристичне рівняння системи диференціальних рівнянь; фундаментальна система розв'язків.



Запитання для самоперевірки

1. Який загальний вигляд має неоднорідне лінійне диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами?
2. Як формулюють теорему про структуру загального розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння n -го порядку?
3. Який загальний вигляд має неоднорідне лінійне рівняння n -го порядку зі спеціальною правою частиною?

4. Як називають метод, що допомагає знайти значення коефіцієнтів многочленів для частинного розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння n -го порядку?

5. Який вигляд має частинний розв'язок рівняння з такими правими частинами: а) $e^{ax}P_n(x)$; б) $P_0 \cos bx + Q_0 \sin bx$; в) $e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx)$?

6. У чому полягає метод варіації довільних сталих, якщо права частина неоднорідного диференціального лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами не є спеціальною функцією?

7. У чому полягає знаходження частинного розв'язку неоднорідного лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами за методом Лагранжа?

8. Що називають системою n -х лінійних диференціальних рівнянь?

9. Яку систему n -х лінійних диференціальних рівнянь із n -ми невідомими функціями називають нормальною?

10. Яку систему n -х лінійних диференціальних рівнянь із n -ми невідомими називають однорідною (неоднорідною)?

11. Що таке «розв'язок», «загальний розв'язок», «частинний розв'язок» системи лінійних диференціальних рівнянь, «початкові умови», «задача Коші»?

12. У чому полягають метод виключення й алгебраїчний метод (метод Ейлера) розв'язання однорідних систем лінійних диференціальних рівнянь?

13. Яку структуру має загальний розв'язок неоднорідної системи диференціальних рівнянь?

14. Яке рівняння називають характеристичним рівнянням системи диференціальних рівнянь?

15. Сукупність яких розв'язків називають фундаментальною системою розв'язків на інтервалі (a, b) ?



Тестові завдання до підрозділу 29

1. Яку умову виконано щодо степенів поліномів $U_k(x), V_k(x)$ для частинного розв'язку $\tilde{y}(x) = x^r e^{ax}(U_k(x)\cos bx + V_k(x)\sin bx)$ неоднорідного диференціального рівняння $y'' + py' + qy = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$:

а) $k = \min\{n, m\}$; б) $k = \max\{n+1, m+1\}$;

в) $k = n + m - 1$; г) $k = \max\{n, m\}$?

2. Частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 6y' + 5y = xe^{3x}$ має такий вигляд:

а) $y = Ae^{3x}$; б) $y = (Ax + B)e^{3x}$; в) $y = (Ax + B)xe^{3x}$; г) $y = Axe^{3x}$.

3. Які умови щодо значень числових параметрів a, b задовольняє частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння $y'' + 4y' - 5y = 2x$:

а) $a = b = 0$; б) $a \neq 0, b = 0$; в) $a \neq 0, b \neq 0$; г) $a = 0, b \neq 0$?

4. Частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ має такий вигляд:

а) $y = (Ax + B)e^{2x}$; б) $y = Axe^{2x}$; в) $y = (Ax + B)xe^{2x}$; г) $y = Ae^{2x}$.

5. Яка умова визначає число r для частинного розв'язку $\tilde{y}(x) = x^r e^{ax} (U_k(x) \cos bx + V_k(x) \sin bx)$ неоднорідного диференціального рівняння $y'' + py' + qy = e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$:

- а) число r – максимальне значення степеня поліномів $P_n(x), Q_m(x)$;
- б) число r – кратність кореня $a + bi$ характеристичного рівняння;
- в) число r – сума степенів поліномів $P_n(x), Q_m(x)$;
- г) число r – мінімальне значення степеня поліномів $P_n(x), Q_m(x)$?

6. Який вплив має корінь $a + bi$ характеристичного рівняння на число r для частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку:

- а) якщо $a + bi \neq k_1$ і $a + bi \neq k_2$, тоді $r = 0$;
- б) якщо $a + bi = k_1$ або $a + bi = k_2$, тоді $r = 1$;
- в) якщо $a + bi = k_1 = k_2 = k$, тоді $r = 2$;
- г) усі відповіді є правильними?

7. Розташуйте правильно послідовність кроків щодо алгоритму знаходження розв'язку неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами (1 – знаходьмо будь-який частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння; 2 – розв'яжимо задачу Коші в разі задання початкових умов; 3 – запишимо суму знайдених раніше розв'язків

і отримуймо загальний розв'язок неоднорідного рівняння; 4 – розв'язуймо відповідне заданому однорідне диференціальне рівняння, знаходячи його загальний розв'язок):

а) 4 – 1 – 3 – 2; б) 1 – 2 – 3 – 4; в) 4 – 1 – 2 – 3; г) 1 – 3 – 4 – 2.

8. Виберіть вигляд однорідної нормальної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

а) $y'_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = 0, i = \overline{1, n};$ б) $y'_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = q_i, i = \overline{1, n};$

в) $y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, i = \overline{1, n};$ г) $y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + q_i, i = \overline{1, n}.$

9. Характеристичне рівняння системи диференціальних рівнянь має такий вигляд:

а) $\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}-k & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-k & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0;$ б) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} - k \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-k & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0;$

в) $\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} - k & \dots & a_{1n} - k \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0;$ г) $\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0.$

10. У чому полягає метод виключення під час розв'язання однорідних нормальних систем диференціальних рівнянь:

а) у зведенні системи рівнянь до одного диференціального рівняння вищого порядку;

б) у знаходженні загального розв'язку системи рівнянь, використовуючи матриці;

в) у зведенні системи рівнянь до одного диференціального рівняння нижчого порядку;

г) у розв'язанні кожного диференціального рівняння системи окремо від іншого?

Література: [1 – 5; 7; 10; 13; 14; 17; 19 – 21].

30. Лінійні різницеві рівняння

Основні питання:

- 30.1. Основні поняття та означення.
- 30.2. Лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами.
- 30.3. Однорідні лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами.
- 30.4. Неоднорідні лінійні різницеві рівняння зі спеціальною правою частиною.
- 30.5. Системи лінійних різницевих рівнянь.

30.1. Основні поняття та означення

У задачах економічного змісту часто виникає потреба в дослідженні функцій неперервного аргументу на дискретній множині точок.

Нехай функцію $Y = Y(x)$, яка визначена на $\mathbf{R}$, вивчають на дискретній множині *рівновіддалених* значень аргументу x :

$$x = x_n = x_0 + nh,$$

де x_0 – фіксоване значення аргументу;

n – допоміжна цілочислова змінна ($n \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$);

$h = \Delta x > 0$ – стала (фіксований приріст аргументу в точці x_0).

Оскільки між точками $x_n = x_0 + nh$ і змінною n існує взаємно однозначна відповідність, то можна завжди перейти від функції неперервного аргументу $Y = Y(x)$ до функції цілочислового аргументу – $y(n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Наприклад, для функції $Y = x^2$ маємо:

$$Y(x) = Y(x_0 + nh) = (x_0 + nh)^2 = x_0^2 + 2x_0nh + h^2n^2 = an^2 + bn + c = y(n),$$

де $a = h^2$, $b = 2x_0h$, $c = x_0^2$.

Отже, вивчення функції на дискретній множині точок зводять до вивчення послідовності $y(n) = y_n = f(n)$ – функції цілочислової змінної.

У разі зміни n на $\pm k$, $k \in \mathbf{N}$, значення x_n змінюються на $\pm kh$:

$$(x_n = x_0 + nh, x_{n \pm k} = x_0 + (n \pm k)h) \Rightarrow (x_{n \pm k} - x_n = \pm kh),$$

а як у цьому разі змінюються відповідні значення членів послідовності підлягає вивченню. В основу теорії, яка відповідає на це питання, покладено поняття «скінченна різниця».

Скінченною різницею 1-го порядку для функції $y(n)$ називають таку різницю:

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = y(n+1) - y(n).$$

Це (звичайний) приріст функції під час змінювання аргументу n на одиницю.

Скінченною різницею 2-го порядку для функції $y(n)$ називають таку різницю:

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = y(n+2) - 2y(n+1) + y(n).$$

Скінченною різницею k -го порядку для функції $y(n)$ називають таку різницю:

$$\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i y(n+k-i),$$

де C_k^i – кількість сполучень із k елементів по i , $i = \overline{0, k}$, $k \in \mathbf{N}$.

Різниці $\Delta^{k-1} y_n$ і $\Delta^{k-1} y_{n+1}$ за $k=1$, тобто $\Delta^0 y_n$ і $\Delta^0 y_{n+1}$, називають **скінченними різницями 0-го порядку**: $\Delta^0 y_n = y_n$ і $\Delta^0 y_{n+1} = y_{n+1}$. Тобто скінченна різниця 0-го порядку для функції $y(n)$ дорівнює значенню функції в точці n .

Із виразу для $\Delta^k y_n$ випливає, що для визначення скінченної різниці k -го порядку потрібно знати значення функції в $(k+1)$ точках: $y(n)$, $y(n+1)$, ..., $y(n+k)$.

Очевидно, що означення скінченних різниць є схожими з означенням похідних вищих порядків.

Розділ математики, у якому вивчають функції за дискретного змінювання аргументу, називають **численням скінченних різниць**. (У диференціальному й інтегральному численнях аргументи змінюються неперервно.)

Нехай $y = y(n)$ – функція цілочислового аргументу n ($n \in \mathbf{Z}$).

Рівняння, що пов’язує незалежну змінну n , невідому функцію $y(n)$ та її скінченні різниці $\Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y$, називають **рівнянням у скінченних різницях (різницеvim рівнянням) k -го порядку**:

$$F(n, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y) = 0, \quad (30.1)$$

де F – закон, яким пов’язані величини, що стоять під його знаком. (Порівняйте з означенням диференціальних рівнянь k -го порядку: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0$).

Зауважмо, що в економічних задачах незалежною змінною n , зазвичай, є час t , а y_t – значення залежної змінної в момент часу t .

Замінімо в різницеvому рівнянні (30.1) скінченні різниці їхніми виразами через значення невідомої функції за послідовних значень аргументу, тобто через $y_n = f(n)$, $y_{n\pm 1} = f(n \pm 1)$, $\dots$, $y_{n\pm k} = f(n \pm k)$, $k \in \mathbf{N}$.

Тоді рівняння (30.1) зводять до однієї із двох форм:

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0 \quad (30.2)$$

або

$$F(n, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}) = 0. \quad (30.3)$$

Розв’язком різницеvого рівняння називають послідовність, загальний член якої $y_n = y(n)$ під час підстановки в рівняння перетворює його на тотожність.

Розв’язок $y_n(n, C_1, C_2, \dots, C_k)$, який визначає загальний член послідовності як функцію аргументу n і містить k довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_k$, називають **загальним розв’язком різницеvого рівняння k -го порядку**, а розв’язок $y_n(n, C_1^0, C_2^0, \dots, C_k^0)$, який отримують із загального за конкретних значень довільних сталих, називають **частинним розв’язком різницеvого рівняння**.

Загальний розв’язок різницеvого рівняння, до якого входять довільні сталі $C_1, C_2, \dots, C_k$, описує нескінченну множину розв’язків цього рівняння. Для знаходження частинного розв’язку зазвичай довільні сталі визначають за допомогою k початкових умов, які для рівнянь (30.2), (30.3) задають, відповідно, у вигляді таких співвідношень:

$$y(n_0) = y_n^0, \quad y(n_0 \pm 1) = y_{n\pm 1}^0, \quad y(n_0 \pm 2) = y_{n\pm 2}^0, \quad \dots, \quad y(n_0 \pm (k-1)) = y_{n\pm(k-1)}^0.$$

Задача знаходження частинного розв'язку рівняння за заданими початковими умовами називають **задачею Коші**.

Означення основних понять щодо різницьових рівнянь (розв'язок, загальний розв'язок, частинний розв'язок, задача Коші) повторюють відповідні означення для диференціальних рівнянь (див. підрозд. 28 і 29), якщо в них словосполучення «диференціальне рівняння» замінити словосполученням «різницьове рівняння».

30.2. Лінійні різницьові рівняння зі сталими коефіцієнтами

У теорії різницьових рівнянь найбільш розвиненою є теорія *лінійних різницьових рівнянь*, зокрема, різницьових рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Різницьове рівняння такого вигляду:

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + a_{k-2} y_{n-2} + \dots + a_0 y_{n-k} = f(n) \quad (30.4)$$

або

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + a_{k-2} y_{n+k-2} + \dots + a_0 y_n = f(n), \quad (30.5)$$

де $a_i = \text{const}$, $i = \overline{0, k}$,

називають **лінійним різницьовим рівнянням k -го порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Якщо права частина рівняння дорівнює нулю ($f(n) \equiv 0$), то рівняння називають **однорідним** (або **рівнянням без правої частини**), інакше – **неоднорідним**.

Наведімо кілька відомих послідовностей, загальні члени яких є розв'язками різницьових рівнянь.



1. Розгляньмо таку арифметичну прогресію: $a, a+d, a+2d, \dots$ із першим членом $a_1 = a$ і різницею d .

За властивістю арифметичної прогресії різниця d між наступним a_{n+1} і попереднім a_n членами є величиною сталою: $a_{n+1} - a_n = \Delta a_n = d = \text{const}$, тоді:

$$a_{n+1} = a_n + d \Rightarrow a_{n+1} - a_n = d.$$

Отримане співвідношення є неоднорідним лінійним різницьовим рівнянням 1-го порядку відносно загального члена a_n як функції номера n , розв'язком його є формула загального члена $a_n = a(n) = a_1 + d(n-1)$.

Послідовність $\{a_n\}$ можна описати також однорідним лінійним різнице-
вим рівнянням, але 2-го порядку відносно загального члена a_n :

$$(a_{n+1} - a_n = d, a_{n+2} - a_{n+1} = d) \Rightarrow a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0.$$

2. Нехай маємо таку геометричну прогресію: $1, q, q^2, q^3, \dots$ із першим чле-
ном $b_1 = 1$, знаменником q . Відомою є формула її загального члена: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

За означенням геометричної прогресії кожний наступний член b_{n+1} до-
рівнює попередньому b_n , помноженому на знаменник q :

$$b_{n+1} = b_n q; b_1 = 1, n \in \mathbb{N}.$$

Записане співвідношення є однорідним лінійним різнице-
вим рівнянням 1-го порядку відносно загального члена b_n як функції номера n :

$$b_{n+1} = b_n q \Rightarrow b_{n+1} - q b_n = 0,$$

розв'язком якого є формула загального члена $b_n = b(n)$.

Якщо формально замінити в різнице-
вому рівнянні $b_n = b(n)$ на функцію
 $y = y(x)$, а $b_{n+1} = b_{n+1}(n)$ на $y' = y'(x)$, то отримаємо його неперервний аналог –
однорідне лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку: $y' - qy = 0$. Його за-
гальним розв'язком є показникова функція $y = Ce^{qx}$ (C – довільна стала); за-
гальним розв'язком різнице-
вого рівняння так само є така показникова функція:
 $b(n) = Cq^{n-1}$.

У розглянутому прикладі початкова умова: $b_1 = b(1) = 1$, звідси випливає,
що $C = 1$, тобто $b_n = q^{n-1}$.

3. Нехай до банку вкладено суму розміром X_0 під $p\%$ річних. Розмір бан-
ківського рахунку через n років за формулою складних відсотків буде таким:

$$X_n = X_0(1 + 0,01p)^n.$$

Наведена послідовність є загальним розв'язком однорідного різницевого рівняння 1-го порядку:

$$X_n - (1 + 0,01p)X_{n-1} = 0.$$

30.3. Однорідні лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами

Різницеві рівняння такого вигляду (30.4), (30.5) за $f(n) \equiv 0$

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + a_{k-2} y_{n-2} + \dots + a_0 y_{n-k} = 0 \quad (30.6)$$

або

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + a_{k-2} y_{n+k-2} + \dots + a_0 y_n = 0, \quad (30.7)$$

де $a_i - \text{const}, i = \overline{0, k}$,

називають **однорідними лінійними різницевими рівняннями k -го порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Зауважмо: якщо в диференціальному рівнянні k -го порядку маємо залежність між аргументом x , функцією $y(x)$ та її похідними $y', y'', \dots, y^{(k)}$, то в різницевих рівняннях цю залежність задано відносно цілочислової змінної n , загального члена послідовності y_n та членів послідовності $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+k}$ або $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-k}$ і потрібно визначити формулу її загального члена y_n .

Аналогію між розв'язком лінійного різницевого рівняння і розв'язком лінійного диференціального рівняння поширено й на рівняння будь-якого порядку. Водночас загальний розв'язок різницевого рівняння є лінійною комбінацією функцій дискретного аргументу – загальних членів k геометричних прогресій, тоді як для диференціального рівняння – це лінійна комбінація експонент (функцій неперервного аргументу).

Розв'язки різницевих рівнянь мають ті самі властивості, що й розв'язки лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Зокрема, *структура загального розв'язку однорідних рівнянь* (30.6), (30.7) така сама, як і в лінійних диференціальних рівнянь (див. підрозд. 28). Вона є лінійною комбінацією такої фундаментальної системи розв'язків:

$$y(n) = \sum_{i=1}^k C_i y_i(n), \quad (30.8)$$

де C_i – довільні сталі;

$y_i(n)$ – частинні лінійно незалежні розв'язки.

Розглянемо найпростіші різницеві рівняння.

Однорідні лінійні різницеві рівняння 1-го порядку:

$$y_n + ay_{n-1} = 0, \quad a - \text{стала.} \quad (30.9)$$

Будемо шукати його розв'язок у вигляді такої показникової функції:

$$y(n) = \mu^n, \quad \mu \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (30.10)$$

Підставмо $y_n = \mu^n$ і $y_{n-1} = \mu^{n-1}$ в задане рівняння:

$$y_n + ay_{n-1} = 0 \Rightarrow \mu^n + a\mu^{n-1} = 0 \Rightarrow \mu^{n-1}(\mu + a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu + a = 0 \Rightarrow \mu = -a \Rightarrow y(n) = (-a)^n - \text{розв'язок рівняння.}$$

За теоремою 28.1 (у термінах різницевого рівняння), якщо функція $y_1(n)$ є розв'язком рівняння, то й функція $y(n) = Cy_1(n)$, де C – довільна стала, теж буде розв'язком цього рівняння.

Отже, маємо:

$$y(n, C) = C(-a)^n - \text{загальний розв'язок рівняння,} \quad (30.11)$$

де C – довільна стала, значення якої визначають, якщо задано таку початкову умову: $y(n_0) = y_n^0$.

Однорідні лінійні різницеві рівняння 2-го порядку:

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0, \quad p, q - \text{сталі} \quad (30.12)$$

(позначення коефіцієнтів такі самі, як і в диференціальних рівняннях 2-го порядку).

Частинні розв'язки рівняння (30.12) шукаймо у вигляді показникової функції $y(n) = \mu^n$, де $\mu \neq 0$, $n \in \mathbf{Z}$, тоді:

$$\begin{cases} y_{n+2} = \mu^{n+2}, \\ y_{n+1} = \mu^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \mu^{n+2} + p\mu^{n+1} + q\mu^n = 0 \Rightarrow \mu^2 + p\mu + q = 0.$$

Квадратне рівняння відносно μ :

$$\mu^2 + p\mu + q = 0, \quad (30.13)$$

називають **характеристичним** або **мультиплікаторним рівнянням** різнищевих рівняння 2-го порядку.

Залежно від дискримінанта $D = p^2 - 4q$ характеристичного рівняння, як і для диференціальних рівнянь, розрізняють три випадки. Розгляньмо кожний із них і наведемо ілюстративні приклади.

1. Корені характеристичного рівняння є дійсними й різними ($D > 0$):

$\mu_1 \neq \mu_2$ ($\mu_{1,2} \in \mathbf{R}$) $\Rightarrow (y_1(n) = \mu_1^n, y_2(n) = \mu_2^n)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки $\Rightarrow y(n) = C_1\mu_1^n + C_2\mu_2^n$ – загальний розв'язок рівняння.



Знайдімо загальний розв'язок такого однорідного різнищевих рівняння:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0.$$

Складаймо характеристичне рівняння і розв'язуймо його:

$$\mu^2 - 5\mu + 6 = 0 \Rightarrow (\mu_1 = 2, \mu_2 = 3).$$

Випишимо лінійно незалежні частинні розв'язки: $y_1(n) = 2^n$, $y_2(n) = 3^n$, утворимо їхню лінійну комбінацію й отримуймо загальний розв'язок:

$$y_n = y(n) = C_1 2^n + C_2 3^n.$$

2. Корені характеристичного рівняння є дійсними й рівними ($D = 0$):

$\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ($\mu \in \mathbf{R}$) $\Rightarrow (y_1(n) = \mu^n, y_2(n) = n\mu^n)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки $\Rightarrow y(n) = \mu^n(C_1 + C_2 n)$ – загальний розв'язок рівняння.



Розв'яжімо задачу Коші для такого однорідного різницевого рівняння:

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0; \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 9.$$

Знаходьмо загальний розв'язок:

$$\begin{aligned} \mu^2 - 6\mu + 9 = 0 &\Rightarrow (\mu_1 = \mu_2 = \mu = 3) \Rightarrow \\ \Rightarrow (y_1(n) = 3^n, y_2(n) = n \cdot 3^n) &\Rightarrow y_n = y(n) = 3^n (C_1 + C_2 n). \end{aligned}$$

За початковими умовами визначаймо значення сталих C_1, C_2 :

$$\begin{cases} y(n) = 3^n (C_1 + C_2 n), \\ y(n+1) = 3^{n+1} (C_1 + C_2 (n+1)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1) = 3, \\ y(2) = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші має такий вигляд:

$$y_n = y(n) = 3^n.$$

3. Корені характеристичного рівняння є комплексно-спряженими ($D < 0$):

$$\mu_{1,2} = \alpha \pm \beta i \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \beta / \alpha \end{cases} \Rightarrow (y_1(n) = \rho^n \cos \varphi n, y_2(n) = \rho^n \sin \varphi n) -$$

лінійно незалежні частинні розв'язки $\Rightarrow y(n) = \rho^n (C_1 \cos \varphi n + C_2 \sin \varphi n)$ – загальний розв'язок рівняння.

Тут число $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ – так званий *модуль* комплексного числа; кут φ – *головне значення аргументу* комплексного числа $\alpha + \beta i$, яке обчислюють за такими формулами:

$$\varphi = \begin{cases} \arctg(\beta/\alpha), & \text{якщо } \alpha > 0; \\ \arctg(\beta/\alpha) + \pi, & \text{якщо } \alpha < 0, \beta \geq 0; \\ \arctg(\beta/\alpha) - \pi, & \text{якщо } \alpha < 0, \beta < 0; \\ \pi/2, & \text{якщо } \alpha = 0, \beta > 0; \\ -\pi/2, & \text{якщо } \alpha = 0, \beta < 0. \end{cases} \quad (30.14)$$



Знайдімо загальний розв'язок різницевого рівняння і розв'яжімо задачу

Коші:

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + 4y_n = 0: y(-1) = 0, y(0) = 1.$$

Характеристичне рівняння $\mu^2 + 2\mu + 4 = 0$ має такі корені: $\mu_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3} \cdot i$.

Звідси $\alpha = -1$, $\beta = \sqrt{3}$.

Обчислюймо ρ і φ : $\rho = 2$; оскільки $\alpha < 0$, а $\beta > 0$, то користуймося формулою $\varphi = \arctg(\beta/\alpha) + \pi$: $\varphi = \arctg(-\sqrt{3}) + \pi = 2\pi/3$.

Із частинних лінійно незалежних розв'язків будуймо загальний розв'язок:

$$\left(y_1(n) = 2^n \cos \frac{2\pi}{3} n, y_2(n) = 2^n \sin \frac{2\pi}{3} n \right) \Rightarrow y(n) = 2^n \left(C_1 \cos \frac{2}{3} \pi n + C_2 \sin \frac{2}{3} \pi n \right).$$

За початковими умовами визначаймо вартості сталих C_1, C_2 :

$$\begin{cases} y(n) = 2^n \left(C_1 \cos \frac{2}{3} \pi n + C_2 \sin \frac{2}{3} \pi n \right), \\ y(n+1) = 2^{n+1} \left(C_1 \cos \frac{2}{3} \pi (n+1) + C_2 \sin \frac{2}{3} \pi (n+1) \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} y(-1) = 0, \\ y(0) = 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + \sqrt{3} C_2 = 0, \\ C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1/\sqrt{3}. \end{cases}$$

Розв'язком задачі Коші є така послідовність:

$$y_n = y(n) = 2^n \left(\cos \frac{2}{3} \pi n - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2}{3} \pi n \right).$$

Розглянутий раніше підхід до розв'язання однорідних лінійних різнице-
вих рівнянь 1-го і 2-го порядку узагальнено на *однорідні лінійні різнице-
ві рівняння довільного порядку*: $k > 2$ (30.6), (30.7).

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді такої послідовності:

$$y_n = \mu^n,$$

де μ стале число, яке підлягає визначенню ($\mu \neq 0, n \in \mathbf{Z}$).

Якщо підставити $y_n = \mu^n$ в рівняння (30.6) або (30.7), то отримаємо:

$$a_k \mu^n + a_{k-1} \mu^{n-1} + a_{k-2} \mu^{n-2} + \dots + a_0 \mu^{n-k} = 0$$

або після скорочення на $\mu^{n-k} \neq 0$:

$$a_k \mu^k + a_{k-1} \mu^{k-1} + a_{k-2} \mu^{k-2} + \dots + a_0 = 0. \quad (30.15)$$

Отримане рівняння називають **характеристичним рівнянням** або **мультиплікаторним** для цього різницевого. Його складають аналогічно тому, як це робили під час розгляду лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Отже, задачу знаходження розв'язку різницевого рівняння зводять до розв'язання алгебраїчного рівняння k -го степеня відносно μ і побудови фундаментальної системи розв'язків.

Тоді загальний розв'язок є лінійною комбінацією таких лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння:

$$y(n) = \sum_{i=1}^k C_i y_i(n).$$

Під час розв'язання характеристичного рівняння (30.15) можливі такі випадки: а) усі корені є дійсними та різними; б) корені є дійсними, але серед них є кратні; в) серед коренів є комплексно-спряжені.

Наприклад, якщо характеристичне рівняння має різні корені, то загальний розв'язок різницевого рівняння шукають у такому вигляді:

$$y_n = C_1 \mu_1^n + C_2 \mu_2^n + \dots + C_k \mu_k^n, \quad (30.16)$$

де $\mu_1^n, \mu_2^n, \dots, \mu_k^n$ – лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння. (Щодо побудови фундаментальної системи розв'язків див. п. 28.4).

30.4. Неоднорідні лінійні різницеві рівняння зі спеціальною правою частиною

Різницеві рівняння такого вигляду:

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + a_{k-2} y_{n-2} + \dots + a_0 y_{n-k} = f(n) \quad (30.17)$$

або

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + a_{k-2} y_{n+k-2} + \dots + a_0 y_n = f(n), \quad (30.18)$$

де $a_i - \text{const}$, $i = \overline{0, k}$;

$f(n)$ є окремим випадком спеціальної правої частини за $\varphi = 0$,

називають **неоднорідними лінійними різницевими рівняннями k -го порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Структура загального розв'язку різницевих рівнянь (30.17) і (30.18) така сама, як і в неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь (див. підрозд. 29):

$$y(n) = \bar{y}(n) + \tilde{y}(n), \quad (30.19)$$

де $\bar{y}(n)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (без правої частини);

$\tilde{y}(n)$ – будь-який частинний розв'язок цього неоднорідного рівняння.

Неоднорідним лінійним різницеvim рівнянням k -го порядку зі спеціальною правою частиною називають рівняння, у якого функція $f(n)$ має такий вигляд:

$$f(n) = \rho^n (P_l(n) \cos \varphi n + Q_s(n) \sin \varphi n), \quad (30.20)$$

де φ, ρ ($\rho > 0$) – дійсні сталі;

$P_l(n), Q_s(n)$ – поліноми степеня l і s , відповідно.

Частинний розв'язок рівняння може бути знайденим у такому вигляді:

$$\tilde{y}(n) = n^r \rho^n (U_m(n) \cos \varphi n + V_m(n) \sin \varphi n),$$

де $U_m(n), V_m(n)$ – поліноми степеня $m = \max\{l, s\}$, а число r показує, скільки існує коренів характеристичного рівняння: $\alpha + \beta i$, таких, що числа ρ і φ (див. (30.14)) збігаються з параметрами ρ і φ правої частини рівняння.

Розгляньмо детальніше таке неоднорідне різницеве рівняння 2-го порядку:

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = \rho^n P_l(n). \quad (30.21)$$

1. Стала ρ не є коренем характеристичного рівняння: $\mu_1 \neq \rho$, $\mu_2 \neq \rho$.

Тоді частинний розв'язок має такий вигляд:

$$\tilde{y}_n = \rho^n U_m(n). \quad (30.22)$$

2. Стала ρ є одним із коренів характеристичного рівняння: $\mu_1 = \rho$ або $\mu_2 = \rho$.

Відповідний частинний розв'язок буде таким:

$$\tilde{y}_n = n\rho^n U_m(n). \quad (30.23)$$

3. Стала ρ є кратним коренем характеристичного рівняння: $\mu_1 = \mu_2 = \rho$.

Тоді

$$\tilde{y}_n = n^2 \rho^n U_m(n). \quad (30.24)$$



Знайдімо загальний розв'язок такого різницевого рівняння:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 3,$$

відповідне однорідне рівняння якого вже розв'язували (див. п. 30.3):

$$\mu^2 - 5\mu + 6 = 0 \Rightarrow (\mu_1 = 2, \mu_2 = 3) \Rightarrow \bar{y}_n = C_1 2^n + C_2 3^n.$$

Права частина рівняння є многочленом нульового степеня: $P_0(n) = 3$, а $\rho^n = 1$ і $\mu_1 \neq \rho = 1 \neq \mu_2$.

Отже, частинний розв'язок шукаймо у вигляді:

$$\tilde{y}_n = U_0(n) = A,$$

де A – стала, яку потрібно визначити за умови, що вона є розв'язком рівняння.

Якщо $\tilde{y}_n = A$, то $\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_{n+2} = A$.

Підставмо тепер $\tilde{y}_n$, $\tilde{y}_{n+1}$, $\tilde{y}_{n+2}$ в початкове рівняння й отримаємо значення A :

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 3 \Rightarrow A - 5A + 6A = 3 \Rightarrow A = 1,5.$$

Отже, загальним розв'язком початкового різницевого рівняння є така послідовність:

$$y_n = C_1 2^n + C_2 3^n + 1,5.$$



Знайдімо загальний розв'язок такого рівняння:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2^n(n-2).$$

Оскільки його ліва частина збігається з лівою частиною рівняння в попередньому прикладі, то загальний розв'язок однорідного рівняння нам уже є відомим:

$$\bar{y}_n = C_1 2^n + C_2 3^n.$$

У правій частині $\rho = 2 = \mu_1$, тоді $r = 1$ і частинний розв'язок неоднорідного рівняння знаходьмо в такому вигляді:

$$\tilde{y}_n = (An + B) \cdot n \cdot 2^n.$$

Визначмо коефіцієнти A і B , для чого за $\tilde{y}_n$ знайдемо $\tilde{y}_{n+1}$, $\tilde{y}_{n+2}$:

$$\tilde{y}_{n+1} = (A(n+1) + B) \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1} = (A(n+1)^2 + B(n+1)) \cdot 2^{n+1},$$

$$\tilde{y}_{n+2} = (A(n+2) + B) \cdot (n+2) \cdot 2^{n+2} = (A(n+2)^2 + B(n+2)) \cdot 2^{n+2}$$

і підставмо їх у початкове рівняння:

$$2^{n+2} \left(A(n+2)^2 + B(n+2) \right) - \left(5A(n+1)^2 + 5B(n+1) \right) \cdot 2^{n+1} + \\ + 2^n \left(An^2 + Bn \right) 6 = 2^n (n-2).$$

Скоротімо обидві частини на 2^n , розкриймо дужки та прирівняймо коефіцієнти при однакових степенях n у лівій і правій частинах рівняння:

$$\begin{array}{l|l} n^2 & 4A - 10A + 6A = 0, \\ n & 16A + 4B - 20A - 10B + 6B = 1, \\ n^0 & 16A + 8B - 10A - 10B = -2. \end{array}$$

Розв'язуймо отриману систему рівнянь:

$$\begin{cases} -4A = 1, \\ 3A - B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/4, \\ B = 1/4. \end{cases}$$

Отже, загальним розв'язком неоднорідного лінійного різницевого рівняння є така послідовність із загальним членом:

$$y_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}n^2 \right) \cdot 2^n.$$



Знайдімо загальний член послідовності, яка задовольняє таке рівняння:

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n.$$

Характеристичне рівняння відповідного йому однорідного рівняння $\mu^2 - 4\mu + 4 = 0$ має рівні корені: $\mu_1 = \mu_2 = 2$, отже, загальним розв'язком однорідного рівняння є така послідовність:

$$\bar{y}_n = 2^n (C_1 + C_2 n).$$

Права частина рівняння має такий вигляд:

$$f(n) = \rho^n P_0(n) = 2^n P_0(n),$$

а $\rho=2$ є двократним коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаймо в такому вигляді:

$$\tilde{y}_n = An^2 \cdot 2^n.$$

Знаходимо сталу A підстановкою $\tilde{y}_n, \tilde{y}_{n+1}, \tilde{y}_{n+2}$ в початкове рівняння:

$$A(n+2)^2 \cdot 2^{n+2} - 4A(n+1)^2 \cdot 2^{n+1} + 4An^2 \cdot 2^n = 2^n \Rightarrow A = \frac{1}{8}.$$

Отже, загальним розв'язком рівняння є така послідовність:

$$y_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n + \frac{1}{8} n^2 2^n.$$

30.5. Системи лінійних різницевих рівнянь

Системою лінійних різницьових рівнянь зі сталими коефіцієнтами **k -го порядку** називають сукупність k лінійних різницьових рівнянь 1-го порядку з k невідомими послідовностями $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(k)}$:

[illegible]

де a_{ij} – сталі, які називають **коефіцієнтами системи** ($i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k}$);

$q_i(n)$ ($i = \overline{1, k}$) – **вільні члени**, які є функціями натурального аргументу n .

Якщо всі $q_i(n) \equiv 0$ ($i = \overline{1, k}$), то систему (30.25) називають **однорідною**.

Порівнюючи систему різницевих рівнянь із системою диференціальних рівнянь (29.11), переконуймося у їхній структурній аналогії.

Розв'язком системи (30.25) на множині натуральних чисел називають сукупність послідовностей $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(k)}$, підстановка яких у систему перетворює кожне рівняння на тотожність.

Загальним розв’язком системи на множині натуральних чисел називають сукупність послідовностей $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(k)}$, загальні члени яких містять k довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_k$:

[illegible]

і ТАКИХ, ЩО:

- 1) задовольняють систему за будь-яких значень $C_1, C_2, \dots, C_k$;

- 2) для довільних початкових умов $y_0^{(1)} = b_1, y_0^{(2)} = b_2, \dots, y_0^{(k)} = b_k$ існує набір сталих $C_{10}, C_{20}, \dots, C_{k0}$, за яких розв'язок системи задовольняє задані початкові умови.

Частинним розв’язком системи на множині натуральних чисел називають сукупність послідовностей $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(k)}$, яку отримують із загального розв’язку за фіксованих значень параметрів $C_j, j = \overline{1, k}$.

Задачу знаходження частинного розв'язку системи за заданими початковими умовами $y_0^{(1)} = b_1, y_0^{(2)} = b_2, \dots, y_0^{(k)} = b_k$ називають **задачею Коші**.

Розв'язок системи можна знайти *методом виключення*, за яким систему лінійних різницевих рівнянь k -го порядку зводять до одного лінійного різницевого рівняння k -го порядку (за аналогією з методом виключення в застосуванні до систем диференціальних рівнянь (див. підрозд. 29)).



Застосуємо метод виключення до розв'язання такої однорідної системи:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = 5y_n^{(1)} + 4y_n^{(2)}, \\ y_{n+1}^{(2)} = 4y_n^{(1)} + 5y_n^{(2)}. \end{cases}$$

Перейдімо в *першому* рівнянні до $y_{n+2}^{(1)}$, для чого замінімо номер n на $n+1$:

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 4y_{n+1}^{(2)}.$$

Ураховуючи *друге* рівняння, отримуємо:

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 4(4y_n^{(1)} + 5y_n^{(2)}) \Rightarrow y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 16y_n^{(1)} + 20y_n^{(2)}.$$

Із *першого* рівняння системи маємо $y_n^{(2)} = \frac{1}{4}(y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)})$, тоді

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 16y_n^{(1)} + 5(y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)}) \Rightarrow y_{n+2}^{(1)} - 10y_{n+1}^{(1)} + 9y_n^{(1)} = 0.$$

Отримали однорідне різницеве рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Складімо і розв'яжімо його характеристичне рівняння:

$$\mu^2 - 10\mu + 9 = 0 \Rightarrow (\mu_1 = 1, \mu_2 = 9).$$

Записуймо загальний член першої послідовності:

$$y_n^{(1)} = C_1 + C_2 9^n.$$

Далі знайдемо $y_{n+1}^{(1)}$ і, згідно з рівністю $y_n^{(2)} = \frac{1}{4}(y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)})$, отримуємо таку послідовність $y_n^{(2)}$:

$$y_{n+1}^{(1)} = C_1 + C_2 9^{n+1};$$

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{4}(C_1 + 9C_2 9^n - 5C_1 - 5C_2 9^n) \Rightarrow y_n^{(2)} = \frac{1}{4}(4C_2 9^n - 4C_1) = C_2 9^n - C_1.$$

Отже, загальним розв'язком вихідної системи є такі послідовності:

$$y_n^{(1)} = C_1 + C_2 9^n, \quad y_n^{(2)} = -C_1 + C_2 9^n.$$



Знайдімо розв'язок неоднорідної системи лінійних різницевих рівнянь

2-го порядку:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = 5y_n^{(1)} - 3y_n^{(2)} + 2 \cdot 3^n, \\ y_{n+1}^{(2)} = y_n^{(1)} + y_n^{(2)} - 5. \end{cases}$$

За *першим* рівнянням системи знаходьмо $y_{n+2}^{(1)}$:

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3y_{n+1}^{(2)} + 2 \cdot 3^{n+1}.$$

Ураховуючи *друге* рівняння, маємо:

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3(y_n^{(1)} + y_n^{(2)} - 5) + 2 \cdot 3^{n+1}$$

або

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3y_n^{(1)} - 3y_n^{(2)} + 15 + 2 \cdot 3^{n+1}.$$

Із *першого* рівняння системи отримуємо таке:

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{3}(-y_{n+1}^{(1)} + 5y_n^{(1)} + 2 \cdot 3^{n+1}),$$

тоді

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3y_n^{(1)} + y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)} - 2 \cdot 3^n + 15 + 2 \cdot 3^{n+1},$$

або

$$y_{n+2}^{(1)} = 6y_{n+1}^{(1)} - 8y_n^{(1)} + 4 \cdot 3^n + 15.$$

Отже, маємо неоднорідне різницеве рівняння 2-го порядку відносно $y_n^{(1)}$:

$$y_{n+2}^{(1)} - 6y_{n+1}^{(1)} + 8y_n^{(1)} = 4 \cdot 3^n + 15,$$

яке підлягає розв'язанню.

Знайдімо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння з характеристичним рівнянням $\mu^2 - 6\mu + 8 = 0$. Його корені: $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 4$.

Звідси загальним розв'язком однорідного рівняння є така послідовність:

$$\bar{y}_n^{(1)} = C_1 2^n + C_2 4^n.$$

Права частина рівняння – сума двох спеціальних функцій: $f_1(n) = 4 \cdot 3^n$, $f_2(n) = 15$, тому його частинний розв'язок знаходьмо як суму частинних розв'язків двох рівнянь:

$$1) \quad y_{n+2}^{(1)} - 6y_{n+1}^{(1)} + 8y_n^{(1)} = 4 \cdot 3^n;$$

$$2) \quad y_{n+2}^{(1)} - 6y_{n+1}^{(1)} + 8y_n^{(1)} = 15.$$

У першому рівнянні: $f_1(n) = 4 \cdot 3^n$, $P_0(n) = 4$, а $\mu_1 \neq \rho = 3 \neq \mu_2$, тому шукаймо частинний розв'язок у такому вигляді: $\tilde{y}_n^{(1)} = A \cdot 3^n$. Число A обчислюймо підстановкою $\tilde{y}_n^{(1)} = A \cdot 3^n$ у неоднорідне рівняння 1:

$$A \cdot 3^{n+2} - 6 \cdot A \cdot 3^{n+1} + 8 \cdot A \cdot 3^n = 4 \cdot 3^n \Rightarrow 9A - 18A + 8A = 4 \Rightarrow A = -4.$$

Отже, першим доданком частинного розв'язку неоднорідного рівняння є така послідовність: $\tilde{y}_n^{(1)} = -4 \cdot 3^n$.

У другому рівнянні: $f_2(n) = P_0(n) = 15$, а $\mu_1 \neq \rho = 1 \neq \mu_2$, тому частинним розв'язком цього рівняння є така стала: $\tilde{y}_n^{(1)} = B$.

Обчислімо її:

$$B - 6B + 8B = 15 \Rightarrow B = 5 \Rightarrow \tilde{y}_n^{(1)} = 5.$$

У результаті загальним розв'язком неоднорідного різницевого рівняння 2-го порядку відносно $y_n^{(1)}$ є така послідовність:

$$y_n^{(1)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 5.$$

Послідовність $y_n^{(2)}$ знайдемо, якщо використати перше рівняння вихідної системи різницевих рівнянь, ураховуючи визначений $y_n^{(1)}$:

$$-3y_n^{(2)} = y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)} - 2 \cdot 3^n \Rightarrow$$

$$-3y_n^{(2)} = C_1 \cdot 2^{n+1} + C_2 \cdot 4^{n+1} - 4 \cdot 3^{n+1} + 5 - 5 \cdot C_1 \cdot 2^n - 5 \cdot C_2 \cdot 4^n +$$

$\Rightarrow$

$$+ 20 \cdot 3^n - 25 - 2 \cdot 3^n = -3 \cdot C_1 \cdot 2^n - C_2 \cdot 4^n + 6 \cdot 3^n - 20.$$

Отже,

$$y_n^{(2)} = C_1 2^n + \frac{C_2}{3} 4^n - 2 \cdot 3^n + \frac{20}{3}.$$

Отож загальний розв'язок цієї неоднорідної системи рівнянь описують такими послідовностями:

$$y_n^{(1)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 5,$$

$$y_n^{(2)} = C_1 2^n + \frac{C_2}{3} 4^n - 2 \cdot 3^n + \frac{20}{3}.$$



Ключові терміни

Скінченна різниця 0, 1, 2, k -го порядку; приріст функції за змінювання аргументу; різницеве рівняння; розв'язок різницевого рівняння (загальний, частинний); задача Коші; лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами

(однорідне, неоднорідне); структура загального розв'язку однорідних (неоднорідних) рівнянь; характеристичне (мультиплікаторне) рівняння; модуль комплексного числа; головне значення аргументу комплексного числа; спеціальна права частина; система лінійних різницьових рівнянь зі сталими коефіцієнтами (однорідна, неоднорідна); розв'язок системи лінійних різницьових рівнянь (загальний, частинний); початкові умови для системи лінійних різницьових рівнянь; метод виключення.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають скінченою різницею 1, 2, k -го порядку?
2. Що називають скінченою різницею 0-го порядку?
3. Який вигляд має різницеве рівняння k -го порядку?
4. Який вигляд має лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами?
5. Що називають розв'язком різницевого рівняння?
6. Що називають загальним (частинним) розв'язком різницевого рівняння?
7. Який вигляд має однорідне лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами?
8. Яке рівняння називають характеристичним для цього різницевого і як його отримують?
9. Який вигляд має загальний розв'язок однорідного різницевого рівняння, залежно від коренів характеристичного рівняння, якщо: а) корені є дійсними та різними; б) корені є рівними; в) корені є комплексно-спряженими?
10. Що таке «модуль» і «аргумент» комплексного числа?
11. Який вигляд має структура загального розв'язку однорідного різницевого рівняння?
12. Який вигляд мають початкові умови для різницевого рівняння k -го порядку?
13. Який вигляд мають неоднорідні різницеві рівняння зі спеціальною правою частиною?
14. Який вигляд має структура загального розв'язку неоднорідного різницевого рівняння?
15. Які властивості має загальний розв'язок різницевого рівняння?

16. Який вигляд мають частинні розв'язки неоднорідного різницевого рівняння, залежно від його правої частини?
17. У яких випадках частинний розв'язок неоднорідного різницевого рівняння має вигляд полінома?
18. Як відрізняються методи розв'язування для рівнянь 1-го та 2-го порядку?
19. У чому полягає аналогія між розв'язками диференціальних і різнице-вих рівнянь?
20. Який вигляд має система лінійних різнице-вих рівнянь k -го порядку?
21. Якими співвідношеннями задають початкові умови для системи ліній-них різнице-вих рівнянь?
22. Як складають характеристичне рівняння для системи лінійних різнице-вих рівнянь?
23. Що таке «лінійна комбінація» фундаментальної системи розв'язків?
24. Який метод розв'язання систем лінійних різнице-вих рівнянь k -го по-рядку ви знаєте?
25. Яке практичне застосування мають різнице-ві рівняння в економічних задачах?



Тестові завдання до підрозділу 30

1. Скінченною різницею 1-го порядку для функції $y(n)$ називають такий вираз:
 - а) $\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$; б) $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$;
 - в) $\Delta y_n = y_{n+2} - y_n$; г) $\Delta y_n = y_{n+1} - y_{n-1}$.
2. Що означають такі величини: h , x_0 , n (1 – фіксоване значення аргумен-ту; 2 – допоміжна цілочислова змінна; 3 – фіксований приріст аргументу в точ-ці) на дискретній множині рівновіддалених значень аргументу x у такій фор-мулі: $x_n = x_0 + nh$:
 - а) 3 – 2 – 1; б) 2 – 1 – 3;
 - в) 3 – 1 – 2; г) 1 – 3 – 2?

3. Скінченною різницею 2-го порядку для функції $y(n)$ називають такий вираз:

а) $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$; б) $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_{n-1}$;

в) $\Delta^2 y_n = \Delta y_n - \Delta y_{n-1}$; г) $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+2} - \Delta y_n$.

4. Однорідним лінійним різницеvim рівнянням 1-го порядку називають рівняння такого вигляду:

а) $ay_n + y_{n-1} = 0$; б) $y_n + ay_{n-2} = 0$;

в) $ay_n + y_{n-2} = 0$; г) $y_n + ay_{n-1} = 0$.

5. Однорідним лінійним різницеvim рівнянням 2-го порядку називають рівняння такого вигляду:

а) $y_{n+2} + py_n + qy_{n-1} = 0$; б) $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$;

в) $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_{n-1} = 0$; г) $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_{n-2} = 0$.

6. Який вигляд має загальний розв'язок, якщо корені характеристичного рівняння є комплексно-спряженими ($D < 0$) для різницевого рівняння 2-го порядку:

а) $y(n) = \rho^n (C_1 \cos \varphi n + C_2 \sin \varphi n)$;

б) $y(n) = \mu^n (C_1 + C_2 n)$;

в) $y(n) = \rho^n (C_1 e^{\varphi n} + C_2 e^{-\varphi n})$;

г) $y(n) = C_1 \mu_1^n + C_2 \mu_2^n$?

7. Який вигляд має загальний розв'язок, якщо корені характеристичного рівняння є дійсними й різними ($D > 0$) для різницевого рівняння 2-го порядку:

а) $y(n) = \rho^n (C_1 \cos \varphi n + C_2 \sin \varphi n)$;

б) $y(n) = \mu^n (C_1 + C_2 n)$;

в) $y(n) = C_1 \mu_1^n + C_2 \mu_2^n$;

г) $y(n) = \rho^n (C_1 e^{\varphi n} + C_2 e^{-\varphi n})$?

8. Яку умову виконано щодо степенів поліномів $U_m(x), V_m(x)$ для частинного розв'язку $\tilde{y}(n) = n^r \rho^n (U_m(n) \cos \varphi n + V_m(n) \sin \varphi n)$ неоднорідного різницевого рівняння $y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n = \rho^n (P_l(n) \cos \varphi n + Q_s(n) \sin \varphi n)$:

- а) $k = \min\{l, s\}$; б) $k = \max\{l, s\}$;
 в) $k = \max\{l+1, s+1\}$; г) $k = l + s - 1$?

9. Який вплив стала ρ має на частинний розв'язок неоднорідного лінійного різницевого рівняння за збіжності, частинної збіжності або незбіжності з коренями характеристичного рівняння $\mu^2 + p\mu + q = 0$:

- а) якщо $\mu_1 \neq \rho$, $\mu_2 \neq \rho$, тоді $\tilde{y}_n = \rho^n U_m(n)$;
 б) якщо $\mu_1 = \rho$ або $\mu_2 = \rho$, тоді $\tilde{y}_n = n \rho^n U_m(n)$;
 в) якщо $\mu_1 = \mu_2 = \rho$, тоді $\tilde{y}_n = n^2 \rho^n U_m(n)$;
 г) усі відповіді є правильними?

10. Неоднорідна система лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами k -го порядку має такий вигляд:

- а) $y_{n+1}^{(i)} + \sum_{j=1}^k a_{ij} y_n^{(j)} = q_i(n)$, $i = \overline{1, k}$;
 б) $y_{n+1}^{(i)} + \sum_{j=1}^k a_{ij} y_n^{(j)} = 0$, $i = \overline{1, k}$;
 в) $y_{n+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^k a_{ij} y_n^{(j)} + q_i(n)$, $i = \overline{1, k}$;
 г) $y_{n+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^k a_{ij} y_n^{(j)}$, $i = \overline{1, k}$.

Література: [2; 4; 11; 13 – 14; 21].

31. Використання диференціальних і різницевих рівнянь в економічних задачах

Основні питання:

- 31.1. Відтворення загальних витрат виробництва за граничними характеристиками.
- 31.2. Знаходження функцій витрат, попиту, ціни товару за їхньою еластичністю.
- 31.3. Модель природного зростання.
- 31.4. Модель природного зростання за умови насиченості ринку.
- 31.5. Динаміка ринкових цін.
- 31.6. Використання різницевих рівнянь в економіці.

Розглянемо ряд традиційних задач, математичними моделями яких є диференціальні та різницеві рівняння.

31.1. Відтворення загальних витрат виробництва за граничними характеристиками

Серед основних видів витрат виробництва економічна теорія розглядає зокрема такі:

валові витрати (загальні витрати) як суму постійних і змінних витрат для кожного конкретного обсягу виробництва;

граничні витрати – витрати, потрібні для випуску додаткової одиниці продукції.

Знаходження за граничними витратами загальних витрат зводять до розв'язання найпростішого диференціального рівняння:

$$F'(x) = f(x), \quad (31.1)$$

тобто до знаходження первісної для заданої функції $f(x)$ за допомогою невикористаного інтегрування:

$$F(x) = \int f(x)dx + C \quad (31.2)$$

і встановлення значення довільної сталої C .



Нехай функція граничних витрат y' , залежно від обсягу виробництва x , має такий вигляд:

$$y' = 60 + 0,04x \text{ і } y(0) = 3600.$$

Визначмо функцію загальних витрат виробництва. Для цього зінтегруймо диференціальне рівняння й отримаємо множину функцій загальних витрат:

$$\int dy = \int (60 + 0,04x) dx \Rightarrow y = 60x + 0,02x^2 + C.$$

Визначмо одну з них за заданою початковою умовою – постійними витратами за нульового обсягу виробництва:

$$y(0) = 3600 \Rightarrow C = 3600 \Rightarrow y = 60x + 0,02x^2 + 3600 -$$

функція загальних витрат.



Нехай функція граничного прибутку, залежно від обсягу виробництва x , має такий вигляд:

$$R'(x) = (5 - x)e^{-\frac{x}{5}}.$$

Визначмо функцію прибутку $R(x)$ як розв'язок задачі Коші для цього диференціального рівняння. Початкова умова в таких задачах є очевидною: за $x = 0$ маємо $R(x) = 0$.

Множину первісних знаходьмо інтегруванням частинами:

$$\int (5 - x)e^{-\frac{x}{5}} dx = -5(5 - x)e^{-\frac{x}{5}} - 5 \int e^{-\frac{x}{5}} dx = -5(5 - x)e^{-\frac{x}{5}} + 25e^{-\frac{x}{5}} + C.$$

За початковою умовою $R(0) = 0$, маємо $C = 0$.

Отже, функцією прибутку, залежно від обсягу виробництва, є така функція:

$$R(x) = 5xe^{-\frac{x}{5}}.$$

31.2. Знаходження функцій витрат, попиту, ціни товару за їхньою еластичністю

Нагадаймо, що **еластичністю** функції однієї змінної $y = f(x)$ називають добуток аргументу x на темп змінювання функції y , а саме:

$$E_x(y) = x \frac{y'}{y}. \quad (31.3)$$

Якщо еластичність функції задано, то тим самим задано диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції y .

III Визначмо функцію витрат, залежно від обсягу виробництва x , якщо еластичність цієї функції є сталою величиною, тобто $E_x(y) = a - \text{const}$.

Згідно з умовою задачі та за ф-лою (31.3), маємо таке рівняння:

$$a = x \frac{y'}{y}, \text{ або } y' = \frac{ay}{x}.$$

Розв'язуймо його:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = a \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = a \int \frac{dx}{x} + \ln|C|, C \neq 0 \Rightarrow \ln|y| = a \ln|x| + \ln|C|.$$

Отже, загальним розв'язком рівняння є така функція: $y = C \cdot x^a$.

III Визначмо функцію попиту $x = x(p)$, де x – обсяг товару, p – його ціна, якщо відомо значення ціни p_0 в точці x_0 , а еластичність попиту має такий вигляд:

$$E_p(x) = \frac{x-100}{x}; \quad x_0 = 10 \text{ за } p_0 = 90.$$

Згідно з означенням (31.3), за умовою задачі маємо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{x-100}{x} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x},$$

яке є рівнянням із відокремлюваними змінними.

Треба знайти його частинний розв'язок, що задовольняє задану початкову умову: $x(p_0) = x_0$, тобто $x(90) = 10$.

Визначаймо загальний розв'язок:

$$\frac{dx}{x-100} = \frac{dp}{p} \Rightarrow \int \frac{dx}{x-100} = \int \frac{dp}{p} + \ln|C|, C \neq 0.$$

Отже, маємо:

$$\ln|x-100| = \ln|p| + \ln|C| \Rightarrow x-100 = pC.$$

Значення сталої C обчислимо за такою початковою умовою:

$$x(90) = 10 \Rightarrow 10 - 100 = 90C \Rightarrow C = -1.$$

Остаточно функція попиту, залежно від ціни товару, має такий вигляд:
 $x = 100 - p$.



Визначмо ціну p товару як функцію його обсягу x , якщо ціна одиниці товару становить $p = 18$, а еластичність ціни має такий вигляд:

$$E_x(p) = \frac{p-20}{p}.$$

Згідно з означенням (31.3), за умовою задачі маємо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{p-20}{p} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{x}{p}.$$

Знайдімо його загальний розв'язок:

$$\frac{dp}{p-20} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dp}{p-20} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|, C \neq 0.$$

Отже,

$$\ln|p-20| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow p-20 = Cx.$$

За початковою умовою ($p_0 = 18$ за $x_0 = 1$), визначаймо сталу C :

$$18-20 = C \cdot 1 \Rightarrow C = -2.$$

Ціну товару, залежно від обсягу товару, описують такою функцією:
 $p = 20 - 2x$.

31.3. Модель природного зростання

Припустімо, що функція $y = y(t)$ у точці t змінюється зі швидкістю, яка є пропорційною значенню функції в цій точці, тобто:

$$y'(t) = ky(t), \quad (31.4)$$

де $k = \text{const}$ – коефіцієнт пропорційності.

Функція $y(t)$ задовольняє диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язок якого отримуємо у вигляді загального інтеграла:

$$\int \frac{dy}{y} = k \int dt + \ln|C|, \quad C \neq 0 \Rightarrow \ln|y| = kt + \ln|C|$$

або у явному вигляді

$$y = C \cdot e^{kt}, \quad C = \text{const}. \quad (31.5)$$

Уперше це рівняння отримав Якоб Бернуллі. Його називають **рівнянням природного зростання**, що описує багато різних процесів у природі та суспільстві. В економіці цим рівнянням описують: такі процеси кредитування, випуск продукції, зростання грошового вкладу в банку, зростання чисельності населення.



Задача Бернуллі про кредитування. Нехай позичальник за користування кредитом щорічно виплачує кредиторowi відсотки $p\%$ від початкової суми X_0 .

Визначмо, скільки він має сплатити за рік за кожну одиницю позиченої суми, якщо відсотки зростають неперервно.

За умовою задачі, відсотки зростають неперервно, отже, швидкість зменшення суми боргу $y(t)$ у момент часу t є пропорційною значенню цієї величини в той саме момент часу з коефіцієнтом пропорційності $k = \frac{p}{100}$.

Звідси маємо таке рівняння:

$$y'(t) = \frac{p}{100} y(t).$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція $y(t) = C \cdot e^{\frac{p}{100}t}$. За початковою умовою задачі за $t_0 = 0$ позичена сума $y(0) = X_0$, тому $C = X_0$.

Отже, за кожну одиницю позиченої суми позичальник зобов'язаний сплачувати таку суму:

$$y(t) = X_0 e^{\frac{p}{100}t} \text{ (гр. од.)},$$

а за рік ця сума буде становити: $y(1) = X_0 e^{\frac{p}{100}}$ (гр. од.).



Модель природного зростання випуску продукції. Визначмо закон

зростання випуску продукції за умови, що ринок не насичено.

Припустімо, що деякий товар продають за ціною p , а кількість одиниць товару на момент часу t визначають як $y = y(t)$. Тоді прибуток на момент часу t становить $R(t) = p \cdot y(t)$. Якщо ринок не насичують, то підприємство впродовж деякого часу буде мати прибуток, частину якого будуть витрачати на розширення виробництва.

Нехай на інвестиції $I(t)$ у розширення виробництва витрачають m -ту частину доходу, тобто:

$$I(t) = \frac{py(t)}{m}. \quad (31.6)$$

Завдяки розширенню виробництва, зростає прибуток і його m -ту частину теж використовують на розширення випуску продукції. Це приведе до зростання швидкості випуску $y'(t)$, яка буде пропорційною підвищенню інвестицій:

$$y'(t) = aI(t), \text{ або } y'(t) = \frac{ap}{m} y(t) \quad (a - \text{const}).$$

У результаті маємо диференціальне рівняння такого вигляду (31.4), де $k = \frac{ap}{m}$, тобто рівняння природного зростання. Загальним розв'язком цього рівняння є функція $y = C \cdot e^{kt}$, що показує, як швидко зростає обсяг виробництва, якщо постійно вкладати частину прибутку у його розширення.

31.4. Модель природного зростання за умови насиченості ринку

У наведених раніше прикладах розв'язком диференціального рівняння природного зростання є функція $y(t) = C \cdot e^{kt}$, яка швидко зростає із часом t і може бути використаною тільки для обмежених проміжків часу, зазвичай, на початку виробництва нової продукції. У реальних задачах із часом ринок насичують, бо зростання кількості споживачів продукції (і чисельності населення загалом) не може бути нескінченним.

На суперечність між моделлю (31.4) – (31.5) і реальністю, що виникає на досить тривалому проміжку часу, зважають у моделі зростання, у якій коефіцієнт пропорційності k вважають функцією змінної $y(t)$. Наприклад, для зростання чисельності населення було запропоновано таку залежність

$$y'(t) = a \left(1 - \frac{y(t)}{b} \right) \cdot y(t), \quad (31.7)$$

де a і b – сталі.

Тобто, на відміну від рівняння (31.4), коефіцієнт $k = a(1 - y(t)/b)$ є спадною функцією під час зростання величини $y(t)$.

Рівняння (31.7) є диференціальним рівнянням 1-го порядку. Відокремивши в ньому змінні, знаходьмо:

$$\frac{dy}{y \left(1 - \frac{y}{b} \right)} = a dt.$$

Зінтегруючи обидві частини останньої рівності, маємо загальний інтеграл такого рівняння:

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b-y} \right) dy = a \int dt + \ln|C|, \quad C \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| - \ln|b-y| = at + \ln|C| \Rightarrow \frac{y}{b-y} = Ce^{at}.$$

Звідси знаходимо загальний розв'язок (функцію):

$$y(t) = \frac{bCe^{at}}{1 + Ce^{at}}, \quad (31.8)$$

яка описує процес зростання чисельності населення в умовах насиченості ринку.

Аналогічну модель можна також використати для зростання випуску продукції в умовах конкуренції.

В окремому випадку, якщо в (31.8) підставити $b=1$ і $C=1$ та поділити чисельник і знаменник дробу на e^{at} , то отримаємо таку функцію:

$$y(t) = \frac{1}{1 + e^{-at}}, \quad (31.9)$$

яку називають **логістичною функцією**, а її графік – **логістичною кривою** (рис. 31.1).

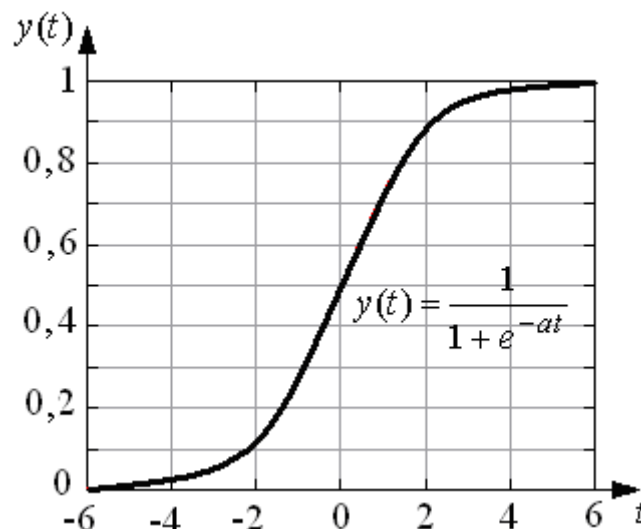


Рис. 31.1. Графік логістичної кривої

Пряму $y=1$ називають **прямою насиченості**.

Логістичну функцію використовують у статистичних моделях для прогнозування того, відбудеться чи ні певна подія.

У термінах математичної статистики, яку вивчають пізніше, функцію (31.9) називають **функцією розподілу ймовірностей** логістичного розподілу випадкової величини.



Розгляньмо приклад застосування моделі (31.7).

Нехай чисельність населення деякого регіону, залежно від часу t : $y = y(t)$, задовольняє таке рівняння:

$$\frac{dy}{dt} = 0,2y \left(1 - \frac{y}{10^4} \right).$$

У початковий момент часу ($t = 0$) чисельність населення становила 1 000 осіб.

Визначмо, через скільки років вона збільшиться в чотири рази.

На підставі ф-ли (31.7), за умовою задачі – $a = 0,2$; $b = 10^4$, тоді, згідно з ф-лою (31.8), отримуємо:

$$y(t) = \frac{10^4 C e^{0,2t}}{1 + C e^{0,2t}}.$$

Визначаймо сталу C за початковою умовою $y(0) = 1000$:

$$10^3 = \frac{10^4 C}{1 + C} \Rightarrow 1 + C = 10C \Rightarrow C = 1/9.$$

Отже, частинним розв'язком диференціального рівняння є така функція:

$$y(t) = \frac{10^4 \cdot 9^{-1} e^{0,2t}}{1 + 9^{-1} e^{0,2t}}.$$

За умовою задачі, треба визначити, за якого значення аргументу t функція буде мати значення $y(t) = 4 \cdot 10^3$.

Розв'яжімо таке рівняння:

$$4 \cdot 10^3 = \frac{10^4 \cdot 9^{-1} e^{0,2t}}{1 + 9^{-1} e^{0,2t}} \Rightarrow 2 = \frac{5}{9e^{-0,2t} + 1} \Rightarrow 18e^{-0,2t} = 3 \Rightarrow e^{0,2t} = 6.$$

З останньої рівності, маємо таке рівняння:

$$0,2t = \ln 6 \Rightarrow t = 8,96.$$

Отже, чисельність населення регіону зросте в 4 рази приблизно через 9 років.

31.5. Динаміка ринкових цін

Попит та *пропозиція* є основними економічними категоріями ринкових відносин. Позначмо через $x = x(p)$ функцію попиту, залежно від ціни одиниці товару p , а через $y = y(p)$ – відповідну пропозицію, яка також є функцією ціни одиниці товару.

Розгляньмо найпростішу модель, у якій попит та пропозиція є лінійними функціями ціни одиниці товару, а саме:

$$\begin{aligned} x(p) &= a - bp, \\ y(p) &= np + m \end{aligned} \quad (a, b, n, m - \text{додатні сталі}). \quad (31.10)$$

Рівняння відображають таку динаміку ринку: попит, залежно від ціни товару має спадати зі зростанням p , а пропозиція, навпаки, – зростати. У разі низьких цін попит буде перевищувати пропозицію ($x(p) > y(p)$), а якщо ціна буде занадто високою, навпаки, пропозиція буде перевищувати попит ($y(p) > x(p)$). Ринок буде збалансованим, якщо попит буде дорівнювати пропозиції: $x(p) = y(p)$. Нагадаймо, що відповідне значення ціни одиниці товару p_0 у цьому разі називають **ціною рівноваги**, або **рівноважною ціною**, а попит та пропозицію – **рівноважними**.

Знайдімо рівноважну ціну з умови $x(p) = y(p)$.

За ф-лами (31.10), маємо:

$$a - bp_0 = np_0 + m,$$

звідси

$$p_0 = \frac{a - m}{b + n}. \quad (31.11)$$

За рівноважної ціни ринок на певному проміжку часу є збалансованим і ціна на товар залишається сталою.

У дійсності попит далеко не завжди відповідає пропозиції, тобто $x(p) > y(p)$ або $y(p) > x(p)$.

Отже, виникає потреба розглянути динамічну модель, у якій ціну товару змінюють протягом часу, тобто $p = p(t)$, і дати відповідь на запитання, наскільки близькою до рівноважної ціни буде ринкова ціна на певному проміжку часу.

Визначмо функцію $p = p(t)$ у припущенні, що швидкість змінювання ціни в будь-який момент часу t є прямо пропорційною різниці між попитом та пропозицією в той самий момент часу.

Отже, візьмімо

$$\frac{dp}{dt} = k(x(p) - y(p)), \quad k > 0.$$

З урахуванням ф-ли (31.10), отримаємо таку рівність:

$$\frac{dp}{dt} = k(a - bp - np - m) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = k(a - m - p(b + n)). \quad (31.12)$$

Запишімо рівність (31.12) дещо інакше:

$$\frac{dp}{dt} + k(b + n) \cdot p = k(a - m). \quad (31.13)$$

Отже, динамічну модель описують лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку.

Водночас (31.13) є рівнянням із відокремлюваними змінними.

Відокремимо їх, ураховуючи ф-лу (31.11):

$$dp = (k(a - m) - k(b + n) \cdot p)dt \Rightarrow \frac{dp}{-k(b + n)(p - p_0)} = dt. \quad (31.14)$$

Зінтегруючи ліву та праву частини рівняння (31.14), отримаємо його загальний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{p - p_0} &= -k(b + n) \int dt + \ln|C|, \quad C \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left| \frac{p - p_0}{C} \right| &= -k(b + n)t \Rightarrow p - p_0 = Ce^{-k(b+n)t}. \end{aligned} \quad (31.15)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (31.13) має такий вигляд:

$$p = p(t) = Ce^{-k(b+n)t} + p_0. \quad (31.16)$$

Визначмо сталу C за початковою умовою: ціна в початковий момент часу $t = 0$ дорівнює $p(0)$:

$$p(0) = C + p_0 \Rightarrow C = p(0) - p_0.$$

Отже,

$$p = p(t) = (p(0) - p_0)e^{-k(b+n)t} + p_0. \quad (31.17)$$

За необмеженого часу реалізації товару ($t \rightarrow \infty$) ринкова ціна наближається до рівноважної:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} ((p(0) - p_0)e^{-k(b+n)t} + p_0) = (p(0) - p_0)e^{-\infty} + p_0 = p_0;$$

у таких випадках кажуть, що *ринок є динамічно стабільним*.

Висновок (із (31.17)): необхідною і достатньою умовою динамічної стабілізації ринку є виконання такої нерівності: $k(b+n) > 0$.

Залежно від співвідношення між ціною $p(0)$ у момент часу $t = 0$ і рівноважною ціною p_0 , маємо такі випадки (їхню геометричну ілюстрацію наведено на рис. 31.2):

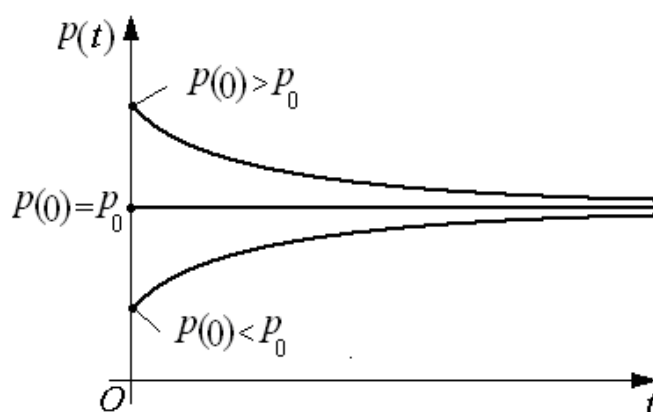


Рис. 31.2. Геометрична ілюстрація

- 1) $p(0) = p_0$ — ринок є стабільним;
- 2) $p(0) > p_0$ — криву $p(t)$ розташовано вище за пряму рівноваги $p(t) = p_0$;

3) $p(0) < p_0$ – криву $p(t)$ розташовано нижче за пряму рівноваги

$$p(t) = p_0, \text{ де, нагадаймо, } p_0 = \frac{a-m}{b+n}.$$

Розгляньмо задачу попиту та пропозиції в дещо іншому формулюванні. Як зазначали раніше, попит $x(p)$ і пропозиція $y(p)$ – це основні економічні категорії товарного виробництва, які функціонують на ринку. Водночас і попит, і пропозиція є функціями ціни товару p , й основна проблема ринкових відносин полягає в приведенні у відповідність попиту та пропозиції, залежно від часу.

Потрібно визначити таку залежність ціни від часу, щоб між попитом і пропозицією зберігати рівновагу.

Якщо функція $p = p(t)$ – ціна, залежно від часу, то її похідна $p' = p'(t)$ визначає так звану *тенденцію* до формування ціни на ринку. Залежно від різних факторів, попит і пропозиція можуть бути різними функціями ціни, а також тенденцій до формування ціни. Найпростіший випадок – це коли попит і пропозицію описують лінійними функціями щодо ціни й тенденції її формування:

$$x(p, p') = a_1 p' + b_1 p + c_1,$$

$$y(p, p') = a_2 p' + b_2 p + c_2.$$

За умови рівності $x(p, p') = y(p, p')$, отримаємо таке диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(a_1 - a_2) p' + (b_1 - b_2) p + c_1 - c_2 = 0$$

або

$$(a_1 - a_2) \frac{dp}{dt} = (b_2 - b_1) p + c_2 - c_1.$$

Загальним інтегралом цього рівняння є така рівність:

$$(a_1 - a_2) \int \frac{dp}{(b_2 - b_1) p + c_2 - c_1} = \int dt + C.$$

Остаточно маємо таке рівняння:

$$\frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \ln |(b_2 - b_1)p + c_2 - c_1| = t + C, \quad (31.18)$$

де C – стала величина, яку визначають за такою початковою умовою:
 $p(t)|_{t=0} = p_0$.



Функції попиту та пропозиції мають такий вигляд:

$$x = 30 - p - 4 \frac{dp}{dt}, \quad y = 20 + p + \frac{dp}{dt}.$$

Знайдімо залежність рівноважної ціни від часу, якщо $p = 7$ за $t = 0$.

Визначмо рівноважну ціну за умови, що $x(p, p') = y(p, p')$, розв'язуючи відповідне диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} 30 - p - 4 \frac{dp}{dt} &= 20 + p + \frac{dp}{dt} \Rightarrow -2p + 10 = 5 \frac{dp}{dt} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dp}{p-5} &= -\frac{2}{5} dt \Rightarrow \int \frac{dp}{p-5} = -\frac{2}{5} \int dt + C. \end{aligned}$$

Звідси маємо:

$$\ln |p-5| = -0,4t + C \Rightarrow p = e^{-0,4t+C} + 5.$$

Визначаймо сталу C за умовою $p(0) = 7$: $7 = e^C + 5 \Rightarrow C = \ln 2$.

Тоді рівноважна ціна, залежно від часу, має такий вигляд:

$$p = 2e^{-0,4t} + 5.$$

Зазначмо, що за $t \rightarrow \infty$ рівноважна ціна має скінченну границю:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 5$; у цьому разі кажуть, що вона є *стійкою*.

За зростання t ринкову ціну $p(t)$ знижують, порівняно з початковою: $p(t)|_{t=0} = 7$.



Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають такий вигляд:

$$x(p, p') = 50 - 2p - 4 \frac{dp}{dt}, \quad y(p, p') = 70 + 2p - 5 \frac{dp}{dt}.$$

1. Знайдімо залежність рівноважної ціни p від часу, якщо $p = 10$, $t = 0$.

2. Обчислімо $\lim_{t \rightarrow \infty} p$ і перевірмо, чи є рівноважна ціна стійкою.

Для знаходження рівноважної ціни прирівняймо попит і пропозицію та отримуємо таке рівняння:

$$50 - 2p - 4 \frac{dp}{dt} = 70 + 2p - 5 \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 20 + 4p.$$

Звідси

$$\frac{dp}{20 + 4p} = dt \Rightarrow \int \frac{dp}{20 + 4p} = \int dt + C.$$

Отже,

$$\frac{1}{4} \ln|20 + 4p| = t + C \Rightarrow 20 + 4p = e^{4t+4C}.$$

За початковою умовою ($p = 10$ за $t = 0$), маємо:

$$60 = e^{4C} \Rightarrow 20 + 4p = 60e^{4t}.$$

Отже, $p = 15e^{4t} - 5$.

Обчислімо $\lim_{t \rightarrow \infty} p$: $\lim_{t \rightarrow \infty} (15 \cdot e^{4t} - 5) = \infty$.

Звідси випливає, що рівноважна ціна не є стійкою, бо не має скінченної границі, вона необмежено зростає в часі.



Нехай попит і пропозицію на товар визначають співвідношеннями:

$$x(p, p', p'') = 2p'' - p' - p + 15,$$

$$y(p, p', p'') = 3p'' + p' + p + 5,$$

де p – ціна товару;

p' – тенденція до формування ціни;

p'' – темп зміни ціни.

Нехай також у початковий момент часу $p(0) = 6$, $x(0) = y(0) = 10$.

Зважаючи на вимогу відповідності попиту пропозиції, визначмо залежність ціни від часу.

З умови рівноваги попиту та пропозиції $x = y$, маємо таке співвідношення:

$$2p'' - p' - p + 15 = 3p'' + p' + p + 5,$$

яке є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$p'' + 2p' + 2p = 10.$$

Відповідне однорідне рівняння:

$$p'' + 2p' + 2p = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 2 = 0$ має такі корені: $k_{1,2} = -1 \pm i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння запишімо таким способом:

$$\bar{p}(t) = e^{-t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати в такому вигляді:

$$\tilde{p} = A,$$

тоді $\tilde{p}' = 0$, $\tilde{p}'' = 0$.

Підставивши ці значення в диференціальне рівняння, отримаємо:

$$2A = 10 \Rightarrow A = 5 \Rightarrow \tilde{p} = 5.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння є таким:

$$p(t) = e^{-t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 5.$$

Зважаймо на початкові умови та визначмо C_1 :

$$p(0) = 6 \Rightarrow 6 = C_1 + 5 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Тоді

$$p(t) = e^{-t}(\cos t + C_2 \sin t) + 5;$$

$$p'(t) = -e^{-t}(\cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(-\sin t + C_2 \cos t) =$$

$$= e^{-t}[(C_2 - 1)\cos t - (C_2 + 1)\sin t];$$

$$p''(t) = -e^{-t}[(C_2 - 1)\cos t - (C_2 + 1)\sin t] + e^{-t}[-(C_2 - 1)\sin t - (C_2 + 1)\cos t] =$$

$$= e^{-t}[-2C_2 \cos t + 2\sin t].$$

Знаходьмо похідні за $t = 0$: $p'(0) = C_2 - 1$, $p''(0) = -2C_2$.

Ураховуючи, що, за умовою задачі, $x = 2p'' - p' - p + 15$ і $x(0) = 10$, знаходьмо C_2 :

$$10 = 2(-2C_2) - (C_2 - 1) - 6 + 15 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Отже, залежність ціни від часу описують такою функцією:

$$p(t) = 5 + e^{-t} \cos t.$$

31.6. Використання різницевого рівняння в економіці

Розгляньмо деякі економічні задачі, математичними моделями яких є різницеві рівняння. Зазначмо, що в задачах, які зводять до диференціальних рівнянь, розглядають функцію $y = f(x)$ або $y = f(t)$ на цьому етапі часу t , незалежно від того, який процес ця функція описує. Однак можливі випадки, якщо математичною моделлю задачі є співвідношення між значенням функції, яку потрібно визначити на цьому етапі часу, та її значеннями на попередніх етапах часу: $y_{t-1} = y(t-1)$, $y_{t-2} = y(t-2)$ та ін. Задачу в такій постановці зводять не до диференціальних, а до різницевого рівняння.

Традиційними моделями задач такого типу є *павутинна модель ринку* та *економічна модель розвитку Самуельсона – Гікса*.

Павутинна модель ринку. Розгляньмо задачу щодо попиту та пропозиції в такій постановці. Припустімо, що ціна товару на ринку є функцією часу $p(t)$, а пропозицію $y(p)$ розглядають, залежно від ціни товару на попередньому часовому етапі $p(t-1)$, тоді як попит $x(p)$ залежить від ціни товару в цьому моменті часу $p(t)$. Тобто попит і пропозицію описують такими рівняннями:

$$x(t) = a - bp(t),$$

$$y(t) = m + np(t-1),$$

де a, b, m, n – додатні сталі (параметри функціональних залежностей).

Зважаючи на умови відповідності попиту (у момент часу t) та пропозиції (у момент часу $t-1$), маємо таке різницеве рівняння для знаходження рівноважної ціни в момент часу t :

$$a - bp(t) = m + np(t-1)$$

або

$$p_t + \frac{n}{b} p_{t-1} = \frac{a - m}{b}. \quad (31.19)$$

За умови стабільності ринку на цей момент часу: $p_t = p_{t-1} = p_0$, отримуємо один із частинних розв'язків такого рівняння: $p_0 = \frac{a - m}{b + n}$ (31.11).

Загальний розв'язок різницевого рівняння 1-го порядку є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку цього неоднорідного рівняння:

$$p_t = \bar{p}_t + \frac{a - m}{b + n}. \quad (31.20)$$

Знайдімо загальний розв'язок такого однорідного рівняння:

$$p_t + \frac{n}{b} p_{t-1} = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння $k + n/b = 0$, коренем якого є $k = -n/b$.

Отже, загальним розв'язком однорідного різницевого рівняння є послідовність $\bar{p}_t = C\left(-\frac{n}{b}\right)^t$, а загальним розв'язком початкового неоднорідного рівняння така послідовність:

$$p_t = C\left(-\frac{n}{b}\right)^t + \frac{a-m}{b+n}. \quad (31.21)$$

Якщо $n < b$, то послідовність p_t має коливальний характер і збігається до ціни рівноваги (рис. 31.3а). У разі $n = b$ ціна p_t періодично коливається відносно ціни рівноваги (рис. 31.3б). Якщо $n > b$, то за $t \rightarrow \infty$ маємо: $\left|(-n/b)^t\right| \rightarrow \infty$ – рівновага є нестійкою (рис. 31.3в).

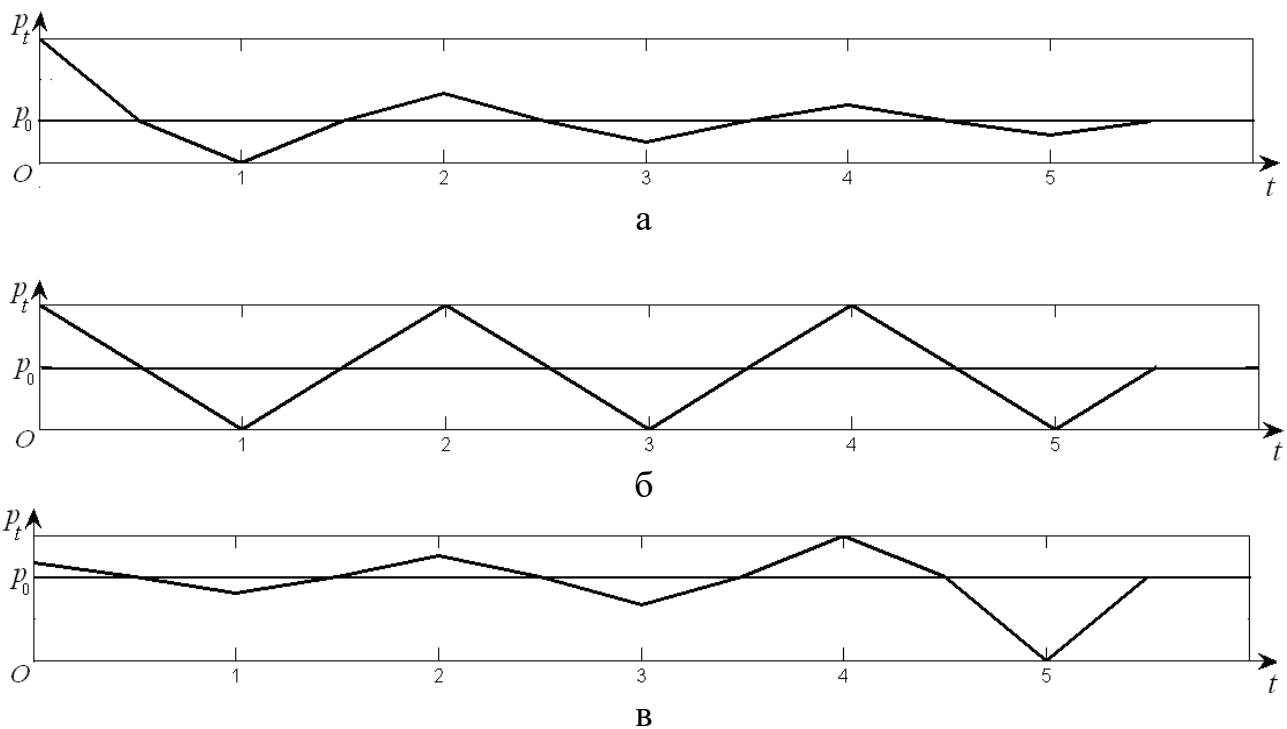


Рис. 31.3. Ілюстрації загального розв'язку для трьох випадків, якщо а) $n < b$; б) $n = b$; в) $n > b$

У дійсності нескінченно зростальні коливання є неможливими, тому за великих відхилень від рівноваги лінійні моделі залежності попиту та пропозиції від ціни на практиці не реалізують.

Модель розвитку Самуельсона – Гікса. Нехай функція $y_t = y(t)$ описує національний дохід, а $c = c(t)$ є функцією споживання на цьому етапі t . Припустімо, що на цьому етапі споживання запізнюється від національного прибутку, тобто залежить від національного прибутку $y_{t-1} = y(t-1)$ на попередньому етапі часу.

Відповідно

$$c(t) = my_{t-1} + A, \quad (31.22)$$

де m – гранична швидкість споживання, яка показує, на скільки підвищують споживання, якщо прибуток зростає на одиницю: $m = \Delta c / \Delta y$;

A – постійні витрати.

Припустімо також, що підприємці вкладають інвестиції $I(t)$ після того, як переконаються, що приріст національного прибутку є стійким.

Тобто

$$I(t) = a(y_{t-1} - y_{t-2}), \quad (31.23)$$

де a – фактор акселерації ($a > 0$).

Умова рівноваги попиту та пропозиції має такий вигляд:

$$y(t) = c(t) + I(t)$$

або

$$y_t = (a + m)y_{t-1} - ay_{t-2} + A. \quad (31.24)$$

Рівняння (31.24) називають **рівнянням Гікса**.

Якщо величини a , m , A є сталими, то рівняння Гікса є лінійним неоднорідним різницеvim рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами; у стандартній формі запису воно має такий вигляд:

$$y_t - (a + m)y_{t-1} + ay_{t-2} = A.$$

Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння має такий вигляд:

$$\mu^2 - (a + m)\mu + a = 0. \quad (31.25)$$

Найцікавішим для досліджень є випадок комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння (у цьому разі розв'язок має коливальний характер). Це має місце, якщо дискримінант рівняння (31.25) є від'ємним:

$$D = \frac{(a + m)^2}{4} - a < 0$$

і коренями характеристичного рівняння є такі комплексно-спряжені числа:

$$\mu_{1,2} = \frac{a + m}{2} \pm i\sqrt{-D}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Отже, загальним розв'язком однорідного різницевого рівняння є така послідовність:

$$\bar{y}_t = \rho^t (C_1 \cos \varphi t + C_2 \sin \varphi t), \quad (31.26)$$

де

$$\rho = \sqrt{\frac{(a + m)^2}{4} - D} = \sqrt{\frac{(a + m)^2}{4} - \frac{(a + m)^2}{4} + a} = \sqrt{a};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-D}}{\frac{a + m}{2}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4a}{(a + m)^2} - 1}.$$

Частинний розв'язок різницевого рівняння (31.24) будемо шукати у вигляді $\tilde{y}_t = C$.

Підставмо послідовність $\tilde{y}_t = C$ в рівняння, визначмо сталу C і запишімо $\tilde{y}_t$:

$$C = \frac{A}{1 - (a + m) + a} = \frac{A}{1 - m} \Rightarrow \tilde{y}_t = \frac{A}{1 - m}.$$

Загальним розв'язком різницевого рівняння Гікса є така послідовність:

$$y_t = (\sqrt{a})^t (C_1 \cos \varphi t + C_2 \sin \varphi t) + \frac{A}{1-m}. \quad (31.27)$$

У реальних задачах економіки $m < 1$ та $a > 1$. За таких значень граничної швидкості споживання m і фактора акселерації a розв'язок рівняння Гікса є нестійким і має коливальний характер. Це означає, що навіть за сталого темпу капіталовкладень економіка має нестійкий характер і періоди зростання змінюються періодами спаду.



Розв'яжімо рівняння Гікса, якщо $a = 1,22$; $m = 0,98$; $A = 0,05$.

За таких умов рівняння (31.24) набуває такого вигляду:

$$y_t - 2,2y_{t-1} + 1,22y_{t-2} = 0,05. \quad (31.28)$$

Знайдімо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, для чого складемо і розв'яжемо його характеристичне рівняння:

$$\mu^2 - 2,2\mu + 1,22 = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = 1,1 \pm 0,1 \cdot i.$$

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння буде таким:

$$\bar{y}_t = (\sqrt{a})^t (C_1 \cos \varphi t + C_2 \sin \varphi t), \quad (31.29)$$

$$\varphi = \arctg \frac{0,1}{1,1} = 0,09. \quad (31.30)$$

Отже,

$$\bar{y}_t = (\sqrt{1,22})^t (C_1 \cos 0,09t + C_2 \sin 0,09t).$$

Знайдімо частинний розв'язок цього рівняння. За виглядом правої частини, маємо: $\tilde{y}_t = C$, тому що пара $(\rho, \varphi) = (1, 0)$ правої частини рівняння не збігається з парою $(\rho, \varphi) = (\sqrt{1,22}; 0,09)$ коренів характеристичного рівняння.

Підставмо $\tilde{y}_t = C$ у вихідне рівняння й отримаємо таке рівняння:

$$C - 2,2C + 1,22C = 0,05 \Rightarrow C = 2,5 \Rightarrow \tilde{y}_t = 2,5.$$

Отже, загальним розв'язком неоднорідного різницевого рівняння є така послідовність із загальним членом:

$$y_t = \left(\sqrt{1,22}\right)^t (C_1 \cos 0,09t + C_2 \sin 0,09t) + 2,5. \quad (31.31)$$



Ключові терміни

Валові (загальні) витрати; граничні витрати; граничний прибуток; рівняння природного зростання; задача Бернуллі про кредитування; зростання за умови насиченості; логістична функція; логістична крива; еластичність функції; еластичність попиту та пропозиції; пряма насиченості; попит і пропозиція; ціна рівноваги; павутинна модель ринку; динамічна стабільність ринку; тенденція до формування ціни; модель розвитку Самуельсона – Гікса; рівняння Гікса.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають валовими (загальними) та граничними витратами?
2. Якою формулою задають співвідношення між загальними та граничними витратами?
3. Що таке «еластичність» функції?
4. Які приклади економічних задач, у яких невідому функцію визначають на основі її еластичності, ви можете навести?
5. Яке значення має еластичність попиту для ціноутворення?
6. Що таке «рівняння природного зростання»?
7. Як формують задачу Бернуллі про кредитування?
8. Моделлю яких економічних задач є модель природного зростання?
9. Які особливості має модель зростання за умови насиченості?
10. У чому полягає сутність логістичної функції?

11. Які процеси описують логістичною кривою?
12. Якщо задано функції попиту та пропозиції, то яку ціну на продукцію називають рівноважною?
13. Що таке «модель динамічної стабільності ринку»?
14. Які умови стабільності ринку?
15. Яка математична модель зважає на динаміку ринкових цін?
16. Як залежить ціна товару від обсягу виробництва?
17. У чому полягає різниця між функціями попиту та пропозиції?
18. Як визначають рівноважну ціну на ринку?
19. У чому полягає павутинна модель ринку?
20. Який вигляд має різницеве рівняння Гікса?
21. Моделлю яких економічних задач є модель Самуельсона – Гікса?



Тестові завдання до підрозділу 31

1. Еластичність функції однієї змінної $y = f(x)$ визначають за такою формулою:

а) $E_x(y) = \frac{x}{y} y'$; б) $E_x(y) = \frac{x}{y} x'$;

в) $E_x(y) = \frac{y}{x} y'$; г) $E_x(y) = \frac{y}{x} x'$.

2. Якщо функцію граничного прибутку позначають як $g(x)$, тоді функцію прибутку визначають за такою формулою:

а) $R(x) = g'(x)$; б) $R(x) = \int g'(x) dx + C$;

в) $R(x) = \int g(x) dx + C$; г) $R(x) = g''(x)$.

3. Модель природного зростання задають такою формулою:

а) $y = e^{-C \cdot kt}$, $C = \text{const}$; б) $y = C \cdot e^{-kt}$, $C = \text{const}$;

в) $y = e^{C \cdot kt}$, $C = \text{const}$; г) $y = C \cdot e^{kt}$, $C = \text{const}$.

4. Залежність зростання чисельності населення від часу має такий вигляд:

а) $y'(t) = a(b + y(t)) \cdot y(t)$; б) $y'(t) = a\left(1 - \frac{y(t)}{b}\right) \cdot y(t)$;

в) $y'(t) = a\left(1 + \frac{y(t)}{b}\right) \cdot y(t)$; г) $y'(t) = a\left(\frac{y(t)}{b} - 1\right) \cdot y(t)$.

5. Визначте, який вигляд має логістична функція:

а) $y(t) = \frac{1}{1 + e^{-at}}$; б) $y(t) = \frac{1}{1 - e^{at}}$;

в) $y(t) = \frac{1}{1 + e^{at}}$; г) $y(t) = \frac{1}{1 - e^{-at}}$.

6. Якщо попит та пропозицію задають у вигляді лінійних функцій ціни одиниці товару $x(p) = a - bp$, $y(p) = np + m$, тоді рівноважну ціну знаходять за такою формулою:

а) $p_0 = \frac{a - m}{b - n}$; б) $p_0 = \frac{m - a}{b + n}$;

в) $p_0 = \frac{a + m}{b - n}$; г) $p_0 = \frac{a - m}{b + n}$.

7. Як визначають залежність функції споживання $c = c(t)$ від національного прибутку на цьому етапі t :

а) $c(t) = my_t + A$; б) $c(t) = my_{t-1} + A$;

в) $c(t) = my_{t-2} + A$; г) $c(t) = my_{t+1} + A$?

8. Визначте вигляд рівняння Гікса:

а) $y_t = (a + m)y_{t-2} - ay_{t-1} + A$;

б) $y_t = (a + m)y_{t+1} - ay_{t-1} + A$;

в) $y_t = (a + m)y_{t-1} - ay_{t-2} + A$;

г) $y_t = (a + m)y_{t-1} - ay_{t+1} + A$.

9. У разі, якщо визначають умову рівноваги попиту та пропозиції як лінійних функцій $x(p, p') = a_1 p' + b_1 p + c_1$, $y(p, p') = a_2 p' + b_2 p + c_2$ щодо ціни $p = p(t)$ і тенденції до її формування $p' = p'(t)$, розв'язок отриманого диференціального рівняння є таким:

а) $\frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \ln|(b_2 - b_1)p + c_2 - c_1| = t + C$;

б) $\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \ln|(b_2 - b_1)p + c_2 - c_1| = t + C$;

в) $\frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \ln|(a_1 - a_2)p + c_2 - c_1| = t + C$;

г) $\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \ln|(a_1 - a_2)p + c_2 - c_1| = t + C$.

10. Згідно з формулою павутинної моделі ринку $p_t = C \left(-\frac{n}{b} \right)^t + \frac{a-m}{b+n}$, визначте, за якої умови p_t має коливальний характер і збігається до ціни рівноваги:

а) $\frac{n}{b} > 0$;

б) $\frac{n}{b} > 1$;

в) $\frac{n}{b} < 0$;

г) $\frac{n}{b} < 1$.

Література: [3 – 7; 12 – 14; 16; 20; 21; 23].

3

Практичні завдання за розділом 7

Розв'язання задач економічного змісту

7.1. Нехай функція граничних витрат має такий вигляд:

$$y' = 55 + 0,06x.$$

Визначте функцію витрат виробництва.

Розв'язання. Це рівняння перепишімо так:

$$\frac{dy}{dx} = 55 + 0,06x \Rightarrow dy = (55 + 0,06x)dx.$$

Оскільки диференціали є рівними, то інтеграли від них теж є рівними з точністю до константи.

Отже,

$$\int dy = \int (55 + 0,06x)dx + C.$$

Тобто функція витрат має такий вигляд:

$$y = 55x + 0,03x^2 + C.$$

Значення довільної сталої C визначають, якщо задано початкову умову.

7.2. Нехай функція граничного прибутку має такий вигляд:

$$R' = 40 - 0,08x.$$

Визначте функцію прибутку R .

Розв'язання. Перетворімо початкове рівняння:

$$\frac{dR}{dx} = 40 - 0,08x \Rightarrow dR = (40 - 0,08x)dx,$$

звідси

$$\int dR = \int (40 - 0,08x) dx + C \Rightarrow R = 40x - 0,04x^2 + C.$$

Зрозуміло, що за $x = 0$ прибуток дорівнює нулю, тому $C = 0$.

Отже, функція прибутку має такий вигляд:

$$R(x) = 40x - 0,04x^2.$$

7.3. Визначте ціну товару як функцію обсягу x , якщо ціна одиниці товару $p = 20$, а еластичність ціни має такий вигляд:

$$E_x(p) = \frac{p - 40}{p}.$$

Розв'язання. Використовуючи таку формулу:

$$E_x(p) = \frac{x}{p} \frac{dp}{dx},$$

маємо:

$$\frac{x}{p} \frac{dp}{dx} = \frac{p - 40}{p}, \text{ або } \frac{dp}{p - 40} = \frac{dx}{x}.$$

Зінтегруймо:

$$\int \frac{dp}{p - 40} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C| \Rightarrow \ln|p - 40| = \ln|x| + \ln|C|, C \neq 0.$$

Звідси $p - 40 = C \cdot x$.

Зважаючи на початкову умову $p(1) = 20$, обчислимо значення сталої C :

$$20 - 40 = C \Rightarrow C = -20.$$

Отже, ціна товару як функції обсягу є такою:

$$p = 40 - 20x.$$

7.4. Знайдіть функцію попиту $x = x(p)$, де x – обсяг товару, p – його ціна, якщо є відомою ціна p за заданого обсягу товару, а еластичність попиту має такий вигляд:

$$E_p(x) = \frac{x - 50}{x}, \text{ а } x(15) = 20.$$

Розв'язання. За означенням еластичності, маємо:

$$E_p(x) = \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}.$$

Отже, диференціальне рівняння має такий вигляд:

$$\frac{p}{x} \frac{dx}{dp} = \frac{x - 50}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x - 50} = \frac{dp}{p}.$$

Далі зінтегруймо:

$$\int \frac{dx}{x - 50} = \int \frac{dp}{p} + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

і маємо:

$$\ln|x - 50| = \ln|p| + \ln|C| \Rightarrow x - 50 = pC.$$

Сталу C обчислимо, з огляду на початкову умову $x(15) = 20$:

$$20 - 50 = 15C \Rightarrow C = -2.$$

Отже, функція попиту має такий вигляд:

$$x = 50 - 2p.$$

7.5. Визначте виробничу функцію $y = y(x)$, якщо відомо, що $y(1) = 10$, а залежність еластичності виробничої функції від кількості вкладених коштів x визначено такою функцією:

$$E_x(y) = \frac{x^2 + y^2}{y^2},$$

де y – обсяг виробництва (в одиницях вартості).

Розв'язання. Відомо, що за означенням еластичність виробничої функції визначають як

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \frac{x}{y}.$$

Отже, маємо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} \quad (y \neq 0) \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{dy}{dx},$$

яке є однорідним рівнянням.

Зробімо заміну змінної: $\frac{y}{x} = t$, або $y = xt$, тоді $y' = t + xt'$. Після виконання підстановки рівняння набуде такого вигляду:

$$\frac{1}{t} + t = t + xt' \Rightarrow \frac{1}{t} = x \frac{dt}{dx} \Rightarrow t dt = \frac{dx}{x}.$$

Отже, ми маємо рівняння з відокремленими змінними.

Далі зінтегруймо:

$$\int t dt = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

звідси

$$\frac{t^2}{2} = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \frac{y^2}{2x^2} = \ln|Cx|$$

або

$$y^2 = 2x^2 \ln|C \cdot x| \Rightarrow y = \pm |x| \sqrt{2 \ln|C \cdot x|}.$$

Оскільки $x > 0$, $y > 0$, то $y = x\sqrt{\ln(C \cdot x)^2}$.

Обчислимо значення сталої C за заданою початковою умовою ($y(1) = 10$):

$$10 = \sqrt{\ln C^2}.$$

Підносимо до квадрата обидві частини й маємо: $100 = \ln C^2$, звідси $C^2 = e^{100}$.

Тоді

$$y = x\sqrt{\ln(e^{100} x^2)} \Rightarrow y = x\sqrt{\ln e^{100} + \ln x^2}.$$

Отже, маємо таку виробничу функцію:

$$y = x\sqrt{100 + 2 \ln x}.$$

7.6. Повні витрати виробництва y залежать від загального обсягу продукції x . Відомо, що граничні та повні витрати для всіх значень x задовольняють таке рівняння:

$$y' - 2y + x = 0.$$

Знайдіть функцію повних витрат, яка задовольняє таку початкову умову: $y(0) = 0$.

Розв'язання. Для знаходження функції повних витрат y треба розв'язати таке диференціальне рівняння:

$$y' - 2y = -x,$$

яке є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку.

Його розв'язок будемо шукати в такому вигляді:

$$y = u(x)v(x),$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ – допоміжні невідомі функції.

Звідси

$$y' = u'v + uv',$$

тоді рівняння запишімо так:

$$u'v + uv' - 2uv = -x \Rightarrow u'v + u(v' - 2v) = -x.$$

Далі розглядаймо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} v' - 2v = 0, \\ u'v = -x. \end{cases}$$

Із першого рівняння цієї системи знаходьмо функцію $v(x)$ як його частинний розв'язок:

$$\frac{dv}{dx} = 2v \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = 2 \int dx \Rightarrow \ln|v| = 2x \Rightarrow v = e^{2x}.$$

Вираз для функції $v(x)$ підставляймо в друге рівняння системи:

$$u'e^{2x} = -x \Rightarrow du = -xe^{-2x} dx.$$

Змінні є відокремленими, отже, можна виконувати інтегрування:

$$\int du = - \int xe^{-2x} dx.$$

Застосувавши інтегрування частинами, маємо:

$$u = - \left(-x \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \right) \Rightarrow u = \frac{1}{2} xe^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + C.$$

Тоді знайдімо загальний розв'язок рівняння:

$$y = \left(\frac{1}{2} xe^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + C \right) e^{2x} \Rightarrow y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} + C \cdot e^{2x}.$$

За початковою умовою $y(0) = 0$, обчислімо значення довільної сталої C :

$$0 = \frac{1}{4} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}.$$

Тепер визначаймо частинний розв'язок:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2x} \Rightarrow y = \frac{1}{4}(2x - e^{2x} + 1).$$

Отже, функція повних витрат, що задовольняє початкову умову $y(0) = 0$, має такий вигляд:

$$y = \frac{1}{4}(2x - e^{2x} + 1).$$

7.7. Функції попиту x та пропозиції y , залежно від рівноважної ціни p , мають такий вигляд:

$$x = 40 - 3p - 5\frac{dp}{dt}, \quad y = 60 + p - 4\frac{dp}{dt}.$$

Визначте залежність рівноважної ціни p від часу, якщо $p = 5$ за $t = 0$.

Розв'язання. Якщо попит і пропозиція збігаються, то

$$40 - 3p - 5\frac{dp}{dt} = 60 + p - 4\frac{dp}{dt}.$$

Звідси

$$\frac{dp}{dt} + 4p + 20 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -4(p + 5).$$

Отже, маємо диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{p + 5} = -4dt.$$

Тоді

$$\int \frac{dp}{p + 5} = -4 \int dt + \ln|C|, \quad C \neq 0 \Rightarrow \ln|p + 5| = -4t + \ln|C|$$

або

$$\ln \left| \frac{p+5}{C} \right| = -4t \Rightarrow C \cdot e^{-4t} = p+5.$$

За заданою початковою умовою ($p(0)=5$), обчислімо сталу C :

$$Ce^0 = 5+5 \Rightarrow C=10.$$

Отже, $p+5=10e^{-4t}$, або $p=10e^{-4t}-5$.

Отже залежність рівноважної ціни p від часу t має такий вигляд:

$$p=10e^{-4t}-5.$$

Зауважмо, що за $t \rightarrow \infty$ рівноважна ціна буде $p \rightarrow 5$.

7.8. Нехай попит та пропозицію на певний товар визначають, відповідно, такими співвідношеннями:

$$x(p)=13p'+3p-1, \quad y(p)=3p'-2p+14,$$

де p – ціна за одиницю товару;

p' – тенденція формування ціни.

У початковий момент часу ціна за одиницю товару становила 5 гр. од.

Визначте залежність рівноважної ціни від часу та чи є рівноважна ціна стійкою.

Розв'язання. Зважаючи на умову, що $x(p)=y(p)$, маємо:

$$13p'+3p-1=3p'-2p+14 \Rightarrow 2p'+p-3=0.$$

Ми отримали таке диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{-(p-3)}{2} \Rightarrow \frac{dp}{p-3} = -\frac{1}{2}dt,$$

звідси

$$\ln|p-3| = -\frac{t}{2} + \ln|C|, \quad C \neq 0 \Rightarrow \ln\left|\frac{p-3}{C}\right| = -\frac{t}{2}$$

або

$$p-3 = C \cdot e^{-t/2}.$$

За початковою умовою $p(0) = 5$, маємо:

$$5-3 = Ce^0 \Rightarrow C = 2.$$

Тепер $p = 2e^{-t/2} + 3$. Рівноважна ціна є стійкою, бо $\lim_{t \rightarrow \infty} p = 3$.

Отже, для рівноваги попиту та пропозиції потрібно, щоб ціна, залежно від часу, змінювалася за таким законом:

$$p = 2e^{-t/2} + 3.$$

7.9. Чисельність населення $y=y(t)$ деякого регіону задовольняє таке диференціальне рівняння:

$$y'(t) = 0,05y(1 - 10^{-6}y),$$

де час t вимірюють роками.

У початковий момент часу чисельність населення становила 10 тис. громадян.

Визначте, через скільки років чисельність населення зросте в 10 разів.

Розв'язання. Знайдемо розв'язок рівняння:

$$y' = 0,05y(1 - 10^{-6}y) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{0,05y}{10^6}(10^6 - y),$$

звідси

$$\frac{dy}{y(10^6 - y)} = \frac{0,05}{10^6} dt.$$

Зінтегруймо:

$$\int \frac{dy}{y(10^6 - y)} = \frac{0,05}{10^6} \int dt + \ln|C|, \quad C \neq 0.$$

Дріб $\frac{1}{y(10^6 - y)}$ подаймо у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{1}{y(10^6 - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{10^6 - y}.$$

Звідси маємо рівняння для визначення коефіцієнтів A і B :

$$1 = A(10^6 - y) + By,$$

із якого, якщо $y = 0$, то $A = 10^{-6}$; якщо $y = 10^6$, то $B = 10^{-6}$.

Тоді маємо:

$$\int \frac{dt}{y(10^6 - y)} = 10^{-6} \int \frac{dy}{y} + 10^{-6} \int \frac{dy}{10^6 - y} = 10^{-6} \ln|y| - 10^{-6} \ln|10^6 - y|.$$

Отже,

$$10^{-6} \ln|y| - 10^{-6} \ln|10^6 - y| = \frac{0,05}{10^6} t + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

або

$$\ln \left| \frac{y}{10^6 - y} \right| = 0,05t + \ln|C| \Rightarrow \frac{y}{10^6 - y} = C \cdot e^{0,05t}, \text{ де } C = C_1^{10^6}.$$

Обчислимо C , використовуючи початкову умову ($y = 10^4$ за $t = 0$):

$$\frac{10^4}{10^6 - 10^4} = Ce^0 \Rightarrow C = \frac{1}{99}.$$

Тоді маємо:

$$\frac{y}{10^6 - y} = \frac{1}{99} e^{0,05t} \Rightarrow 99y = 10^6 e^{0,05t} - ye^{0,05t} \Rightarrow y = \frac{10^6 e^{0,05t}}{99 + e^{0,05t}}.$$

Тепер визначмо, через скільки років чисельність населення зросте в 10 разів:

$$10^4 \cdot 10 = \frac{10^6 e^{0,05t}}{99 + e^{0,05t}} \Rightarrow 99 + e^{0,05t} = 10e^{0,05t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{0,05t} = 11 \Rightarrow t = \frac{\ln 11}{0,05} \approx 47,96.$$

Отже, у цьому регіоні чисельність населення зросте в 10 разів приблизно через 48 років.

7.10. Нехай швидкість зростання загальних потреб населення p від відсотка прибутку x цієї верстви населення описують функцією e^{-x} .

Знайдіть функцію, що характеризує залежність загальних потреб від відсотка прибутку для будь-яких верств населення.

Розв'язання. За умовою задачі, її математичною моделлю є таке диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = e^{-x}.$$

Це рівняння 2-го порядку, у якому є відсутніми функція p та її перша похідна p' . Рівняння перепишімо так:

$$\frac{d(p')}{dx} = e^{-x} \Rightarrow d(p') = e^{-x} dx.$$

Зінтегруймо обидві частини рівняння, у результаті чого зліва маємо похідну 1-го порядку від функції p :

$$\frac{dp}{dx} = \int e^{-x} dx + C_1 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -e^{-x} + C_1 \Rightarrow dp = (-e^{-x} + C_1) dx.$$

Зінтегруючи вдруге, маємо:

$$p = e^{-x} + C_1 \cdot x + C_2.$$

Отже, ми визначили загальний розв'язок рівняння.

Оскільки без отримання доходів споживання є неможливим, то маємо таку початкову умову: $p(0) = 0$. Зрозуміло, що, якщо немає прибутку, швидкість приросту потреб теж дорівнює нулю, тобто маємо ще одну початкову умову: $p'(0) = 0$.

Отже, для визначення сталих C_1 і C_2 маємо дві початкові умови.

Використовуймо їх:

$$e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -1;$$

$$-e^0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Підставляймо визначені C_1 і C_2 в загальний розв'язок і отримуємо:

$$p = e^{-x} + x - 1.$$

Отже, залежність загальних потреб населення від відсотка прибутку описують такою функцією:

$$p = e^{-x} + x - 1.$$

7.11. Нехай попит та пропозицію на товар визначають, відповідно, такими співвідношеннями:

$$x(t) = 3p'' - p' + p + 14, \quad y(t) = 4p'' + p' + 2p + 4,$$

де p – ціна товару;

p' – тенденція до формування ціни;

p'' – темпи зміни ціни.

Знайдіть залежність рівноважної ціни від часу, зважаючи на початкові умови: $p = 15$ за $t = 0$; $p' = 5$ за $t = 0$.

Розв'язання. За умовою $x(t) = y(t)$, тоді маємо:

$$3p'' - p' + p + 14 = 4p'' + p' + 2p + 4,$$

звідси

$$p'' + 2p' + p = 10.$$

Знайдімо розв'язок цього лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$p(t) = \bar{p} + \tilde{p},$$

де $\bar{p}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння;

$\tilde{p}$ – деякий частинний розв'язок цього неоднорідного рівняння.

Запишімо відповідне однорідне рівняння:

$$p'' + 2p' + p = 0.$$

Його характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 1 = 0$ має такі корені $k_1 = k_2 = -1$.

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має такий вигляд:

$$\bar{p} = e^{-t} (C_1 + C_2 \cdot t).$$

Далі будемо знаходимо деякий частинний розв'язок $\tilde{p}$ початкового неоднорідного рівняння в такому вигляді: $\tilde{p} = A$.

Визначаймо похідні й підставляймо їх і саму функцію $\tilde{p}$ в задане рівняння:

$$(\tilde{p}' = 0, \tilde{p}'' = 0) \Rightarrow A = 10.$$

Отже, $p = e^{-t} (C_1 + C_2 t) + 10$.

Визначаймо C_1 і C_2 , використовуючи такі початкові умови:

$$1) p(0) = 15 \Rightarrow 15 = e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) + 10 \Rightarrow C_1 = 5;$$

2) оскільки $p' = -e^{-t} (C_1 + C_2 t) + e^{-t} \cdot C_2$, то:

$$p'(0) = 5 \Rightarrow 5 = -e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0 \cdot C_2 \Rightarrow C_2 = 10.$$

Отже, залежність ціни від часу, зважаючи на початкові умови, описують такою функцією:

$$p(t) = e^{-t}(5 + 10t) + 10.$$

7.12. Нехай попит і пропозицію деякого товару на ринку описують, відповідно, такими рівняннями:

$$x(t) = 5 - 2p_t, \quad y(t) = 3 + 4p_{t-1}.$$

Знайдіть залежність ціни від часу, якщо $p_t = p_{t-1} = p_0$.

Розв'язання. Зважаючи на умови відповідності попиту та пропозиції, маємо різницеве рівняння для обчислення рівноважної ціни в момент часу t :

$$5 - 2p_t = 3 + 4p_{t-1} \Rightarrow 2p_t + 4p_{t-1} = 2.$$

або

$$p_t + 2p_{t-1} = 1.$$

За початкової умови $p_t = p_{t-1} = p_0$, маємо таку рівноважну ціну: $p_0 = 1/3$.

Знайдімо загальний розв'язок різницевого рівняння, що розглядають. Він є сумою загального розв'язку однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку неоднорідного:

$$p = \bar{p} + \tilde{p}.$$

Однорідному рівнянню $p_t + 2p_{t-1} = 0$ відповідає таке характеристичне: $\mu + 2 = 0$, звідси $\mu = -2$, тоді $\bar{p} = C \cdot (-2)^t$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння вже було знайдено: $\tilde{p} = 1/3$.

Отже, маємо такий загальний розв'язок різницевого рівняння Гікса:

$$p_t = C \cdot (-2)^t + 1/3.$$

Оскільки $\lim_{t \rightarrow \infty} |p_t| = \infty$, то зробимо висновок, що рівновага є нестійкою.

7.13. Знайдіть розв'язок різницевого рівняння Гікса:

$$y_t - 2,2y_{t-1} + 1,25y_{t-2} = 0,1.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок шукаймо як суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку цього неоднорідного рівняння:

$$p = \bar{p} + \tilde{p}.$$

Частинний розв'язок рівняння берімо в такому вигляді: $\tilde{p} = A$.

Підставляймо $\tilde{p}$ в задане рівняння:

$$A - 2,2A + 1,25A = 0,1 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow \tilde{p} = 2.$$

Знаходьмо загальний розв'язок такого однорідного рівняння:

$$y_t - 2,2y_{t-1} + 1,25y_{t-2} = 0.$$

Йому відповідає таке характеристичне рівняння:

$$\mu^2 - 2,2\mu + 1,25 = 0,$$

яке має комплексно-спряжені корені $\mu_{1,2} = 1,1 \pm \sqrt{1,21 - 1,25} = 1,1 \pm 0,2i$.

Отже,

$$\bar{p} = \left(\sqrt{(1,1)^2 + (0,2)^2} \right)^t (C_1 \cos \varphi t + C_2 \sin \varphi t),$$

де $\varphi = \arctg \frac{0,2}{1,1} \approx 0,182$.

$$\text{Отож } p(t) = \left(\sqrt{1,25} \right)^t (C_1 \cos 0,182t + C_2 \sin 0,182t) + 2.$$



Завдання для самостійного розв'язання

Перевірте, чи є розв'язком цього диференціального рівняння вказана функція:

7.14. $y'x^3 + 2y = 0, \quad y = 2e^{\frac{1}{x^2}}.$

7.15. $yx dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0, \quad y = e^{\sqrt{1-x^2}}.$

$$7.16. y'' - 2y' + y = 0, \quad y = x^2 e^x.$$

Знайдіть загальні інтеграли або загальні розв'язки заданих диференціальних рівнянь із відокремлюваними змінними:

$$7.17. x\sqrt{9 - y^2} dx - y(4 + x^2) dy = 0.$$

$$7.18. (xy^2 - y^2) dx + (x^2 y + x^2) dy = 0.$$

$$7.19. y' + \sin(x + y) = \sin(x - y).$$

Знайдіть частинні розв'язки, які задовольняють вказані початкові умови:

$$7.20. \sin^2 x \cos^2 y dx = \cos^2 x dy, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$7.21. y'e^{-x} = x - 1, \quad y(1) = -e.$$

$$7.22. x(y^6 + 1) dx + y^2(x^4 + 1) dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$7.23. (1 + x^2) y' = xy - y\sqrt{1 + x^2}, \quad y(0) = 1.$$

Знайдіть загальні інтеграли або загальні розв'язки заданих однорідних диференціальних рівнянь:

$$7.24. (xy - x^2) y' = y^2. \quad 7.25. xy' + y = 2y(\ln y - \ln x).$$

$$7.26. xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}. \quad 7.27. (x + y) dx + 2x dy = 0.$$

Знайдіть частинні розв'язки, які задовольняють вказані початкові умови:

$$7.28. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0,5\pi. \quad 7.29. (x^2 + y^2) dx = 2xy dy, \quad y(4) = 0.$$

$$7.30. y^2 + x^2 y' = xy y', \quad y(1) = 1. \quad 7.31. xy' - y = x \cos^2 \frac{y}{x}, \quad y(3) = 0.$$

Знайдіть загальні інтеграли або загальні розв'язки заданих лінійних диференціальних рівнянь і рівнянь Бернуллі:

7.32. $(x^2 + 1)y' - xy = x^3 + x$.

7.33. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

7.34. $xy' - y = x^2 \cos x$.

7.35. $y' - xy = -e^{-x^2} y^3$.

Знайдіть частинні розв'язки, які задовольняють вказані початкові умови:

7.36. $y' + 3y = xe^{-3x}$, $y(0) = 0$.

7.37. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$, $y(e) = \frac{e^2}{2}$.

7.38. $(1 - x^2)y' + 2xy = xy^2$, $y(0) = 0,5$.

Розв'яжіть рівняння, що дозволяють зниження порядку:

7.39. $y'' = \sin 2x + x$.

7.40. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$.

7.41. $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

Знайдіть частинні розв'язки за вказаними початковими умовами:

7.42. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

7.43. $y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right)$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = e$.

7.44. $2y(y')^3 + y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

Знайдіть загальні розв'язки заданих лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

7.45. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

7.46. $y'' + 3y' = 0$.

7.47. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

7.48. $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

Знайдіть частинні розв'язки за вказаними початковими умовами:

7.49. $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

7.50. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

$$7.51. y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

$$7.52. y'' - 2y' + 10y = 0, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}.$$

Знайдіть загальні розв'язки неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь:

$$7.53. y'' - 8y' + 7y = 14.$$

$$7.54. y'' - 2y' = x^2 - 1.$$

$$7.55. y'' + 3y' - 10y = 12xe^{-2x}.$$

$$7.56. y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

$$7.57. y'' - 2y' + y = 2e^x.$$

$$7.58. y'' + y' - 2y = 8\sin 2x.$$

$$7.59. y'' + 4y = \sin x.$$

$$7.60. y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x.$$

Знайдіть частинні розв'язки за вказаними початковими умовами:

$$7.61. y'' - y' = 2(1 - x), y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

$$7.62. y'' + 4y = e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$7.63. y'' - 4y = e^{-2x}, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$7.64. y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$7.65. y'' + y = -\sin 2x, y(\pi) = 1, y'(\pi) = 1.$$

Запишіть для вказаних рівнянь вигляд частинних розв'язків:

$$7.66. y'' - 10y' + 25y = e^{5x}(1 - x^2). \quad 7.67. y'' - 3y' = x^2 - 2.$$

$$7.68. y'' + 2y' + y = \sin x + e^x.$$

$$7.69. y'' + 10y' = x^2 + xe^{-10x}.$$

Знайдіть загальний розв'язок рівнянь методом варіації довільних сталих:

$$7.70. y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

$$7.71. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Розв'яжіть системи диференціальних рівнянь:

7.72. $\frac{dx}{dt} = 2x - y, \frac{dy}{dt} = 3x - 2y.$

7.73. $\frac{dx}{dt} = 2x + y, \frac{dy}{dt} = x + 2y, x(0)=1, y(0)=3.$

Розв'яжіть різницеві рівняння:

7.74. $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 4 \cdot 5^n.$

7.75. $y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = n \cdot 5^n.$

7.76. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2 \cdot 3^n.$

7.77. $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = n \cdot 2^n.$

Розв'яжіть такі задачі:

7.78. Функція граничного прибутку деякого підприємства має такий вигляд: $R'(x) = 40 - 0,08x - 0,006x^2.$

Визначте функцію прибутку.

7.79. Визначте функцію попиту за такої початкової умови: $x = 4$ за $p = 10$. Відомо, що її еластичність є сталою і дорівнює $E_p(x) = -2.$

7.80. Відомо, що еластичність виробничої функції $y = f(x)$ відносно певного фактора x характеризується таким співвідношенням: $E_x(y) = \frac{2x^2 - x}{x^2 - x - 1}.$

Визначте виробничу функцію, якщо відомо, що її графік проходить через точку $M(1, 2).$

7.81. Повні витрати виробництва y є функцією від загального обсягу продукції x . Відомо, що граничні та повні витрати для всіх значень x задовольняють таке рівняння: $y' - 4y + x = 0.$

Визначте функцію повних витрат, яка задовольняє таку початкову умову: $y(0) = 0.$

7.82. Визначте функцію попиту, якщо її еластичність визначено таким співвідношенням: $E_p(x) = \frac{x - 300}{x}$, де $0 < x < 300$; відомо, що $x = 12$ за $p = 36.$

7.83. Чисельність населення деякого робітничого селища задовольняє таке диференціальне рівняння: $y'(t) = 0,1y(1 - 10^{-5}y)$, де час t вимірюють у роках. У початковий момент чисельність населення становила 5 000 громадян.

Визначте, через скільки років чисельність населення зросте в 5 разів.

7.84. Функції попиту та пропозиції, відповідно, мають такий вигляд: $x(p) = 80 - 4p + 3p'$, $y(p) = 104 - 8p + p'$.

Установіть залежність рівноважної ціни від часу, якщо $p = 2$ за $t = 0$ та чи є рівноважна ціна стійкою.

7.85. Визначте залежність ціни p від часу t , якщо попит і пропозицію визначають такими співвідношеннями: $x(t) = p'' - 4p' - p + 17$, $y(t) = 2p'' + p' + 3p + 5$, $p(0) = 3$, $x(0) = 11$, $x(t) = y(t)$.

7.86. Знайдіть розв'язок різницевого рівняння Гікса:

$$y(t) - 2,4y(t-1) + 1,28y(t-2) = 0,06.$$

Проаналізуйте поведінку загального розв'язку цього рівняння.



Відповіді

7.14. Так.

7.15. Так.

7.16. Ні.

7.17. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \sqrt{9 - y^2} = C.$ **7.18.** $\ln|xy| + \frac{y-x}{xy} = C.$

7.19. $2 \sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = C.$

7.20. $\operatorname{tg} y = 1 - x + \operatorname{tg} x.$

7.21. $y = e^x(x - 2).$

7.22. $3 \arctg x^2 + 2 \arctg y^3 = \pi/2.$

7.23. $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}.$

7.24. $y = Ce^{\frac{y}{x}}.$

$$7.25. y = xe^{Cx^2+1}.$$

$$7.26. y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{2C}.$$

$$7.27. x(x+3y)^2 = C.$$

$$7.28. y = x \arcsin x.$$

$$7.29. (x-2)^2 - y^2 = 4.$$

$$7.30. y = x \ln(ey).$$

$$7.31. x = 3e^{\operatorname{tg} \frac{y}{x}}.$$

$$7.32. y = 1 + x^2 + C\sqrt{1+x^2}.$$

$$7.33. y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + C \right).$$

$$7.34. y = x \sin x + Cx.$$

$$7.35. y^2 = \frac{e^{x^2}}{2(x+C)}.$$

$$7.36. y = \frac{x^2}{2} e^{-3x}.$$

$$7.37. y = \frac{1}{2} x^2 \ln x.$$

$$7.38. y = \frac{2(x^2-1)}{x^2-4}.$$

$$7.39. y = \frac{x^3}{6} - \frac{\sin 2x}{4} + C_1 x + C_2.$$

$$7.40. C_1 y = x + \frac{x^3}{3} + C_2.$$

$$7.41. y = C_1 e^{c_2 x} + \frac{1}{C_2}.$$

$$7.42. y = -\ln \cos x.$$

$$7.43. y = xe^x - e^x + \frac{1}{2}.$$

$$7.44. y^3 - y = 3x.$$

$$7.45. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}.$$

$$7.46. y = C_1 e^{-3x} + C_2.$$

$$7.47. y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

$$7.48. y = e^x \left(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2} \right).$$

$$7.49. y = e^{2x}.$$

$$7.50. y = (2x+1)e^{-x}.$$

$$7.51. y = \sin 2x.$$

$$7.52. y = -\frac{1}{3}e^x \cos 3x.$$

$$7.53. y = C_1 e^x + C_2 e^{7x} + 2.$$

$$7.54. y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}.$$

$$7.55. y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{12} - x \right) e^{-2x}.$$

$$7.56. y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x e^x.$$

$$7.57. y = (C_1 + C_2 x) e^x + x^2 e^x.$$

$$7.58. y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{6}{5} \sin 2x - \frac{2}{5} \cos 2x.$$

$$7.59. y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{3} \sin x.$$

$$7.60. y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \sin x.$$

$$7.61. y = e^x + x^2 + 1.$$

$$7.62. y = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{7}{8} \cos 2x + \frac{3}{8} \sin 2x.$$

$$7.63. y = \frac{13}{16} e^{2x} + \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{4} x \right) e^{-2x}.$$

$$7.64. y = \frac{3}{2} x^2 e^{-2x}.$$

$$7.65. y = \frac{\sin 2x}{3} - \frac{\sin x}{3} - \cos x.$$

$$7.66. y = (Ax^2 + Bx + C) x^2 e^{5x}.$$

$$7.67. y = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

$$7.68. y = A \sin x + B \cos x + A_1 x^2 e^{-x}.$$

$$7.69. y = (Ax^2 + Bx + c)x + (A_1 x + B_1) x e^{-10x}.$$

$$7.70. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x.$$

$$7.71. y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^x + x e^x \ln|x|.$$

$$7.72. x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, y = C_1 e^t + 3C_2 e^{-t}.$$

$$7.73. x = 2e^{3t} - e^t, y = 2e^{3t} + e^t. \quad 7.74. y_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{2}{3} 5^n.$$

$$7.75. y_n = C_1 \cos \frac{\pi}{3} n + C_2 \sin \frac{\pi}{3} n + \left(\frac{n}{21} - \frac{5}{49} \right) 5^n.$$

$$7.76. y_n = 2^n (C_1 + C_2 n) 3^n + 2 \cdot 3^n. \quad 7.77. y_n = (C_1 + C_2 n) 3^n + (n + 4) 2^n.$$

$$7.78. R(x) = 40x - 0,04x^2 - 0,002x^3. \quad 7.79. p\sqrt{x} = 20.$$

$$7.80. y = 2\left(1 + x - x^2\right). \quad 7.81. y = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{4}e^{4x} + \frac{1}{4}\right).$$

$$7.82. p = 37,5 - 0,125x.$$

$$7.83. t \approx 18,46 \text{ року.}$$

$$7.84. p = -4e^{-2t} + 6.$$

$$7.85. p(t) = \frac{1}{9}(-e^{-4t} + e^{-t}) + 3. \quad 7.86. y(t) = C_1 (0,8)^t + C_2 (1,6)^t - 0,5.$$

Відповіді до тестових завдань

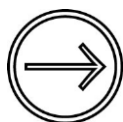
Номери підрозділів	Номери тестових завдань									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
27	в	а	б	г	в	б	а	в	г	б
28	б	в	г	а	б	а	в	г	а	б
29	г	б	а	в	б	г	а	в	г	а
30	б	в	а	г	б	а	в	б	г	а
31	а	в	г	б	а	г	б	в	а	г

Розділ 8. Ряди



Досліджуючи природні явища, учені часто звертали увагу на існування певних послідовностей та їхні властивості. Ці послідовності здавалися такими привабливими, що за їхньою допомогою намагалися описувати закони природи. Одну з найвідоміших послідовностей утворюють *числа Фібоначчі*, які застосовують зараз, наприклад, під час торгівлі на ринку «Форекс» для визначення рівня, якого може досягти ціна.

Однак цікаві властивості мають не тільки самі послідовності, але й границі сум нескінченної кількості членів послідовностей. Такі суми використовують для наближеного обчислення значень усіх елементарних функцій та під час складання таблиць їхніх значень; обчислення інтегралів, які не можна «взяти»; розв’язування деяких типів диференціальних рівнянь тощо. Нескінченні суми, утворені з елементів послідовностей є темою цього розділу.



Після вивчення цього розділу ви зможете:

- розрізняти типи рядів;
- володіти методами дослідження рядів на збіжність;
- застосовувати ряди в наближених обчисленнях;
- розуміти зміст величин, пов’язаних із рядами, у задачах економіки;
- знати типи економічних задач, для розв’язання яких доцільно застосовувати ряди.

32. Основні поняття та означення.

Необхідна ознака збіжності ряду

Основні питання:

- 32.1. Числовий ряд та його збіжність.
- 32.2. Ряд геометричної прогресії.
- 32.3. Гармонійний ряд.
- 32.4. Властивості збіжних рядів.
- 32.5. Необхідна ознака збіжності ряду.

32.1. Числовий ряд та його збіжність

Нехай задано нескінченну послідовність чисел $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ або послідовність функцій $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$.

Розгляньмо спочатку числову послідовність та введемо поняття числового ряду. Послідовність функцій є предметом розгляду в наступних підрозділах.

Числовим рядом називають вираз такого вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (32.1)$$

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ мають назву **членів ряду**.

Функцію $u_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, яка дає змогу записати будь-який член ряду за його номером n , називають **загальним членом** ряду. Числовий ряд вважають *заданим*, якщо відомо формулу його загального члена або будь-яке інше правило, за яким можна визначити довільний член ряду.



Подаймо ряд у вигляді нескінченної суми його членів, якщо загальний член задано такою формулою:

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n}.$$

Послідовно підставмо у формулу для u_n значення $n = 1, 2, \dots$. У результаті маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} + \dots$$



Подаймо ряд у вигляді нескінченної суми його членів, якщо загальний член задано такою формулою:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Відповідний йому ряд має такий вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots.$$

Зазначмо, що в наведених прикладах ряд відтворювали за вказаним загальним членом. У певному сенсі можна ставити й обернену задачу, а саме задачу про визначення загального члена ряду за кількома заданими доданками нескінченної суми. Таку задачу розв'язують неоднозначно, тому намагаються визначити формулу загального члена ряду найпростішого вигляду.



Запишімо формулу загального члена ряду, який задано у вигляді суми перших чотирьох його членів:

$$\frac{1}{1 \cdot 7} - \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} - \frac{1}{7 \cdot 13} + \dots$$

Спочатку потрібно проаналізувати закономірність утворення цих чисел під час зростання номера доданка. Наприклад, кожен член ряду має вигляд дробу з одиницею в чисельнику та добутку двох непарних чисел у знаменнику таких, що перші числа утворюють послідовність непарних чисел у порядку їхнього зростання, а друге число на шість одиниць є більшим за перше. Оскільки знаки членів ряду чергуються, то загальний член ряду можна записати в такому вигляді:

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}.$$

Суму перших n членів ряду називають **частковою сумою ряду**.

Наприклад, $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ – це суми одного, двох, трьох членів ряду, відповідно.

А в загальному випадку це має такий вигляд:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i. \quad (32.2)$$

Послідовність часткових сум може мати скінченну чи нескінченну границю або не мати границі взагалі.

Числовий ряд називають **збіжним**, якщо послідовність його часткових сум збігається, тобто існує така скінченна границя:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (32.3)$$

водночас число S називають **сумою ряду**.

Ряд називають **розбіжним**, якщо границі часткових сум не існує або вона дорівнює нескінченності.

Якщо ряд збігається і його сума дорівнює S , то її записують так:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i. \quad (32.4)$$

Установлення факту щодо збіжності чи розбіжності числового ряду називають **дослідженням ряду на збіжність**.



Дослідімо на збіжність такий числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3n+1) = 4 + 7 + 10 + 13 + \dots$$

Цей ряд є нескінченною сумою членів арифметичної прогресії з першим членом $a_1 = 4$ та різницею $d = 3$. За означенням (32.2), запишімо часткову суму перших n членів цього ряду:

$$S_n = 4 + 7 + 10 + 13 + \dots + (3n+1).$$

Цю суму можна обчислити за формулою суми n перших членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{3n+5}{2} \cdot n,$$

отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(3n+5)}{2} = \infty,$$

тобто ряд *розбігається*.



Перевірмо ряд на збіжність, і якщо ряд збігається, то обчислимо його суму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

Перетворимо загальний член ряду за такою формулою:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тоді часткова сума дорівнює:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

тобто ряд *збігається*, а його *сума* дорівнює числу 1.



Дослідимо на збіжність такий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$$

Утворивши послідовність часткових сум цього ряду, маємо:

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots$$

Зрозуміло, що така послідовність є обмеженою, але не має границі, отже, за означенням ряд *розбігається*.

32.2. Ряд геометричної прогресії

Розгляньмо нескінченну геометричну прогресію. Відомо, що загальний член геометричної прогресії описано такою формулою:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де b_1 – перший член геометричної прогресії, а q – її знаменник.

Тоді числовий ряд, який утворено із членів геометричної прогресії, називають **рядом геометричної прогресії**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} + \dots \quad (32.5)$$

Часткову суму такого ряду обчислюють за такою формулою:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}. \quad (32.6)$$

Для перевірки ряду на збіжність потрібно дослідити границю послідовності таких часткових сум:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n),$$

залежно від знаменника прогресії q .

1. Нехай $|q| < 1$. Границя часткової суми ряду за $n \rightarrow \infty$ існує:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{b_1}{1 - q},$$

оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Отже, ряд, що складається із членів нескінченно спадної геометричної прогресії, збігається.

2. Нехай $|q| > 1$. Границя часткової суми ряду за $n \rightarrow \infty$ є нескінченною, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

Отже, у цьому разі ряд розбігається.

3. Нехай $q=1$. У цьому разі часткова сума ряду є сумою n однакових доданків: $S_n = b_1 + b_1 + b_1 + \dots + b_1 = nb_1$.

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, тобто відповідний ряд є розбіжним.

4. Нехай $q=-1$. Тоді часткову суму ряду можна обчислити так:

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ є парним;} \\ b_1, & \text{якщо } n \text{ є непарним.} \end{cases}$$

Звідси випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує, а це означає, що відповідний ряд є розбіжним.

Отже, доведено, що збіжність ряду геометричної прогресії залежить від значення її знаменника. Ряд геометричної прогресії збігається, якщо $|q| < 1$, та розбігається, якщо $|q| \geq 1$.

32.3. Гармонійний ряд

Числовий ряд, який має такий вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \quad (32.7)$$

називають **гармонійним рядом**.

Проведімо дослідження цього ряду на збіжність.

Спочатку запишімо ряд у такому вигляді:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Тепер утворімо із цього ряду інший ряд, замінивши доданки в дужках найменшим із них. Маємо такий допоміжний ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Особливість такого ряду полягає в тому, що кожна сума дробів у дужках дорівнює $1/2$.

Обчислимо часткову суму S_n допоміжного ряду, де $n = 2^k$ (k – кількість доданків, що виділені дужками в частковій сумі допоміжного ряду):

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2}k.$$

Якщо $k \rightarrow \infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k} = \infty$. Оскільки послідовність часткових сум є необмеженою, то допоміжний ряд є розбіжним.

Часткова сума початкового ряду (гармонійного) за $n = 2^k$ є більшою за часткову суму допоміжного, тому послідовність часткових сум гармонійного ряду також є необмеженою.

Отже, гармонійний ряд (32.7) є розбіжним.

32.4. Властивості збіжних рядів

Ряд, що визначено із заданого відкиданням перших n його членів, будемо називати n -м **залишком** (або просто **залишком**) такого числового ряду:

$$R_n = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i} = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots \quad (32.8)$$

Першим членом n -го залишку ряду є член початкового ряду, що має номер $(n+1)$.

Теорема 32.1. Якщо ряд (32.1) збігається, то збігається і його залишок, та, навпаки, якщо збігається залишок ряду, то збігається й заданий ряд.

Доведення. Запишімо часткову суму $n+m$ членів початкового ряду:

$$S_{n+m} = S_n + (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m}), \quad (32.9)$$

зафіксуємо номер n і перейдімо в рівності (32.9) до границі за $m \rightarrow \infty$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{n+m} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_n + \lim_{m \rightarrow \infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m}).$$

Границя лівої частини рівності існує, бо, за умовою теореми, початковий ряд є збіжним, і вона дорівнює сумі ряду S . У правій частині рівності границя

першого доданка є сталою S_n , бо число n є фіксованим, тоді границя другого доданка існує і є скінченною (позначмо її через R), тобто залишок збігається, а його сума дорівнює R .

Отже,

$$S = S_n + R. \quad (32.10)$$

Доведімо обернене твердження. Нехай залишок ряду збігається, тобто існує скінченна границя R_n . Тоді існує границя правої частини рівності, бо S_n є сталою, значить існує і границя лівої частини.

Із рівності (32.10) випливає, що залишок ряду, що збігається, прямує до нуля за $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = 0,$$

тобто часткові суми зі збільшенням номера n наближаються до суми ряду S . ■



Збіжність або розбіжність ряду не порушують, якщо вилучають із нього або додають до нього скінченну кількість членів.

Теорема 32.2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається і має суму $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$,

то збігається й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot u_n$, який визначено із вихідного ряду множенням кожного його члена на стале число λ , а сума утвореного ряду дорівнює сумі вихідного ряду, яка помножена на λ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot u_n = \lambda \cdot S. \quad (32.11)$$

Теорема 32.3. Якщо ряди із загальними членами u_n і v_n , збігаються та є відомими для кожного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = B,$$

то для довільних чисел α і β ряд із загальним членом $\alpha u_n + \beta v_n$ є збіжним, а його сума дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha A + \beta B. \quad (32.12)$$

Останні дві теореми легко довести на основі властивостей границь.



Обчислимо суму такого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{1}{3^n} + 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \right)$.

Загальний член цього ряду має такий вигляд:

$$2 \cdot \frac{1}{3^n} + 6 \cdot \frac{1}{2^n} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Розгляньмо допоміжні ряди із загальними членами $u_n = (1/3)^n$ та $v_n = (1/2)^n$. Ці ряди збігаються, оскільки вони є нескінченно спадними геометричними прогресіями, знаменники яких за модулем є меншими за одиницю.

Звідси, за теоремою 32.3, досліджуваний ряд теж є збіжним. Для знаходження його суми спочатку потрібно обчислити суму кожного з допоміжних рядів.

Для першого ряду сума має такий вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}.$$

Для другого ряду сума має такий вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

Тепер, за ф-лою (32.12), обчислимо суму досліджуваного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot u_n + \beta \cdot v_n) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 1 = 7.$$

32.5. Необхідна ознака збіжності ряду

Дослідження числових рядів на збіжність за означенням є достатньо складною задачею, оскільки далеко не для кожного ряду можна визначити загальний член послідовності його часткових сум. Тому здебільшого питання про збіжність чи розбіжність ряду розв'язують за допомогою так званих ознак збіжності. Серед них виокремлюють *необхідну* ознаку збіжності, яка є єдиною для всіх типів числових рядів, і *достатні* ознаки, використання яких залежать від типу ряду, що досліджують.

Теорема 32.4 (необхідна ознака збіжності). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то границя загального члена ряду за $n \rightarrow \infty$ дорівнює 0, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (32.13)$$

Доведення. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається і його сума дорівнює S . Оскільки

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \text{ то можна записати } u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Визначмо границі лівої та правої частин останньої рівності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

■

Співвідношення (32.13) є *необхідною* ознакою збіжності ряду.



Слід зауважити, що якщо необхідну умову збіжності не виконано, то досліджуваний ряд є розбіжним. Тобто умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \quad (32.14)$$

є достатньою ознакою розбіжності числового ряду.

Дійсно, якби ряд збігався, то границя його загального члена дорівнювала б нулю, що суперечить умові $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$.

Отже, ряд розбігається.

Проте, якщо необхідну ознаку виконано, то це ще не означає, що відповідний ряд є збіжним. Тобто питання про збіжність ряду залишається відкритим і потребує подальшого дослідження. Наприклад, для гармонійного ряду необхідну ознаку збіжності виконано, але безпосереднє обчислення границі часткової суми ряду показує, що ряд є розбіжним.



Дослідімо, чи збігається такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n-3}$.

Для цього потрібно визначити границю загального члена ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{5n-3} = \frac{2}{5} \neq 0.$$

Отже, необхідну ознаку не виконано, звідси випливає, що ряд розбігається.



Дослідімо такий ряд на збіжність: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Перевірмо виконання необхідної ознаки збіжності. Згідно із другою особливою границею, маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = 1/e \neq 0.$$

Це означає, що необхідну ознаку збіжності ряду не виконано, отже, цей ряд є розбіжним.



Дослідімо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n^2-3}$.

Визначмо границю загального члена ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{5n^2-3} = 0.$$

Виконання необхідної ознаки збіжності щодо цього ряду певної відповіді не дає: ряд може збігатися, а може розбігатися. Але аналіз загального члена ряду показує, що ряд на нескінченності поводить себе як гармонійний ряд, помножений на $\lambda = 2/5$:

$$\frac{2n+1}{5n^2-3} > \frac{2}{5n},$$

із чого випливає, що вихідний ряд розбігається, бо послідовність його часткових сум не є обмеженою, оскільки її члени є більшими за члени послідовності часткових сум розбіжного ряду.



Дослідімо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+3}$.

Визначмо границю загального члена ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^3+3} = 0.$$

Однак виконання необхідної ознаки збіжності ще не дає певної відповіді щодо збіжності ряду.

Якщо ж загальний член ряду подати в такому вигляді:

$$u_n = \frac{n-1}{n^3+3} = \frac{1}{\frac{n^3+3}{n-1}} = \frac{1}{n^2+n+1+\frac{4}{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

і порівняти його із загальним членом $v_n = \frac{1}{n^2+n}$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, щодо якого було раніше доведено, що він є збіжним.

Зрозуміло, що

$$n^2+n+1+\frac{4}{n-1} > n^2+n,$$

тобто $u_n < v_n$.

Отже, часткові суми початкового ряду є меншими за відповідні часткові суми збіжного ряду, а це означає, що їхня послідовність за $n \rightarrow \infty$ має скінченну границю і досліджуваний ряд збігається.

В обох попередніх прикладах дослідження рядів на збіжність (у разі виконання необхідної ознаки збіжності) зведено до їхнього порівняння з рядами, «поведінка» яких – збіжність чи розбіжність – є відомою. Такий підхід до дослідження рядів є основою однієї з достатніх ознак збіжності, які розглядають у підрозд. 33.



Ключові терміни

Числовий ряд; члени ряду; загальний член ряду; часткова сума ряду; сума ряду; збіжний та розбіжний ряди; дослідження числового ряду на збіжність; ряд геометричної прогресії; гармонійний ряд; n -й залишок ряду; властивості збіжних рядів; необхідна ознака збіжності ряду; достатня ознака розбіжності ряду.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають числовим рядом?
2. За яких умов числовий ряд вважають заданим?
3. Що називають частковою сумою ряду?
4. Який ряд називають збіжним, а який – розбіжним?
5. Які є властивості збіжних рядів?
6. За яких умов збігається або розбігається ряд геометричної прогресії?
7. Що можна сказати про збіжність або розбіжність гармонійного ряду?
8. У чому полягає необхідна ознака збіжності ряду?
9. Що можна сказати про поведінку ряду, якщо границя його загального члена не дорівнює нулю за необмеженого зростання n ?
10. Що можна сказати про поведінку ряду, якщо його загальний член прямує до нуля?



Тестові завдання до підрозділу 32

1. Укажіть, який із символічних записів є означенням числового ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$;

в) $\sum_{n=1}^k u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \dots \cdot u_n$.

2. Закінчіть твердження «Послідовність часткових сум може ...»:

- а) мати скінченну границю;
- б) мати нескінченну границю;
- в) не мати границі взагалі;
- г) мати або скінченну, або нескінченну границю.

3. Закінчіть твердження «Сума числового ряду – це ...»:

- а) сума всіх його членів;
- б) границя його часткових сум;
- в) сума перших його членів;
- г) сума крайніх його членів.

4. Виберіть правильне твердження серед наведених:

- а) гармонійний ряд завжди збігається;
- б) гармонійний ряд завжди розбігається;
- в) гармонійний ряд може збігатися, а може розбігатися;
- г) немає правильної відповіді.

5. Закінчіть твердження: «Числовий ряд, що має такий вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \text{ є } \dots \rangle$$

- а) збіжним; б) гармонійним;
- в) узагальненим гармонійним; г) умовно збіжним.

6. Виберіть правильне твердження серед наведених:

- а) якщо загальний член числового ряду є нескінченно малим, то ряд збігається;
- б) якщо границя загального члена числового ряду дорівнює нулю, то ряд розбігається;

в) якщо числовий ряд розбігається, то загальний член ряду не є нескінченно малим;

г) якщо числовий ряд збігається, то загальний член ряду є нескінченно малим.

7. Укажіть формулу загального члена числового ряду $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$:

а) $u_n = \frac{1}{n(n+3)}$;

б) $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

в) $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$;

г) $u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

8. Укажіть формулу загального члена числового ряду $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$:

а) $u_n = \frac{1}{n(n+3)}$;

б) $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

в) $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$;

г) $u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

9. За якою необхідною ознакою збіжності можна зробити висновок розбіжності числового ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{5n^2-7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{7n-5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln \frac{n^2+5}{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{5}{n}$?

10. Обчисліть суму ряду $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$:

а) 1; б) 2; в) 3; г) $\frac{1}{2}$.

Література: [4 – 6; 14; 18].

33. Достатні умови збіжності числових рядів

Основні питання:

33.1. Ознака порівняння рядів із додатними членами.

33.2. Ознака Д'Аламбера.

33.3. Радикальна ознака Коші.

33.4. Інтегральна ознака Коші.

33.5. Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду.

33.6. Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду.

Розгляньмо спочатку ряди, члени яких не змінюють знак, залежно від n , тобто всі члени ряду мають однаковий знак, отже, усі члени ряду є або додатними, або від'ємними. Такі ряди називають **знакосталими**.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називають **рядом із додатними членами**, якщо $u_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Якщо ж усі члени ряду є від'ємними, тобто маємо ряд із *від'ємними членами*, то його дослідження на збіжність зводять до дослідження ряду з додатними членами винесенням за дужки множника (-1) .

33.1. Ознака порівняння рядів із додатними членами

Теорема 33.1. Нехай маємо два ряди з такими додатними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (33.1)$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (33.2)$$

Якщо для всіх членів цих рядів є правильними такі нерівності:

$$0 \leq u_n \leq v_n, \quad (33.3)$$

то зі збіжності ряду із загальним членом v_n випливає, що ряд із загальним членом u_n теж збігається, а з розбіжності ряду із загальним членом u_n випливає розбіжність ряду із загальним членом v_n .

Доведення. Доведімо спочатку перше твердження теореми. Для цього розгляньмо такі часткові суми:

$$S_n = \sum_{i=1}^n u_i \quad \text{і} \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^n v_i.$$

Зі збіжності ряду (33.2) випливає існування скінченної границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, причому $\sigma_n \leq \sigma$, оскільки за умовою $v_n \geq 0$. Крім того, якщо за умовою $0 \leq u_n \leq v_n$, то $S_n \leq \sigma_n$, тому $0 \leq S_n \leq \sigma_n \leq \sigma$. Це означає, що послідовність часткових сум S_n монотонно зростає і є обмеженою зверху. За теоремою Вєєрштрасса вона має границю, тобто існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Отже, ряд із загальним членом u_n збігається. Першу частину теореми доведено.

Для доведення другої частини припустімо, що існує розбіжний ряд із загальним членом u_n , а ряд із загальним членом v_n збігається.

Із першої частини доведення випливає, що перший ряд із загальним членом u_n має бути збіжним, що суперечить зробленому припущенню, отже, воно є хибним. Це означає, що ряд із загальним членом v_n розбігається. ■

Ця теорема є базою для встановлення факту збіжності ряду за *ознакою порівняння*.

Ряди, із якими порівнюють досліджувані ряди, називають **еталонними рядами** (від фр. *etalon* – «зразок міри»). Про такі ряди заздалегідь відомо чи збігаються вони, чи розбігаються.



Еталонні ряди, які часто використовують для порівняння:

Геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$ – збігається, якщо $|q| < 1$,
розбігається, якщо $|q| \geq 1$.

Гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є розбіжним.

Узагальнений гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ – збігається, якщо $s > 1$,
розбігається, якщо $s \leq 1$.

Під час дослідження на збіжність рядів із додатними членами буває зручніше використовувати *ознаку порівняння в граничній формі*. Згідно із цією ознакою, розглядають границю відношення загальних членів двох рядів за $n \rightarrow \infty$.

Якщо існує така скінченна, відмінна від нуля границя:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \quad (0 < k < \infty), \quad (33.4)$$

то обидва ряди (33.1) і (33.2) поведуть себе однаково, тобто або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Справді, якщо умову (33.4) виконано, то можна довести, що, починаючи з деякого номера, виконано умову ознаки порівняння.

III Дослідімо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{3^n}$.

За очевидною нерівністю $3^n < (n+1) \cdot 3^n$, правильною для $n \geq 1$, маємо таку нерівність:

$$\frac{1}{(n+1)3^n} < \frac{1}{3^n},$$

де $n \in \mathbf{N}$,

і розглянемо ряди із загальними членами $u_n = \frac{1}{(n+1)3^n}$ та $v_n = \frac{1}{3^n}$.

Ряд із загальним членом v_n збігається як ряд нескінченної геометричної прогресії із знаменником $q = 1/3 < 1$.

Отже, за ознакою порівняння, ряд із загальним членом u_n також є збіжним.

III Дослідімо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5}$.

Для порівняння візьмімо ряд із загальним членом $v_n = \frac{1}{n}$, тобто гармонійний ряд, який є розбіжним. Застосуємо до цих рядів ознаку порівняння в граничній формі.

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1) \cdot n}{3n^2 + 5} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

то обидва ряди поведуть себе однаково, а це означає, що досліджуваний ряд теж розбігається.



Дослідімо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Потрібно записати ряд у розгорнутій формі:

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n \cdot (n+1)}} + \dots$$

Порівняймо цей ряд із рядом, що є залишком гармонійного ряду, а тому є розбіжним:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Для цього перевірмо виконання умови ознаки порівняння (теорема 33.1).
Маємо:

$$\sqrt{1 \cdot 2} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} > \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2 \cdot 3} < \sqrt{3 \cdot 3} = 3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} > \frac{1}{3}$$

і в загальному випадку:

$$\sqrt{n(n+1)} < \sqrt{(n+1)(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}.$$

Зважаючи на те, що члени цього ряду є більшими за відповідні члени розбіжного ряду $\left(u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > v_n = \frac{1}{n+1}\right)$, то, за ознакою порівняння, досліджуваний ряд є розбіжним.

33.2. Ознака Д'Аламбера

Теорема 33.2. Нехай для ряду з додатним загальним членом $u_n > 0$ існує границя відношення *наступного* члена ряду u_{n+1} до *попереднього* – u_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l. \quad (33.5)$$

Тоді:

1. Якщо $l < 1$, то ряд збігається.
2. Якщо $l > 1$, то ряд розбігається.
3. Якщо $l = 1$, то інформації недостатньо, щоб зробити висновок про збіжність чи розбіжність ряду.

Доведення. Розгляньмо перше твердження. Нехай $l < 1$. Тоді, за означенням границі послідовності для довільного $\varepsilon > 0$, існує таке N , що для всіх $n \geq N$ виконано таку нерівність:

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

Уведемо позначення $l + \varepsilon = r$ і виберімо $\varepsilon > 0$ таким, щоб була виконаною нерівність $r < 1$.

Тоді

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < r, \quad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < r, \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < r, \dots$$

Звідси маємо:

$$u_{N+1} < r \cdot u_N,$$

$$u_{N+2} < r \cdot u_{N+1} < r^2 \cdot u_N,$$

$$u_{N+3} < r \cdot u_{N+2} < r^3 \cdot u_N,$$

.....

Побудуємо такий ряд:

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots = \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i,$$

який є N -м залишком досліджуваного ряду. Члени цього залишку є меншими за відповідні члени нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом u_N і знаменником r , оскільки $u_{N+m} < u_N \cdot r^m$.

Тому, за ознакою порівняння, N -й залишок досліджуваного ряду збігається, отже, збігається і сам ряд.

Розгляньмо друге твердження теореми. Нехай $l > 1$.

Тоді виберімо $\varepsilon > 0$ таким малим, щоб для числа $l - \varepsilon = r$ була виконаною нерівність $r > 1$.

За достатньо великих значень n будемо мати таку нерівність:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n.$$

У цьому разі кожний наступний член ряду є більшим за попередній. Оскільки всі вони є додатними, то не можна виконати необхідну умову збіжності ряду.

Отже, за $l > 1$ досліджуваний ряд розбігається.

Розгляньмо третє твердження теореми. Нехай $l = 1$, то в цьому разі ряд може виявитися як збіжним, так і розбіжним ■.



Дослідімо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Випишуймо загальний член ряду $u_n = \frac{n}{3^n}$.

Тоді $u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$.

Визначмо відношення наступного члена ряду до попереднього:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1) \cdot 3^n}{n \cdot 3^{n+1}} = \frac{n+1}{3n}$$

й обчислимо границю цього відношення.

Маємо:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд збігається.



Дослідімо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

За загальним членом u_n визначаймо наступний (u_{n+1} -й) член ряду:

$$u_n = \frac{2^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Утворюймо їхнє відношення:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!} = \frac{2}{n+1},$$

обчислюймо його границю і зробімо такий висновок:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

Отже, ряд збігається за ознакою Д'Аламбера.



Дослідімо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$.

Оскільки $u_n = \frac{n!}{5^n}$, тоді $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$.

Визначмо границю:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n(n+1)!}{n!5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5} = +\infty > 1.$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд розбігається.



За ознакою Д'Аламбера дослідімо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Ми вже досліджували цей ряд і знаємо, що він є збіжним. Застосуймо тепер ознаку Д'Аламбера.

Визначмо границю відношення наступного члена ряду до попереднього:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

Отже, ознака Д'Аламбера не дає змоги зробити висновок щодо збіжності цього ряду, хоча саме про цей ряд ми знаємо, що він є збіжним і його сума дорівнює числу 1.



За ознакою Д'Аламбера дослідимо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Це гармонійний ряд, і ми знаємо, що він розбігається.

Розгляньмо границю відношення наступного члена до попереднього:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Отже, ознака Д'Аламбера не дає змоги зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності цього ряду.

На останніх двох прикладах ми пересвідчилися, що ознака Д'Аламбера в разі $l=1$ не дає відповіді на питання про збіжність чи розбіжність ряду. Існують як збіжні, так і розбіжні ряди, для яких виконано умову $l=1$.

33.3. Радикальна ознака Коші

Теорема 33.3. Нехай для ряду з додатним загальним членом $u_n > 0$ існує така границя:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l. \quad (33.6)$$

Тоді:

1. Якщо $l < 1$, то ряд збігається.
2. Якщо $l > 1$, то ряд розбігається.
3. Якщо $l = 1$, то інформації недостатньо, щоб зробити висновок про збіжність чи розбіжність ряду.

Доведення теореми є аналогічним доведенню теореми 33.2.

Твердження, що наведені в цій теоремі, називають **радикальною ознакою Коші**.



За допомогою радикальної ознаки Коші дослідимо на збіжність такий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+3}{3n+1} \right)^n.$$

Визначмо границю кореня n -го степеня із u_n -го і зробимо відповідний висновок:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+3}{3n+1} = \frac{5}{3} > 1 \Rightarrow \text{ряд розбігається.}$$



За допомогою радикальної ознаки Коші дослідимо на збіжність такий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}.$$

Визначмо границю кореня n -го степеня із u_n -го і зробимо відповідний висновок:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ряд збігається.}$$

33.4. Інтегральна ознака Коші

Теорема 33.4. Нехай $f(x)$ є невід'ємною незростаючою функцією, неперервною на проміжку $[1, +\infty)$, причому $f(1)=u_1$, $f(2)=u_2$, ..., $f(n)=u_n$,

Тоді:

1. Якщо невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ є збіжним, то й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – збіжним.

2. Якщо невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ є розбіжним, то й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ –

розбіжним.

Теорему наводьмо без доведення.

Твердження, що подані в цій теоремі, називають **інтегральна ознака Коші**.

Розгляньмо застосування інтегральної ознаки Коші на прикладах.



Дослідімо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, де $s = \text{const}$ ($s \in \mathbf{R}$).

Цей ряд називають **рядом Діріхле**, або **узагальненим гармонічним рядом**. Для дослідження цього ряду на збіжність застосуємо інтегральну ознаку Коші. Для цього обчислимо такий невластний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^s} = \\ &= \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-s} \right) \cdot x^{1-s} \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-s} \right) \cdot N^{1-s} + \frac{1}{s-1} = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & s > 1, \\ \infty, & s < 1, \end{cases} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln N = \infty, & s = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, за $s > 1$ невластний інтеграл є збіжним, а за $s \leq 1$ – розбіжним. Тому й ряд Діріхле є збіжним за $s > 1$ і розбіжним за $s \leq 1$.

За $s = 1$ ряд Діріхле називають **гармонічним рядом**. Цей ряд було розглянуто раніше:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$



Дослідімо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Обчислимо невластний інтеграл на проміжку $[1, +\infty)$ від такої функції:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)},$$

яку складаймо за загальним членом ряду u_n , підставивши, замість натурального n , неперервну змінну x , і зробимо відповідний висновок:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} dx = -\frac{1}{\ln(x+1)} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Невласний інтеграл збігається, отже, збігається й досліджуваний ряд.



Дослідімо на збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Розгляньмо функцію $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, яка за натуральних x дає члени досліджуваного ряду. Неважко пересвідчитися за допомогою похідної, що ця функція є монотонно спадною за $x \geq 1$.

Тому обчислімо такий невластний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-2e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^b) = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-1} - e^{-\sqrt{b}}) = \frac{2}{e}.$$

Невластний інтеграл є збіжним, отже, і досліджуваний ряд теж збіжним.

33.5. Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду

Знакозмінним рядом називають ряд, членами якого є дійсні числа довільного знака.

Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду ґрунтується на дослідженні ряду, який утворено з абсолютних величин членів цього ряду.

Теорема 33.5. Нехай маємо знакозмінний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (33.7)$$

Якщо такий ряд, який утворено з абсолютних величин його членів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (33.8)$$

збігається, то збігається й вихідний ряд.

Доведення. Позначмо n -ну часткову суму цього знакозмінного ряду через $S_n^{(1)}$.

Тоді

$$S_n^{(1)} = S_n^{(1)+} - S_n^{(1)-},$$

де $S_n^{(1)+}$ – сума всіх додатних доданків, а $S_n^{(1)-}$ – сума абсолютних величин усіх від’ємних доданків часткової суми $S_n^{(1)}$.

Визначмо, що n -на часткова сума ряду, який утворено з абсолютних величин членів початкового ряду, дорівнює $S_n^{(2)} = S_n^{(1)+} + S_n^{(1)-}$, де кожен із її доданків є зростаючою послідовністю. За умовою теореми, вона існує, а тому існують і границі послідовностей $S_n^{(1)+}$ і $S_n^{(1)-}$.

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)+} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)-},$$

то існування скінченної границі $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)}$ доведено.

Отже, цей знакозмінний ряд є збіжним. ■

Слід зазначити, що ця ознака є лише достатньою ознакою збіжності, але вона не є необхідною. Існують збіжні знакозмінні ряди, для яких ряди, утворені з абсолютних величин членів вихідного ряду, є розбіжними.

Знакозмінний ряд називають **абсолютно збіжним**, якщо збігається й ряд, який утворено з абсолютних величин його членів.

Якщо знакозмінний ряд збігається, а ряд, що утворено з абсолютних величин його членів розбігається, то такий ряд називають **умовно збіжним**.



Зауважмо, що для дослідження збіжного ряду на абсолютну або умовну

збіжність можна використовувати ознаки збіжності рядів із додатними членами, а саме: ознаки порівняння, ознаку Д’Аламбера, радикальну й інтегральну ознаки Коші. Якщо ж поведінка початкового ряду є невідомою, то на основі теореми 33.5 можна зробити висновок про збіжність цього ряду тільки за умови збіжності ряду, який складено з абсолютних величин членів знакозмінного ряду. Якщо ж ряд, який складено з абсолютних величин членів знакозмінного ряду розбігається, то на питання щодо збіжності чи розбіжності початкового ряду теорема відповіді не дає.



Проведімо дослідження на збіжність такого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$, $\alpha = \text{const}$.

Оскільки $|\sin n\alpha| \leq 1$, то $\left| \sin(n\alpha) \cdot \frac{1}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4}$. У правій частині останньої нерівності маємо загальний член ряду Діріхле, для якого $s = 4$. Цей ряд збігається, оскільки $s > 1$.

Отже, за ознакою порівняння рядів, ряд, який утворено з абсолютних величин членів знакозмінного ряду, збігається.

Тому досліджуваний ряд є абсолютно збіжним.

33.6. Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду

Окремим випадком знакозмінного ряду є ряд, у якого довільні два сусідні члени мають різні знаки. Його називають **знакопереміжний ряд**, і він має такий вигляд:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \quad u_n > 0. \quad (33.9)$$

Теорема 33.6 (ознака Лейбніца). Нехай для знакопереміжного ряду (33.9) виконано такі умови:

$$1) u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \dots; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (33.10)$$

Тобто кожний наступний член ряду за абсолютною величиною не є більшим за попередній, і границя модуля загального члена ряду за $n \rightarrow \infty$ дорівнює нулю.

Тоді цей ряд є збіжним, а його сума S є невід'ємною і не перевищує за абсолютною величиною перший член ряду, тобто $0 \leq S \leq u_1$.

Доведення. Розгляньмо випадок, якщо $n = 2m$, тобто n є парним числом. Тоді

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2m-1} - u_{2m}.$$

Перепишімо цю рівність так:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

З умови теореми випливає, що вираз у кожних дужках є невід'ємним.

Отже, сума $S_{2m} > 0$, і вона зростає зі зростанням m .

Запишімо цю суму інакше:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Отже, $S_{2m} \leq u_1$. Тому послідовність S_{2m} монотонно зростає і є обмеженою зверху.

Звідси випливає, що вона має границю, тобто

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S,$$

де число S належить проміжку $0 \leq S \leq u_1$ (під час обчислення границі враховано, що умова $n \rightarrow \infty$ тягне за собою умову $m \rightarrow \infty$).

Тепер доведемо, що часткові суми з непарними номерами мають свою границю те саме число S .

Розгляньмо для цього суму перших n членів ряду, де $n = 2m + 1$. Її можна записати в такому вигляді: $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$.

Визначмо границі лівої та правої частин цієї рівності за $n \rightarrow \infty$, а отже, і за $m \rightarrow \infty$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = S,$$

оскільки, за умовою теореми, $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$.

Доведено, що $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S$.

Отже, цей ряд збігається, бо довільна (із парним чи непарним номером) часткова сума S_n має одну й ту саму скінченну границю S за $n \rightarrow \infty$. ■

Перевірка виконання умов (33.10) теореми для знакопереміжного ряду є дослідженням його на збіжність за *ознакою Лейбніца*.

Наслідок. Якщо знакопереміжний ряд збігається, то збігається і його n -й залишок:

$$(-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + \dots),$$

а його сума не перевищує за абсолютною величиною модуля першого члена ряду, тобто u_{n+1} .

Справедливість наслідку випливає з того, що n -й залишок ряду, як і сам ряд, задовольняє умови ознаки Лейбніца.



Згідно з наслідком з ознаки Лейбніца, абсолютна похибка в разі заміни суми S збіжного знакопереміжного ряду сумою перших n членів, тобто його частковою сумою S_n , не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду:

$$|S - S_n| \leq u_{n+1}. \quad (33.11)$$



Дослідімо на збіжність такий знакопереміжний ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

Перевірмо виконання першої та другої вимог щодо збіжності знакопереміжного ряду, а саме:

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Обидві умови виконано, отже, заданий знакопереміжний ряд збігається за ознакою Лейбніца.

Ряд збігається умовно, оскільки ряд, що складається з абсолютних величин членів цього ряду $|u_n| = 1/n$, розбігається як гармонійний.



Дослідімо на абсолютну та умовну збіжність такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$.

Маємо знакопереміжний ряд, який збігається, бо виконано обидві умови ознаки Лейбніца.

Перевірмо тепер, збігається він абсолютно чи умовно. Для цього утворімо ряд із абсолютних величин членів досліджуваного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Цей ряд збігається як ряд Діріхле, у якого $s = 2 > 1$.

Отже, вихідний ряд збігається і до того ж абсолютно.

Зауважмо, що для перевірки першої умови ознаки Лейбніца

$u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq \dots$ можна визначити похідну від функції $f(x) = \frac{1}{x^2}$, що відпо-

відає загальному члену ряду, та показати, що похідна для всіх x , які є більшими за деяке додатне дійсне число x_0 . Перевірку виконання умов (33.10) можна починати з будь-якої з них.



Ключові терміни

Знакосталий ряд; ряд із додатними членами; ознака порівняння; ознака порівняння рядів у граничній формі; ознака Д'Аламбера; радикальна ознака Коші; інтегральна ознака Коші; ряд Діріхле, або узагальнений гармонійний ряд; знакозмінний ряд; абсолютно збіжний ряд; умовно збіжний ряд; знакопереміжний ряд; ознака Лейбніца.



Запитання для самоперевірки

1. Які є достатні ознаки збіжності знакододатних числових рядів?
2. Які можна навести приклади на застосування кожної достатньої ознаки?
3. Якщо одна із двох ознак, ознака Д'Аламбера чи радикальна ознака Коші, не дає відповіді на питання про збіжність ряду, то чи варто застосовувати іншу із цих ознак?
4. Які можна навести приклади дослідження ряду за різними ознаками?
5. Які ряди називають знакозмінними?
6. Як сформулювати достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду?
7. Якщо ряд, який складено з абсолютних величин членів знакозмінного ряду розбігається, то яким є вихідний ряд: збіжним чи розбіжним?
8. Які ряди називають знакопереміжними?
9. У чому полягає ознака Лейбніца?
10. Яку ознаку використовують для оцінювання похибки в разі заміни суми знакопереміжного ряду сумою його перших n членів?
11. Який ряд називають абсолютно збіжним?
12. Який ряд називають умовно збіжним?
13. Які є приклади абсолютно збіжних рядів?
14. Які є приклади умовно збіжних рядів?
15. У чому полягає загальний підхід до перевірки виконання нерівності $u_n \geq u_{n+1}$ під час застосування ознаки Лейбніца?
16. Із перевірки виконання якої умови ознаки Лейбніца слід починати дослідження знакопереміжного ряду на збіжність?



Тестові завдання до підрозділу 33

1. Який із наведених рядів є еталонним:

а) гармонійний; б) знакопереміжний; в) збіжний; г) розбіжний?

2. Закінчіть речення, щоб утворилося правильне твердження «Узагальнений гармонійний ряд називається рядом ...»:

а) Діріхле; б) Лейбніца; в) Коші; г) Д'Аламбера.

3. Укажіть ознаку, за допомогою якої можна дослідити числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 + 3n}{2n^3 - 4n + 1} \text{ на збіжність:}$$

а) інтегральна ознака Коші; б) ознака порівняння;
в) радикальна ознака Коші; г) ознака Д'Аламбера.

4. Укажіть ознаку, за допомогою якої можна дослідити числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \text{ на збіжність:}$$

а) інтегральна ознака Коші; б) ознака порівняння;
в) радикальна ознака Коші; г) ознака Д'Аламбера.

5. Укажіть ознаку, за допомогою якої можна дослідити числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ на збіжність:}$$

а) інтегральна ознака Коші; б) ознака порівняння;
в) радикальна ознака Коші; г) ознака Д'Аламбера.

6. Укажіть ознаку, за допомогою якої можна дослідити числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \text{ на збіжність:}$$

а) інтегральна ознака Коші; б) ознака порівняння;
в) радикальна ознака Коші; г) ознака Д'Аламбера.

7. Закінчіть речення, щоб утворилося правильне твердження «Ряд називають абсолютно збіжним, якщо ...»:

- а) сам ряд збігається, а ряд, що складений з абсолютних величин його членів розбігається;
- б) у нього довільні два сусідні члени мають різні знаки;
- в) збігається як сам ряд, так і ряд, що складений з абсолютних величин його членів;
- г) усі його члени є невід'ємними.

8. Закінчіть речення, щоб утворилося правильне твердження «Ряд називають умовно збіжним, якщо ...»:

- а) сам ряд збігається, а ряд, що складений з абсолютних величин його членів розбігається;
- б) у нього довільні два сусідні члени мають різні знаки;
- в) збігається як сам ряд, так і ряд, що складений з абсолютних величин його членів;
- г) усі його члени є невід'ємними.

9. Закінчіть речення, щоб утворилося правильне твердження «Ряд називають умовно збіжним, якщо ...»:

- а) сам ряд збігається, а ряд, що складений з абсолютних величин його членів розбігається;
- б) у нього довільні два сусідні члени мають різні знаки;
- в) збігається як сам ряд, так і ряд, що складений з абсолютних величин його членів;
- г) усі його члени є невід'ємними.

10. Якщо під час застосування ознаки Д'Аламбера маємо відповідь

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, то це означає, що:

- а) ряд є розбіжним;
- б) ряд є збіжним;
- в) потрібно додаткове дослідження;
- г) немає правильної відповіді.

Література: [4 – 6; 14; 18].

34. Степеневий ряд та його збіжність.

Ряди Тейлора та Маклорена

Основні питання:

- 34.1. Функціональні ряди. Степеневий ряд.
- 34.2. Область і радіус збіжності.
- 34.3. Властивості степеневих рядів.
- 34.4. Степеневі ряди Тейлора та Маклорена.

34.1. Функціональні ряди. Степеневий ряд

Поняття «функціональний ряд» є узагальненням поняття «числовий ряд»: елементи такого ряду є не сталими, а змінними величинами.

Ряд називають **функціональним**, якщо його членами є функції змінної x , які визначені й неперервні на деякій множині X , тобто ряд такого вигляду:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (34.1)$$

де $u_n(x)$ – загальний член ряду.

Точку $x = x_0$ називають **точкою збіжності функціонального ряду**, якщо в разі підстановки її в ряд утворюють збіжний числовий ряд. Сукупність усіх значень змінної x , для яких ряд (34.1) збігається, називають **областю збіжності функціонального ряду**.

Суму перших n членів ряду називають **n -ю частковою сумою** такого ряду:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x).$$

Часткові суми ряду, своєю чергою, утворюють послідовність функцій $\{S_n(x)\}$, що визначені й неперервні на деякій множині, яку називають **послідовністю часткових сум** ряду.

У кожній точці x області збіжності функціонального ряду за необмеженого зростання n існує скінченна границя послідовності його часткових сум:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x),$$

яку називають **сумою ряду** (34.1). Сума збіжного ряду є функцією $S = S(x)$, визначеною на області збіжності ряду.

Ряд, який визначено із ряду (34.1) відкиданням перших n його членів, називають **n -м залишком** (або просто **залишком**) функціонального ряду:

$$R_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x) + \dots$$



Зауважмо, що так само як і числовий ряд, функціональний ряд збігається тоді й тільки тоді, якщо його залишок $R_n(x)$ для всіх x з області збіжності за необмеженого зростання n прямує до нуля.

Важливими функціональними рядами, із погляду їхнього застосування, є так звані степеневі ряди.

Степеневим рядом називають функціональний ряд, членами якого є степеневі функції $u_n = a_n x^n$ зі зростаючими цілими додатними показниками степеня, зазвичай, починаючи з нуля:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad (34.2)$$

де дійсні числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – коефіцієнти ряду, а вираз $u_n = a_n x^n$ – загальний член степеневого ряду.

Розглядають також степеневий ряд такого вигляду:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots, \quad (34.3)$$

який називають **степеневим рядом за степенями різниці $(x-a)$** , $a \neq 0$, де a є сталою. Цей ряд легко звести до попереднього, якщо позначити $x-a = z$.

34.2. Область і радіус збіжності

Зазначмо, що степеневий ряд (34.2) завжди збігається за $x=0$, а степеневий ряд (34.3) – за $x=a$.

Для визначення області збіжності степеневого ряду використовують таку теорему.

Теорема 34.1 (теорема Абеля). Якщо степеневий ряд збігається для деякого значення $x_0 \neq 0$, то він збігається абсолютно за кожного значення x , для якого виконано таку умову:

$$|x| < |x_0|. \quad (34.4)$$

Якщо степеневий ряд розбігається для деякого значення x_0 , то він розбігається за кожного значення x , для якого виконано таку умову:

$$|x| > |x_0|. \quad (34.5)$$

Доведення. Якщо за $x = x_0$ такий степеневий ряд (34.2):

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

збігається, то за необхідною умовою збіжності числового ряду його загальний член прямує до нуля: $a_n x_0^n \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$.

Тобто числова послідовність $\{a_n x_0^n\}$ є обмеженою, тому існує таке число $M > 0$, що для всіх значень n буде виконано таку нерівність: $|a_n x_0^n| < M$.

На цій підставі для будь-яких x , що задовольняють умову $|x| < |x_0|$, маємо таку оцінку абсолютної величини загального члена ряду (34.2):

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| = |a_n x_0^n| \left| \left(\frac{x}{x_0} \right) \right|^n < M q^n, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

де $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ є знаменником геометричної прогресії із загальним членом $M q^n$.

Нерівність $|a_n x^n| < M q^n$ означає, що члени ряду, складеного з модулів членів степеневого ряду (34.2), не перевищують членів збіжного ряду геометричної прогресії (адже $|q| < 1$). За ознакою порівняння, заданий степеневий ряд для всіх $|x| < |x_0|$ збігається і до того ж абсолютно.

Доведімо другу частину теореми. За умовою теореми, у точці $x = x_0$ степеневий ряд (34.2) розбігається. Треба довести, що ряд розбігається для всіх таких x , що $|x| > |x_0|$.

Припустімо, що це не так. Нехай ряд буде збіжним за деякого значення x_1 , для якого виконано таку нерівність: $|x_1| > |x_0|$, або $|x_0| < |x_1|$.

Звідси за доведеною частиною теореми ряд має збігатися і в точці x_0 , що суперечить умові розбіжності ряду в цій точці.

Отже, припущення про існування числа x_1 є хибним.

Тому для довільного степеневого ряду (34.2) маємо один із трьох таких випадків:

- 1) степеневий ряд є *збіжним* для всіх довільних дійсних значень x ;
- 2) степеневий ряд є *розбіжним* для всіх довільних дійсних значень x , крім випадку $x = 0$;
- 3) існують такі значення x_1 та x_2 , що ряд *збігається* за $x = x_1$ і *розбігається* за $x = x_2$.

Тоді, за теоремою Абеля, буде виконаною нерівність $|x_1| \leq |x_2|$. Це означає, що множина всіх значень x , для яких степеневий ряд буде збіжним, є обмеженою зверху. Тому існує таке найбільше додатне число R , що для всіх $|x| < R$ ряд збігається, причому абсолютно (за теоремою Абеля), а за $|x| > R$ – розбігається. Таке число R називають **радіусом збіжності**, а інтервал $(-R, R)$ – **інтервалом збіжності** степеневого ряду.

Зрозуміло, що в першому з розглянутих випадків $R = +\infty$, у другому – $R = 0$, у третьому – $0 < R < \infty$. ■

Зауважмо, що поняття інтервалу збіжності й поняття області збіжності степеневому ряду є близькими, але не тотожними, тому що до області збіжності може належати не тільки інтервал збіжності, але й обидва його кінці або ж один із його кінців.

Теорему Абеля можна використати для визначення інтервалу та радіуса збіжності степеневому ряду. Зазначмо, що, згідно з теоремою Абеля, інтервали збіжності ряду (34.2) та ряду, складеного з абсолютних величин членів цього ряду, збігаються.

Визначмо інтервал збіжності такого ряду:

$$|a_0| + |a_1| |x| + |a_2| |x|^2 + \dots + |a_n| |x|^n + \dots, \quad (34.6)$$

утвореного з абсолютних величин членів цього степеневому ряду за умови, що $|a_n| \neq 0$.

Застосуємо до цього ряду ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l, \quad (u_n = a_n x^n).$$

Множину значень x , для яких початковий ряд збігається абсолютно і разом із тим радіус збіжності ряду, визначмо, згідно з ознакою Д'Аламбера, за умови, що $l < 1$:

$$|x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \Rightarrow |x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R,$$

де R – радіус збіжності степеневому ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (34.7)$$

За всіх значень x , для яких $l > 1$, ряд розбігається.

Аналогічно радіус збіжності ряду можна обчислити за такою формулою:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \quad (34.8)$$

якщо застосувати до ряду (34.6) радикальну ознаку Коші.



Зауважмо, що ϕ -ли (34.7), (34.8) не можна використовувати, якщо

показник степеня в загального члена ряду є функцією від n : $u_n(x) = a_n x^{\phi(n)}$.

Наприклад: $2n$, $2n+3$, n^2 і т. ін. Тоді потрібно безпосередньо застосувати ознаку Д'Аламбера, як це було зроблено раніше.

Дослідження поведінки числових рядів, які визначають із степеневому ряду (34.2) за $l = 1$, тобто в точках $x = \pm R$, потрібно проводити окремо.

Радіус збіжності степеневому ряду (34.3) визначають за співвідношеннями (34.7), (34.8) після такої заміни змінної: $x - a = z$.

Якщо радіус збіжності ряду з новою змінною визначено, то для початкового ряду маємо:

$$|z| < R \Rightarrow |x - a| < R \Rightarrow -R < x - a < R \Rightarrow a - R < x < a + R,$$

тобто інтервал збіжності ряду (34.3) має такий вигляд:

$$(a - R, a + R).$$

Дослідження на збіжність ряду за степенями різниці $(x - a)$ у точках $x = a \pm R$ так само проводять окремо.



Визначмо область збіжності такого степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Визначмо загальний член цього ряду: $u_n = \frac{x^n}{n!}$.

Тоді маємо: $u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Складімо відношення модулів наступного і попереднього членів ряду, обчислимо його границю й порівняймо з одиницею:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right|,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0 < 1.$$

Останню нерівність виконано для будь-якого $x \in \mathbf{R}$, тому цей ряд збігається на всій числовій осі: $-\infty < x < +\infty$.

Можна також відразу обчислити радіус збіжності R за ф-лою (34.7), оскільки степеневий ряд містить усі степені x (серед коефіцієнтів a_n немає нульових):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$



Визначмо область збіжності такого степеневому ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} x^{2n-1}}{2n+1}$.

У цьому степеневому ряді коефіцієнти при парних степенях x дорівнюють нулю: $a_{2n} = 0$, тому ф-лу (34.7) використати неможливо. Однак безпосереднє застосування ознаки Д'Аламбера дає такий результат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{2n+1} x^{2n+1} (2n+1)}{2^{2n-1} x^{2n-1} (2n+3)} \right| = 4x^2.$$

Отже, ряд збігається, якщо, $|x| < 1/2$, і розбігається, якщо $|x| > 1/2$; інтервал $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – його інтервал збіжності.

Дослідімо поведінку степеневому ряду на кінцях інтервалу збіжності.

На нижній границі маємо $x = -1/2$. Підставмо це значення в степеневий ряд, у результаті чого маємо такий знакосталий числовий ряд із від'ємними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

Візьмімо розбіжний гармонійний ряд як еталонний. Тоді, за ознакою порівняння, у граничній формі маємо, що ряд із загальним членом $\frac{1}{2n+1}$ є розбіжним. Оскільки множення ряду на (-1) не впливає на його розбіжність, тому досліджуваний ряд також є розбіжним.

На верхній границі інтервалу збіжності, тобто якщо $x = 1/2$, маємо такий числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

Цей ряд, як ми вже з'ясували, є розбіжним.

Отже, областю збіжності початкового степеневому ряду є такий інтервал:

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



Визначмо область збіжності такого степеневому ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^2}$.

Позначмо $x-5=z$, тоді $u_n = \frac{z^n}{n^2}$, а $u_{n+1} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}$. Для обчислення радіуса збіжності застосуємо ф-лу (34.7):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Отже, $z \in (-1, 1)$ – інтервал збіжності.

Дослідімо поведінку ряду на кінцях визначеного інтервалу.

За $z = -1$ маємо знакопереміжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, який збігається за ознакою Лейбніца.

За $z = 1$ маємо знакосталий числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який збігається як ряд Діріхле, оскільки $s = 2$.

Отже, областю збіжності степеневому ряду буде проміжок $-1 \leq z \leq 1$. Повертаючись до змінної x , маємо:

$$-1 \leq x-5 \leq 1 \Rightarrow 4 \leq x \leq 6.$$

Тому областю збіжності заданого степеневому ряду є відрізок $[4, 6]$.

34.3. Властивості степеневих рядів

Сформулюймо (без доведення) властивості збіжних на інтервалі $(-R, R)$ степеневих рядів, які використовують під час дослідження цих рядів.

1. Сума членів степеневому ряду є функцією, неперервною в усіх точках інтервалу збіжності.

2. Степеневий ряд можна почленно здиференціювати в кожній точці інтервалу збіжності. Сума цього нового ряду дорівнює похідній від суми початкового ряду, а радіус збіжності нового ряду – радіусу збіжності вихідного ряду.

3. Степеневий ряд можна почленно зінтегрувати на довільному проміжку $[a, x]$, який належить інтервалу збіжності. Інтеграл від суми степеневого ряду дорівнює сумі ряду, який утворено з інтегралів від членів початкового ряду. Радіус збіжності нового ряду дорівнює радіусу збіжності початкового ряду.

4. Степеневі ряди можна почленно додавати та віднімати. Радіус збіжності утвореного ряду не буде меншим за найменший із радіусів збіжності початкових рядів.



Зінтегруймо почленно такий ряд: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ за $x \in (-1, 1)$ і визначмо область збіжності утвореного ряду.

Запишімо цей ряд у розгорнутому вигляді:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \frac{1}{x+1}.$$

Такий ряд на заданому проміжку є рядом нескінченно спадної геометричної прогресії, а його сума дорівнює $\frac{1}{x+1}$; на інтервалі $(-1, 1)$ він є збіжним, тому його можна почленно зінтегрувати (див. властивість 3).

Зінтегруймо почленно ліву та праву частини наведеної рівності в межах від 0 до деякого x , що належить інтервалу збіжності:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Маємо ряд, загальний член якого $u_n = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, а сума ряду дорівнює $\ln(1+x)$. Згідно з властивостями степеневих рядів, інтервалом збіжності цього ряду є $x \in (-1, 1)$.

Дослідімо поведінку нового ряду на кінцях інтервалу збіжності.

За $x = -1$ маємо числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+1}}{n+1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, який є розбіжним, за граничною ознакою порівняння.

За $x = 1$ маємо знакопереміжний числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, який є збіжним,

за ознакою Лейбніца.

Отже, областю збіжності утвореного після інтегрування степеневого ряду є напіввідкритий проміжок $x \in (-1, 1]$.

На цьому прикладі ми побачили, що інтегрування степеневого ряду може розширити його область збіжності.



Зінтегруймо на інтервалі $(-1, 1)$ і знайдемо область збіжності такого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Як і в попередньому прикладі, маємо ряд, який утворено членами нескінченно спадної геометричної прогресії, для якого інтервалом збіжності є $x \in (-1, 1)$, а в будь-якій точці цього інтервалу сума становить $S(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Зінтегруймо почленно цей ряд в інтервалі збіжності та його суму як функцію від x ($x < 1$):

$$\int_0^x \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Дослідімо поведінку утвореного ряду на кінцях інтервалу збіжності.

Нехай $x = -1$. У цьому разі маємо числовий ряд, загальний член якого має такий вигляд: $u_n = (-1)^{n-2} \frac{1}{2n-1}$, тобто маємо знакопереміжний числовий ряд, який є збіжним, за ознакою Лейбніца.

Нехай $x = 1$. У цьому разі також маємо знакопереміжний числовий ряд із загальним членом $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$, який є збіжним теж за ознакою Лейбніца.

Отже, областю збіжності утвореного в результаті інтегрування степеневого ряду є відрізок $x \in [-1, 1]$. Бачимо, що в цьому разі інтегрування степеневого ряду розширило область збіжності до замкненого проміжку.

34.4. Степеневі ряди Тейлора та Маклорена

Степеневі ряди часто використовують у наближених обчисленнях під час складання таблиць елементарних функцій, обчислення інтегралів, які неможливо визначати через елементарні функції; розв'язування диференціальних рівнянь тощо.

Якщо функція $f(x)$ на інтервалі $(a - R, a + R)$ є сумою такого степеневому ряду:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - a)^n, \quad (34.9)$$

то кажуть, що на заданому інтервалі *функція розвивається в степеневий ряд, або ряд збігається до функції $f(x)$.*

Поставмо задачу знаходження коефіцієнтів ряду (34.8) для заданої функції $f(x)$.

Теорема 34.2 (*про єдине розвинення функції в степеневий ряд*). Якщо функція $f(x)$ має похідні будь-якого порядку в околі точки $x = a$ і її можна розвинути в степеневий ряд (34.8) в інтервалі його збіжності $(a - R, a + R)$, то це розвинення можна виконати єдиним способом.

Доведення. Оскільки за умовою теореми на інтервалі $(-R, R)$ ряд збігається і $f(x)$ є його сумою, то за властивістю 2 степеневих рядів цей ряд можна здиференціювати почленно на заданому проміжку скільки завгодно разів. Виконавши диференціювання ряду n разів, маємо:

$$f^{(n)}(x) = a_n \cdot n! + a_{n+1} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1)(x - a) + \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Звідси за $x = a$ визначмо $f^{(n)}(a) = a_n n!$, або

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (34.10)$$

Отже, коефіцієнти степеневому ряду визначають за ф-лами (34.9) однозначно, що й потрібно було довести. ■

Тому, якщо функція $f(x)$ розвивається в степеневий ряд, то цей ряд має такий вигляд:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (34.11)$$

і його називають **рядом Тейлора** для функції $f(x)$ в околі точки $x = a$.

Окремим випадком ряду Тейлора за $a = 0$ є **ряд Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (34.12)$$

Якщо залучити до розгляду залишок ряду Тейлора (або ряду Маклорена) $R_n(x)$, то функцію $f(x)$ можна записати як суму перших n членів ряду $S_n(x)$ та його n -го залишку $R_n(x)$:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad (34.13)$$

тобто

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

За умови диференційовності функції $f(x)$ довільну кількість разів ряд Тейлора можна утворити з формули Тейлора (15.39) за необмеженого зростання номера n ($n \rightarrow \infty$). Водночас залишковий член формули Тейлора $r_n(x)$ (15.40) задовольняє таку умову:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - S_n(x)) = 0.$$

Теорема 34.3 (необхідна і достатня умова збіжності ряду Тейлора). Ряд Тейлора збігається до функції $f(x)$ на інтервалі $(a - R, a + R)$ тоді й тільки тоді, якщо залишковий член її формули Тейлора прямує до нуля за $n \rightarrow \infty$ для всіх x із цього інтервалу:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0. \quad (34.14)$$

Доведення. Запишімо для функції $f(x)$ формулу Тейлора в такому вигляді:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x), \text{ або } f(x) - S_n(x) = r_n(x).$$

Нехай ряд (34.10) збігається до функції $f(x)$ в інтервалі $(a - R, a + R)$, тобто $S_n(x) \rightarrow f(x)$ за $n \rightarrow \infty$. Звідси випливає, що $r_n(x) \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$ в цьому інтервалі, і навпаки. Якщо в інтервалі $(a - R, a + R)$ виконано умову $r_n(x) \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$, то $S_n(x) \rightarrow f(x)$ за $n \rightarrow \infty$. ■

Зауваження. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) \neq 0$, то ряд може бути збіжним, проте його сума не буде дорівнювати $f(x)$. Прикладом такого ряду є ряд Маклорена для

$$\text{функції } f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Теорема 34.4 (достатня умова збіжності ряду до функції $f(x)$). Якщо функція $f(x)$ на деякому проміжку $[-b, b]$ має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$ таке, що $|f^{(n)}(x)| < M$ для всіх x із $[-b, b]$, тоді в усіх точках цього проміжку функцію $f(x)$ можна розвинути в ряд Тейлора.

Доведення. Запишімо абсолютну величину залишкового члена формули Тейлора (15.40) у формі Лагранжа та оцінімо його, з огляду на те, що $|x| \leq b$ і $|f^{(n)}(\xi)| < M$:

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| < \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} M,$$

де ξ – проміжна точка між a та x .

Покажімо, що $\frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$. Для цього розгляньмо числовий ряд,

загальний член якого дорівнює $\frac{b^{n+1}}{(n+1)!}$. За ознакою Д'Аламбера, цей ряд

збігається, отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (необхідна ознака збіжності числових рядів).

У нерівності $|r_n(x)| < \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} M$ переходимо до границі за $n \rightarrow \infty$ і маємо умову $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$. Згідно з теоремою (34.3), $f(x)$ розвивається в ряд Тейлора. ■



Якщо вихідна функція $f(x)$ є многочленом n -го степеня, то всі коефіцієнти ряду Маклорена, починаючи з $(n+1)$ -го, будуть дорівнювати нулю, отже, будемо мати скінченну суму доданків – сам многочлен. Аналогічний результат маємо під час розвинення многочлена в ряд Тейлора.



Розвиньмо в ряд Тейлора функцію $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ в околі точки $x = -4$.

Визначмо значення функції $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ та її похідних до n -го порядку включно за $x = -4$:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2, \quad f(-4) = -64 - 32 + 20 - 2 = -78;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5, \quad f'(-4) = 48 + 16 - 5 = 59;$$

$$f''(x) = 6x - 4, \quad f''(-4) = -28;$$

$$f'''(x) = 6, \quad f'''(-4) = 6;$$

$$\dots\dots \quad \dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = 0, \text{ якщо } n \geq 4, \quad f^{(n)}(-4) = 0, \text{ якщо } n \geq 4.$$

Підставмо ці значення в ряд (34.10), у результаті чого маємо:

$$x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = -78 + \frac{59}{1!}(x+4) - \frac{28}{2!}(x+4)^2 + \frac{6}{3!}(x+4)^3,$$

або

$$x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = -78 + 59(x+4) - 14(x+4)^2 + (x+4)^3.$$

Областю збіжності цього ряду, що виродився в скінченну суму, є вся числова вісь: $-\infty < x < \infty$, бо саме розвинення – це тотожний запис многочлена за степенями різниці $(x-a)$ за $a = -4$.



Ключові терміни

Функціональний ряд; точка збіжності функціонального ряду; область збіжності функціонального ряду; часткова сума ряду; сума ряду; залишок ряду; степеневий ряд; радіус збіжності й інтервал збіжності степеневого ряду; теорема Абеля; властивості степеневих рядів; ряд Тейлора; ряд Маклорена; залишок ряду.



Запитання для самоперевірки

1. Який ряд називають функціональним?
2. Що називають точкою й областю збіжності ряду?
3. Як формулюють означення часткової суми функціонального ряду і суми збіжного функціонального ряду?
4. Що таке «степеневий ряд»?
5. Як формулюють теорему Абеля?
6. Що називають радіусом збіжності степеневого ряду?
7. Як визначити радіус збіжності степеневого ряду за допомогою ознак Д'Аламбера чи Коші?
8. Які є властивості степеневого ряду?
9. Який степеневий ряд називають рядом Тейлора та рядом Маклорена?
10. Якою теоремою визначають достатню умову збіжності ряду до заданої функції $f(x)$?
11. Що становить собою розвинення в ряд Маклорена многочлена від x ?



Тестові завдання до підрозділу 34

1. Функціональним називають такий ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots;$

б) $\sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i} = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots;$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1} = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1} + \dots;$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots.$$

2. n -ю частковою сумою ряду називають:

- а) суму перших n членів ряду; б) суму будь-яких n членів ряду;
в) суму останніх n членів ряду; г) суму сусідніх n членів ряду.

3. Замість пропуску впишіть потрібний термін «Степеневим рядом називають _____ ряд, членами якого є степеневі функції $a_n x^n$ зі зростаючими цілими додатними показниками степенів, зазвичай, починаючи з нуля»:

- а) функціональний; б) числовий; в) знакопереміжний; г) розбіжний.

4. Ряд Тейлора записано в такому рядку:

$$\text{а) } f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \dots;$$

$$\text{б) } f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots;$$

$$\text{г) } \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i} = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots.$$

5. Ряд Маклорена записано в такому рядку:

$$\text{а) } f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \dots;$$

$$\text{б) } f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots;$$

$$\text{г) } \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i} = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots.$$

6. Функціональний ряд записано в такому рядку:

а) $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \dots;$

б) $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots;$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots;$

г) $\sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i} = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots$

7. За допомогою якої теореми можна визначити інтервал та радіус збіжності степеневому ряду:

а) Абеля; б) Коші; в) Лагранжа; г) Лапласа.

8. Радіус збіжності степеневому ряду R обчислюють за такою формулою:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|;$ б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|;$ в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right|;$ г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$

9. Закінчіть речення, щоб утворилося правильне твердження «Степеневі ряди можна почленно додавати та віднімати. Радіус збіжності утвореного ряду ...»:

- а) не буде меншим за найменший із радіусів збіжності початкових рядів;
- б) буде меншим за найменший із радіусів збіжності початкових рядів;
- в) буде дорівнювати найменшому з радіусів збіжності початкових рядів;
- г) не буде меншим за найбільший із радіусів збіжності початкових рядів.

10. Закінчіть речення, щоб утворилося правильне твердження «Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на довільному проміжку, який належить інтервалу збіжності. Радіус збіжності утвореного ряду ...»:

- а) буде меншим за радіус збіжності початкового ряду;
- б) буде перевищувати радіус збіжності початкового ряду;
- в) буде дорівнювати радіусу збіжності початкового ряду;
- г) буде не меншим за радіус збіжності початкового ряду.

Література: [4 – 6; 14; 18].

35. Розвинення в ряд основних елементарних функцій. Використання рядів для наближених обчислень. Ряди Фур'є

Основні питання:

35.1. Розвинення в ряд Маклорена основних елементарних функцій.

35.2. Використання рядів у наближених обчисленнях.

35.3. Ряди Фур'є.

35.1. Розвинення в ряд Маклорена основних елементарних функцій

Розгляньмо кілька важливих прикладів подання значень основних елементарних функцій у вигляді ряду Маклорена, тобто розвинення функції в ряд Маклорена.

Нагадаймо, що такий ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (35.1)$$

збігається в інтервалі $(-R, R)$ до функції $f(x)$ (вона є сумою ряду: $S(x) = f(x)$), якщо на цьому інтервалі виконано таку умову: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Аналогічно такий ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (35.2)$$

збігається в інтервалі $(a-R, a+R)$ до функції $f(x)$, якщо для ряду на цьому інтервалі виконано таку умову: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Розгляньмо розвинення в ряд Маклорена деяких елементарних функцій. Алгоритм розвинення функції в ряд передбачає такі кроки:

- а) визначення коефіцієнтів ряду Маклорена для цієї функції;
- б) обчислення радіуса збіжності утвореного ряду;
- в) доведення того, що утворений ряд збігається саме до функції $y = f(x)$.



Запишімо функцію $f(x) = e^x$ як ряд Маклорена.

Для цього обчислимо значення функції та її похідних за $x = 0$:

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \quad \dots$$

Числові коефіцієнти ряду (35.1) мають такий вигляд:

$$f(0)=1, \quad f'(0)=1, \quad f''(0)=1, \dots, \quad f^{(n)}(0)=1, \dots, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Підставляймо обчислені коефіцієнти в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (35.3)$$

Визначмо радіус збіжності цього ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Отже, ряд збігається в інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

Цей ряд збігається до функції e^x для довільних значень x , бо на будь-якому проміжку $[-b, b]$ функція e^x та її похідні за абсолютною величиною обмежено числом e^b .



Розвиньмо в ряд Маклорена таку функцію: $f(x) = \sin x$.

Обчислімо значення функції та її похідних за $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0; \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1; \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0; \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1; \\ f^{IV}(x) &= \sin x, & f^{IV}(0) &= 0; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Неважко помітити, що всі похідні парного порядку дорівнюють нулю: $f^{(2n)}(0) = 0$, а похідні непарного порядку по черзі дорівнюють числам 1 та -1 : $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$, де $n = 1, 2, 3, \dots$. Підставмо обчислені коефіцієнти в ряд Маклорена і маємо результат розвинення функції $f(x) = \sin x$:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (35.4)$$

За ознакою Д'Аламбера визначмо інтервал збіжності цього ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}(2n-1)!}{(2n+1)!x^{2n-1}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0 < 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Отже, ряд збігається на всій числовій осі: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Цей ряд збігається до функції $\sin x$, бо модулі функції та всіх її похідних обмежено зверху одиницею.



Розвинемо в ряд Маклорена таку функцію $f(x) = \cos x$.

Обчислимо значення функції та її похідних за $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1; \\ f'(x) &= -\sin x, & f'(0) &= 0; \\ f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -1; \\ f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= 0; \\ f^{IV}(x) &= \cos x, & f^{IV}(0) &= 1; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Аналіз значень похідних показує, що $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$, а $f^{(2n-1)}(0) = 0$.

Отже, маємо таке:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (35.5)$$

Аналогічно з попереднім рядом областю збіжності цього ряду є $(-\infty, +\infty)$. Ряд збігається до функції $\cos x$, оскільки модулі функції та всіх її похідних обмежено зверху одиницею.

Звернімо увагу, що функція $\sin x$ є непарною, і її розвинено в ряд за непарними степенями змінної x , а $\cos x$ – парна функція, тому її розвинення в ряд містить тільки парні степені x .



Розвинемо в ряд Маклорена степеневу функцію $f(x) = (1+x)^m$, яка

є біномом із довільним дійсним показником степеня $m \in \mathbf{R}$. Відповідний ряд називають **біноміальним**.

Обчислімо значення функції та її похідних за $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^m, & f(0) &= 1; \\ f'(x) &= m(1+x)^{m-1}, & f'(0) &= m; \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}, & f''(0) &= m(m-1); \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, & f'''(0) &= m(m-1)(m-2). \\ &..... \end{aligned}$$

Звідси легко помітити загальну закономірність, яка полягає в тому, що похідні від цієї функції в точці $x = 0$ є добутком із n множників (по спадній), починаючи з m :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))(1+x)^{m-n}, \\ f^{(n)}(0) &= m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1)). \end{aligned}$$

Підставмо ці значення коефіцієнтів у ряд Маклорена і маємо такий біноміальний ряд:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (35.6)$$

Обчислімо радіус збіжності цього ряду в разі, якщо число m не дорівнює додатному цілому числу (у разі, якщо число m – додатне ціле, функція $f(x) = (1+x)^m$ є многочленом і радіус збіжності такого ряду є нескінченним).

За ознакою Д’Аламбера і формулою для обчислення радіуса збіжності степеневому ряду, маємо:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \right|, \quad |a_{n+1}| = \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!} \right|, \\ R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)} \right| = \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{m}{n} - 1} \right| = 1. \end{aligned}$$

Отже, $(-1, 1)$ – інтервал збіжності цього ряду.

У граничних точках за $x = -1$ та $x = 1$ ряд може збігатися чи розбігатися, залежно від значення показника степеня m .

Можна показати, що досліджуваний ряд збігається на інтервалі $(-1, 1)$ саме до функції $f(x) = (1+x)^m$, тобто сума ряду дорівнює $S(x) = (1+x)^m$ за $|x| < 1$.



Розвинемо в ряд Маклорена таку логарифмічну функцію: $f(x) = \ln(1+x)$.

Для цього використаємо біноміальний ряд (35.6) за $m = -1$.

Отже, маємо такий вираз:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots$$

Зважаючи на те, що степеневий ряд можна почленно інтегрувати в області його збіжності (властивість 4 степеневих рядів), визначмо інтеграл від лівої та правої частин цього ряду:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (35.7)$$

Визначмо радіус збіжності цього ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

тобто областю абсолютної збіжності ряду є інтервал $(-1, 1)$.

Дослідімо збіжність ряду на кінцях інтервалу.

За $x = -1$ маємо числовий ряд із загальним членом $u_n = (-1)^{2n-1} \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$.

Цей ряд є розбіжним як гармонійний ряд, помножений на (-1) .

За $x = 1$ маємо знакопереміжний числовий ряд із загальним членом $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$. Цей ряд збігається, за ознакою Лейбніца.

Отже, областю збіжності ряду (35.7) є напіввідкритий проміжок $(-1, 1]$.



Розвиньмо в ряд Маклорена таку функцію: $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Використаймо біноміальний ряд за $m = -1$, а замість x , підставмо x^2 :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \dots \quad (35.8)$$

Зінтегрувавши ряд почленно на інтервалі збіжності $(-1, 1)$, маємо:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (35.9)$$

Можна переконатися, що цей ряд на кінцях інтервалу збігається (як знакочередуваний ряд), отже, областю його збіжності є відрізок $[-1, 1]$.

На практиці доводиться оперувати розвиненням у ряд не тільки основних елементарних функцій, але й більш складних функцій, зокрема й складених функцій. Під час розвинення в ряд таких функцій слід зважати на можливу зміну області збіжності ряду.



Визначмо розвинення у степеневий ряд такого інтеграла: $\int \frac{\cos x}{x} dx$.

Спочатку запишімо розвинення в ряд функції $\cos x$ за ф-лою (35.5):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Складімо таке відношення:

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n-1}}{(2n)!} + \dots$$

Виконуймо почленне інтегрування:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{x} dx &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{2!} + \int \frac{x^3 dx}{4!} - \dots + \int \frac{(-1)^n \cdot x^{2n-1}}{(2n)!} dx + \dots = \\ &= C + \ln|x| - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n \cdot (2n)!} + \dots \end{aligned}$$

Визначмо область збіжності залишку цього ряду, який було утворено після вилучення з нього перших двох доданків. За ознакою Д'Аламбера, маємо таке:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2} \cdot 2n \cdot (2n)!}{(2n+2)(2n+2)! \cdot x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot 2n}{(2n+2)^2 (2n+1)} = 0.$$

Ряд збігається на всій числовій осі.

Отже, такий вираз:

$$\int \frac{\cos x}{x} dx = C + \ln|x| - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n \cdot (2n)!} + \dots$$

є правильним скрізь, за винятком значення $x=0$, оскільки логарифма нуля не існує.



Розв'иньмо в ряд Маклорена функцію $y = \arctg 2x$, застосувавши ряд для $y = \arctg x$, який збігається на відрізку $[-1, 1]$:

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Замінивши x на $2x$, маємо таке:

$$\arctg 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3} + \frac{(2x)^5}{5} - \frac{(2x)^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n-1}}{2n-1}.$$

Тепер визначмо область збіжності цього ряду:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{2^{2n-1} x^{2n-1}} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 (2n-1)}{2n+1} \cdot x^2 = 4x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 4x^2.$$

За умови, що $l < 1$, маємо таке: $|x| < 1/2$.

Отже, областю збіжності є відрізок: $[-1/2, 1/2]$.



Розвиньмо функцію $y = e^x$ у ряд Тейлора в околі точки $x = 2$.

Обчислимо значення функції та її похідних у точці $x = 2$:

$$f(x) = e^x, \quad f(2) = e^2;$$

$$f'(x) = e^x, \quad f'(2) = e^2;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad n \geq 2, \quad f^{(n)}(2) = e^2, \quad n \geq 2.$$

Підставляймо ці значення в ряд (35.2):

$$e^x = e^2 + \frac{e^2}{1!}(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n + \dots \Rightarrow e^x = e^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} \right).$$

За ознакою Д'Аламбера, визначмо інтервал збіжності такого ряду:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot (x-2)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)}{n+1} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Отже, за будь-якого x границя l є меншою за 1, а тому інтервалом і разом із тим областю збіжності ряду буде вся числова вісь: $-\infty < x < \infty$.

Ряд збігається до функції $f(x)$ для довільних x , тому що на будь-якому відрізку $[-b, b]$ функція і її похідні є обмеженими, наприклад, числом e^b .



Для розвинення в ряд елементарних функцій можна також виходити із загальних теоретичних положень, але простіше використовувати вже визначені розвинення (табл. 35.1) і властивості степеневих рядів.

Таблиця 35.1

Основні розвинення функцій у степеневий ряд

№ з/п	Функції та їхні зображення у вигляді степеневих рядів	Області збіжності
1	2	3
1	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbf{R}$

1	2	3
2	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbf{R}$
3	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbf{R}$
4	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$x \in (-1, 1]$
5	$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$x \in [-1, 1)$
6	$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots =$ $= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n, \quad (m \in \mathbf{R}) \text{ (біноміальний ряд)}$	$x \in (-1, 1)$
7*	$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in (-1, 1)$
8	$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$	$x \in (-1, 1)$
9	$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$	$x \in [-1, 1]$
10	$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$	$x \in [-1, 1]$

*($2n-1$)!! = $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$; ($2n$)!! = $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n$.

35.2. Використання рядів у наближених обчисленнях

У наближених обчисленнях степеневі ряди відіграють надзвичайно велику роль. За їхньою допомогою свого часу було складено таблиці тригонометричних функцій, таблиці логарифмів, таблиці значень інших функцій, які використовують у різних галузях знань, наприклад, у теорії ймовірностей та математичній статистиці. Крім того, розвинення функції в степеневий ряд доцільно використовувати для її теоретичного дослідження.

Головним питанням під час застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях є питання *оцінювання похибки обчислення*, яка виникає в разі заміни суми ряду сумою його перших n членів.

Обчислення за допомогою знакопереміжних рядів. Нехай функцію $f(x)$ розвинено в степеневий ряд. Якщо під час обчислення значення функції для конкретного значення x маємо знакопереміжний числовий ряд, то замінивши суму цього ряду на часткову суму його перших n членів, за наслідком з ознаки Лейбніца, маємо абсолютну похибку, яка не буде перевищувати модуля першого із членів залишку цього ряду, тобто

$$|S - S_n| \leq u_{n+1}. \quad (35.10)$$



Обчислимо $\cos 5^\circ$ із точністю до 0,000 1.

Для цього використаємо ряд Маклорена (35.5) для $f(x) = \cos x$, підставивши, замість змінної x , значення кута в радіанах:

$$\cos 5^\circ = \cos \frac{\pi}{36} = 1 - \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \frac{1}{4!} - \dots$$

Якщо порівняти значення модулів першого та другого членів цього ряду із заданою похибкою, маємо, відповідно, таке:

$$u_1 = 1 > 0,0001 \text{ та } u_2 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} = 1 - 0,0038 = 0,9962.$$

Оскільки для третього члена ряду маємо таке:

$$u_3 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!} < \frac{(0,1)^4}{4!} = \frac{1}{24 \cdot 10\,000} < 0,0001,$$

то для обчислення $\cos 5^\circ$ із заданою точністю достатньо залишити лише перші два члени ряду, отже, маємо таке:

$$\cos 5^\circ \approx 1 - \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \frac{1}{2!} = 1 - 0,0038 = 0,9962.$$

Це наближене значення 0,996 2 збігається зі значенням $\cos 5^\circ$, яке наведено в довідкових таблицях.



Обчислімо $\sqrt[3]{9}$ із точністю до 0,001.

Перетворімо $\sqrt[3]{9}$ до вигляду $(1+x)^m$, де $x \in (-1, 1)$, щоб можна було скористатися табличним співвідношенням розвинення біноміального ряду:

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = 2 \cdot \frac{\sqrt[3]{8+1}}{\sqrt[3]{8}} = 2 \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{1/3}.$$

Застосуємо формулу біноміального ряду (35.6) за $m = 1/3$, $x = 1/8$:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9} &= 2 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{8} \right)^2 \frac{1}{2!} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \left(\frac{1}{8} \right)^3 \frac{1}{3!} + \dots \right] = \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 8} - \frac{2}{3^2 \cdot 8^2 \cdot 2!} + \frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 8^3 \cdot 3!} - \dots \right) = 2 + 0,083 - 0,003 + 0,0002 - \dots \end{aligned}$$

Порівнюючи послідовно члени ряду із припустимою похибкою, бачмо, що $u_4 = \frac{4 \cdot 5}{3^3 \cdot 8^3 \cdot 3!} \approx 0,0002 < 0,001$.

Отже, для наближеного обчислення числа $\sqrt[3]{9}$ із заданою точністю достатньо взяти три члени ряду:

$$\sqrt[3]{9} \approx 2 \left(1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576} \right) \approx 2,080.$$

Обчислення за допомогою знакододатних рядів. Розгляньмо приклади оцінювання похибки під час використання ряду з додатними членами.



Обчислімо число Ейлера e з точністю до 0,001.

Числовий ряд для наближеного підрахунку e отримуємо з розвинення в ряд функції $f(x) = e^x$ (35.3) за $x = 1$:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Оцінімо похибку, яка виникає в разі заміни суми ряду сумою перших його n -х членів. Замінімо у факторіалах усі співмножники, крім одиниці, на двійки:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 2 + \frac{(1/2) \cdot (1 - (1/2)^{n-1})}{1 - 1/2} = 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3.$$

Скористаймося теоремою 34.4. Це теорема про достатню умову збіжності ряду до функції $f(x)$. З огляду на те, що $x=1$ і $e^{(n)}(\theta) < 3$, де $0 < \theta < 1$ та $n \in \mathbf{N}$, маємо:

$$r_n(1) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

За умовою задачі, достатньо визначити таке n , щоб була виконаною така нерівність:

$$r_n(1) < 0,001, \text{ тобто } \frac{3}{(n+1)!} < 0,001.$$

Легко перевірити, що ця нерівність є правильною за $n=6$, оскільки:

$$r_6(1) = \frac{e^\theta}{7!} < \frac{3}{7!} = \frac{3}{5040} \approx 0,0006 < 0,001.$$

Отже,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!},$$

або

$$e \approx 2 + 0,5 + 0,1667 + 0,0417 + 0,0083 + 0,0014 = 2,7181 \approx 2,718.$$



Обчислимо $\ln 2$ із точністю до 0,0001.

Для обчислення логарифмів, зазвичай, використовують розвинення в ряд такої функції:

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right). \quad (35.11)$$

Легко перевірити, що цей ряд збігається на інтервалі $(-1, 1)$.

Обчислимо $\ln 2$ за допомогою ряду (35.11). Оскільки в цьому прикладі

$$\frac{1+x}{1-x} = 2, \text{ то } x = \frac{1}{3}.$$

Отже,

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right)$$

або

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} + \frac{1}{7 \cdot 9^3} + \dots + \frac{1}{(2n+1) \cdot 9^n} + \dots \right).$$

Для обчислення $\ln 2$ із заданою точністю достатньо взяти суму перших чотирьох членів:

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} + \frac{1}{7 \cdot 9^3} \right).$$

Отже, відкидаймо такий залишок:

$$R_4 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{9 \cdot 9^4} + \frac{1}{11 \cdot 9^5} + \frac{1}{13 \cdot 9^6} + \dots \right).$$

Оцінімо похибку, яка в цьому разі виникає.

Очевидно, що

$$R_4 < \frac{2}{3} \left(\frac{1}{9 \cdot 9^4} + \frac{1}{9 \cdot 9^5} + \frac{1}{9 \cdot 9^6} + \dots \right), \text{ або } R_4 < \frac{2}{3 \cdot 9^5} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \dots \right).$$

Звідси

$$R_4 < \frac{2}{3 \cdot 9^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 9^5 \cdot 8} = \frac{1}{78\,732} < \frac{1}{10\,000} = 0,0001.$$

Отже, остаточно будемо мати таке:

$$\ln 2 \approx 0,666\,67 + 0,024\,69 + 0,001\,65 + 0,000\,06 = 0,693\,07 \approx 0,6931.$$

Обчислення визначених інтегралів. Розглянемо наближене обчислення визначених інтегралів за допомогою розвинення в ряд підінтегральної функції.



Обчислимо з точністю до 0,001 такий визначений інтеграл: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

Підінтегральну функцію розвинемо в ряд Маклорена. Для цього в ряду (35.3) для функції $f(x) = e^x$ замінімо x на $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Визначмо інтеграл від лівої та правої частин цього ряду:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} + \dots \right) \Bigg|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1) \cdot n!} + \dots \end{aligned} \quad (35.12)$$

Ряд, що утворено, є знакоперемінним, тому похибку, яка виникає у разі заміни суми ряду його частковою сумою, будемо оцінювати за ознакою Лейбніца.

Легко побачити, що в разі заміни суми ряду сумою перших п'яти (за кількістю) його членів, похибка не перевищить $u_5 = \frac{1}{11 \cdot 5!} < 0,001$ (нумерацію членів ряду починають із нуля).

Отже,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} \approx 1 - 0,3333 + 0,1 - 0,0238 + 0,0046 = 0,7475.$$

Звідси з точністю до 0,001 маємо значення визначеного інтегралу:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,748.$$

Нагадаймо, що первісну для функції e^{-x^2} не можна записати за допомогою скінченної кількості елементарних функцій.

III Обчислімо наближено $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$ із точністю до 0,001.

Для цього скористуємося рядом Маклорена (35.5) для функції $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

у якому замінімо x на $\sqrt{x}$.

Тоді маємо:

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \dots$$

Цей ряд збігається на всій числовій осі, у чому можна переконатися за допомогою ознаки Д'Аламбера та теореми Абеля, як це вже робили раніше. Інтегрування лівої та правої частин останньої рівності в межах від 0 до 1 дає таке:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(2n)!} + \dots \right) \Bigg|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(n+1)(2n)!} + \dots \end{aligned} \quad (35.13)$$

За ознакою Лейбніца, оцінімо похибку, яка виникає в разі заміни суми ряду сумою перших n його членів. Для цього обчислімо послідовно члени ряду та порівняймо їхні значення з величиною заданої похибки:

$$u_0 = 1; u_1 = 0,25; u_2 = 0,0139; u_3 = 0,0003 < 0,001.$$

Отже, для обчислення інтеграла із заданою точністю достатньо взяти три перші члени такого ряду:

$$\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx \approx 1 - 0,25 + 0,0139 \approx 0,764.$$

Використання рядів під час розв'язування диференціальних рівнянь.

Якщо не вдається зінтегрувати диференціальне рівняння за допомогою елементарних функцій, то його розв'язок здебільшого можна визначити у вигляді такого степеневому ряду:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n,$$

де коефіцієнти C_n обчислюють підстановкою ряду в задане рівняння з подальшим порівнянням коефіцієнтів при однакових степенях різниці $(x - x_0)$ у лівій та правій частинах утвореної рівності, тобто, використовуючи вже відомий із попереднього розділу метод невизначених коефіцієнтів.

Можна також обчислювати розв'язок рівняння у вигляді ряду Тейлора:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

де для диференціальних рівнянь k -го порядку значення функції $y(x)$ та її похідних $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(k-1)}(x)$ у точці x_0 визначають за такими початковими умовами: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0$, ..., $y^{(k-1)}(x_0) = y^{(k-1)}_0$, а похідні вищих порядків $y^{(n)}(x_0)$, де $(n > k)$, послідовно визначають за допомогою диференціювання лівої та правої частин цього рівняння і підстановки, замість x , числа x_0 .

Наприклад, для диференціальних рівнянь 2-го порядку $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.



Визначмо частинний розв'язок такого рівняння: $y' = y + x^2$, $y(0) = -2$.

Розв'язок рівняння, з огляду на початкову умову, будемо обчислювати в такому вигляді:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \dots + C_n x^n + \dots, \text{ оскільки } x_0 = 0.$$

Потрібно визначити тільки коефіцієнти C_n ($n = 1, 2, \dots$), бо за умовою $y(0) = -2 = C_0$.

Обчислімо y' почленним диференціюванням ряду на інтервалі його збіжності:

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \dots$$

і підставмо ряди для y і y' у початкове рівняння.

Отже, маємо таке рівняння:

$$C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \dots = x^2 + C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots$$

Прирівнюймо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівності й маємо таку систему рівнянь для визначення коефіцієнтів:

$$\begin{array}{l|lcl} x^0 & C_1 = C_0 & \Rightarrow & C_1 = -2, \\ x^1 & 2C_2 = C_1 & \Rightarrow & C_2 = -1, \\ x^2 & 3C_3 = 1 + C_2 & \Rightarrow & C_3 = 0, \\ x^3 & 4C_4 = C_3 & \Rightarrow & C_4 = 0, \\ x^4 & 5C_5 = C_4 & \Rightarrow & C_5 = 0, \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ x^{n-1} & nC_n = C_{n-1} & \Rightarrow & C_n = 0. \end{array}$$

Отже, маємо такий точний розв'язок: $y = -2 - 2x - x^2$.



Визначмо частинний розв'язок рівняння $y'' = xy$ за наявності таких початкових умов: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язок рівняння будемо обчислювати у вигляді такого степеневого ряду:

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n + \dots, \text{ оскільки } x_0 = 0.$$

Тепер треба визначити коефіцієнти C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), скориставшись для цього такими початковими умовами: $y(0) = 1 \Rightarrow C_0 = y(0) = 1$.

Здиференціюймо такий степеневий ряд:

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \dots + nC_nx^{n-1} + \dots$$

Звідси маємо:

$$C_1 = y'(0) = 0.$$

Здиференціюймо ще раз такий степеневий ряд:

$$y'' = 2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2 + \dots + n(n-1)C_nx^{n-2} + \dots$$

Підставивши в початкове рівняння вирази для y та y'' , маємо таку рівність:

$$2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2 + \dots + n(n-1)C_nx^{n-2} + \dots = C_0x + C_1x^2 + C_2x^3 + \dots + C_nx^{n+1} + \dots$$

Тепер прирівнюймо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2C_2 = 0, \\ x^1 & 2 \cdot 3C_3 = C_0, \\ x^2 & 3 \cdot 4C_4 = C_1, \\ x^3 & 4 \cdot 5C_5 = C_2, \\ \dots & \dots \end{array}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, маємо кілька перших невідомих коефіцієнтів, а потім помічаймо загальну закономірність їхньої побудови:

$$C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{1}{3!}, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = 0, \quad C_6 = \frac{C_3}{5 \cdot 6} = \frac{4}{6!},$$

$$C_7 = \frac{C_4}{6 \cdot 7} = 0, \quad C_8 = \frac{C_5}{7 \cdot 8} = 0, \quad C_9 = \frac{C_6}{8 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 7}{9!}, \dots$$

Отже,

$$y = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4}{6!}x^6 + \frac{4 \cdot 7}{9!}x^9 + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \dots$$

35.3. Ряди Фур'є



У теорії функціональних рядів важливе місце посідають *ряди Фур'є*, які надають розвинення функції, що задана на відрізку $[-\pi, \pi]$, на всю числову вісь, тобто дає періодичне продовження функції на всю числову вісь. Ці ряди названо ім'ям французького математика і фізика Жана Батиста Жозефа Фур'є (1758 – 1830). Його «Аналітична теорія тепла» (1822 р.) стала початком теорії тригонометричних рядів, що в подальшому набули широкого застосування в різних галузях знань, де розглядають періодичні процеси.

Наприклад, періодичні функції, які подають у вигляді сум тригонометричних рядів, застосовують під час побудови трендових моделей для прогнозування економічної динаміки, виявлення прихованих періодичних процесів, економічних циклів та ін.

Тригонометричні ряди. Розгляньмо послідовність таких тригонометричних функцій:

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (35.14)$$

Зазначмо, що послідовність (35.14) має такі особливості:

- 1) функції цієї послідовності є *періодичними* з періодом 2π ;
- 2) функції цієї послідовності є *ортogonalними* на відрізку $[-\pi, \pi]$ у тому сенсі, що інтеграл на відрізку $[-\pi, \pi]$ від добутку будь-яких двох різних функцій дорівнює нулю, а інтеграл на відрізку $[-\pi, \pi]$ від квадрата будь-якої функції є відмінним від нуля.

Дійсно,

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{2n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{2n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos (m+n)x + \cos (m-n)x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \text{ за } n \neq m.$$

Аналогічно визначаймо таке:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \text{ за } m \neq n; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \text{ за } m \neq n.$$

У разі, якщо $m = n$, маємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx = \pi.$$

Складімо функціональний ряд, загальний член якого має такий вигляд:

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (35.15)$$

одночас для $n=0$ беруть $u_0(x) = a_0/2$.

Тоді відповідний функціональний ряд має такий вигляд:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots \quad (35.16)$$

або в стислій формі:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (35.17)$$

Цей ряд називають **тригонометричним** рядом, а числа a_0 , a_n , b_n , $n \in \mathbf{N}$ називають **коефіцієнтами** тригонометричного ряду.

Тригонометричний ряд, як і степеневий, збігається до функції $f(x)$, якщо існує границя n -ї часткової суми $S_n(x)$, яка дорівнює $f(x)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$.

У цьому разі сума ряду в точках його збіжності дорівнює значенням $f(x)$, а щодо функції $f(x)$ кажуть, що її розвивають у ряд, а саме:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (35.18)$$

Тригонометричні ряди Фур'є. Наведімо умову єдиності розвинення та достатні умови розвинення функції $f(x)$ у тригонометричний ряд.

Теорема 35.1 (про єдиність розвинення функції в тригонометричний ряд). Якщо функція $f(x)$ є інтегрованою на відрізку $[-\pi, \pi]$ і розвивається в тригонометричний ряд (35.18), який можна почленно зінтегрувати, то це розвинення є єдиним.

Доведення. Визначмо коефіцієнти тригонометричного ряду (35.18).

Зінтегрувавши рівність (35.18) на відрізку $[-\pi, \pi]$, маємо таке:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (35.19)$$

Для визначення коефіцієнтів a_n при $\cos nx$ домножмо рівність (35.18) на $\cos nx$ та зінтегруймо на відрізку $[-\pi, \pi]$ ліву та праву частини цієї рівності.

Тоді, згідно із другою властивістю послідовності функцій (35.14), маємо таке:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (35.20)$$

Аналогічно визначаймо коефіцієнти b_n , домноживши рівність (35.18) на $\sin nx$:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (35.21)$$

Оскільки визначений інтеграл – це певне число, то коефіцієнти ряду a_0 , a_n , b_n визначають єдиним способом. ■

Тригонометричний ряд (35.18) називають **рядом Фур'є**, якщо його коефіцієнти обчислюють за ф-лами (35.19) – (35.21).

Отже, для кожної з періодичних інтегровних функцій можна обчислити коефіцієнти Фур'є a_0 , a_n , b_n , $n \in \mathbf{N}$ та формально побудувати ряд Фур'є, але не можна стверджувати, що він збігається, і поготів до функції $f(x)$.

Зауважмо, що для коефіцієнтів ряду (35.18) можна вибрати будь-які числові послідовності, а потім з'ясувати, де цей ряд збігається і до якої функції.

Наведімо умови, які має задовольняти функція $f(x)$, щоб її ряд Фур'є збігався і його сума дорівнювала $f(x)$.

Теорема 35.2 (достатні умови розвинення функції в ряд Фур'є). Якщо функція $f(x)$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$:

а) є неперервною або має скінченну кількість точок розриву I роду;

б) є монотонною або має скінченну кількість екстремумів, то ряд Фур'є збігається. Водночас:

1) у точках неперервності функції $f(x)$ він збігається до самої функції, тобто його сума $S(x) = f(x)$;

2) у кожній точці розриву x_k функції він збігається до півсуми односторонніх границь функції ліворуч і праворуч:

$$S(x_k) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_k - 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_k + 0} f(x) \right);$$

3) в обох граничних точках інтервалу $[-\pi, \pi]$ він збігається до півсуми односторонніх границь функції $f(x)$:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow \pi + 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi - 0} f(x) \right).$$

Теорему наводьмо без доведення.

Зауважмо, що теорему 35.2 називають **теоремою Діріхле**, а умови теореми, за якими ряд Фур'є збігається до функції $f(x)$, називають **умовами Діріхле**.

Теорему Діріхле застосовують і у випадках, якщо на відрізку $[-\pi, \pi]$ задано довільну функцію $f(x)$, яка задовольняє її умови, але не є періодичною.

Тоді будують функцію $F(x)$, що є визначеною на всій числовій осі, періодом якої є проміжок $[-\pi, \pi]$: $F(x \pm 2\pi) = F(x)$, водночас $F(x) = f(x) \forall x \in [-\pi, \pi]$. Функцію $F(x)$ називають **періодичним продовженням** функції $f(x)$ із відрізка $[-\pi, \pi]$ на всю числову вісь.

Неповні ряди Фур'є. Якщо функція $f(x)$, яка задовольняє умови розвинення в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi, \pi]$, є парною, то коефіцієнти Фур'є обчислюють за такими формулами:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (35.22)$$

$$b_n = 0.$$

Ряд Фур'є такої функції містить тільки косинуси:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (35.23)$$

Якщо функція $f(x)$, що розвивається в ряд Фур'є, є непарною, то коефіцієнти Фур'є будуть такими:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_n = 0, \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (35.24)$$

Для непарної функції ряд Фур'є буде містити тільки синуси:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (35.25)$$

Ряди (35.23) та (35.25) називають **неповними**.



Розвинемо в ряд Фур'є функцію $f(x)$ із періодом 2π , що задано так:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Графік цієї функції зображено на рис. 35.1.

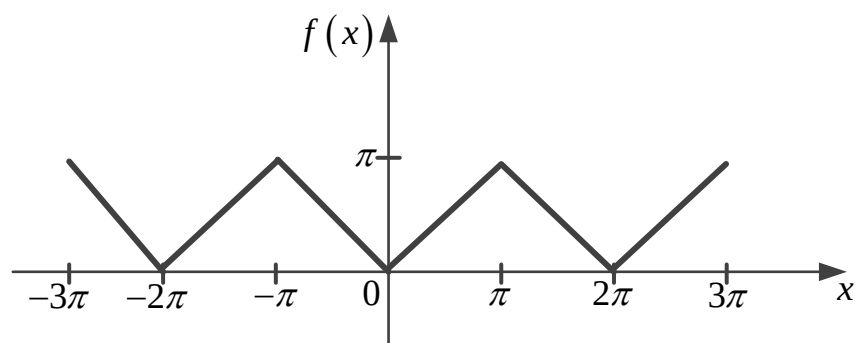


Рис. 35.1. Графік функції $f(x) = |x|$

Функція задовольняє умови теореми Діріхле, отже, розвивається в ряд Фур'є. Вона є парною, тому коефіцієнти ряду $b_n = 0$.

Обчислимо a_0 і a_n .

За ф-лами (35.22), маємо такі вирази:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos nx dx.$$

Для обчислення a_n застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

для чого подаймо підінтегральний вираз таким способом:

$$u = x, \quad dv = \cos nx dx.$$

$$\text{Тоді } du = dx, \text{ а } v = \frac{\sin nx}{n}.$$

Визначмо коефіцієнти a_n :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(x \cdot \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} (\cos \pi n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n = 2k - 1. \end{cases}$$

Отже,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \dots \right),$$

або

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

Ряд Фур'є для функції з довільним періодом. Розгляньмо функцію $f(x)$, яка є періодичною з періодом $T = 2l$ ($l > 0$):

$$f(x \pm 2l) = f(x), \quad x \in D(f). \quad (35.26)$$

Період 2π називають **стандартним**. Якщо $x = \frac{l}{\pi}t$, то можна кожну функцію з довільним періодом звести до функції зі стандартним періодом. Розвинення у ряд Фур'є такої функції має такий вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \quad (35.27)$$

а його коефіцієнти визначають за такими формулами:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx; \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (35.28)$$

Розгляньмо також розвинення в ряд Фур'є функції $f(x)$, яка задана на відрізку $[0, l]$. Таку функцію можна розвивати (за бажанням) у ряд, який містить тільки синуси або тільки косинуси.

Якщо функцію треба розвинути в ряд за синусами, то слід продовжити її на півінтервал $[-l, 0)$ так, щоб $f(-x) = -f(x)$.

У результаті маємо непарну функцію на інтервалі $[-l, l]$. Ряд Фур'є в цьому разі має такий вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (35.29)$$

$$\text{де } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Якщо функцію треба розвинути в ряд за косинусами, продовжуймо її на півінтервал $[-l, 0)$ так, щоб $f(-x) = f(x)$. У результаті маємо парну функцію на інтервалі $[-l, l]$. Ряд Фур'є в цьому разі має такий вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}, \quad (35.30)$$

$$\text{де } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Щодо збіжності рядів (35.29) і (35.30) виконано теорему, що є аналогічною теоремі Діріхле, а саме: якщо функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле, то ряди за синусами й косинусами збігаються.

Водночас у точках, у яких функція є неперервною, суми рядів дорівнюють $f(x)$; у точках розриву функції $f(x)$ суми дорівнюють середньому арифметичному лівосторонньої та правосторонньої границь; на кінцях відрізка сума ряду за косинусами збігається зі значенням функції, а сума ряду за синусами дорівнює нулю.



Розвинемо в ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = 2x$, що задана на проміжку $[0, 1]$.

Щоб визначити розвинення цієї функції в ряд Фур'є, що має тільки синуси, треба продовжити цю функцію на сусідній ліворуч інтервал $[-1, 0]$ так, щоб $f(-x) = -f(x)$ (рис. 35.2).

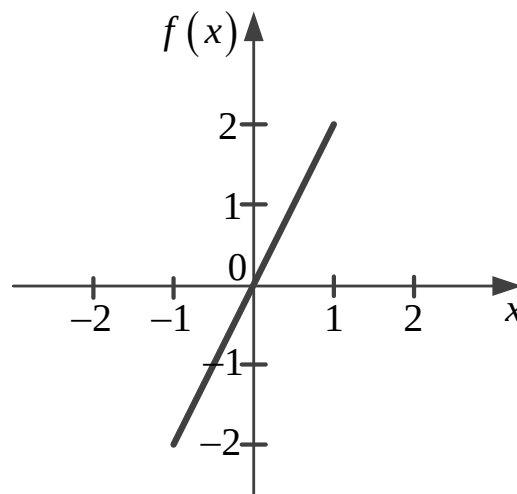


Рис. 35.2. Графік функції $f(x) = 2x$

Обчислюймо такі коефіцієнти Фур'є:

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Для обчислення b_n застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2 \int_0^1 2x \cdot \sin \frac{\pi n x}{1} dx = 4 \int_0^1 x \cdot \sin \pi n x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin \pi n x dx, \quad v = -\frac{1}{\pi n} \cos \pi n x \end{array} \right| = \\
 &= 4 \left(-x \frac{\cos \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos \pi n x}{\pi n} dx \right) = \\
 &= 4 \left(-\frac{\cos \pi n}{\pi n} + \frac{1}{(\pi n)^2} \sin \pi n x \Big|_0^1 \right) = -\frac{4 \cos \pi n}{\pi n} = (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi n}.
 \end{aligned}$$

Отже,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \pi x - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} - \dots (-1)^{n-1} \frac{\sin n\pi x}{n} + \dots \right).$$

Тоді маємо таке співвідношення:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\pi x}{n}. \quad (35.31)$$



Зауважмо, що ряд (35.31) за $x = \frac{1}{2}$ дає розвинення в ряд Фур'є числа π :

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} + \dots \right).$$



Ключові терміни

Розвинення функції в ряд Маклорена; похибка обчислення; оцінювання похибки; періодична функція; ряд Фур'є; неповний ряд Фур'є; ряд Фур'є для функції з довільним періодом.



Запитання для самоперевірки

1. Яка послідовність дій під час розвинення функцій у ряд Тейлора (Маклорена)?
2. Який вигляд має символічний запис рядів Тейлора й Маклорена?
3. Як записати розклад у ряд Маклорена таких функцій: 1) $y = \cos x$;
2) $y = \sin x$; 3) $y = (1+x)^m$; 4) $y = \ln(1+x)$; 5) $y = \operatorname{arctg} x$; 6) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$;
7) $y = e^{-x^2}$?
4. Чому дорівнюють області збіжності рядів, наведених у запитанні 3?
5. Як виконують оцінювання похибки за наближених обчислень за допомогою знакопереміжного ряду?
6. Як виконують оцінювання похибки за наближених обчислень за допомогою знакосталого ряду?
7. Які можна навести приклади наближеного обчислення за допомогою рядів: а) значень основних елементарних функцій; б) визначених інтегралів?
8. Які можна навести приклади наближеного розв'язання диференціального рівняння за допомогою ряду?
9. Які функціональні ряди називають тригонометричними?
10. Які тригонометричні ряди називають рядами Фур'є?
11. Як сформулювати теорему про єдиність розвинення функції в ряд Фур'є?
12. Як сформулювати теорему про достатні умови розвинення функції в ряд Фур'є?
13. Як обчислюють коефіцієнти Фур'є для функції з довільним періодом?
14. Що таке «неповні ряди Фур'є» і які особливості вони мають?



Тестові завдання до підрозділу 35

1. Укажіть область збіжності такого ряду Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}:$$

- а) $x \in (-1, 1]$; б) $x \in (-1, 1)$; в) $x \in R$; г) $x \in [-1, 1]$; ґ) $x \in [-1, 1)$.

2. Укажіть область збіжності такого ряду Маклорена

$$\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

- а) $x \in (-1, 1]$; б) $x \in (-1, 1)$; в) $x \in \mathbb{R}$; г) $x \in [-1, 1]$; ґ) $x \in [-1, 1)$.

3. Укажіть область збіжності такого ряду Маклорена

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

- а) $x \in (-1, 1]$; б) $x \in (-1, 1)$; в) $x \in \mathbb{R}$; г) $x \in [-1, 1]$; ґ) $x \in [-1, 1)$.

4. Визначте такий ряд Маклорена, для якого проміжок $[-1; 1]$ є областю його збіжності:

а) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1};$

б) $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$

в) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n};$

г) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n.$
($m \in \mathbb{R}$)

5. Визначте такий ряд Маклорена, для якого інтервал $(-1; 1]$ є областю його збіжності:

а) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1};$

б) $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$

$$\text{в) } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n};$$

$$\text{г) } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n.$$

$(m \in \mathbf{R})$

6. Для парної функції ряд Фур'є буде містити тільки:

- а) синуси; б) косинуси; в) тангенс; г) котангенс.

7. Для непарної функції ряд Фур'є буде містити тільки:

- а) синуси; б) косинуси; в) тангенс; г) котангенс.

8. Для ряду Фур'є стандартний період дорівнює:

- а) 2π ; б) π ; в) 3π ; г) $\frac{\pi}{2}$.

9. Алгоритм розвинення функції в ряд Маклорена передбачає такі кроки:

- а) обчислення коефіцієнтів ряду Маклорена для цієї функції;
- б) обчислення радіуса збіжності утвореного ряду;
- в) доведення того, що утворений ряд збігається саме до функції $y = f(x)$;
- г) усі відповіді є правильними.

10. Розвинення у ряд Маклорена степеневі функції називають таким рядом:

- а) тригонометричним;
- б) біноміальним;
- в) степеневим;
- г) функціональним.

Література: [4 – 6; 14; 18].



Практичні завдання за розділом 8

Розв'язання задач економічного змісту

8.1. Визначте поточну вартість цінних паперів, строк погашення яких становить 5 років, якщо відсоткова ставка за ними становить 7%, щорічні витрати сягають 5 у. о., а вартість на момент погашення дорівнює 200 у. о.

Розв'язання. Якщо строк погашення цінних паперів – 5 років, а відсоткова ставка становить 7%, водночас щорічно власник отримує виплату 5 у. о., то поточна вартість цінних паперів буде становити:

$$P = \frac{5}{1+0,07} + \frac{5}{(1+0,07)^2} + \frac{5}{(1+0,07)^3} + \frac{5}{(1+0,07)^4} + \frac{5}{(1+0,07)^5} + \frac{200}{(1+0,07)^5}.$$

Перші п'ять доданків утворюють часткову суму S_n ряду спадної геометричної прогресії, де:

$$b_1 = \frac{5}{1+0,07}, \quad q = \frac{1}{1+0,07}.$$

Використавши таку формулу:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

маємо:

$$S_n = \frac{\frac{5}{1+0,07} \left(\frac{1}{(1+0,07)^5} - 1 \right)}{\frac{1}{1+0,07} - 1} = \frac{5(1 - (1+0,07)^5)}{-0,07(1+0,07)^5} = \frac{5((1+0,07)^5 - 1)}{0,07(1+0,07)^5}.$$

Тоді

$$P = \frac{5((1+0,07)^5 - 1) + 0,07 \cdot 200}{0,07(1+0,07)^5} \approx 163,1(\text{у. о.}).$$

Отже, поточна вартість цінних паперів становить приблизно 163,1 у. о.

8.2. Обчисліть обсяг продукції, що виробляють протягом першої години роботи, якщо відомо, що продуктивність праці протягом дня змінюється як $p(x) = \sqrt{x} e^{-x}$ (в одиницях вартості продукції за одиницю часу).

Розв'язання. Обсяг продукції, що виробляють за проміжок часу $[x_1, x_2]$, обчислюють за такою формулою:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

За умовою задачі, $[x_1, x_2] = [0, 1]$,

тоді

$$P = \int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx.$$

Оскільки первісну від підінтегральної функції неможливо визначити у вигляді скінченної кількості елементарних функцій, то обчислимо цей інтеграл наближено за допомогою рядів.

Використовуймо розвинення функції e^x у такий ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots.$$

Для функції продуктивності маємо співвідношення:

$$\sqrt{x} e^{-x} = \sqrt{x} \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \right) = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{\frac{2n+1}{2}}}{n!} + \dots.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx &= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} \frac{x^{\frac{7}{2}}}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{2}{2n+3} \frac{x^{\frac{2n+3}{2}}}{n!} + \dots \right) \Bigg|_0^1 = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7 \cdot 2!} - \frac{2}{9 \cdot 3!} - \dots + (-1)^n \frac{2}{(2n+3)n!} + \dots. \end{aligned}$$

Обчислімо, наприклад, суму перших чотирьох членів ряду:

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx \approx 0,666\,7 - 0,400\,0 + 0,142\,9 - 0,037\,0 = 0,372\,6.$$

Похибка не перевищує за абсолютним значенням першого з відкинутих членів ряду: $u_5 = \frac{2}{11 \cdot 4!} = 0,007\,6 < 0,01$.

Отже, обсяг продукції, що виробляють протягом першої години, становить приблизно 0,37 у. о.

Завдання для самостійного розв'язання

Запишіть загальний член ряду:

$$\text{8.3. } 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots \quad \text{8.4. } \frac{\sqrt{2}}{1 \cdot 2} + \frac{\sqrt{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\sqrt{4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots.$$

Запишіть ряд за його загальним членом:

$$\text{8.5. } u_n = \frac{3^n}{n!}. \quad \text{8.6. } u_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}.$$

8.7. За загальним членом $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ запишіть ряд і обчисліть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди за допомогою необхідної ознаки:

$$\text{8.8. } \frac{4}{7} + \frac{7}{12} + \frac{10}{17} + \dots + \frac{3n+1}{5n+2} + \dots \quad \text{8.9. } \sum_2^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3} \right)^n \quad \text{8.10. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{4n^2+1}}{5n^2-3}.$$

Дослідіть на збіжність ряди, застосовуючи ознаку порівняння:

$$\text{8.11. } \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n+1}{(n+2)n} + \dots \quad \text{8.12. } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(3n-1)^2} + \dots.$$

$$\text{8.13. } \sum_1^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \quad \text{8.14. } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

Дослідіть на збіжність ряди, застосовуючи ознаки Д'Аламбера або Коші:

$$8.15. \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2n-1}{3^n} + \dots. \quad 8.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{5^n}. \quad 8.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

$$8.18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+4} \right)^{2n}. \quad 8.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

Дослідіть збіжність рядів за допомогою інтегральної ознаки Коші:

$$8.20. \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \dots. \quad 8.21. \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n} + \dots.$$

$$8.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}. \quad 8.23. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-6) \ln(n-2)}.$$

Дослідіть збіжність рядів, користуючись відповідними ознаками:

$$8.24. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots.$$

$$8.25. \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \dots.$$

$$8.26. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots.$$

$$8.27. \frac{3}{4} + \left(\frac{6}{7} \right)^2 + \left(\frac{9}{10} \right)^3 + \dots + \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^n + \dots.$$

$$8.28. \frac{\operatorname{arctg} 1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{5} + \frac{\operatorname{arctg} 3}{10} + \dots + \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2} + \dots.$$

$$8.29. \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}. \quad 8.30. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}. \quad 8.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n} n!}{n^n}.$$

Дослідіть на умовну та абсолютну збіжність такі ряди:

$$8.32. 1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \dots + (-1)^n \frac{n}{6n-5} + \dots.$$

$$8.33. \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n 2^n} + \dots.$$

$$8.34. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n}. \quad 8.35. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{(2n+1)^n}.$$

$$8.36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}. \quad 8.37. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Визначте області збіжності таких функціональних рядів:

$$8.38. \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \dots + \frac{\sin nx}{n^3} + \dots.$$

$$8.39. x + x^4 + \dots + x^{n^2} + \dots.$$

$$8.40. x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots.$$

$$8.41. 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{3^n(n+1)} + \dots.$$

$$8.42. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}. \quad 8.43. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n. \quad 8.44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}.$$

Запишіть розвинення в степеневий ряд за степенями x для заданих функцій:

$$8.45. f(x) = e^{\frac{x}{2}}. \quad 8.46. f(x) = \frac{1}{x-1}. \quad 8.47. f(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}.$$

$$8.48. \text{Обчисліть наближено } \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ із точністю до } 0,0001.$$

$$8.49. \text{Обчисліть наближено } \ln 1,04 \text{ із точністю до } 0,0001.$$

8.50. Обчисліть наближено $\sqrt[10]{1027}$ із точністю до 0,000 1.

8.51. Обчисліть наближено $\sin 0,4$ із точністю до 0,000 1.

8.52. Обчисліть наближено $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ із точністю до 0,000 1.

8.53. Обчисліть наближено $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ із точністю до 0,000 1.

Запишіть рядом Фур'є такі функції:

8.54. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $0 \leq x \leq 2\pi$. **8.55.** $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

8.56. $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq \pi$. **8.57.** $f(x) = 1$, $0 < x < 1$ за синусами.

Розв'яжіть такі задачі:

8.58. Визначте поточну вартість цінних паперів, що має строк погашення 3 роки, якщо відсоткова ставка становить 8%, щорічні витрати становлять 6 у. о., а вартість на момент погашення дорівнює 100 у. о.

8.59. Обчисліть обсяг продукції, яка виробляється за першу годину роботи, якщо продуктивність праці протягом дня змінюється за таким законом:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} e^{-\frac{x}{2}}.$$



Відповіді

8.3. $u_n = \frac{n}{2^{n-1}}$. **8.4.** $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!}$. **8.5.** $\frac{3}{1} + \frac{3^2}{1 \cdot 2} + \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$.

8.6. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \dots$. **8.7.** $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$, $S = 1$.

- 8.8. Розбігається. 8.9. Розбігається. 8.10. Розбігається. 8.11. Розбігається.
 8.12. Збігається. 8.13. Розбігається. 8.14. Збігається. 8.15. Збігається.
 8.16. Збігається. 8.17. Збігається. 8.18. Збігається. 8.19. Розбігається.
 8.20. Розбігається. 8.21. Розбігається. 8.22. Розбігається. 8.23. Розбігається.
 8.24. Розбігається. 8.25. Розбігається. 8.26. Збігається. 8.27. Розбігається.
 8.28. Збігається. 8.29. Збігається. 8.30. Збігається. 8.31. Розбігається.
 8.32. Розбігається. 8.33. Збігається абсолютно. 8.34. Збігається абсолютно.
 8.35. Збігається абсолютно. 8.36. Збігається абсолютно. 8.37. Збігається умовно.
 8.38. $(-\infty, \infty)$. 8.39. $(-1, 1)$. 8.40. $(-1, 1]$. 8.41. $[-3, 3)$. 8.42. $(-1, 1]$.
 8.43. $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. 8.44. $[1; 3)$. 8.45. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2 2!}x^2 + \frac{1}{2^3 3!}x^3 + \dots$.
 8.46. $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$. 8.47. $-\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \dots - \frac{x^{n-2}}{n} - \dots$. 8.48. 0,606 5.
 8.49. 0,039 2. 8.50. 2,000 6. 8.51. 0,389 4. 8.52. 0,493 1. 8.53. 0,746 8.
 8.54. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. 8.55. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}$.
 8.56. $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) \right) \sin nx$.
 8.57. $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$. 8.58. 94,85 у. о. 8.59. 0,442 5 у. о.

Відповіді до тестових завдань

Номери підрозділів	Номери тестових завдань									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
32	а	г	б	б	б	г	б	г	б	а
33	а	а	б	г	а	в	в	а	б	в
34	г	а	а	б	а	в	а	г	а	в
35	в	в	в	а	в	б	а	а	г	б

Рекомендована література

1. Барковський В. В. Вища математика для економістів : навч. посіб. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – 5-те вид. – Київ : Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.
2. Валєєв К. Г. Вища математика : навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ, 2001. – 452 с.
3. Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник / І. П. Васильченко. – 3-тє вид., випр. і допов. – Київ : Знання, 2007. – 454 с.
4. Вища математика : базовий підручник для вузів / за ред. В. С. Пономаренка. – Харків : Фоліо, 2014. – 669 с.
5. Вища математика в GNU Octave [Електронний ресурс] : навч.-практ. посіб. / Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік ; Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця. – Електрон. текстові дан. (4,51 МБ). – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2024. – 275 с.
6. Вища математика для економістів : підручник / М. В. Грисенко. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2022. – 687 с.
7. Вища математика для економістів : підручник / О. Ляшенко, О. Черняк, Т. Кравець та ін. – Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. – 547 с.
8. Вища математика для менеджерів : підручник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 341 с.
9. Вища математика з прикладами і задачами : підручник / Р. В. Скуратовський. – Київ : Національна академія управління, 2021. – 232 с.
10. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – Київ : Вид-во А.С.К., 2003. – 480 с.
11. Вища математика : навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. – Вид. 2-ге, переробл. і допов. – Київ : КНЕУ, 2002. – 606 с.
12. Вища математика : навч. посіб. / Р. В. Коляда, І. О. Мельник, О. М. Мельник. – Львів : Магнолія, 2006, 2024. – 342 с.
13. Вища математика : підручник / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський та ін. ; за ред. М. І. Шинкарика. – Тернопіль : Вид. Карп'юка, 2003. – 480 с.

14. Вища математика : підручник / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, Т. В. Денисова та ін. ; за заг. ред. Л. М. Малярець. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. – 772 с.

15. Вища математика : у 2 т. Т. 1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення : зб. задач : навч. посіб. для вищ. навч. закл. / за заг. ред. П. П. Овчинникова. – 2-ге вид., стер. – Київ : Техніка, 2004. – 279 с.

16. Дослідження операцій та методи оптимізації [Електронний ресурс] : підручник / Л. М. Малярець, О. В. Денисюк, Е. Ю. Железнякова та ін. – Мультимедійне інтерактивне електрон. вид. комбінованого використ. (756 Мб). – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2024. – Назва з тит. екрана. – Режим доступу : <https://pns.hneu.edu.ua/course/view.php?id=7796>.

17. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Вид-во А.С.К., 2004. – 648 с.

18. Дудкін М. Є. Вища математика [Електронний ресурс] : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями / М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова, І. В. Степахно ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 10,96 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 449 с. – Режим доступу : <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/51064>.

19. Лютий О. І. Збірник задач з вищої математики : навч. посіб. / О. І. Лютий, О. І. Макаренко. – Київ : КНЕУ, 2003. – 305 с.

20. Малярець Л. М. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах : навч. посіб. / Л. М. Малярець, А. В. Ігначкова. – Харків : ВД «ІНЖЕК». 2006. – 544 с.

21. Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. : у 2 ч. / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Харків : Вид-во ХНЕУ, 2011. – Ч. 1. – 348 с.; Ч. 2 – 308 с.

22. Малярець Л. М. Математика для економістів : практ. посіб. до розв'язання задач / Л. М. Малярець, Л. Д. Широкоград. – Харків : Вид-во ХНЕУ, 2008. – 476 с.

23. Малярець Л. М. Математика для економістів : практ. посіб. до розв'язання задач економічних досліджень в MatLab / Л. М. Малярець, Є. В. Резнік, О. Г. Тижненко. – Харків : ХНЕУ, 2008. – 212 с.

24. Перестюк М. О. Екстремальні задачі : навч. посіб. / М. О. Перестюк. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2004. – 50 с.

Предметний покажчик

А

- Абсолютна величина числа 291
- похибка 400, 666, 667, 669, 949
- Алгебраїчна форма задання вектора 165
- Алгебраїчне доповнення 44
- Аргумент функції 295
- Арифметичні властивості неперервних функцій 358
- – похідних 388
- операції над числовими послідовностями 312, 316, 320
- Асимптота гіперболи 213
- графіка функції 433

Б

- Базис лінійного простору 96
- із власних векторів 127
- одиничний 97
- ортонормований 97
- Біноміальний ряд 942

В

- Вектор 86, 158
- вільний (зв'язаний) 158
- власний 118
- n -вимірний 86
- нульовий 87, 158
- одиничний (орт) 89, 159
- приростів 504
- Вектори взаємно протилежні 87, 159
- колінеарні 88, 159
- компланарні 159
- лінійно залежні (незалежні) 92
- рівні 87, 159
- Векторний добуток векторів 168
- Визначений інтеграл 620
- Визначник 40
- , властивості 42
- Вронського (вронскіан) 779, 782

- Витрати валові 840
- граничні 444, 840
- Відстань від точки до площини 242
- – – – прямої 196
- між паралельними прямими 257
- – перехресними прямими 259
- Відносна похибка 400, 666
- Відрізок 291
- Власне число (значення) 118

Г

- Гармонійний ряд 895, 906, 914
- – узагальнений (Діріхле) 914
- Гіпербола 212
- Гіперболи рівнобічні 215
- взаємно спряжені 215
- Головне значення аргументу 823
- Гradient функції 506
- Границя числової послідовності 313
- – – , властивості 321
- Границя функції 329
- – двох змінних 485
- – ліва (права) 333
- – одностороння 333
- Границі особливі 336
- Граничний аналіз 443
- дохід (продукт) 444
- Графік функції 297, 483

Д

- Двократний інтеграл 701
- Дисконтування 662
- Директриса 211, 214, 216
- Диференціал функції 397
- – , властивості 398
- – , застосування до наближених обчислень 399, 496
- – n -го порядку 404
- – повний 493
- – частинний 495

Диференціальне рівняння 740
 — — Бернуллі 759
 — — вищих порядків 770
 — — —, що допускає зниження
 порядку 772
 — — лінійне зі сталими коефіцієнтами
 778, 793
 — — з відокремлюваними змінними 745
 — — звичайне (у частинних похідних)
 740, 764
 — — лінійне 753
 — — 1-го порядку 740
 — — однорідне 747
 — — розв'язане відносно похідної 740,
 770
 — — у повних диференціалах 761
 Диференціювання 382
 Діагональ матриці 27
 Діаграма Венна – Ейлера 287
 Діаметр розбиття 694
 Дії над матрицями 30
 — — множинами 287
 Довжина вектора 89, 158, 168
 — дуги кривої 649
 Доповнення множини 289
 Дослідження функції
 на неперервність 362
 Достатні умови збіжності числових
 рядів із додатними членами 905
 Достатня умова екстремуму 424, 427,
 510, 516
 — — монотонності функції 421
 — — точки перегину 432
 Дотична 385
 Друга особлива границя 343

Е

Економічні застосування визначеного
 інтеграла 654
 Екстремум функції локальний 423, 509
 — — глобальний 428, 520
 — — умовний 512
 Ексцентриситет 210, 214, 218
 Еластичність функції 445, 541

Елементарні перетворення матриць 61
 Елементи матриці 26
 — — відповідні 30
 Еліпс 208
 Емпіричні формули 526

З

Задача Бернуллі про кредитування 844
 — дисконтування 662
 — Коші 742, 770, 804, 818, 831
 — про використання сировини 535
 — про обсяг продукції 619
 — про площу криволінійної
 трапеції 617
 — про продуктивність праці 442
 — про пройдений шлях матеріальної
 точки 618
 Закон попиту 200
 — — та пропозиції 200, 660
 — спадної дохідності 451
 — — корисності 451
 Залишковий член формули Тейлора
 407
 Змінна величина 294
 — інтегрування 575, 620, 695
 — незалежна (залежна) 295, 480

І

Ізольована точка 294
 Інваріанти кривої 2-го порядку 228
 Інтеграл визначений 620
 — внутрішній (зовнішній) 701
 — двократний (повторний) 701
 — Ейлера – Пуассона 681, 710
 — еталонний 680
 — зі змінною верхньою межею 625
 — невизначений 575
 — невластний 677, 684
 — подвійний 694
 Інтеграл диференціального
 рівняння 740
 — — — загальний (частинний) 743, 771
 Інтеграли, що не беруть у скінченному
 вигляді 603

Інтегральна сума 618, 694
 – крива 740
 Інтегровальний множник 763
 Інтегрування 574
 – ірраціональних функцій 600
 – квадратичних ірраціональностей 611
 – раціональних алгебраїчних дробів 596
 – функцій, раціонально залежних від тригонометричних функцій 603
 Інтервал 291
 – збіжності степеневому ряду 926
 – монотонності 299

К

Канонічне рівняння гіперболи 212
 – – еліпса 209
 – – кола 183
 – – параболі 216
 Квадратична форма 224
 – – симетрична (канонічна) 224
 Коефіцієнт Джині 658
 – еластичності 446
 Коло 182, 208
 Компонента вектора 161
 Конічна поверхня 265
 Координати вектора 86, 96, 164
 – точки 163
 Координатна форма задання вектора 164
 Крива 2-го порядку 207
 – – – центральна (нецентральна) 218
 – логістична 847
 – Лоренца 657
 – навчання 659
 Криволінійна трапеція 617
 Криволінійний сектор 644
 Критерій еквівалентності СЛАР 63
 – існування скінченної границі 334
 – колінеарності векторів 161, 168, 169
 – компланарності векторів 161, 174
 – неперервності функції в точці 356, 357
 – ортогональності векторів 168
 – сумісності СЛАР 64

Критичні точки функції 421, 510
 Кут між векторами 90, 168
 – – перехресними прямими 258
 – – площинами 240
 – – прямими 193, 256
 – – прямою і площиною 261

Л

Лінеаризація 530
 Лінійна балансова модель 78
 – комбінація векторів 91
 – модель обміну 131
 Лінійне перетворення (оператор) 112
 – – нульове (тотожне) 113
 – – обернене 113
 – – подібності 117
 Лінійний векторний простір 88
 Лінійні операції над векторами 87, 159, 165
 – – – матрицями 30
 Лінія рівня 483
 Логарифмічне диференціювання 394

М

Матриці еквівалентні 61
 – подібні 117
 – рівні 30
 Матриця 26
 – Гессе (гессіан) 510
 – діагональна 28
 – квадратичної форми 224
 – квадратна (прямокутна) 27
 – лінійного перетворення 114
 – невироджена (вироджена) 49
 – нульова 27
 – обернена 49
 – одинична 28
 – переходу до нового базису 99
 – повних (непрямих) витрат 80
 – приєднана (союзна) 49
 – симетрична 27
 – транспонована 27
 – трикутна 28

Матриця-рядок (матриця-стовпець) 27

Матричний мультиплікатор 80

Метод Бернуллі 753

– варіації довільної сталої
(Лагранжа) 754

– виключення 804, 831

– Гаусса 68

– Ейлера 806

– Жордана – Гаусса 68

– Крамера 52

– множників Лагранжа 514

– найменших квадратів 527

– невизначених коефіцієнтів 598, 796

– оберненої матриці 54

– перерізів 266

Методи невизначеного
інтегрування 580

– визначеного інтегрування 628

Міnor елемента визначника 44

– матриці 59

– – базисний 61

Мішаний добуток векторів 171

Мішані похідні 492

Множина 286

– дискретна (неперервна) 294

– дійсних чисел 290

– ірраціональних чисел 290

– зліченна (незліченна) 293

– комплексних чисел 290

– натуральних чисел 290

– порожня 287

– раціональних чисел 290

– скінченна (нескінченна) 293

– цілих чисел 290

Множник Лагранжа 514

Модель Леонтьєва 78

– міжгалузевого балансу 80

– міжнародної торгівлі 131

– «попит – пропозиція» 200

– природного зростання 844

– ринку павутинна 857

– розвитку Самуельсона – Гікса 859

Модуль вектора 89, 158, 168

– числа 291

Н

Наближене обчислення визначених
інтегралів 665

Найбільше та найменше значення
функції 366, 428, 488, 520

Напрямні косинуси вектора 163

– кути вектора 163

Напрямний вектор прямої 187, 249

Невизначений інтеграл 575

Невизначеності у разі обчислення
границь функцій 336

Невласні інтеграли I роду 677

– – II роду 684

Невласні числа 291

Нелінійні операції над векторами 166

Необхідна умова екстремуму 424, 509,
514

– – збіжності числового ряду 899

– – монотонності функції 420

– – точки перегину 432

Неперервність функції 354

– – двох змінних 487

– – на проміжку 365

Нескінченно великі функції 334

– малі функції 334

– – – більш високого порядку 349

– – – більш низького порядку 349

– – – еквівалентні 349

Нормальний вектор прямої 185

– – площини 233

Нормувальний множник 195, 241

О

Об'єднання множин 287

Область визначення функції 296, 480

– відкрита (замкнена) 481

– збіжності функціонального ряду 923

– значень функції 296, 480

– правильна 699, 701, 707

Обчислення довжини дуги 649

– об'єму просторового тіла 646, 714

– площі трикутника 175

– – криволінійного сектора 642, 644

– – плоскої фігури 636, 711

Ознака Д'Аламбера 909
– Коші інтегральна 913
– Коші радикальна 912
– Лейбніца 917
Окіл точки 293, 314
Орт вектора 89

П

Парабола 216
Параметр 295,
– параболі 216
Паралельне перенесення осей 219
Первісна 574
Переставлення чисел 39
– векторів 173
Перетворення координат 218
Переріз множин 288
Перехід до нового базису 98
Перехресні прямі 258
Період функції 301
Перша особлива границя 341
Піввісь 210, 215
Підмножина 287
Поверхня 2-го порядку 263
– – – конічна 265
– – – циліндрична 263
– обертання 268
Повний приріст функції 488
Поворот осей координат 219
Повторний інтеграл 701
Подвійний інтеграл в декартових
координатах 694
– – у полярних координатах 705
Поділ відрізка в заданому
відношенні 176
– – внутрішній (зовнішній) 177
Поле напрямків 741
Поліус 642
Полярна система координат 642
Полярні координати точки 643
Попит (пропозиція) 200
Порівняння нескінченно малих
функцій 348

Похідна функції 382
– за напрямком 505
– неявної функції 393
– оберненої функції 392
– параметрично заданої функції 395
– показниково-степеневі функції 394
– складеної функції 390
Похідні вищих порядків 401, 491
– мішані 492
– частинні 489
Початкові умови 741, 770
Правила диференціювання 388
– інтегрування 577
Правило Крамера 52
– Лопіталю 417
– многокутника 159
– паралелограма 159
– трикутника 41, 159
Приріст аргументу 354
– функції 355
– – частинний (повний) 488
Проекція вектора на вісь 162
Проміжок 290
Простір лінійний 88
– евклідовий 90
Прямокутна система координат 162

Р

Радіус-вектор точки 163
Радіус збіжності степеневому ряду 926
Ранг матриці 60
Раціональний алгебраїчний дріб 596
– – – елементарний 593
Рекурентна формула 311
Рівновага товарного ринку 200
Рівноважна ціна 200, 849
Рівноважний обсяг 200
Рівняння бісекторних площин 242
– бісектрис кутів 197
– диференціальне 740
– дотичної до графіка функції 386
– зв'язку 512
– лінії на площині 182
– – полярне 643

- кола 183, 208
- нормалі до графіка функції 386
- площини загальне 234
- – із заданим нормальним вектором 233
- – нормальне 237
- – через точку паралельно двом векторам 244
- – через три задані точки 235
- – у відрізках на осях 237
- поверхні 2-го порядку 263
- прямої на площині 184
- – загальне 185
- – з кутовим коефіцієнтом 189
- – із заданим нормальним вектором 185
- – канонічне 187
- – нормальне 190
- – параметричне 188
- – через дві точки 188
- – через точку в заданому напрямку 188
- – у відрізках на осях 190
- прямої в просторі 248
- – загальне 248
- – канонічне 250
- – параметричне 249
- – через дві точки 251
- різницеве 817
- сфери 232
- Різницеве рівняння 817
- – неоднорідне (однорідне) 818
- Різниця множин 289
- функції скінченна 816
- Розв’язок диференціального рівняння 740, 770
- – – загальний (частинний) 742, 771
- – – особливий 742
- різницевого рівняння 817
- – – загальний (частинний) 817
- системи диференціальних рівнянь 803
- – – – загальний (частинний) 803 (804)

- Розв’язок СЛАР 35
- – базисний (опорний) 68
- – загальний (частинний) 68
- – тривіальний 64
- Розклад вектора за базисом 96
- Розриви функцій 360
- Ряд абсолютно збіжний 916
- біноміальний 942
- гармонійний 895, 914
- геометричної прогресії 894
- Діріхле 914
- еталонний 906
- збіжний (розбіжний) 892
- знаковмінний 915
- знакопереміжний 917
- Маклорена 934, 940
- степеневий 924
- Тейлора 934
- тригонометричний 959
- функціональний 923
- Фур’є 960
- – неповний 961
- – із довільним періодом 963
- числовий 890
- умовно збіжний 916

С

- Середнє значення функції в області 698
- – – на відрізку 624
- Система диференціальних рівнянь 803
- – – неоднорідна (однорідна) 803
- – – нормальна 803
- Система лінійних алгебраїчних рівнянь 33
- – – – визначена (невизначена) 35
- – – – зведена до одиничного базису 101
- – – –, матрична форма 34
- – – – неоднорідна (однорідна) 35, 103
- – – – несумісна (сумісна) 35
- нормальних рівнянь 531
- Система лінійних різницевих рівнянь 830
- Скалярний добуток векторів 89, 166
- квадрат вектора 89, 166

Слід матриці 123
 Спектр матриці 120
 Співвідношення балансу 79
 Способи задання множин 286
 — функцій 296
 Стала величина 294
 — універсальна (абсолютна) 295
 Стаціонарні точки 422, 510
 Структурна матриця торгівлі 131
 Сума ряду 892, 924

Т

Темп приросту функції 447
 Теорема Абеля 925
 — Діріхле 961
 — Крамера 52
 — Кронекера — Капеллі 64
 — Лагранжа 415
 — Лапласа 45
 — Лейбніца 917
 — Ролля 414
 — Ферма 413
 Тіло обертання 648
 Точка внутрішня 481
 — збіжності функціонального ряду 923
 — критична 421, 510
 — максимуму (мінімуму) функції 424
 — особлива 684, 742
 — розриву функції 360, 487
 — — I роду 361
 — — II роду 361
 — рівноваги 660
 — стаціонарна 421, 510
 — усувного розриву 360
 Точки локального екстремуму функції 424
 — перегину графіка функції 432
 — умовного екстремуму 513
 Транспонування матриці 28

У

Умова збігу площин 239
 — — прямих 192, 254

— належності двох прямих одній площині 254
 — — трьох точок одній прямій 236
 — ортогональності площин 240
 — — прямих 193, 194, 256
 — — прямої та площини 262
 — паралельності площин 239
 — — прямих 192, 194, 254
 — — прямої та площини 262
 — перерізу площин 239
 — перетину прямих 192, 255
 Умовний екстремум 513
 Універсальна тригонометрична підстановка 604
 Універсум 288
 Уявна крива 207
 — одиниця 119

Ф

Факторіал 305
 Фокальні радіуси гіперболи 214
 — — еліпса 211
 Фокус гіперболи 212
 — еліпса 208
 — парабол 216
 Форма задання вектора алгебраїчна 165
 — — — координатна 164
 Формула інтегрування частинами 584, 630
 — скінченних приростів 416
 — Ньютона — Лейбніца 626
 — простих відсотків 200, 306
 — прямокутників 665
 — Сімпсона (парабол) 667
 — складних відсотків 307
 — Тейлора 406
 — трапецій 666
 Формули Гюльдена 649
 — Крамера 52
 — повороту осей координат 220
 Фундаментальна система розв'язків 105, 781, 782, 808

Функція 295

- алгебраїчна (трансцендентна) 303
- випуску 306
- виробнича 306, 386, 483, 655
- витрат 306
- диференційовна 382, 493
- елементарна 303
- – основна 304
- задана аналітично 296
- – графічно 297
- – неявно (явно) 297
- – таблично 297
- інтегровна на відрізьку 621
- – в області 696
- зростаюча (спадна) 298
- кількох змінних 296, 480
- Кобба – Дугласа 484, 543
- корисності 306, 484
- Лагранжа 514
- логарифмічна 304, 484
- логістична 847
- монотонна 298
- необмежена (обмежена) 300
- непарна (парна) 300
- неперервна в точці 355, 487
- – на інтервалі 365
- – в замкненій області 487
- нескінченно велика 334
- – мала 334
- обернена 302
- опукла (угнута) 430
- періодична 301
- показникова 304
- попиту 306
- похибок 529
- пропозиції 306
- складена 304
- споживання 306
- сталої еластичності 484
- степенева 304
- розподілу ймовірностей 848
- тригонометрична 304
- – обернена 304

Х

- Характеристична властивість 286
- Характеристичне рівняння 119, 783, 807, 822, 825
- Характеристичний многочлен матриці 119

Ц

- Центр кола 182, 208
- Циліндр 2-го порядку 264
- Циліндрична поверхня 263
- Циліндричне тіло 696

Ч

- Частинний коефіцієнт еластичності 542
- Часткова сума ряду 891, 923
- Частинні похідні функції 489
- Частинні прирости функції 488
- Число Непера 345
- Числова вісь 162
- Числова послідовність 311
- –, границя 314
- –, загальний член 311
- – збіжна (розбіжна) 314
- – монотонно зростаюча (спадна) 313
- – необмежена (обмежена) 312
- – нескінченно мала 316
- – – велика 319
- Числовий ряд 890
- –, загальний член 890
- збіжний (розбіжний) 892

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Пономаренко Володимир Степанович
Малярець Людмила Михайлівна
Денисова Тетяна Володимирівна та ін.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Підручник
2-ге вид. випр. та допов.

За загальною редакцією
д-ра екон. наук, професора В. С. Пономаренка

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Відповідальний за видання *М. Л. Малярець*

Відповідальний редактор *О. С. Вяткіна*

Редактор *О. Г. Доценко*

Коректор *О. Г. Доценко*

План 2025 р. Поз. № 19-ЕП. Обсяг 987 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61165, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру

ДК № 4853 від 20.02.2015 р.