

Динамика рыночной конъюнктуры с непрерывными запаздываниями в системе «спрос-предложение»

Воронин А.В. , Гунько О.В.

Аннотация

В настоящей работе предложена модификация динамической модели рыночного взаимодействия цены и объема товара в непрерывном времени. В отличие от классических постулатов Вальраса, Маршалла и Самюэльсона фактор запаздывания формулируется парни помощи интегральных соотношений как и на стороне спроса, так и на стороне предложения. Рассмотрены различные виды так называемой «динамической памяти» в интегральных составляющих исходной математической модели, которые продуцируют разнообразные эффекты учета последствий. Выполнен анализ поведенческих свойств исследуемой математической модели с соответствующими графическими иллюстрациями.

Проблема определения характера влияния производственно-экономической специфики предприятия на эволюцию рыночного ценообразования по-прежнему еще очень далека от своего разрешения [1,2]. Ключевым моментом в изучении вышеуказанной тематики является наличие двух подходов, практикующих механизмы формирования цен и объемов продукции как с позиций потребителя на рынке, так и со стороны производителя. В экономической теории принято полагать, что цена товара «нащупывает» свое равновесное значение в условиях существования баланса между спросом и предложением данной продукции (закон Вальраса), а величина объема товара определяется соответствием между ценой спроса и ценой предложения [3]. Последний тезис, с позиции теории фирмы, формируется следующим образом: в случае производственного равновесия

цена выпускаемой продукции должна быть равна предельным издержкам [4]. Таким образом, вполне естественным действием является попытка объединить в единую модель рыночный баланс «спрос — предложение» с производственной схемой учета затрат и прибыли.

Мы будем рассматривать математическую модель производственно-экономической системы, описывающей динамическое взаимодействие цены и объема продукции фирмы на рынке одного товара.

Ради простоты полагаем, что имеется всего один вид продукции и реализуется она на одном (или нескольких одинаковых) рынке.

Введем следующие обозначения: $p = p(t)$ — цена, зависящая от времени t единицы продукции (товара); $y = y(t)$ — объем выпускаемой продукции, также изменяющийся во времени t ; $D(p, y, t)$ — объем спроса на рынке; $S(p, y, t)$ — предложение произведенной продукции; $P_d(p, y, t)$ — цена рыночного спроса; $P(p, y, t)$ — цена рыночного предложения. Динамическая модель получается при наличии запаздываний на стороне спроса или предложения. Простейшее предложение в дискретном временном анализе включает сосредоточенное запаздывание или отставание предложения на один интервал:

$$D(t) = S(t - T_1)$$

Данное равенство имеет место в случае, когда требуется определенный период времени T_1 для производства данного объема товара. При этом предполагается отсутствие запасов, т.е. весь производимый товар поставляется на рынок. С другой стороны, производитель строит свои ожидания будущей цены на основе фактической цены, которая имела место на рынке, то есть на цену предыдущего периода T_2 :

$$P_S(t) = P_d(t - T_2)$$

Далее мы будем изучать интересующие нас процессы в непрерывном времени и произведем замену сосредоточенных запаздываний на непрерывно

распределенные. Тогда математическая модель исследуемой производственно-экономической системы получит следующее представление:

$$D(p, y, t) = \int_0^t K_s(t, \tau) S(p, y, \tau) d\tau \quad (1)$$

$$P_s(p, y, t) = \int_0^t K_d(t, \tau) P_d(p, y, \tau) d\tau \quad (2)$$

Интегральные соотношения (1), (2) относительно переменных $p(t)$ и $y(t)$ называются системой интегральных уравнений Вольтерры с соответствующими ядрами $K_d(t, \tau)$ и $K_s(t, \tau)$, характеризующими свойства запаздываний в каждом из уравнений системы.

Система (1), (2) является слишком общей для конкретного анализа ее поведенческих свойств и особенностей. Поэтому выдвинем дополнительные гипотезы, уточняющие явный вид уравнений (1), (2). Предположим, что предложение товара $S(p, y, t)$ равно объему произведенной продукции $y(t)$, а цена спроса $P_d(p, y, t)$ равна цене единицы продукции $p(t)$. По поводу спроса $D(p, y, t)$ заметим, что он является линейной убывающей функцией цены $p(t)$ и имеет автономную тенденцию $d_0(t)$;

$$D(p, t) = d_0(t) - d_1 p(t)$$

где $d_1 = \text{const} > 0$.

Относительно цены предложения $P_s(y, t)$, являющейся предельными издержками по объему производства, допустим, что она состоит из условно переменных затрат, линейно зависящих от объема производства $y(t)$, и условно постоянных затрат $S_0(t)$, зависящей от времени t и не зависящих от $y(t)$:

$$P_s(y, t) = -S_0(t) + S_1 y(t),$$

где $S_1 = \text{const} > 0$.

С учетом выдвинутых допущений, система (1),(2) примет вид системы линейных интегральных уравнений Вольтерры второго рода:

$$\begin{aligned} d_0(t) - d_1 p(t) &= \int_0^t K_s(t, \tau) y(\tau) d\tau, \\ -S_0(t) + S_1 y(t) &= \int_0^t K_d(t, \tau) p(\tau) d\tau \end{aligned}$$

В случае задания явных выражений для ядер $K_s(t, \tau)$ и $K_d(t, \tau)$ система (3), (4) будет иметь единственное решение для цены $p(t)$ и объема $y(t)$ продукта на данном рынке.

Рассмотрим примеры решения системы (3), (4) для некоторых фиксированных видов ядер интегральных уравнений.

Пример 1. Пусть даны $K_s(t, \tau) = \mu_1 e^{\mu_1(\tau-t)}$ и $K_d(t, \tau) = \mu_2 e^{\mu_2(\tau-t)}$, где $\mu_1, \mu_2 > 0$ постоянные величины, имеющие размерность обратную времени и характеризующие интенсивность убывания «памяти» о прошлых состояниях системы (3),(4) в геометрической прогрессии.

Система (3),(4) в таком случае переписывается следующим образом:

$$d_0(t) - d_1 p(t) = \int_0^t \mu_1 e^{\mu_1(\tau-t)} y(\tau) d\tau, \quad (5)$$

$$-S_0(t) + S_1 y(t) = \int_0^t \mu_2 e^{\mu_2(\tau-t)} p(\tau) d\tau \quad (6)$$

Систему (5), (6) легко разрешить с помощью методов операционного исчисления, используя прямое и обратное преобразование Лапласа [5]. Однако, мы выполним дифференцирование по времени t уравнений (5), (6) и получим систему двух дифференциальных уравнений для $p(e)$ и $y(e)$, содержащую всю необходимую информацию о свойствах решений. В результате дифференцирования по времени t уравнений (5), (6) и выполнения необходимых тождественных преобразований получим

$$\dot{p} = -\mu_1 p - \frac{\mu_1}{d_1} y + p^*(t) \quad (7)$$

$$\dot{y} = \frac{\mu_2}{d_1} p - \mu_2 y + y^*(t) \quad (8)$$

где $p^*(t) = \frac{1}{d_1}(\dot{d}_0 + \mu_1 d_0(t))$, $y^*(t) = -\frac{1}{S_1}(\dot{S}_0 + \mu_2 S_0(t))$, а символы

$\dot{p}, \dot{y}, \dot{d}_0, \dot{S}_0$ являются производными по времени t соответствующих функций.

Очевидно, что система двух дифференциальных уравнений (7),(8) является стационарной и неоднородной. При заданных начальных условиях $p(0)$ и $y(0)$ найти решение системы (7),(8) не представляет никаких принципиальных затруднений. Матрица динамики данной системы дифференциальных уравнений обладает характеристическим полиномом второго порядка

$$\lambda^2 + (\mu_1 + \mu_2)\lambda + \mu_1\mu_2\left(1 + \frac{1}{S_1 d_1}\right) = 0,$$

Корни которого λ_1, λ_2 всегда имеют отрицательные вещественные части в силу положительности коэффициентов квадратного уравнения. Если предположить, что функции $S_0(t), d_0(t)$ являются постоянными положительными числами, то есть $S_0(t) = S_0, d_0(t) = d_0$, то система дифференциальных уравнений (7),(8) будет иметь правые части независимые явным образом от времени t

$$\dot{p} = \frac{\mu_1}{d_1}(-d_1 p - y + d_0), \quad (9)$$

$$\dot{y} = \frac{\mu_2}{S_1}(p - S_1 y - S_0), \quad (10)$$

Приравнивая нулю правые части (9), (10), определим равновесные значения цены p_e и объема продукции Y_e :

$$P_e = \frac{S_0 + S_1 d_0}{1 + S_1 d_1}, \quad Y_e = \frac{d_0 - d_1 S_0}{1 + S_1 d_1} \quad (d_0 > d_1 S_0)$$

Если ввести новые координаты $\tilde{P} = P - P_e$ и $\tilde{Y} = -Y_e$, являющиеся отклонениями базовых переменных от своих равновесных значений, то система (9), (10) трансформируется к виду однородной стационарной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\tilde{P}} = -\mu_1 \tilde{P} - \frac{\mu_1}{\partial_1} \tilde{Y} \quad (11)$$

$$\dot{\tilde{Y}} = -\frac{\mu_2}{S_1} \tilde{P} - \mu_2 \tilde{Y} \quad (12)$$

Очевидно, что система (11), (12) имеет такие же характеристические числа λ_1, λ_2 , как и система (7),(8) (или система (9),(10)). Поэтому можно утверждать, что положение равновесия P_e, Y_e является асимптотически устойчивым.

Таким образом, система (9),(10) имеет решение

$$P(t) = P_e + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (13)$$

$$Y(t) = Y_e + B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \quad (14)$$

Где $\lambda_{1,2} = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)^2 - \mu_1 \mu_2 \left(1 + \frac{1}{S_1 d_1}\right)}$ - корни

характеристического уравнения.

Постоянные A_1, A_2, B_1, B_2 определяются исключительно начальными условиями $p(0)$ и $y(0)$ и находятся в результате решения двух систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = P(0) - P_e \\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = -\mu_1 (P(0) - P_e) - \frac{\mu_1}{D_1} (Y(0) - Y_e) \end{cases} \quad (15)$$

и

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = Y(0) - Y_e \\ \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = -\frac{\mu_2}{S_1}(P(0) - P_e) - \mu_2(Y(0) - Y_e) \end{cases} \quad (16)$$

Заметим, что решения (13) и (14) справедливы лишь при $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Резонансный случай $\lambda_1 = \lambda_2$ мы оставим вне рассмотрения.

Несколько ранее мы установили устойчивость положения равновесия P_e, Y_e , однако достижение его на больших временах будет по-разному зависеть от структуры собственных чисел λ_1, λ_2 . В случае когда λ_1, λ_2 - действительные числа, переходный процесс из начального положения $p(0), y(0)$ в равновесие P_e, Y_e носит монотонный (экспоненциальный) характер. Если же λ_1, λ_2 есть комплексно сопряженные числа, то вышеуказанный процесс сопровождается затухающими колебаниями с частотой

$$\omega = \sqrt{\mu_1 \mu_2 \left(1 + \frac{1}{S_1 d_1}\right) - \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)^2}.$$

В результате анализа динамики системы (7) и (8) при условиях неизменности автономного спроса d_0 и условно постоянных затрат S_0 нами доказана устойчивость единственного нетривиального положения равновесия P_e, Y_e и выявлен качественный характер соответствующего переходного режима поведения функций $p(t), y(t)$.

Пример 2. В предыдущем примере 1 были предложены ядра интегральных уравнений (3) и (4) с конкретными (экспоненциальными) функциями, зависящими от разности аргументов. В данном примере мы ограничимся ядрами более общего вида

$$\begin{aligned} K_S(t, \tau) &= K_S(t - \tau), \\ K_d(t, \tau) &= K_d(t - \tau) \end{aligned}$$

Тогда система интегральных уравнений (3), (4) получит представление:

$$d_0(t) - d_1 p(t) = \int_0^t K_S(t - \tau) y(\tau) d\tau, \quad (17)$$

$$S_0(t) + S_1 y(t) = \int_0^t K_d(t - \tau) p(\tau) d\tau \quad (18)$$

Так как правые части системы интегральных уравнений являют собой свертку двух функций, то целесообразно применить к уравнениям (17) и (18) прямое преобразование Лапласа [5] следующим образом:

$$P(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} p(t) dt$$

$$Y(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} y(t) dt,$$

где λ - комплекснозначная переменная.

Используя основные свойства операционного исчисления, преобразуем (17) и (18) к виду системы линейных алгебраических уравнений для нахождения $P(\lambda)$ и $Y(\lambda)$:

$$d_0(\lambda) - d_1 P(\lambda) = K_S(\lambda) Y(\lambda), \quad (19)$$

$$-S_0(\lambda) + S_1 Y(\lambda) = K_d(\lambda) P(\lambda) \quad (20)$$

Система (19),(20) может быть переписана иначе:

$$d_1 P(\lambda) + K_S(\lambda) Y(\lambda) = d_0(\lambda), \quad (21)$$

$$S_1 Y(\lambda) - K_d(\lambda) P(\lambda) = S_0(\lambda), \quad (22)$$

с соответствующими решениями:

$$P(\lambda) = \frac{-K_S(\lambda) S_0(\lambda) + S_1 d_0(\lambda)}{K_S(\lambda) K_d(\lambda) + S_1 d_1} \quad (23)$$

$$Y(\lambda) = \frac{K_d(\lambda) d_0(\lambda) + d_1 S_0(\lambda)}{K_S(\lambda) K_d(\lambda) + S_1 d_1} \quad (24)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к (23) и (24) можно получить явные формулы для $p(t), y(t)$, но это может оказаться крайне не простой задачей. На наш взгляд, более перспективным видится применение обратного преобразования Лапласа непосредственно к (21) и (22):

$$S_1 d_1 P(t) + \int_0^t \varphi(t-\tau) p(\tau) d\tau = \int_0^t K_S(t-\tau) S_0(\tau) d\tau + S_1 d_0(t), \quad (25)$$

$$S_1 d_1 Y(t) + \int_0^t \varphi(t-\tau) y(\tau) d\tau = \int_0^t K_d(t-\tau) d_0(\tau) d\tau + d_1 S_0(t), \quad (26)$$

$$\text{где } \varphi(t) = \int_0^t K_S(t-\tau) K_d(\tau) d\tau.$$

Нам удалось получить в явном виде для автономных интегральных уравнения Вольтерры второго рода для нахождения цены $p(t)$ и объема продукции $y(t)$. Весьма примечательно, что оба интегральных уравнения отличаются друг от друга только правыми частями (то есть внешними функциями). Данный факт означает, что (25) и (26) могут быть решены независимо аналитическими либо численными методами при помощи единой вычислительной процедуры [6].

Пример 3. Предположим, что на стороне предложения реализуется равномерный эффект последствия по отношению к выпущенной продукции $y(\tau)$ на интервале времени $\tau \in [0, t]$. Иначе говоря, ядро интегрального уравнения (3) имеет вид $K_S(t, \tau) = \frac{1}{t}$. В качестве ядра уравнения (4) возьмем экспоненциальную функцию разностного аргумента, аналогичную примеру (1).

$K_d(t, \tau) = ae^{a(\tau-t)}$, $a > 0$ – характеристика постоянного времени.

Тогда система (3),(4) получает следующее представление:

$$d_0 - d_1 p(t) = \frac{1}{t} \int_0^t y(\tau) d\tau \quad (27)$$

$$-S_0 + S_1 y(t) = \int_0^t ae^{a(\tau-t)} p(\tau) d\tau \quad (28)$$

Здесь, как и в примере (1), все переменные положительные числа.

Система линейных интегральных уравнений (27),(28) относительно переменных $p(t)$ и $y(t)$ легко преобразуется путем дифференцирования к

форме системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными по времени коэффициентами

$$\dot{p} = \frac{-p}{t} - \frac{y}{d_1 t} + \frac{d_0}{d_1 t},$$

$$\dot{y} = \frac{a}{S_1} p - ay - \frac{aS_0}{S_1}.$$

Из системы (29), (30) двух дифференциальных уравнений первого порядка нетрудно получить дифференциальные уравнения второго порядка для каждой из переменных $p(t)$, $y(t)$.

Так, например, динамика изменения цены будет описана при помощи следующего уравнения:

$$t\ddot{p} + (at + 2)\dot{p} + a\left(1 + \frac{1}{d_1 S_1}\right)p = \frac{a(d_0 S_1 + S_0)}{d_1 S_1}.$$

Если ввести переменную $x(t) = p(t) - \bar{p}$, где $\bar{p} = \frac{d_0 S_1 + S_0}{d_1 S_1 + 1}$, то неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка преобразуется в соответствующее однородное уравнение:

$$t\ddot{x} + (at + 2)\dot{x} + a\left(1 + \frac{1}{d_1 S_1}\right)x = 0 \quad (32)$$

Дифференциальное уравнение (32) является так называемым вырожденным гипергеометрическим уравнением, свойства решения которого подробно изучены в теории специальных функций [7]. В частности, одним из решений является ряд Куммера:

$$\varphi(g, 2, \theta) = 1 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(g)_{\kappa}}{(\kappa+1)!} \cdot \frac{\theta^{\kappa}}{\kappa!} \quad (33)$$

где $\theta = -at$, $g = 1 + \frac{1}{d_1 S_1}$, $(g)_{\kappa} = g(g+1) \dots (g+\kappa-1)$, $(g)_0 = 1$.

Важным для нас является то обстоятельство, что решение дифференциального уравнения (32) на больших временах приближенно описывается убывающей степенной функцией, а не экспонентой.

На рис. 1 и рис. 2 представлены результаты численного моделирования системы (27), (28) при следующих значениях параметров $a = 0,1$; $d1=1,8$; $d0=1,2$; $S0=3$; $S1=1$ в среде Mathcad [8].

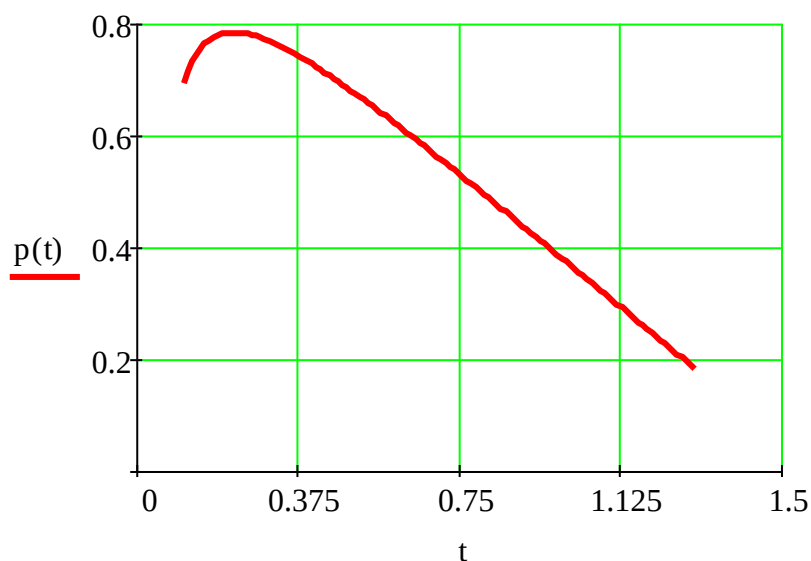


Рис.1. Динамика цены товара

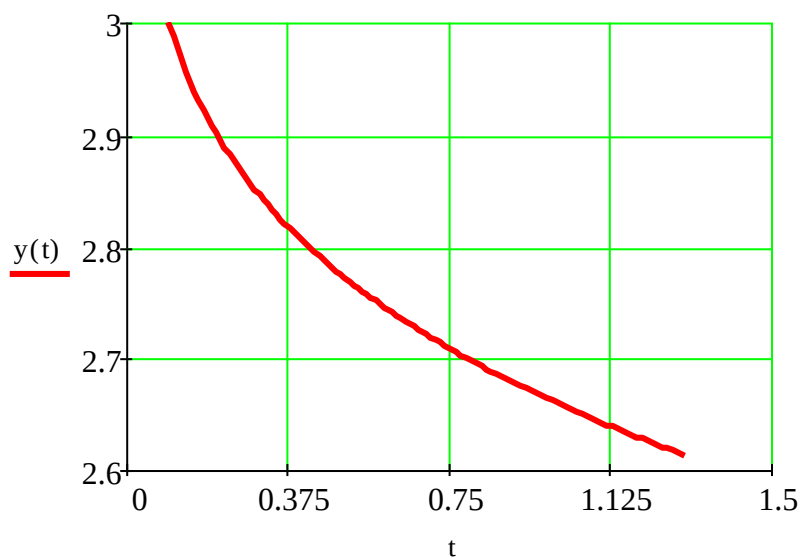


Рис.2. Динамика изменения объема товара

Выводы. Рассмотренные три примера с различными механизмами учета

Эффекта последействия наглядно демонстрирует разнообразие динамических режимов идеализированной модели производственно-экономической системы. Разумеется, анализ таких моделей во всех

рассмотренных нами случаях проведен исключительно на качественном уровне и не использует данных реально наблюдаемых экономических процессов. Необходимо так же подчеркнуть, что использование идейных предпосылок распределенного запаздывания сводит задачу к решению линейного дифференциального уравнения с переменными по времени коэффициентами, что в свою очередь существенно расширяет класс решений при сохраняющейся неопределенности в выборе структурных параметров модели. На практике вышеуказанная проблема решается традиционными эконометрическими методами анализа временных рядов для цен и объёмов произведенной продукции.

Литература

1. Воронин А.В., Гунько О.В. Дискретная модель рыночной адаптации// Управління розвитком.-2013.-т. 6. - №6 – с. 37-44.
2. Внукова Н.Н., Воронин А.В., Бондаренко А.В. Адаптационные механизмы производственно-экономической системы. // Економіка: проблеми теорії та практики: Збірник наукових праць.- Випуск 253: В 7 т. – ТІІІ.- Дніпропетровськ: ДНУ, 2009.С.765-774.
3. Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика. В 2 Т-СПб.:Экономическая школа, 2000.-т.1.-349с.
4. Балацкий Е.В. Рыночное ценообразование и производственные циклы //Экономика и математические методы.-2005.-т.41.-№1.-С.37-44.
5. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.- М.: Физматгиз,1958.-208с.
6. Краснов М.Л. Интегральные уравнения.-М.:Наука, 1975.-303с.
7. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения.-М.: Изд-во иностр.лит., 1962.- 352с.
8. Гунько О.В. Використання середовища Mathcad при вивченні навчальної дисципліни «Математика для економістів»/ Гунько О.В. , Харків: Вид. ХНЕУ, 2010, – 288 с.