**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Підручник

Харків. Вид. ХНЕУ, 2012

УДК 519.86(075.8)
ББК 63в6я73+22.1я73
В41

Рецензенти: докт. екон. наук, професор, зав. кафедри математики і математичних методів в економіці Донецького національного університету *Христіановський В. В.*; докт. фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «ХАІ» *Проценко В. С.*

Рекомендовано до видання рішенням вченої ради Харківського національного економічного університету.
Протокол № 6 від 07.02.2012 р.

Автори: Малярець Л. М.
Афанасьєва Л. М.
Денисова Т. В.
Ігначкова А. В.
Лебедєва І. Л.
Сенчуков В. Ф.
Широкорад Л. Д.

В41 Вища математика : підручник / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, Т. В. Денисова та ін. ; заг. редакція д. е. н., проф. Малярець Л. М. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2012. – 772 с. (Укр. мов.)

Подано теоретичний матеріал, що вивчається в навчальній дисципліні «Вища математика». Наведено велику кількість проаналізованих типових задач з вищої математики та приклади їх застосування в економіці.

Рекомендовано для студентів у процесі неперервної математичної підготовки і їх самостійної роботи, для викладачів під час проведення занять та організації індивідуальної роботи студентів.

ISBN 976-966-676-561-4

УДК 519.86(075.8)
ББК 63в6я73+22.1я73

© Харківський національний економічний університет, 2012
© Малярець Л. М.
Афанасьєва Л. М.
Денисова Т. В. та ін.
2012

Зміст

Вступ 13
Основні позначення 16
Розділ 1. Лінійна алгебра 17
Глава 1. Числові матриці та дії над ними 18
1.1. Задача про використання сировини. Математична модель 18
1.2. Означення матриць і деякі їхні різновиди 20
1.3. Дії над матрицями 24
1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення 27
Ключові терміни 29
Запитання для самоперевірки 30
Глава 2. Визначники, методи обчислювання 31
2.1. Означення визначника. Визначники 2-го та 3-го порядків 31
2.2. Властивості визначників 33
2.3. Обернена матриця 40
2.4. Розв'язання системи лінійних рівнянь за правилом Крамера 43
2.5. Розв'язання системи лінійних рівнянь за методом оберненої матриці 46
Ключові терміни 48
Запитання для самоперевірки 48
Глава 3. Системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими: дослідження на сумісність та розв'язання 49
3.1. Ранг матриці: означення, способи відшукання 49
3.2. Дослідження систем m лінійних рівнянь з n невідомими. Теорема Кронекера – Капеллі 52
3.3. Загальний та частинні розв'язки системи. Базисні та опорні розв'язки 56
3.4. Дослідження та розв'язання системи лінійних рівнянь методами Гаусса та Жордана – Гаусса 58
3.5. Лінійна балансова модель (модель Леонтьєва) 69
Ключові терміни 72
Запитання для самоперевірки 73
Глава 4. Лінійні (векторні) n-вимірні простори 74
4.1. Лінійні n-вимірні простори ($\mathbf{R}^n$): основні означення 74
4.2. Лінійна залежність і незалежність системи векторів 79
4.3. Базис n-вимірного простору. Розкладання вектора за базисом 83

4.3.1. Відшукання базисних розв’язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь 86
4.3.2. Однорідна система рівнянь. Особливості розв’язку 90
Ключові терміни 95
Запитання для самоперевірки 95
Глава 5. Власні вектори і власні числа квадратних матриць 96
5.1. Означення власного вектора і власного числа квадратної матриці 96
5.2. Відшукання власних чисел і власних векторів 101
5.3 Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі) 105
Ключові терміни 109
Запитання для самоперевірки 109
Приклади та вправи за розділом 1 110
Задачі та вправи для самостійного розв’язання 121
Відповіді 126
Розділ 2. Векторна алгебра й аналітична геометрія 128
Глава 6. Елементи векторної алгебри 129
6.1. Вектори: основні означення, лінійні операції 129
6.2. Прямокутна система координат у просторі. Вектори, що задані своїми координатами 133
6.3. Скалярний, векторний, мішаний добутки векторів 136
6.4. Найпростіші задачі аналітичної геометрії 144
Ключові терміни 148
Запитання для самоперевірки 149
Глава 7. Пряма на площині 149
7.1. Поняття про рівняння лінії на площині. Основні задачі аналітичної геометрії 149
7.2. Різновиди рівнянь прямої на площині 152
7.3. Основні задачі на пряму лінію на площині 159
7.4. Використання рівняння прямої при розв’язанні економічних задач 166
Ключові терміни 168
Запитання для самоперевірки 168
Глава 8. Криві другого порядку 170
8.1. Загальні рівняння кривої другого порядку: типи кривих 170
8.2. Канонічні рівняння кола та еліпса 171
8.3. Канонічне рівняння гіперболи. Асимптоти гіперболи 174
8.4. Парабола. Канонічне рівняння 177
8.5. Перетворення загального рівняння кривої другого порядку 180
Ключові терміни 185
Запитання для самоперевірки 185

Глава 9. Площина у просторі 186
9.1. Поняття про рівняння поверхні 186
9.2. Різновиди рівнянь площини у просторі 187
9.3. Основні теоретичні задачі на площині 192
Ключові терміни 198
Запитання для самоперевірки 198
Глава 10. Пряма у просторі. Взаємне розташування прямої і площини. Поверхні другого порядку 199
10.1. Різновиди рівнянь прямої 199
10.2. Основні задачі на пряму у просторі 203
10.3. Пряма і площина, аналіз взаємного розташування 210
10.4. Поверхні другого порядку. Довідкові відомості 212
Ключові терміни 214
Запитання для самоперевірки 215
Приклади та вправи за розділом 2 216
Задачі та вправи для самостійного розв’язання 220
Відповіді 225
Розділ 3. Вступ до математичного аналізу 226
Глава 11. Функціональна залежність. Класифікація функцій. Застосування функцій в економіці 226
11.1. Множини. Абсолютна величина дійсного числа 226
11.2. Функції: основні означення, способи задання 234
11.3. Класифікація функцій за їх властивостями 237
11.3.1. Монотонність функції 237
11.3.2. Обмеженість функції 239
11.3.3. Парність та непарність функції 239
11.3.4. Періодичність функції 240
11.3.5. Обернена функція 240
11.4. Класифікація функцій за діями над аргументом 242
11.5. Застосування елементарних функцій в економіці 244
Ключові терміни 246
Запитання для самоперевірки 246
Глава 12. Границя функції натурального аргументу 247
12.1. Числові послідовності: основні означення та арифметичні операції 247
12.2. Границя числової послідовності 249
12.3. Нескінченно малі послідовності: означення, властивості 251
12.4. Нескінченно великі послідовності: означення, властивості, зв’язок з нескінченно малими 254
12.5. Властивості границь числових послідовностей 257
Ключові терміни 261
Запитання для самоперевірки 262

Глава 13. Границя функції неперервного аргументу 262
13.1. Означення границі функції 262
13.2. Поширення теорії границь послідовностей на функції 268
13.3. Різні типи невизначеностей та їх розкриття. Перша та друга чудові границі 270
13.3.1. Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ 271
13.3.2. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ 272
13.3.3. Невизначеність типу $[\infty - \infty]$ 273
13.3.4. Перша чудова границя 274
13.3.5. Друга чудова границя 276
13.4. Порівняння нескінченно малих. Застосування еквівалентних нескінченно малих до обчислення границь 280
Ключові терміни 282
Запитання для самоперевірки 282
Глава 14. Неперервність і розриви функцій 283
14.1. Означення неперервності функції в точці. Неперервність основних елементарних функцій 283
14.2. Розриви функцій та їх класифікація 288
14.3. Неперервність функції на відрізку. Означення, основні теореми про неперервні функції 292
Ключові терміни 294
Запитання для самоперевірки 294
Приклади та вправи за розділом 3 295
Задачі та вправи для самостійного розв’язання 299
Відповіді 303
Розділ 4. Диференціальне числення функції однієї змінної 305
Глава 15. Похідна та її властивості, диференціювання функцій 305
15.1. Означення похідної, загальний порядок відшукання, зв’язок з неперервністю 305
15.2. Інтерпретація похідної в різних галузях знань 308
15.2.1. Задача про визначення рівняння дотичної та нормалі 308
15.2.2. Задача про відшукання швидкості прямолінійного руху 309
15.2.3. Задача про відшукання граничних витрат виробництва 310
15.3. Таблиця похідних та правила диференціювання 311
15.4. Диференціювання складених функцій і функцій різної форми задання 313
Ключові терміни 319
Запитання для самоперевірки 319

Глава 16. Похідні вищих порядків. Диференціали функції 320
16.1. Похідні вищих порядків 320
16.2. Інтерпретація другої похідної в різних галузях знань 322
16.2.1. Задача про відшукання прискорення прямолінійного руху 322
16.2.2. Задача про відшукання швидкості зміни економічних показників. Граничний аналіз 322
16.3. Диференціал функції та його властивості 323
16.4. Диференціали вищих порядків 326
16.5. Застосування диференціала до наближених обчислень 327
16.5.1. Наближене обчислення значення функції $y = f(x)$ 327
16.5.2. Наближене обчислення приросту функцій, які характеризують економічні процеси 328
Ключові терміни 330
Запитання для самоперевірки 330
Глава 17. Застосування похідних до дослідження функцій 331
17.1. Теореми диференціального числення 331
17.2. Обчислення границь функцій (правило Лопіталя) 334
17.3. Дослідження функцій на монотонність 337
17.4. Екстремум функції. Необхідна та достатні умови екстремуму 340
17.5. Опуклість, угнутість та точки перегину кривої 346
17.6. Асимптоти кривої. Загальна схема дослідження функції та побудова графіка 349
17.7. Застосування похідної в економічній теорії 353
Ключові терміни 356
Запитання для самоперевірки 356
Приклади та вправи за розділом 4 357
Задачі та вправи для самостійного розв’язання 364
Відповіді 371
Розділ 5. Функції багатьох змінних 376
Глава 18. Функція багатьох змінних 376
18.1. Основні поняття. Область визначення функції 376
18.2. Границя та неперервність функції двох змінних 380
18.3. Прирости функції двох змінних 383
18.4. Частинні похідні 384
18.5. Частинні диференціали та повний диференціал. Використання в наближених обчисленнях 388
Ключові терміни 393
Запитання для самоперевірки 394
Глава 19. Похідна за напрямом. Градієнт функції. Локальний і умовний екстремуми 395
19.1. Похідна за напрямом 395
19.2. Градієнт функції та лінії рівня 397

19.3. Локальний екстремум функції двох змінних 399
19.4. Умовний екстремум 402
19.5. Найменше та найбільше значення функції в замкненій області 409
Ключові терміни 410
Запитання для самоперевірки 410
Глава 20. Приклади застосування функцій кількох змінних у дослідженнях економічних процесів 411
20.1. Поняття про емпіричні формули і метод найменших квадратів 411
20.2. Загальні поняття про задачі математичного програмування 420
20.3. Еластичність функції кількох змінних 425
Ключові терміни 428
Запитання для самоперевірки 428
Приклади та вправи за розділом 5 429
Задачі та вправи для самостійного розв'язання 444
Відповіді 448
Розділ 6. Інтегральне числення функцій однієї та кількох змінних 450
Глава 21. Первісна функція. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування 450
21.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла 450
21.2. Невизначений інтеграл. Означення, властивості, таблиця основних інтегралів 452
21.3. Безпосереднє інтегрування 456
21.4. Метод інтегрування заміною змінної 458
21.5. Метод інтегрування частинами 461
Ключові терміни 465
Запитання для самоперевірки 465
Глава 22. Інтегрування деяких класів елементарних функцій: раціональних, ірраціональних, тригонометричних 466
22.1. Інтегрування елементарних раціональних алгебраїчних дробів 466
22.2. Інтегрування раціональних алгебраїчних дробів 469
22.3. Інтегрування деяких видів ірраціональних функцій 473
22.4. Інтегрування функцій, раціонально залежних від тригонометричних функцій 476
Ключові терміни 485
Запитання для самоперевірки 485
Глава 23. Визначений інтеграл. Теорема Ньютона – Лейбніца. Методи інтегрування 486
23.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла 486
23.2. Основні властивості визначеного інтеграла 490

23.3. Зв’язок між визначеним і невизначеним інтегралами 493
23.4. Формула Ньютона – Лейбніца 495
23.5. Методи обчислення визначеного інтеграла 496
23.5.1. Безпосереднє визначене інтегрування 496
23.5.2. Обчислення інтеграла методом підстановки 496
23.5.3. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі 498
Ключові терміни 500
Запитання для самоперевірки 500
Глава 24. Застосування визначеного інтеграла до деяких геометричних та економічних задач 500
24.1. Довжина дуги плоскої кривої 500
24.2. Обчислення площі геометричної фігури 505
24.3. Обчислення об’ємів тіл за відомими площами поперечних перерізів 512
24.4. Обчислення об’єму тіла обертання 514
24.5. Застосування інтегралів до деяких економічних задач 515
24.6. Наближене обчислення визначених інтегралів 523
Ключові терміни 530
Запитання для самоперевірки 531
Глава 25. Невласні інтеграли. Інтеграл Ейлера – Пуассона 532
25.1. Інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невластиві інтеграли І-го типу) 532
25.2. Інтеграли від необмежених функцій (невластиві інтеграли ІІ-го типу) 537
Ключові терміни 540
Запитання для самоперевірки 540
Глава 26. Подвійний інтеграл, його застосування. Поняття про багатовимірні інтеграли 541
26.1. Подвійний інтеграл у декартових координатах. Означення, теорема існування 541
26.2. Геометричний зміст подвійного інтеграла 543
26.3. Властивості подвійного інтеграла 544
26.4. Зведення подвійного інтеграла до повторного 545
26.5. Подвійний інтеграл у полярних координатах 552
26.6. Обчислення площі плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла 555
26.7. Обчислення об’єму тіла за допомогою подвійного інтеграла 557
Ключові терміни 559
Запитання для самоперевірки 559
Приклади та вправи за розділом 6 560
Задачі та вправи для самостійного розв’язання 566
Відповіді 573

Розділ 7. Диференціальні рівняння 577
Глава 27. Диференціальні рівняння першого порядку: основні поняття 577
27.1. Основні поняття та означення 577
27.2. Диференціальні рівняння першого порядку 580
27.3. Рівняння з відокремлюваними змінними 582
27.4. Однорідні диференціальні рівняння 584
27.5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі 588
27.6. Рівняння у повних диференціалах 596
Ключові терміни 600
Запитання для самоперевірки 601
Глава 28. Диференціальні рівняння вищих порядків 601
28.1. Диференціальні рівняння вищих порядків. Основні поняття 601
28.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку 603
28.3. Однорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами 608
28.4. Відшукання загального розв’язку однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами 611
28.4.1. Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами 611
28.4.2. Лінійне однорідне диференціальне рівняння порядку n зі сталими коефіцієнтами 615
Ключові терміни 618
Запитання для самоперевірки 618
Глава 29. Розв’язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами 619
29.1. Структура розв’язку лінійних неоднорідних рівнянь 619
29.2. Розв’язання лінійних неоднорідних рівнянь зі спеціальними правими частинами 620
29.3. Розв’язання неоднорідних диференційних рівнянь методом варіації довільних сталих 629
29.4. Системи диференціальних рівнянь 631
Ключові терміни 637
Запитання для самоперевірки 637
Глава 30. Лінійні різницеві рівняння 638
30.1. Основні поняття та означення 638
30.2. Лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами 640
30.3. Однорідні лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами 641

30.4. Однорідні різницеві рівняння з початковими умовами 645
30.5. Неоднорідні різницеві рівняння
зі спеціальною правою частиною 646
30.6. Системи лінійних різницевих рівнянь 650
Ключові терміни 654
Запитання для самоперевірки 654
Глава 31. Використання диференціальних та різницевих
рівнянь в економічних задачах 655
31.1. Визначення первісної для неперервної функції 655
31.2. Відшукання еластичності функції 657
31.3. Модель природного зростання 659
31.4. Модель зростання з умовою насиченості 660
31.5. Динаміка ринкових цін 663
31.6. Використання різницевих рівнянь в економіці 670
31.6.1. Павутинна модель ринку 670
31.6.2. Модель розвитку Самюельсона – Хікса 671
Ключові терміни 674
Запитання для самоперевірки 674
Приклади та вправи за розділом 7 675
Задачі та вправи для самостійного розв’язання 687
Відповіді 691
Розділ 8. Ряди 693
Глава 32. Основні поняття та означення. Необхідна ознака
збіжності ряду 693
32.1. Числовий ряд та його збіжність 693
32.2. Ряд геометричної прогресії 697
32.3. Гармонійний ряд 698
32.4. Властивості збіжних рядів 699
32.5. Необхідна ознака збіжності ряду 701
Ключові терміни 704
Запитання для самоперевірки 704
Глава 33. Достатні умови збіжності числових рядів 705
33.1. Ознака порівняння 705
33.2. Ознака Даламбера 708
33.3. Радикальна ознака Коші 711
33.4. Інтегральна ознака Коші 712
33.5. Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду 713
33.6. Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду 715
Ключові терміни 718
Запитання для самоперевірки 718
Глава 34. Степеневий ряд та його збіжність. Ряди Тейлора
і Маклорена 719
34.1. Функціональні ряди. Степеневий ряд 719

34.2. Область і радіус збіжності 719
34.3. Властивості степеневих рядів 725
34.4. Степеневі ряди Тейлора та Маклорена, необхідна і достатня умови збіжності 727
Ключові терміни 731
Запитання для самоперевірки 732
Глава 35. Розкладання в ряд основних елементарних функцій. Використання рядів для наближених обчислень. Ряди Фур'є 732
35.1. Розкладання в ряд Маклорена основних елементарних функцій 732
35.2. Використання рядів у наближених обчисленнях 738
35.2.1. Обчислення за допомогою знакопереміжних рядів 738
35.2.2. Обчислення за допомогою знакододатних рядів 739
35.2.3. Обчислення визначених інтегралів 742
35.2.4. Використання рядів при розв'язуванні диференціальних рівнянь 744
35.3. Ряди Фур'є 746
35.3.1. Тригонометричні ряди 746
35.3.2. Тригонометричні ряди Фур'є 748
35.3.3. Неповні ряди Фур'є 750
35.3.4. Ряд Фур'є для функції з довільним періодом 752
Ключові терміни 754
Запитання для самоперевірки 754
Приклади та вправи за розділом 8 755
Задачі та вправи для самостійного розв'язання 757
Відповіді 760
Використана література 762
Предметний покажчик 763

Вступ

Сучасна математика має безперечне культурне і практичне значення, відіграє важливу роль у науковому, технічному, економічному розвитку суспільства та окремої особистості в ньому. Дослідники, які на високому рівні оволоділи математичними інструментами, завжди мали великий потенціал для реалізації в суспільстві та складали стратегічний ресурс нації.

Значним науковим досягненням стало впровадження математичних методів у економічну науку й в управління економічними процесами. Наукове управління цими процесами може бути здійснено тільки на основі застосування точних математичних методів у всіх сферах господарювання – від прогнозування розміщення корисних копалин до вивчення пропозиції та попиту на товари широкого збитку, від складання оптимальних планів виробництва до планування транспортних перевезень, роміщення транспортних артерій та ін.

На разі у зв'язку зі зростанням ролі аналітичних досліджень соціально-економічних процесів майбутнім економістам, програмістам, менеджерам, інженерам потрібна глибока математична підготовка, яка б надавала можливості за допомогою математичних інструментів досліджувати широке коло проблем в їх діяльності, застосовувати можливості сучасного програмного забезпечення комп'ютерної техніки.

Бачення людського капіталу як головної рушійної сили розвитку суспільства обумовлює вирішення загальної проблеми підвищення якості підготовки майбутнього фахівця.

Повсюдне впровадження в господарювання нових інформаційних технологій, комп'ютеризація процесів діяльності людини залишають у минулому просту передачу знань від викладача до студента. Впровадження концептуально нового підходу до процесу навчання студента, спрямованого на кінцевий результат – формування компетентного фахівця, який не тільки оволодів деякою множиною знань, а й здатен ефективно їх використовувати у соціальній практиці та професійній діяльності, формувати здатності продукувати нові знання, вимагає перегляду як методів та методик викладання дисциплін, а також його навчально-методичного забезпечення. Важливо, щоб зміст викладеного мате-

ріалу в підручнику, який є основним за дисципліною, міг формувати окремі компетенції, що інтегруються в єдину фахову компетентність.

Якщо за роки навчання у вищому навчальному закладі студент отримає правильне уявлення про прикладні можливості математики, зрозуміє, в чому полягає математичний підхід до вивчення реального світу, як його слід реалізовувати і які результати можна отримати, він набуде міцний фундамент знань і необхідну математичну культуру, розвине в себе вміння і можливість самостійно поповнювати свою освіту, і в своїй професійній діяльності легко адаптується до мінливого соціально-економічного середовища, буде конкурентоспроможним на ринку праці як в Україні, так і за її межами.

Фундаментальну основу в математичній підготовці економістів складає навчальна дисципліна «Вища математика», яка є нормативною дисципліною природничо-наукового циклу та складовою структурно-логічної схеми, що передбачена освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів з усіх економічних спеціальностей.

Слід відзначити, що сучасні навчальні плани вивчення вищої математики пропонують кількість годин, половина яких відведена на самостійне засвоювання класичних розділів дисципліни. З метою допомоги студентам самостійно оволодіти теоретичними основами дисципліни та методами розв’язання задач автори підручника пропонують основи навчально-методичного комплексу дисципліни.

Основними завданнями вивчення даної навчальної дисципліни є надання студентам знань з основних розділів вищої математики, підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної спрямованості, а також отримання необхідної математичної бази для вивчення інших дисциплін як математичного, так і нематематичного циклів. У процесі опанування навчальної дисципліни «Вища математика» студент отримує аналітично-дослідницькі компетентності, а саме знання, розуміння, вміння використовувати математичні інструменти, що надають лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз, диференціальне числення функції багатьох змінних, інтегральне числення функції однієї та кількох змінних, диференціальні рівняння, ряди. Кожна тема в підручнику розпочинається з переліку окремих компетентностей, які формуються у майбутнього економіста в результаті вивчення даного матеріалу.

Підручник створений авторами на основі багаторічного досвіду викладання вищої та прикладної математики студентам економічних спеціальностей у різних ВНЗ України. Під час написання підручника автори керувалися дидактичним принципом у висвітленні матеріалу з кожної теми і побудові самої структури підручника за темами, яка в цілому відповідає вимогам програми з математики для економістів, яка затверджена Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України.

У розділах підручника наведена достатня кількість докладно розв’язаних типових задач різного ступеня складності. В кінці кожного розділу містяться запитання для самоперевірки, а також достатня кількість задач для самостійного розв′язування з відповідями до них, наведений покажчик.

У підручнику поєднується теоретичний матеріал з великою кількістю прикладів, де його застосовують. Також пропонуються методичні рекомендації розв’язання багатьох типових реальних економічних задач та вправи для самостійної роботи.

У кожному розділі підручника теоретичний та практичний матеріали подаються в повному обсязі, необхідному для засвоювання дисципліни «Вища математика» та подальшого її використання до вивчення спеціальних предметів, а також до розв'язання задач економічної спрямованості.

Завдяки теоретичному матеріалу та великій кількості розібраних і проаналізованих задач даний підручник пропонується студентам та викладачам економічних спеціальностей, а також може бути запропонований для використання в якості довідника для спеціалістів у різних галузях економіки до вирішення реальних задач, де потрібно застосувати інструменти вищої математики.

Основні позначення

$\forall$ квантор загальності («для будь-якого» або «кожний»)

$\exists$ квантор існування («існує» або «знайдеться»)

$\Leftrightarrow$ еквівалентність («тоді і тільки тоді, коли…»)

$\Rightarrow$ імплікація ($A \Rightarrow B$, тобто з того, що вірно А, випливає, що вірним є В)

$\in$ приналежність (елемент $a \in A$, тобто a належить до множини A)

$\notin$ заперечення приналежності («не належить»)

$\cup$ об’єднання множин («або…, або…»)

$\cap$ перетин множин («…і…»)

$\subset$ підмножина ($A \subset B$, тобто A включається до B)

$\setminus$ різниця множин ($A \setminus B$, тобто «A без B»)

$\varnothing$ порожня множина (множина, що не містить жодного елемента)

$\{\ ,\ \}$ перелік елементів множини або їх властивостей

$\{\ |\ \}$ множина елементів, що задовольняють умові

$(\ )$ матриця

$[\ ]$ ціла частина числа

$|\ |$ модуль числа, його абсолютна величина

$\sum_{i=1}^{n}$ сума елементів від першого до того, що має номер n

$\prod_{i=1}^{n}$ добуток елементів від першого до того, що має номер n

$!$ факторіал ($n!$ «добуток усіх натуральних чисел до n включно»)

Розділ 1. Лінійна алгебра



Лінійна алгебра як самостійна математична дисципліна почала формуватися в 18 столітті, коли вперше в роботах німецького математика Лейбніца та швейцарського математика Крамера було введено поняття визначника (детермінанта) і наведено загальні формули для визначення розв'язку систем лінійних рівнянь. Пізніше англійськими математиками Келі і Сільвестром були введені поняття матриці та закладені основи матричного числення, що є апаратом для компактного запису та аналізу систем рівнянь. Саме ці поняття лінійної алгебри широко використовують у прикладних задачах економіки. Так, для характеристики параметрів виробничих або бізнес-процесів вихідні дані надаються у вигляді матриці розміром $m \times n$.

Методи лінійної алгебри також застосовуються для обґрунтування управлінських рішень, при обробці результатів спостережень тощо. Наприклад, розв'язування задач оптимізації планів роботи підприємства, вивчення попиту, планування транспортних артерій можна звести до розв'язку систем m лінійних рівнянь з n невідомими.



Після вивчення даної теми ви зможете:

- використовувати числові матриці для формування й аналізу таблиць вихідних даних в економіці;
- використовувати системи лінійних рівнянь при розробленні лінійних економіко-математичних моделей;
- застосовувати поняття лінійних векторних просторів з метою геометричної інтерпретації економічних задач;
- мати уявлення про власні числа і власні вектори квадратних матриць в аналітичних задачах економіки;
- використовувати власні числа і власні вектори квадратних матриць при розробленні економіко-математичних моделей;
- застосовувати модель міжгалузевого балансу (багатогалузевої економіки) для вирішення реальних завдань економіки;
- розуміти лінійну модель обміну (модель міжнародної торгівлі).

Глава 1. Числові матриці та дії над ними

1.1. Задача про використання сировини. Математична модель

Розглянемо реальну задачу планування випуску промислової продукції на прикладі окремого підприємства, що виробляє електротехнічну продукцію. Це підприємство виробляє електродвигуни як загального, так і спеціального призначення. Крім електродвигунів, завод виготовляє складні вироби побутового та сільськогосподарського призначення. Розглянемо задачу розподілу матері-альних ресурсів при виготовленні чотирьох основних видів продукції: електродвигунів АІР 80, АІР 90 та АІР 100, а також насосів БЦ 1,1-20.

Основними факторами виробництва є сировина, напівфабрикати, що доставляються на підприємство, паливо та транспорт. Однак обсяги матеріальних ресурсів, що є факторами виробництва, мають певні обмеження. Питомі витрати (витрати на виготовлення одиниці виробу кожного виду) та загальні обсяги наявних ресурсів (у відповідних одиницях) наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Питомі витрати матеріальних ресурсів та обсяги їх наявних запасів

Вид ресурсу	Витрати на одиницю продукції				Обсяг наявних ресурсів
	АІР 80	АІР 90	АІР100	БЦ 1,1-20	
Сировина	176	236,7	279,9	144,5	17039
Напівфабрикати	11,45	15,22	12,91	34,63	1183
Паливо	6,00	7,00	7,00	6,50	513
Транспорт	3,75	5,04	5,86	3,58	365

Задача полягає в побудові такого плану виробництва основних видів продукції, який би забезпечив повне використання матеріальних ресурсів, що має в наявності підприємство.

Складемо ***математичну модель*** задачі. Спочатку введемо такі позначення. Нехай x_1 − кількість електродвигунів АІР 80, яка відповідає повному використанню наявних ресурсів; x_2 − кількість електродвигунів АІР 90; x_3 − кількість електродвигунів АІР 100; x_4 − кількість електричних насосів БЦ 1,1-20. Очевидно, що згідно з умовою задачі та даними табл. 1.1 мають виконуватись такі рівності:

$$\begin{cases} 176x_1 + 236,7x_2 + 279,9x_3 + 144,5x_4 = 17039; \\ 11,45x_1 + 15,22x_2 + 12,91x_3 + 34,63x_4 = 1183; \\ 6,00x_1 + 7,00x_2 + 7,00x_3 + 6,50x_4 = 513; \\ 3,75x_1 + 5,04x_2 + 5,86x_3 + 3,58x_4 = 365. \end{cases}$$

Отже, ми одержали систему рівнянь, яка і є математичною моделлю задачі про повне використання матеріальних ресурсів. У даному випадку математична модель містить систему лінійних рівнянь, що відома зі шкільного курсу математики, але її розв'язання та тим паче дослідження у шкільному курсі відсутні (методи розв'язання цієї системи будуть наведені пізніше).

У загальному випадку задача про повне використання ресурсів формулюється так. Нехай підприємство випускає продукцію n найменувань, для виробництва якої застосовуються m видів ресурсів. Потреби у ресурсах певного виду для виготовлення одиниці продукції кожного типу та загальна кількість ресурсів кожного виду подано у вигляді таблиці (табл. 1.2).

Таблиця 1.2

Задача про повне використання ресурсів

Види ресурсів	Витрати ресурсів на виготовлення одиниці продукції				Обсяг ресурсів
	1	2	...	n	
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m

Необхідно визначити кількість продукції кожного з найменувань, яку треба виробити підприємству, щоб наявні ресурси були повністю використані.

Складемо математичну модель задачі. Нехай x_1, x_2, ..., x_n – кількість продукції відповідного найменування, яку виробляє підприємство. Тоді за даними табл. 1.2 мають виконуватись рівності:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1.1)$$

Таким чином, відшукання розв'язку задачі про повне використання сировини зведено до розв'язування системи m лінійних рівнянь з n невідомими. Для дослідження і розв'язання таких систем застосовуються поняття матриць та визначників. Ці поняття є основним математичним апаратом для вивчення систем лінійних рівнянь.

1.2. Означення матриць і деякі їх різновиди

Матрицею називається множина чисел, що надана у вигляді прямокутної таблиці, яка має m рядків і n стовпців, а самі числа – ***елементами матриці***. Матриці позначають великими літерами латинського алфавіту A, B, C та іншими, а їх елементи – відповідними малими літерами з подвійними індексами a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, де індекс i відповідає номеру рядка матриці ($i = \overline{1,m}$), а j – номеру її стовпця ($j = \overline{1,n}$). Отже, елемент a_{ij} матриці A знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця.

Кількість рядків і стовпців матриці визначають її ***розмір***, його записують як $m \times n$. Якщо необхідно надати всі елементи матриці, то її наводять у розгорнутому вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

У теоретичних дослідженнях при посиланні на матрицю певного розміру зазвичай застосовують позначення $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$. Прямокутна матриця має довільну кількість рядків і стовпців, у загальному випадку $m \neq n$.

Матрицею-рядком називається матриця розміром $1 \times n$, тобто така, що складається з одного рядка.

Матрицею-стовпцем називається матриця розміром $m \times 1$, яка має один стовпець.

Якщо розглядається матриця-рядок (або матриця-стовпець), то для її елементів номер рядка (відповідно, стовпця) указувати не треба.

Матриця може складатись навіть з одного елемента.

Нульовою матрицею називають матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю. Вона позначається літерою O. У загальному випадку така матриця може мати будь-який розмір.

Квадратною матрицею n-го порядку називається матриця, для якої кількість рядків m дорівнює кількості стовпців n, розмір квадратної матриці становить $n \times n$.

Головною діагоналлю квадратної матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ називається сукупність її елементів, що мають однакові індекси $i = j$, тобто це елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{(n-1)2}, a_{n1}$ є ***побічною діагоналлю*** матриці.

Симетричною називається квадратна матриця, для якої всі елементи, що розташовані симетрично відносно головної діагоналі, є рівними між собою. Тобто при $i \neq j$ виконується співвідношення: $a_{ij} = a_{ji}$, де $i = \overline{1,n}$ та $j = \overline{1,n}$.

Матриця A^T називається ***транспонованою*** відносно матриці A, якщо вона одержана шляхом заміни рядків матриці A на відповідні за номером стовпці:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

а сама операція заміни рядків на відповідні їм за номером стовпці називається ***транспонуванням*** матриці. Зрозуміло, що подвійне транспонування дає вихідну матрицю: $\left(A^T\right)^T = A$, а також симетрична матриця збігається зі своєю транспонованою.

Верхньою (нижньою) трикутною матрицею називається ненульова квадратна матриця, усі елементи якої, що розташовані нижче (вище) головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Діагональною матрицею називається квадратна матриця, у якої всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю. Цю матрицю доцільно задавати переліком її ненульових елементів, указуючи тільки один індекс: $diag(d_1, d_2, ..., d_n)$.

Одинична матриця – це діагональна матриця з елементами головної діагоналі, які дорівнюють одиниці:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Позначення одиничної матриці зручно супроводжувати індексом, який указує на її ***порядок***, отже, одинична матриця розміром $n \times n$ позначається E_n.

Символічні означення основних типів матриць та їх приклади наведені в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Основні різновиди матриць

№	Означення	Приклад
1	2	3
1	Ï ðÿì î êóòí à ì àòðèöÿ A ðîçì³ðîì $m \times n$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, або $A = (a_{ij})_{m \times n}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & -3 \\ 0 & 5 \\ 8 & 27 \end{pmatrix}$ $m \times n = 4 \times 2$
2	Квадратна матриця A n-го порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, або $A = (a_{ij})_{n \times n}$	$A = \begin{pmatrix} 31 & 3 & -8 \\ 9 & 10 & -1 \\ 0 & 52 & -3 \end{pmatrix}$ $n = 3$

3	Верхня трикутна матриця A n-го порядку	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 31 & -7 & 4 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
4	Нижня трикутна матриця A n-го порядку	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
5	Діагональна матриця A n-го порядку	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=D$	$A=\begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=$ $=diag(31;\ 10;\ -3)$
6	Одинична матриця A n-го порядку	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=E$	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E_3$
7	Нульова матриця A розміром $m\times n$	$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=O_{m\times n}$	$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
8	Матриця-стовпець	$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_i \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 31 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix}$
9	Матриця-рядок	$A=\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_j & \ldots & a_n \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

1.3. Дії над матрицями

Матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ і $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ називаються ***рівними***, якщо кожний елемент однієї матриці дорівнює елементу іншої матриці, що має ті ж самі індекси: $a_{ij}=b_{ij}$. Тобто

$$A=B \;\Leftrightarrow\; \left(a_{ij}=b_{ij},\ \forall i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right).$$

За означенням рівними можуть бути тільки матриці однакового розміру.

Над матрицями визначені такі ***дії***: добуток матриці на скаляр, додавання матриць, добуток матриць. Розглянемо означення і властивості цих операцій.

1. **Добутком матриці** $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ **на скаляр** $\lambda=const$ називається матриця $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, кожний елемент якої є добутком елемента матриці A, що має ті ж самі індекси i та j, на сталий множник λ:

$$C=\lambda A \;\Leftrightarrow\; c_{ij}=\lambda a_{ij}. \tag{1.3}$$

Якщо $\lambda=-1$, то отримуємо матрицю, яка називається ***протилежною*** відносно матриці A: $-A=(-1)\cdot A$.

2. **Сумою матриць** $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ і $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ однакового розміру є матриця $C=A+B$ того ж самого розміру, кожний елемент якої c_{ij} є сумою відповідних елементів вихідних матриць:

$$C=A+B \;\Leftrightarrow\; (c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ \forall\ i=\overline{1,m}\ ,\ \forall\ j=\overline{1,n}\ ). \tag{1.4}$$

Згідно з означенням нульової матриці маємо: $A+O=A$.

Наслідок: різницю двох матриць $C=A-B$ можна розглядати як суму матриць, якщо до матриці A додати матрицю B, яку спочатку помножити на скаляр $\lambda=-1$:

$$A-B=A+(-1)\cdot B.$$



Визначимо матрицю $C = 2A - B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 5 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриці мають однаковий розмір, то означені дії можна виконати. Отже,

$$C = 2A - B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 5 \\ 15 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 10 & -2 \cdot 1 - 3 \\ 2 \cdot 0 + 2 & 2 \cdot 12 - 5 \\ 2 \cdot 4 - 15 & 2 \cdot 6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 2 & 19 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Операції додавання матриць та множення матриці на скаляр називаються ***лінійними операціями*** над матрицями. Ці операції зводяться до відповідних арифметичних дій над числами і мають ті ж самі властивості, що й операції над числами. Наведемо ці властивості:

а) $A + B = B + A$, $\lambda A = A\lambda$ – ***комутативність*** (переставний закон);

б) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$, $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A$ – ***асоціативність*** (сполучний закон);

в) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$ – ***дистрибутивність*** (розподільний закон) відносно матриць та відносно скалярів.

3. **Добутком матриці** A розміром $m \times k$ на матрицю B розміром $k \times n$ називається матриця C розміром $m \times n$, елементи якої обчислюються за формулою: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + ... + a_{ik}b_{kj}$ (тобто за правилом «рядок на стовпець»). Відповідно:

$$C = AB \;\Leftrightarrow\; (c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}, \forall \;\; i = \overline{1,m}, \;\; \forall \;\; j = \overline{1,n}). \qquad (1.5)$$

Розглянемо властивості добутку матриць.

1. За означенням добуток матриць існує тільки у тому випадку, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. Отже,

добуток матриці $A=(a_{ij})_{m\times k}$ на матрицю $B=(b_{ij})_{k\times n}$ є матриця $C=(c_{ij})_{m\times n}$, що має розмір $m\times n$.

2. Якщо матриці A і B є квадратними матрицями однакового розміру, то існують і добуток AB, і добуток BA, але $AB\neq BA$, тобто для добутку матриць у загальному випадку не виконується переставний закон. Однак добутки одиничної матриці E з матрицею A (того ж розміру) зліва і справа є рівними між собою і дорівнюють матриці A: $AE=EA=A$.



Нульова та одинична матриці при операціях з матрицями відіграють ту ж саму роль, що і числа 0 і 1 *в арифметиці*.

3. Для добутку матриць виконується асоціативний закон, а саме:

$$(AB)C=A(BC).$$



Знайдемо добуток $C=AB$, де

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}12\\ -2\\ -5\end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B $(k=3)$, отже, матрицю A можна помножити на матрицю B. Оскільки матриця A має два рядки, а матриця B – один стовпець, то їх добутком є матриця-стовпець з двома рядками. Отримуємо:

$$C=AB=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\ -2\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 12-2\cdot(-2)+4\cdot(-5)\\ 0\cdot 12+1\cdot(-2)-1\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ 3\end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що для наведеного прикладу не можна помножити матрицю B на матрицю A, оскільки матриця B має один стовпець, а матриця A – два рядки.

Наведемо властивості, які притаманні діям над матрицями, у вигляді таблиці (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Властивості операцій над матрицями

$A+B=B+A$	$A(B+C)=AB+AC$
$A+O=A$	$(A+B)C=AC+BC$
$(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$	$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
$\lambda A=A\lambda$	$(AB)C=A(BC)$
$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$	$AO=OA=O$
$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$	$AE=EA=A$

1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення

Побудова математичних моделей процесів і явищ в усіх сферах діяльності людини потребує розробок відповідного математичного апарату, і системи лінійних алгебраїчних рівнянь є його важливою складовою. Ці рівняння відіграють велику роль і при побудові математичних моделей економічних процесів.

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь називається сукупність рівнянь першого степеня, тобто лінійних рівнянь відносно невідомих x_1, x_2, ..., x_n, які в кожному рівнянні є числовими характеристиками одного і того ж процесу. У загальному випадку ця система складається з m рівнянь і містить n невідомих. Її можна надати у розгорнутому вигляді (***алгебраїчний вигляд***):

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \quad +\ldots \quad +a_{1n}x_n=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

де x_j ($j=\overline{1,n}$) – невідомі величини, відносно яких побудована математична модель задачі;

a_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) – коефіцієнти при невідомих (параметри моделі), де індекси i і j вказують, відповідно, на номер рівняння і невідомого;

$b_i\,(i=\overline{1,m})$ – вільні члени (праві частини рівнянь), які теж є параметрами математичної моделі.

Стислий запис системи рівнянь (1.1) можна отримати за допомогою символу $\sum$, який означає почленне підсумовування:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=\overline{1,m}. \tag{1.6}$$

Повернемося до прикладу, в якому розглядалась математична модель задачі про використання ресурсів. Якщо записати питомі витрати ресурсів як матрицю $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, запаси ресурсів – як матрицю-стовпець $B=\left(b_i\right)_{m\times 1}$ та невідомі компоненти плану виробництва представити також як матрицю-стовпець $X=\left(x_j\right)_{n\times 1}$, то за означенням добутку матриць систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1.1) можна надати у вигляді матричного рівняння ***(матричний вигляд системи***)

$$AX=B. \tag{1.7}$$

Наведемо ще один спосіб надання системи рівнянь за допомогою матриць. Нехай матриця-стовпець A_j $(j=\overline{1,n})$ описує витрати виробництва на виготовлення одиниці j-ї продукції за усіма m видами ресурсів. Кожна з цих матриць складається з елементів відповідного стовпця матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. Отже, усі матриці A_j мають однаковий розмір $1\times m$. Витрати ресурсів на виготовлення j-ї продукції в обсязі x_j визначається як добуток матриці A_j на скаляр x_j. Тоді загальні витрати ресурсів на виготовлення всіх видів продукції дорівнюють їх загальним запасам, які описуються матрицею-стовпцем $B=\left(b_i\right)_{m\times 1}$, якщо виробництво є збалансованим, тобто запаси ресурсів у повному обсязі витрачаються на виготовлення продукції. Отже, маємо матричне рівняння у вигляді:

$$A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_jx_j+\ldots+A_nx_n=B. \tag{1.8}$$

Матрицю $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, що складена з коефіцієнтів при невідомих, називають ***основною матрицею*** системи. Приєднуючи справа (через вертикальну риску) до матриці A матрицю-стовпець вільних членів b_i, $i=\overline{1,m}$, отримуємо матрицю $A\,|\,B=\left(a_{ij}\,|\;b_i\right)_{m\times(n+1)}$, яку називають ***розширеною матрицею*** системи:

$$A\,|\,B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Зрозуміло, що операції над рядками розширеної матриці є операціями над відповідними рівняннями системи.

Розв'язком системи називається такий набір чисел $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n)$, який при підстановці замість невідомих $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)$ у кожне рівняння системи перетворює їх у числові тотожності.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має принаймні один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язку. Сумісну систему рівнянь називають ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо вона має безліч розв'язків.

Система лінійних рівнянь називається ***неоднорідною***, якщо хоча б один елемент матриці-стовпця вільних членів є відмінним від нуля. Якщо всі елементи b_i $(i=\overline{1,m})$ дорівнюють нулю, то така система лінійних рівнянь називається ***однорідною***. Однорідна система рівнянь має вигляд:

$$AX=\mathrm{O}, \tag{1.9}$$

де $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ – основна матриця системи;

$X=\left(x_j\right)_{n\times 1}$ – матриця-стовпець невідомих;

$O=\left(0\right)_{m\times 1}$ – матриця-стовпець вільних членів, що містить самі нулі.



Ключові терміни

Розмір матриці; прямокутна матриця; квадратна матриця; головна діагональ матриці; побічна діагональ матриці; одинична матриця; симетрична матриця; сума матриць; добуток матриці на скаляр; добуток матриць.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь; основна матриця системи; матриця-стовпець вільних членів; матриця невідомих; розширена матриця системи; розв'язок системи рівнянь.

Сумісна система рівнянь; несумісна система; система однорідних рівнянь; визначена система рівнянь; невизначена система рівнянь.



Запитання для самоперевірки

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символічній формі, обґрунтуйте, для чого дайте посилання на відповідні означення, теореми, правила, формули тощо, а також наведіть приклади.

1. Що називають прямокутною числовою матрицею?
2. Що таке «елементи матриці» і чим визначається розмір матриці?
3. Як визначається місце розташування певного елемента матриці?
4. Які матриці називають рівними?
5. Що розуміють під транспонуванням матриці?
6. Яка матриця називається квадратною?
7. Яка матриця називається верхньою (нижньою) трикутною?
8. Дайте означення діагональної й одиничної матриць.
9. Яку матрицю називають сумою (різницею) двох матриць?
10. Яку матрицю називають добутком матриці на скаляр?
11. Яким законам підпорядковуються дії додавання матриць і множення матриці на число?
12. За яким правилом визначають елементи матриці, яка є добутком двох матриць? Наведіть схему виконання цієї операції.
13. Що таке система лінійних алгебраїчних рівнянь?
14. Наведіть символічні записи системи лінійних рівнянь і опишіть їх складові.
15. Які системи називаються однорідними (неоднорідними)?
16. Що таке «розв'язок» системи рівнянь?

Глава 2. Визначники, методи обчислювання

2.1. Означення визначника. Визначники 2-го та 3-го порядків

Ми вже визначали матрицю як сукупність елементів, що утворюють прямокутну таблицю, і розглянули окремий випадок, коли кількість рядків дорівнює кількості стовпців, тобто матриця є квадратною. Якщо квадратній матриці n-го порядку за певним правилом поставити у відповідність многочлен від її елементів, то цей многочлен називається ***визначником,*** або ***детермінантом*** цієї матриці. Визначники позначають грецькою буквою Δ з посиланням на відповідну матрицю або без нього. Визначник можна зобразити через елементи матриці, але для того, щоб відрізняти від позначення матриці, елементи визначника беруть у прямі дужки:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Отже, якщо ***квадратна матриця*** – це таблиця чисел, то її ***визначник*** – число, яке за певним правилом ставлять їй у відповідність. Обчислення визначника можна здійснити як за допомогою загальної формули, так і за рекурентним співвідношенням.

За загальним означенням ***визначник*** утворюється як алгебраїчна сума доданків, кожний з яких є добутком n елементів матриці, які вибирають по одному з кожного її рядка і стовпця (без повторень у межах окремого доданка). Таким чином, визначник містить $n!$ доданків (кількість переставлень для множини, що складається з n елементів, визначається як $P_n = n!$), які називаються ***членами визначника***. Знак кожного доданка визначається кількістю порушень природного порядку серед других індексів елементів, тобто ***інверсій***. Отже, за означенням:

$$\Delta A = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (-1)^{s(j_1, j_2, \ldots, j_n)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}, \qquad (2.1)$$

де $s(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ – кількість інверсій у переставленні $j_1, j_2, \ldots, j_n$, що утворено з других індексів елементів матриці за умови, що перші індекси розташовані у порядку зростання. Отже, знак перед відповідним членом визначника зберігається, якщо кількість інверсій у добутку елементів, які його утворюють, є парною, або змінюється на протилежний, якщо непарною.

Так, сукупність чисел (3, 1, 4, 2) містить три інверсії, які утворюють такі три пари чисел: (3,1), (3,2) та (4,2), тобто вона є непарною. У сукупності чисел (4, 2, 1, 3) інверсії утворюють такі пари чисел: (4,2), (4,1), (4,3) та (2,1). Якщо б ця сукупність відповідала б другим індексам елементів (за умовою, що перші індекси розташовані в порядку зростання) у певному доданку, то, оскільки перестановка містить чотири інверсії, тобто вона парна, знак такого доданка повинен бути таким самим, як і знак добутку елементів, які його утворюють.

Порядком визначника є порядок квадратної матриці, для якої розглядається цей визначник.

Оскільки загальне означення (2.1) визначника є складним для сприйняття, розглянемо його застосування на прикладі визначників 1-го, 2-го та 3-го порядків. Так, визначником 1-го порядку є сам елемент, з якого він складається:

$$\Delta A = |a_{11}| = a_{11}.$$

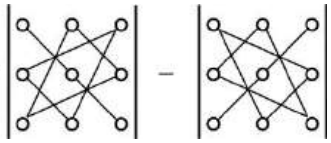
Застосуємо означення (2.1) до обчислення визначника 2-го порядку. Отримуємо визначник як суму добутку елементів головної діагоналі, який береться зі знаком «+», і добутку елементів побічної діагоналі, який береться зі знаком «–», бо є одна інверсія:

$$\Delta = \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}; \qquad \Delta = + \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} \qquad (2.2)$$

Зверніть увагу, що в обох доданках перші індекси розташовані в порядку зростання. Добуток $a_{11} \cdot a_{22}$ не містить інверсій, а у добутку $a_{12} \cdot a_{21}$ другі індекси утворюють одну інверсію, у якій індекс 2 передує індексу 1, отже, для цього доданка знак змінюється на протилежний. Праворуч у співвідношенні (2.2) зображена геометрична схема, за якою обчислюється визначник 2-го порядку.

Згідно з означенням (2.1) визначник 3-го порядку обчислюється за формулою:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$\Delta =$  (2.3)

Розглянемо геометричну схему, що зображена праворуч у (2.3). Вона має назву «***правило трикутників***». Усі шість добутків з трьох елементів матриці записані таким чином, що їх перші індекси розташовані в порядку зростання. Добуткам, один з яких складається з елементів головної діагоналі матриці (цей добуток не містить інверсії індексів), а розташування елементів двох інших утворюють трикутники, основи яких паралельні головній діагоналі (вони містять по дві інверсії індексів), відповідає знак «+». Навпаки, добутки елементів побічної діагоналі та трикутників, основи яких паралельні побічній діагоналі, містять непарну кількість інверсій індексів (*переконайтеся у цьому*), тому їх беруть зі знаком «–».

 Наведемо обчислення визначника 3-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-3) + 0\cdot 1\cdot 3 + 5\cdot(-2)\cdot(-4) - 5\cdot 3\cdot 3 - 0\cdot(-2)\cdot(-3) - 1\cdot 1\cdot(-4) = -10.$$

2.2. Властивості визначників

Серед багатьох властивостей визначників розглянемо основні, які доцільно використовувати для спрощення процесу їх обчислення. Сформулюємо ці властивості. Їх доведення базується на означенні визначника n-го порядку. Але перш ніж перейти до викладання цих властивостей, введемо ще два поняття.

Визначник матриці $(n-1)$-го порядку, яку одержують з вихідної матриці n-го порядку шляхом вилучення i-го рядка та j-го стовпця, називають ***мінором*** елемента a_{ij} і позначають M_{ij}.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці A називають добуток відповідного мінора на -1, яка підноситься у степінь, що визначається сумою індексів даного елемента. Отже, маємо формулу:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \qquad (2.4)$$



Визначимо мінор і алгебраїчне доповнення елемента a_{12} для матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для цього вилучаємо з вихідної матриці A перший рядок та другий стовпець, на перетині яких міститься елемент a_{12}, і обчислюємо визначник 2-го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -21; \; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 21.$$

Оскільки для елемента a_{12} сума індексів є непарною, то мінор і алгебраїчне доповнення цього елемента відрізняються знаком.

Розглянемо ***основні властивості*** визначників.

1^0 (***про визначник транспонованої матриці***). Визначник транспонованої матриці A^T дорівнює визначнику вихідної матриці A:

$$\Delta A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.5)$$

Ця властивість доводить рівноправність рядків і стовпців визначника, тому при подальшому розгляді ми будемо формулювати властивості визначника відносно дій над рядками, але ці ж властивості розповсюджуються і на дії над стовпцями.

2^0 (***про зміну знака***). Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки, то отримаємо визначник, який має протилежний знак:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\Delta, \quad k \neq s. \qquad (2.6)$$

3^0 (***про спільний множник елементів ряду***). Якщо елементи деякого ряду визначника містять спільний множник λ, то його можна винести за знак (символ) визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda \cdot a_{k1} & \lambda \cdot a_{k2} & \ldots & \lambda \cdot a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.7)$$

Властивість 3^0 припускає і інше формулювання: якщо всі елементи будь-якого ряду помножити на деяке стале число λ, то сам визначник помножиться на це число λ.

4^0 (***про рівність визначника нулю***). Визначник дорівнює нулю, якщо:

а) всі елементи деякого ряду дорівнюють нулю:

$$\left(\exists i : a_{ij} = 0, \ \forall j = \overline{1,n}\ \right) \quad \Rightarrow \quad \Delta A = 0; \qquad (2.8)$$

б) він містить два або більше рядків з однаковими або пропорційними елементами:

$$\left(\exists \{ i_1, i_2 \} : \ a_{i_1 j} = a_{i_2 j}, a_{i_1 j} = k a_{i_2 j}, \ \forall j = \overline{1,n}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta A = 0. \qquad (2.9)$$

5^0 (***про суму двох визначників***). Якщо елементи будь-якого рядка визначника (нехай це буде i-й рядок) є сумою двох доданків, то цей визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, у яких елементи i-го рядку для

першого визначника дорівнюють першим з двох доданків, що складають відповідні за номером елементи вихідного визначника, а елементи i-го рядку другого визначника дорівнюють другим доданкам, тоді як елементи усіх інших рядків збігаються з відповідними елементами цих рядків вихідного визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

6^0(***про інваріантність, тобто незмінність визначника***). Визначник не змінюється, якщо до елементів будь-якого його рядка додати відповідні за номером елементи іншого рядка, що помножені на одне і те ж число k:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{m1} & a_{i2}+ka_{m2} & \cdots & a_{in}+ka_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.11)$$

Дійсно, кожний елемент визначника, який утворюється з вихідного шляхом додавання до елементів його i-го рядка відповідних за номером елементів m-го рядка, які були помножені на число k, буде містити співмножник у вигляді суми двох доданків $a_{ij}+ka_{mj}$ $(\forall j=\overline{1,n})$. За попередньою властивістю отримуємо суму двох визначників, перший з яких дорівнює Δ, а другий містить два рядки з пропорційними елементами a_{mj} і ka_{mj} $(\forall j=\overline{1,n})$, відповідно, за властивістю 4^0б він дорівнює нулю.

Як одну із властивостей визначників наведемо ***теорему Лапласа.*** Вона має важливе теоретичне значення і застосовується при обчисленні визначників, порядок яких більше трьох.

Теорема 2.1 (***теорема Лапласа про розкриття визначника***). Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad \forall i = \overline{1,\ n}. \tag{2.12}$$

Наслідок. Сума добутків елементів будь-якого рядка на алгебраїчні доповнення відповідних за номером елементів іншого рядка дорівнює нулю:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad \forall i = \overline{1,\ n} \quad \text{при} \quad k \neq i. \tag{2.13}$$

Розглянемо на прикладах ***способи обчислення визначників***.

1^0. Застосування теореми Лапласа



Повернемось до прикладу, що розглядався раніше, і розглянемо обчислення визначника 3-го порядку за теоремою Лапласа.

Зверніть увагу, що $a_{12} = 0$, тому доцільно здійснювати розкладання визначника за елементами або першого рядка, або другого стовпця, оскільки у цих випадках матимемо лише два доданки. Так, якщо здійснювати розкладання за елементами першого рядка, отримуємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-9+4) + 5 \cdot (8-9) = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot (-1) = -10.$$

Як бачимо, результати обчислень за означенням (2.3) і за теоремою Лапласа (2.12) збіглися.



За теоремою Лапласа розкриття визначника n-го порядку можна завжди звести до обчислення n визначників $(n-1)$-го порядку, якими є алгебраїчні доповнення елементів обраного рядка чи стовпця.

Аналогічно розкриття кожного з визначників $(n-1)$-го порядку зводяться до обчислення визначників $(n-2)$-го порядку, кількість яких становить $(n-1)$, і далі, поки не дійдемо до визначників першого порядку – просто чисел. Отже, будь-який елемент матриці можна розглядати як її мінор першого порядку. Співвідношення (2.12) вважається рекурентним означенням визначника.

2^0. Зниження порядку визначника шляхом перетворень

Зрозуміло, що обсяг обчислень за формулою (2.12) зменшується, якщо деякі з елементів обраного рядка дорівнюють нулю, оскільки відповідні їм алгебраїчні доповнення нема потреби обчислювати. Властивість 5^0 (***про інваріантність визначника***) дозволяє шляхом перетворень замінити на нулі всі елементи будь-якого рядка чи стовпця, окрім одного. Елемент a_{rs}, який залишається відмінним від нуля, є ***провідним*** елементом, а відповідний рядок r (або стовпець s), у якому стоїть a_{rs}, і за допомогою якого саме і здійснюються перетворення, теж називається ***провідним***.



Обчислимо визначник четвертого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Оскільки другий стовпчик визначника вже містить нуль, а його елемент $a_{12} = 1$, то будемо вважати цей елемент провідним і зробимо нулями всі інші елементи другого стовпчика. Оскільки перший рядок є провідним, то його елементи залишаємо без зміни, а до елементів другого рядка додаємо відповідні елементи першого, які помножили на (–2). До елементів четвертого рядка додаємо відповідні елементи першого, що помножили на (–4):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \\ \cdot(-4) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -14 & 0 & -5 & -7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -18 & 0 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Тепер розкриваємо визначник за другим стовпцем і отримуємо замість визначника четвертого порядку визначник третього порядку:

$$\Delta=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-14 & -5 & -7\\ 4 & 2 & 1\\ -18 & -5 & -19\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}14 & 5 & 7\\ 4 & 2 & 1\\ -18 & -5 & -19\end{vmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\\ \cdot(-7)\\ \leftarrow\end{matrix}\begin{matrix}\\ \cdot 19\\ \end{matrix}.$$

Аналогічно знижуємо порядок одержаного визначника. Для цього вибираємо в якості провідного елемента $a_{23}=1$. Другий рядок нового визначника залишимо без зміни, а до його першого рядка додаємо другий, який помножимо на (–7). Відповідно, до третього рядка додамо другий, який помножимо на 19. Потім розкриваємо визначник за елементами третього стовпця і отримуємо визначник другого порядку. Тепер обчислюємо визначник другого порядку за означенням. Отже, остаточно маємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-14 & -9 & 0\\ 4 & 2 & 1\\ 58 & 33 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}-14 & -9\\ 58 & 33\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}14 & 9\\ 58 & 33\end{vmatrix}=-60.$$

3^0. Зведення визначника до трикутного вигляду

Застосування теореми Лапласа до розкриття визначників n-го порядку дає можливість запропонувати ще один алгоритм, за яким метою перетворень є приведення вихідного визначника до трикутного вигляду. Для обчислення визначника послідовно розкриваємо за елементами 1-го стовпця кожний з n визначників, які для верхньої трикутної матриці є алгебраїчними доповненнями того елементу головної діагоналі, який для даного визначника опиняється на перетині його першого рядка і першого стовпця. Так, для визначника n-го порядку це алгебраїчне доповнення елементу a_{11}, для визначника $(n-1)$-го порядку це алгебраїчне доповнення елементу a_{22}. Тоді значення вихідного визначника отримаємо у вигляді добутку елементів головної діагоналі:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\begin{vmatrix}a_{33} & a_{32} & \cdots & a_{3n}\\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=$$

$$=\ldots=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$$



Розглянемо цей спосіб на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4 .$$

Таким чином, для обчислення визначника n-го порядку можна застосовувати кілька способів, які прискорять обчислення. Усі вони спираються на властивості визначника, і вибір певного способу залежить від дослідника.

2.3. Обернена матриця

Квадратна матриця A називається ***неособливою***, або ***невиродженою***, якщо її визначник ΔA не дорівнює нулю. У протилежному випадку вона називається ***особливою***, або ***виродженою***.

Зазначимо, що при розгляді дій з матрицями не вводилася операція ділення. Однак можна ввести поняття, яке дає змогу дати деякий еквівалент цій дії.

Матрицю A^{-1} називають ***оберненою*** до матриці A, якщо добуток цієї матриці як ліворуч, так і праворуч на матрицю A дорівнює одиничній матриці:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E .$$

Як видно з останніх рівностей, обернену може мати тільки квадратна матриця, але ця умова недостатня.

Достатньою умовою існування матриці A^{-1}, що є оберненою відносно матриці A, є невиродженість вихідної матриці, тобто $\Delta A \neq 0$.

Доведення. Нехай матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$ є невиродженою, тобто її визначник не дорівнює нулю. З алгебраїчних доповнень елементів вихідної матриці A укладемо матрицю і транспонуємо її. Відносно матриці A така транспонована матриця алгебраїчних доповнень називається ***союзною***, або ***приєднаною*** A^*. За означенням союзна матриця має вигляд:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Поділимо елементи матриці A^* на величину визначника вихідної матриці (це можна зробити, оскільки $\Delta A \neq 0$) і отримаємо:

$$\frac{1}{\Delta} \cdot A^*. \tag{2.14}$$

Доведемо, що матриця, яку ми визначили співвідношенням (2.14), є оберненою відносно матриці A. Для цього треба переконатися, що справедливими є такі твердження:

$$\frac{A^*}{\Delta} \cdot A = A \cdot \frac{A^*}{\Delta} = E\,.$$

Для цього розглянемо добуток матриць:

$$A \cdot \frac{A^*}{\Delta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Дійсно, сума добутків елементів i-го рядка матриці A та відповідних елементів j-го стовпця матриці A^* згідно з теоремою Лапласа дорівнює визначнику матриці при $i = j$, а при $i \neq j$ цей добуток дорівнює нулю. Отже, одержуємо одиничну матрицю.

Аналогічний результат отримуємо, якщо розглядатимемо добуток $\frac{A^*}{\Delta}\cdot A$ (*пропонуємо переконатися у цьому самостійно*).

Зауваження. Для невиродженої матриці A існує єдина обернена матриця.



Знайдемо матрицю, що є оберненою до матриці A:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Переконаємося в тому, що матриця A є невиродженою. Для цього обчислимо її визначник:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=17.$$

Оскільки $\Delta A\neq 0$, то обернена матриця існує. Знаходимо всі алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} вихідної матриці:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=6; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2; \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=3;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-3; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=7.$$

Записуємо союзну та обернену матриці:

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{17} & \frac{-2}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{2}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{-3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{7}{17} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність одержаного результату:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2.4. Розв’язання системи лінійних рівнянь за правилом Крамера

Поняття визначника n-го порядку виникає при розв’язанні систем лінійних рівнянь, а саме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.15}$$

Звернемо увагу на рівність кількості рівнянь системи та кількості невідомих, тобто матриця системи є квадратною.

Припустимо, що визначник основної матриці системи (2.15) не дорівнює нулю, це означає, що матриця системи є невиродженою. Отже,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Помножимо кожне з рівнянь системи, які запишемо у вигляді

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ \left(i = \overline{1, n}\right),$$

на A_{ij}, тобто на алгебраїчні доповнення j-го стовпця, та знайдемо суму цих рівнянь. Наприклад, помножимо кожне рівняння системи на відповідне йому за номером рядка алгебраїчне доповнення 1-го стовпця:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \begin{array}{|l} \cdot A_{11} \\ \cdot A_{21} \\ \ldots \\ \cdot A_{n1} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}\right) \cdot x_1 + \left(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1}\right) \cdot x_2 + \ldots$$
$$+ \left(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \ldots + a_{nn}A_{n1}\right) \cdot x_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}.$$

Після групування маємо, що в отриманому рівнянні коефіцієнтом при невідомому x_1 є розкладом визначника Δ основної матриці системи за елементами першого стовпця, а коефіцієнти при всіх інших невідомих x_2, ..., x_n згідно з наслідком із теореми Лапласа (2.13) дорівнюють нулю. Вільний член рівняння є розкладом визначника Δ_1, який було здобуто з визначника основної матриці системи шляхом заміни 1-го стовпця, який утворено з коефіцієнтів при невідомому x_1, на стовпець вільних членів $(b_i)_{n\times 1}$. Отже, визначник Δ_1 відповідає невідомому x_1. Таким чином маємо $x_1 = \Delta_1/\Delta$.

У загальному випадку отримуємо, що

$$x_j \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_iA_{ij} \ \Rightarrow \ x_j \cdot \Delta = \Delta_j, \qquad (2.16)$$

де Δ – визначник основної матриці системи;

Δ_j – визначник, який здобуто з визначника основної матриці системи шляхом заміни її j-го стовпця на стовпець вільних членів $(b_i)_{n\times 1}$:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Таким чином, якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, де невідомі обчислюються за формулами:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad \text{при} \quad \Delta \neq 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{2.17}$$

Сукупність формул (2.17) називається ***правилом Крамера*** для відшукання невідомих x_j.



Розглянемо розв'язання системи лінійних рівнянь за правилом Крамера.

Нехай є система лінійних рівнянь, що складається з трьох рівнянь відносно трьох невідомих:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Знайдемо визначник основної матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Оскільки матриця є невиродженою, то система рівнянь матиме єдиний розв'язок. Знаходимо визначники, що відповідають невідомим:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 33 & 3 & 2 \\ 23 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5; \qquad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 3 & 23 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 33 \\ 3 & 2 & 23 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix} = -2.$$

За формулами Крамера визначаємо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 5; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 3; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 2.$$

Отже, розв'язком системи буде єдина трійка чисел:

$$x_1 = 5; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 2.$$

2.5. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом оберненої матриці

Запишемо систему лінійних рівнянь у матричній формі (1.7):

$$AX = B.$$

Розв'яжемо матричне рівняння відносно матриці невідомих. Розглядатимемо випадок, коли основна матриця системи є невиродженою, отже, для неї існує обернена. Тоді:

$$AX = B \Rightarrow \left| \text{ помножуємо обидві частини рівняння зліва на } A^{-1} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow \left| \text{ застосовуємо сполучний закон} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B \Rightarrow \left| A^{-1}A = E, \text{ а } EX = X \right| \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Отже, за допомогою оберненої матриці розв'язок системи, що містить n рівнянь відносно n невідомих, можна записати у вигляді:

$$X = A^{-1}B, \tag{2.18}$$

якщо існує матриця, що є оберненою відносно основної матриці системи.



Розв'яжемо систему, що складається з трьох лінійних рівнянь відносно трьох невідомих, за методом оберненої матриці:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Обчислимо визначник основної матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Знайдемо матрицю, яка є оберненою до матриці A, для цього складемо матрицю з алгебраїчних доповнень та транспонуємо її. Внаслідок цього отримаємо союзну матрицю:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -5 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Помноживши матрицю A^* на сталу $1/\Delta$, отримаємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність обчислень:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Визначаємо розв’язок системи за формулою (2.18):

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 33 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв’язком даної системи буде єдина трійка чисел:

$$x_1 = 5; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 2.$$



Ключові терміни

Визначник матриці; порядок визначника; парне і непарне переставлення; інверсії; правило трикутників; мінор; алгебраїчне доповнення; правило (формули) Крамера; невироджена та вироджена матриці; союзна матриця; обернена матриця.



Запитання для самоперевірки

1. Для якого виду матриць вводиться поняття «визначник»?
2. Що розуміють під визначником другого порядку?
3. Як обчислити визначник третього порядку за правилом трикутників?
4. Що таке «переставлення з n чисел», або інверсія?
5. Дайте означення визначника n-го порядку.
6. Що називають мінором елемента визначника?
7. Що називають алгебраїчним доповненням елемента визначника?
8. Яким співвідношенням пов’язані між собою мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника (квадратної матриці)?
9. Сформулюйте основні властивості визначників і обґрунтуйте їх.
10. Сформулюйте теорему Лапласа і наслідок з неї.
11. Які існують способи розкриття визначника?
12. На чому базується розкриття визначників n-го порядку?
13. Як розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера?
14. Наведіть означення оберненої матриці.
15. Яка достатня умова існування оберненої матриці (які матриці можуть мати обернені)?
16. Як визначити матрицю, що є оберненою до даної?
17. Як перевірити, що отримана матриця дійсно є оберненою до вихідної?
18. Запишіть розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці.
19. Які системи лінійних рівнянь можна розв’язати за допомогою оберненої матриці?
20. Порівняйте кількість дій при розв’язуванні системи за правилом Крамера та за допомогою оберненої матриці.

Глава 3. Системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими: дослідження на сумісність та розв'язання

3.1. Ранг матриці: означення, способи відшукання

При моделюванні реальних процесів за допомогою математичного апарату лінійної алгебри загальна кількість невідомих може бути як меншою, так і більшою за кількість рівнянь (залежно від природи явища та умов, у яких воно відбувається). Тому у прикладних задачах виникає необхідність у дослідженні систем рівнянь, яким відповідають не тільки квадратні, але й прямокутні матриці. Крім того, може статися, що не всі рівняння системи, що описують певне явище, є незалежними одне від одного, оскільки деякі з них можуть утворюватися шляхом елементарних перетворень певної кількості інших рівнянь. Наприклад, процес виробництва за всіма найменуваннями продукції можна охарактеризувати кількістю продукції, що вироблена за перший рік (перше рівняння), другий рік (друге рівняння) та за обидва роки одночасно (третє рівняння). Зрозуміло, що лише перші два рівняння є носіями нової інформації, а третє містить відомості, які можна отримати, додавши перші два рівняння. У зв'язку з цим виникає потреба у виявленні тих рівнянь, які дійсно містять нову інформацію, і у подальшому дослідженні саме таких рівняннь. Перш ніж перейти до розгляду цього питання, необхідно ввести нове поняття – ранг матриці.

Нехай матриця $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ є прямокутною. Виберемо з неї довільним чином k рядків і k стовпців, тобто утворимо довільну квадратну матрицю порядку k. Зрозуміло, що k не може перевищувати менше з чисел m та n, тобто $1\le k\le \min\{m,\ n\}$. Визначник матриці k-го порядку, яка утворена перетином k рядків і k стовпців матриці A, називається її ***мінором k-го порядку*** $M^{(k)}$.

Наприклад, для матриці розміром 3×4 можна записати чотири різні мінори третього порядку, але вона не матиме жодного мінору четвертого порядку.



Так, один із мінорів 3-го порядку для матриці $A=(a_{ij})_{3\times 4}$ можна отримати шляхом вилучення останнього стовпця, тобто:

$$A=\left(\begin{array}{cccc:c} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow M^{(3)}=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ – мінор третього порядку.

Підрахуйте кількість мінорів другого та першого порядків, які можна укласти для матриці A.

Мінори матриці можуть дорівнювати або не дорівнювати нулю (оскільки мінор є визначником). Так, у попередньому прикладі $M^{(3)}=32$. Однак якщо викреслити третій стовпчик, то для цієї ж матриці отримаємо мінор 3-го порядку, який дорівнює нулю, оскільки його третій рядок містить самі нулі. Зрозуміло, усі мінори нульової матриці дорівнюють нулю.

У прикладних задачах інтерес викликають мінори, що не дорівнюють нулю, оскільки саме з такими мінорами пов'язане поняття рангу матриці. ***Ранг матриці*** A – це число r, яке дорівнює найвищому порядку відмінного від нуля її мінору і позначається так:

$$rangA=r, \quad r\in N, \tag{3.1}$$

де r – найбільший порядок відмінного від нуля мінору.

Це означає, що матриця має ранг r, якщо знайдеться хоча б один мінор порядку r, який не дорівнює нулю, а всі мінори $(r+1)$-го порядку, якщо вони існують, дорівнюють нулю.

 *Не слід плутати ранг матриці зі значенням мінору-визначника, за яким визначають ранг матриці.*

Зрозуміло, що значення r належить відрізку $[1;\ \min\{m,\ n\}]$. Ранг матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ називається ***повним***, якщо $rangA=\min\{m,\ n\}$. *Як ви вважаєте, чи існує матриця, ранг якої дорівнює нулю*?

Будь-який відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці, називають ***базисним мінором***:

$$M^{(k)}\neq 0 \text{ – базисний мінор } \Rightarrow \quad k=rang\,A. \tag{3.2}$$

Для визначення рангу матриці зручно було б провести перетворення, які не змінюють ранг матриці, але внаслідок яких значно спрощувалось би визначення її базисних мінорів. Такі перетворення можливі. Вони мають назву ***елементарних перетворень***. До елементарних відносяться такі перетворення матриці:

1) перестановка місцями двох рядків матриці;

2) множення будь-якого рядка на константу $\lambda \neq 0$;

3) додавання до будь-якого рядка іншого рядка, який спочатку було помножено на константу $\lambda \neq 0$.

Результатом елементарних перетворень матриці є матриця, яка ***еквівалентна*** вихідній, тобто $A \sim B$. Отже, дві матриці A і B є еквівалентними, якщо кожну з них можна одержати з іншої за допомогою скінченної кількості елементарних перетворень.

Теорема 3.1 (*про ранги еквівалентних матриць*). Еквівалентні матриці мають один і той же ранг, тобто еквівалентні перетворення матриці не змінюють її ранг:

$$A \sim B \;\Rightarrow\; rangA = rangB. \tag{3.3}$$

Теорему наводимо без доведення.

Застосування цієї теореми до визначення рангу матриці здійснюється таким чином: виконують елементарні перетворення матриці, щоб привести її до діагонального вигляду, а краще – отримати на її місці одиничну матрицю (можливо, з точністю до розташування рядів).



Наприклад, для встановлення рангу матриці A виконуємо елементарні перетворення і отримуємо:

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \end{matrix} (-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отже, для матриці A ми вказали мінор 2-го порядку, який не дорівнює нулю, тоді як усі мінори 3-го порядку дорівнюють нулю. Цього достатньо, щоб стверджувати, що ранг матриці A дорівнює двом, а мінор, який ми знайшли, є її базисним мінором.

Нагадаємо, що розширена матриця лінійної системи алгебраїчних рівнянь містить усі параметри цієї системи, отже, виконувати операції над її рядками все одно, що виконувати ті ж самі операції над рівняннями системи. Відповідно, елементарними перетвореннями системи лінійних алгебраїчних рівнянь є:

1) перестановка її рівнянь;
2) множення будь-якого рівняння на константу $\lambda \neq 0$;
3) додавання до будь-якого рівняння іншого рівняння цієї системи, яке спочатку було помножене на константу $\lambda \neq 0$.

Результатом елементарних перетворень системи алгебраїчних рівнянь S_1 є система S_2, яка має ті ж самі розв'язки, що і вихідна система, та не має інших. Дві системи рівнянь S_1 та S_2 називаються ***еквівалентними*** $(S_1 \sim S_2)$, якщо всі розв'язки першої є розв'язками другої і навпаки. До речі, дві несумісні системи за означенням вважаються еквівалентними. Отже, результатом елементарних перетворень системи лінійних алгебраїчних рівнянь є еквівалентна система рівнянь.

Теорема 3.2 (***критерій еквівалентності***). Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь S_1 і S_2 є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли еквівалентними є розширені матриці $A_1 \mid B_1$ і $A_2 \mid B_2$ цих систем:

$$S_1 \sim S_2 \;\Leftrightarrow\; A_1 \mid B_1 \sim A_2 \mid B_2 . \qquad (3.4)$$

Теорему наводимо без доведення.

3.2. Дослідження систем m лінійних рівнянь з n невідомими. Теорема Кронекера – Капеллі

У главах 1 та 2 даного розділу підручника були розглянуті методи розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, в яких кількість рівнянь збігалася з кількістю невідомих цієї системи і визначник основної матриці системи був відмінним від нуля. Такі системи рівнянь мають єдиний розв'язок, а можливість його відшукання за правилом Крамера або за допомогою оберненої матриці гарантована умовою невиродженості основної матриці системи (її визначник не дорівнює нулю). Це означає, що ранг основної матриці таких систем дорівнював числу невідомих системи (або числу її рівнянь, оскільки ми

розглядали випадок, коли кількість невідомих збігається з кількістю рівнянь системи).

На практиці доводиться досліджувати системи рівнянь, для яких розглянуті вище системи є тільки окремим випадком. Розглянемо загальний випадок, коли кількість рівнянь m не збігається з кількістю невідомих n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.5}$$

де $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ – основна матриця системи;

$B = \left(b_i\right)$ – матриця-стовпець вільних членів $\left(i = \overline{1,m}\right)$;

$X = \left(x_j\right)$ – матриця-стовпець невідомих $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Якщо до основної матриці системи приєднати справа стовпець вільних членів, отримаємо розширену матрицю системи: $A|B = (a_{ij} \mid b_i)_{m\times(n+1)}$.

Дослідити систему означає розв'язати питання про її сумісність та визначеність. Для цього використовується теорема Кронекера – Капеллі.

Теорема 3.3 (*Кронекера – Капеллі, критерій сумісності системи*). Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу її розширеної матриці:

$$rang A = rang A|B.$$

Якщо ранги збігаються і дорівнюють кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок; якщо ранги рівні між собою, але менші за кількість невідомих, то система має безліч розв'язків.

Отже, у загальному випадку для відповіді на питання щодо сумісності системи рівнянь необхідно обчислити ранги основної і розширеної матриць системи. Оскільки основна матриця $A = (a_{ij})_{m\times n}$ є складовою частиною розширеної $A|B = (a_{ij} \mid b_i)_{m\times(n+1)}$, то ранги матриць A і $A|B$ визначають не окремо один від одного, а досліджують розширену матрицю системи. Зрозуміло, що ранг основної матриці системи не може бути більшим за ранг розширеної матриці цієї системи.

Розглянемо ***особливості розв'язку однорідної системи рівнянь***. Нагадаємо, що система рівнянь називається однорідною, якщо у системі (3.5) стовпець вільних членів є нульовим стовпцем: $b_i = 0 \ \ \forall i = \overline{1,m}$.

1. Однорідна система рівнянь завжди сумісна. Дійсно, ранг основної матриці системи не зміниться, якщо до неї приєднати нульовий стовпець вільних членів. Тобто для однорідної системи маємо: $rangA = rangA|B$. За теоремою Кронекера – Капеллі це означає, що однорідна система завжди сумісна.

Пропонуємо пересвідчитися, що будь-яка однорідна система завжди має ***нульовий*** розв'язок, тобто $x_j = 0 \ \ \forall j = \overline{1,n}$ є її розв'язком. Розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, за яким $x_j = 0 \ \ \forall j = \overline{1,n}$, називається ***тривіальним***.

2. Якщо однорідна система має ***ненульовий*** розв'язок, тобто хоча б одне з $x_j = \alpha_j \neq 0, \ \ j = \overline{1,n}$, то вона має нескінченну кількість розв'язків: $x_j = c\alpha_j$, де c – довільна стала (*переконайтеся*!), тобто така система є ***невизначеною***.

3. Якщо X_1 та X_2 є розв'язками системи (1.9), то їх лінійна комбінація $X = c_1X_1 + c_2X_2$ теж є розв'язком цієї системи, де c_1 та c_2 – довільні числа. Дійсно, нехай X_1 та X_2 є розв'язками однорідної системи рівнянь, тобто при їх підстановці у систему (1.9) вона перетворюється у тотожність, то враховуючи властивості операцій над матрицями, отримуємо:

$$A\left(c_1X_1 + c_2X_2\right) = A\left(c_1X_1\right) + A\left(c_2X_2\right) = c_1A\left(X_1\right) + c_2A\left(X_2\right) = 0.$$

Проведемо дослідження системи лінійних рівнянь на прикладі.



Нехай до трьох будівельних майданчиків необхідно поставити пісок, що зберігається на двох складах. Обсяги запасів піску на складах задані матрицею $A = \left(250;\ 170\right)$, а потреби кожного будмайданчика – матрицею $B = \left(200;\ 100;\ 120\right)$.

Необхідно дослідити, чи можна скласти такий план перевезень, щоб задовольнити усіх споживачів. Для цього зручно надати вихідні дані у вигляді таблиці (табл. 3.1). Матриця невідомих $X = \left(x_{ij}\right)_{2\times 3}$ складається з елементів,

кожний з яких визначає кількість продукції x_{ij}, яку потрібно перевезти від i-го постачальника ($i=\overline{1,2}$) до j-го споживача ($j=\overline{1,3}$).

Таблиця 3.1

Вихідні дані задачі

Постачальники	Будмайданчики			Запаси
	1	2	3	
Склад 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	250
Склад 2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	170
Потреби	200	100	120	420

Оскільки загальні запаси піску $250+170=420$ дорівнюють загальним потребам $200+100+120=420$, можна скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=200; \\ x_{12}+x_{22}=100; \\ x_{13}+x_{23}=120; \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}=250; \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=170. \end{cases}$$

Ми отримали систему з п’яти рівнянь відносно шести невідомих. Кожне з рівнянь системи має економічне тлумачення. Так, перші три рівняння, що містять суми за стовпцями матриці невідомих, означають: потреби будмайданчиків задовольняються у повному обсязі, а останні два рівняння, що містять суми за рядками, означають: запаси зі складів повністю вивезені (табл. 3.1).

Для відповіді на питання задачі необхідно дослідити систему на сумісність. З цією метою запишемо розширену матрицю системи і проведемо її елементарні перетворення, метою яких є отримання верхньої трикутної матриці. Домовимося, що стовпчики основної матриці системи відповідають такому розташуванню невідомих: $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$.

Отже, маємо:

$$A|B=\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&1&0&0&200\\0&1&0&0&1&0&100\\0&0&1&0&0&1&120\\1&1&1&0&0&0&250\\0&0&0&1&1&1&170\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\\\(-1)\\\\\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&1&0&0&200\\0&1&0&0&1&0&100\\0&0&1&0&0&1&120\\0&1&1&-1&0&0&50\\0&0&0&1&1&1&170\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\\\(-1)\\\\\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&1&0&0&200\\0&1&0&0&1&0&100\\0&0&1&0&0&1&120\\0&0&1&-1&-1&0&-50\\0&0&0&1&1&1&170\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\\\(-1)\\\\\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&1&0&0&200\\0&1&0&0&1&0&100\\0&0&1&0&0&1&120\\0&0&0&-1&-1&-1&-170\\0&0&0&1&1&1&170\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\\\\\+\\\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&1&0&0&200\\0&1&0&0&1&0&100\\0&0&1&0&0&1&120\\0&0&0&-1&-1&-1&-170\\0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\quad\Rightarrow\quad M^{(4)}=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}\neq 0\,.$$

Таким чином, ранг основної матриці системи і ранг розширеної матриці є рівними між собою і дорівнюють чотирьом, однак це менше за кількість невідомих, тому система сумісна, але невизначена, тобто має безліч розв'язків. Це означає, що можна скласти необмежену кількість планів перевезень, за якими здійснюється постачання для забезпечення споживачів необхідною кількістю піску.

3.3. Загальний та частинні розв'язки системи. Базисні та опорні розв'язки

Особливо важливим при дослідженні систем, які описують реальні економічні процеси, є випадок, коли система має безліч розв'язків, тобто ранги основної та розширеної матриць системи співпадають, але є меншими за кількість невідомих: $rangA = rangA|B < n$. Це дає можливість порівняти розв'язки системи за певним критерієм (наприклад, плани постачання однорідної продукції порівняти за критерієм витрат на перевезення або за критерієм часу) і вибрати оптимальний. Отже, розглянемо систему рівнянь, для

якої кількість рівнянь менша за кількість невідомих.

Нехай коефіцієнти матриці при перших r невідомих утворюють відмінний від нуля визначник (базисний мінор), тобто ранг основної матриці системи дорівнює $rangA = r$. Зрозуміло, що тільки r рівнянь системи є лінійно неза-лежними, тобто містять нову інформацію, а інші рівняння можна отримати з r попередніх шляхом їх лінійних перетворень. Тому доцільно записати лише ті r рівнянь, які відповідають базисному мінору. У цих рівняннях невідомі $x_j\left(j=\overline{1,r}\right)$, коефіцієнти при яких утворюють базисний мінор, залишимо ліворуч, а інші невідомі $x_j\left(j=\overline{r+1,n}\right)$ перенесемо праворуч. Після цих перетворень вихідна система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - a_{1r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - a_{2r+2}x_{r+2} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - a_{rr+2}x_{r+2} - \cdots - a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (3.6)$$

Невідомі $x_j\left(j=\overline{1,r}\right)$ називаються ***базисними***, а інші невідомі – ***вільними***. Якщо систему рівнянь (3.6) розв'язати відносно базисних невідомих, то матимемо розв'язок системи у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = f_1\left(x_{r+1},\ x_{r+2},\ ...,\ x_n,\ b_1,\ b_2,\ ...,\ b_r\right); \\ x_2 = f_2\left(x_{r+1},\ x_{r+2},\ ...,\ x_n,\ b_1,\ b_2,\ ...,\ b_r\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = f_r\left(x_{r+1},\ x_{r+2},\ ...,\ x_n,\ b_1,\ b_2,\ ...,\ b_r\right); \\ x_{r+1},\ x_{r+2},\ ...,\ x_n \in R. \end{cases} \quad (3.7)$$

Цей розв'язок можна отримати будь-яким із вже відомих методів, наприклад, за правилом Крамера або за допомогою оберненої матриці, оскільки визначником основної матриці системи є базисний мінор, який не дорівнює нулю.

Запис (3.7) означає, що базисні невідомі визначені як певні функції від вільних невідомих (лінійні комбінації цих невідомих, а також вільних членів

перших r рівнянь вихідної системи), які, в свою чергу, можуть приймати будь-які довільні значення. У реальних економічних задачах вільні невідомі можуть приймати довільні значення на множині їх області визначення. Так, змінні, що описують економічні явища, як правило, не можуть бути від'ємними.

Якщо $rangA = rangA|B < n$, то формули (3.7) описують ***загальний розв'язок*** системи. Надаючи вільним невідомим довільні значення, із загального розв'язку системи можна знайти її частинні розв'язки. Таким чином, за формулами (3.7) отримаємо безліч розв'язків системи. У тому випадку, коли $rangA = rangA|B = n$, усі невідомі є базисними, отже, система має єдиний розв'язок.

Серед частинних розв'язків виділяють ті з них, які отримані при нульових значеннях вільних невідомих. Такі частинні розв'язки називаються ***базисними***. Якщо в базисних розв'язках усі змінні набувають невід'ємних значень, то такі частинні розв'язки називають ***опорними***. Оскільки в економічних дослідженнях застосовуються показники, що приймають невід'ємні значення, то опорні розв'язки викликають найбільший інтерес, отже, виникає потреба у методах їх відшукання.

3.4. Дослідження та розв'язання системи лінійних рівнянь методами Гаусса та Жордана – Гаусса

Серед відомих методів розв'язання систем лінійних рівнянь слід відзначити ***метод виключення*** (***метод Гаусса***) та його модифікацію, зокрема ***метод повного виключення*** (***метод Жордана – Гаусса***). Перевагою цього методу є те, що його можна застосовувати для дослідження і розв'язання систем алгебраїчних рівнянь, для яких кількість невідомих і кількість рівнянь співвідносяться довільним чином.

Суть методу Гаусса полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень розширену матрицю вихідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь за скінчене число кроків (***ітерацій***) приводять до трикутного або трапецієподібного вигляду. Це називається ***прямим ходом*** методу Гаусса. Нагадаємо, що внаслідок елементарних перетворень отримуємо систему рівнянь, яка еквіва-лентна вихідній, тобто систему, що має ті ж самі розв'язки, що і вихідна система, і не матиме інших.

Алгоритм прямого ходу методу Гаусса передбачає таку послідовність дій.

1. Запишемо розширену матрицю системи:

$$A|B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (3.8)$$

У випадку ненульової матриці A можна переставити або невідомі, або рівняння, або і невідомі, і рівняння так, щоб в отриманій після перестановок матриці A виконувалася умова $a_{11}\neq 0$. Вважатимемо, що умова $a_{11}\neq 0$ виконується, тоді перший рядок розширеної матриці поділимо на a_{11}, дістаючи нове значення цього елемента: $a_{11}^{(1)}=1$. Тому можна вважати, що потрібні перетворення вже виконані і умова $a_{11}^{(1)}=1$ виконується. Тепер новий перший рядок послідовно помножимо на числа $-a_{i1}$, де $i=\overline{2,\ m}$, та додамо результат до кожного з рядків, що розташовані нижче, відповідно до їх номеру i. Після цих перетворень матимемо матрицю, перший стовпчик якої у першому рядку містить одиницю, а усі інші його елементи дорівнюють нулю, тобто ми виключили невідоме x_1 з усіх рядків за винятком першого. Отримана матриця є еквівалентною початковій. Результатом таких перетворень є система рівнянь, яка має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}. \end{cases} \qquad (3.9)$$

2. Якщо $a_{22}^{(1)}\neq 0$, поділимо другий рядок нової матриці на це число і отримаємо перед невідомим x_2 коефіцієнт, що дорівнює одиниці. Далі за допомогою другого рядка шляхом еквівалентних перетворень замінимо рядки розширеної матриці, що розташовані нижче другого, таким чином, щоб усі вони містили у другому стовпчику самі нулі. Таким чином, ми виключили друге невідоме з усіх рівнянь системи окрім першого та другого.

3. За допомогою послідовного повторення аналогічних операцій (ітерацій) відносно інших невідомих зведемо основну матрицю системи до верхнього трикутного вигляду (якщо $rangA=rangA|B=n$):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(n)}x_2 + a_{13}^{(n)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(n)}x_n = b_1^{(n)}, \\ x_2 + a_{23}^{(n)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(n)}x_n = b_2^{(n)}, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \tag{3.10}$$

або до трапецієподібного вигляду (якщо $rangA = rangA|B < n$):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(r)}x_2 + a_{13}^{(r)}x_3 + \cdots + a_{1r}^{(r)}x_r + a_{1r+1}^{(r)}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}^{(r)}x_n = b_1^{(r)}, \\ x_2 + a_{21}^{(r)}x_3 + \cdots + a_{2r}^{(r)}x_r + a_{2r+1}^{(r)}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}^{(r)}x_n = b_2^{(r)}, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r + a_{rr+1}^{(r)}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}^{(r)}x_n = b_r^{(r)}. \end{cases} \tag{3.11}$$

4. Невідоме x_r визначаємо з останнього рівняння системи (3.11) (для системи (3.10) це невідоме x_n) і підставляємо його у попереднє рівняння цієї системи, з якого дістаємо значення x_{r-1}. Цей ланцюг послідовних перетворень проводять доти, доки з першого рівняння не дістанемо значення x_1. Знаходження невідомих за системою рівнянь (3.11) шляхом послідовної підстановки знайдених значень невідомих у рівняння з меншим номером називають ***зворотним ходом*** методу Гаусса.

При застосуванні методу Гаусса прямий хід виконують на розширеній матриці або у спеціальній таблиці, де записані елементи розширеної матриці, тоді як зворотний – здійснюють на системі рівнянь.

Якщо внаслідок перетворень основна матриця системи набуває трикутного вигляду і її порядок збігається з кількістю невідомих, то система рівнянь має єдиний розв'язок. У випадку трапецієподібної матриці система сумісна, але невизначена (рівняння виду $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ відкидаємо).

Якщо в процесі виключення невідомих (при виконанні прямого ходу методу Гаусса) одержано суперечливе рівняння: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b_i$, де $b_i \neq 0$, тобто коефіцієнти при всіх невідомих (рядок основної матриці системи) дорівнюють нулю, а права частина цього ж рівняння відмінна від нуля, то така система є несумісною.



Метод виключення невідомих дозволяє проводити дослідження системи лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність одночасно з визначенням її розв'язку.



Розглянемо застосування методу Гаусса на прикладі. Проведемо дослідження системи рівнянь на сумісність і у випадку її сумісності знайдемо розв'язок цієї системи:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10; \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3; \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 7; \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи та проведемо послідовне виключення за методом Гаусса (прямий хід):

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & -4 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & -4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси маємо:

$$M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отже, $rang A = rang A|B = 2 < n = 4$. За теоремою Кронекера – Капеллі система рівнянь сумісна та має безліч розв'язків. У цьому випадку розв'язати систему означає знайти її загальний розв'язок. За трапецієподібною розширеною матрицею запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + x_3 + 0,5x_4 = 5; \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Оскільки коефіцієнти при невідомих x_1 та x_2 утворюють базисний мінор, то саме ці невідомі вважатимемо базисними, тоді невідомі x_3 та x_4 є вільними. Тепер здійснюємо зворотний хід методу Гаусса. Відповідно з цим спочатку знаходимо x_2 з другого рівняння:

$$x_2 = 3 - 3x_3 - 2x_4.$$

Тепер підставляючи x_2 у перше рівняння системи, визначимо, що

$$x_1 = 5 - x_3 - 0,5x_4 - 0,5\left(3 - 3x_3 - 2x_4\right) = 3,5 + 0,5x_3 + 0,5x_4 .$$

Отже, можна записати загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = 3,5 + 0,5x_3 + 0,5x_4; \\ x_2 = 3 - 3x_3 - 2x_4; \\ x_3,\ x_4 \in R. \end{cases}$$

Якщо прийняти, що вільні невідомі дорівнюють нулю $\left(x_3 = x_4 = 0\right)$, то знайдемо $x_1 = 3,5;\ x_2 = 3$, відповідно $X^{\mathrm{T}} = \left(3,5;\ 3;\ 0;\ 0\right)$ є базисним розв'язком. Оскільки серед його компонентів нема від'ємних, то цей розв'язок є опорним.

Виконання зворотного ходу за методом Гаусса, якщо його розглядати як подальше перетворення розширеної матриці системи, еквівалентно зведенню основної матриці системи до одиничної. Саме у цьому полягає суть методу ***повного виключення***, або ***методу Жордана – Гаусса***.

Якщо за допомогою елементарних перетворень звести основну матрицю системи (3.10) до одиничної n-го порядку (нагадаємо, що у цьому випадку $rangA = rangA|B = n$), то дістанемо:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad = b_1^{(n)}, \\ \quad x_2 \qquad\quad = b_2^{(n)}, \\ \quad\quad \ldots \\ \qquad\qquad x_n = b_n^{(n)}, \end{cases} \tag{3.12}$$

тобто отримаємо розв'язок системи $X^{\mathrm{T}} = \left(b_1^{(n)};\ b_2^{(n)};\ ...;\ b_n^{(n)}\right)$, який є єдиним.

Альтернативним результатом перетворень за методом Жордана – Гаусса є отримання з основної матриці системи (3.11) одиничної матриці r-го порядку (ранги матриць співвідносяться як $rangA = rangA|B < n$), тобто матимемо:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1r+1}^{(r)}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}^{(r)}x_n = b_1^{(r)}, \\ x_2 + a_{2r+1}^{(r)}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}^{(r)}x_n = b_2^{(r)}, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r + a_{rr+1}^{(r)}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}^{(r)}x_n = b_r^{(r)}. \end{cases} \qquad (3.13)$$

Такий вигляд системи алгебраїчних рівнянь дає можливість без додаткових обчислень визначити базисні невідомі через вільні.



Розглянемо попередній приклад і продовжимо перетворення розширеної матриці, щоб отримати в основній матриці системи одиничну:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0,5 & -0,5 & 3,5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

За цією матрицею запишемо систему рівнянь, яка набула вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - 0,5x_3 - 0,5x_4 = 3,5; \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Оскільки одиничну матрицю утворюють коефіцієнти при невідомих x_1 та x_2, то саме ці невідомі і є базисними, а невідомі x_3 та x_4 – вільними. Отже, отримуємо загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = 3,5 + 0,5x_3 + 0,5x_4; \\ x_2 = 3 - 3x_3 - 2x_4; \\ x_3,\ x_4 \in R. \end{cases}$$

Зрозуміло, що можна отримати інший загальний розв'язок, якщо обрати інші базисні невідомі.



Кількість загальних розв'язків сумісної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, ранг основної матриці якої дорівнює r, визначається кількістю ненульових мінорів порядку r в основній матриці системи, оскільки кожному такому мінору відповідає підмножина, що містить r базисних невідомих із множини n невідомих.



Повернемося до задачі про визначення плану постачання піску до трьох будмайданчиків.

При дослідженні системи рівнянь на сумісність за теоремою Кронекера – Капеллі на місці розширеної матриці системи ми отримали трапеціїподібну матрицю. Продовжимо елементарні перетворення цієї матриці для того, щоб на місці основної матриці системи отримати одиничну матрицю.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 170 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \\ (-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 170 \end{array}\right).$$

Оскільки одиничну матрицю утворюють перші чотири стовпці, то базисними у цьому загальному розв'язку є перші чотири невідомі, а інші дві – вільними. При побудові математичної моделі задачі про постачання ми домовилися, що стовпці основної матриці системи відповідають такому порядку розташування невідомих: x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}. Отже, новій розширеній матриці системи, яку ми отримали шляхом еквівалентних перетворень, відповідає такий загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_{11} = 30 + x_{22} + x_{23}; \\ x_{12} = 100 - x_{22}; \\ x_{13} = 120 - x_{23}; \\ x_{21} = 170 - x_{22} - x_{23}; \\ x_{22} \geq 0;\ x_{23} \geq 0. \end{cases}$$

Нагадаємо, що невідомі визначають кількість піску, яку треба перевезти зі складу, а вона не може бути від'ємною, отже, вільні невідомі є невід'ємними

(тоді як у інших прикладах вважалось, що вони належать множині дійсних чисел). Надамо вільним невідомим нульові значення і отримаємо базисний розв'язок, який надано у вигляді матриці:

$$X = \begin{pmatrix} 30 & 100 & 120 \\ 170 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цей розв'язок є опорним, оскільки не містить від'ємних компонентів.

Порівняємо суми за рядками з можливостями складів, а суми за стовпчиками – з потребами будмайданчиків (див. табл. 3.1). Ми отримали план, за яким всі запаси зі складів вивезені і всі споживачі задовольнили свої потреби.

Якщо елементарні перетворення розширеної матриці системи алгебраїчних рівнянь здійснювати у таблиці, яка містить контрольні суми, це дозволяє контролювати правильності обчислень при виконанні кожного перетворення.

З цією метою, окрім елементів розширеної матриці системи, у таблицю вводиться додатковий стовпець, у якому записують суми елементів ряду. Ці суми називаються ***контрольними сумами***. Над контрольними сумами кожного рядка виконуються ті ж самі операції, що і над усіма іншими елементами цього рядка, а отриманий результат порівнюється з сумою елементів у рядку після перетворення. Якщо помилки в обчислюваннях відсутні, то значення елементів стовпця контрольних сум збігаються з сумами елементів перетворених рядків.

Розглянемо розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана – Гаусса, реалізація якого здійснюється у таблиці, на прикладі системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Запишемо коефіцієнти при невідомих та вільні члени рівнянь у таблицю, як це показано у табл. 3.2. Стовпець «примітки» містить інформацію, внаслідок яких саме перетворень було отримано рядок, поруч з яким записана примітка.

Таблиця 3.2

Схема Жордана – Гаусса

№ п/п	x_1 x_2 x_3	Вільні члени	Контрольні суми	Примітки
1	2	3	4	5
I	4 3 2	33	42	
II	3 2 1	23	29	
III	1 1 2	12	16	
IV	1 1 2	12	16	III
V	0 –1 –5	–13	–19	IV $\cdot(-3)+$ II
VI	0 –1 –6	–15	–22	IV $\cdot(-4)+$ I

Закінчення табл. 3.2

1	2	3	4	5
VII	1 0 -3	-1	-3	IV + V
VIII	0 1 5	13	19	V $\cdot(-1)$
IX	0 0 -1	-2	-3	VI - V
X	1 0 0	5	6	VII+ IX $\cdot(-3)$
XI	0 1 0	3	4	VIII+ IX $\cdot(5)$
XII	0 0 1	2	3	IX $\cdot(-1)$

На місці основної матриці системи шляхом елементарних перетворень ми отримали одиничну матрицю, порядок якої дорівнює трьом, тобто збігається з кількістю невідомих, отже, за теоремою Кронекера – Капеллі система сумісна і має єдиний розв'язок. За останньою ітерацією запишемо розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = 5; \\ x_2 = 3; \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Метод Жордана – Гаусса є універсальним методом для дослідження та розв'язання систем лінійних рівнянь будь-якого порядку. Цей метод дає можливість знайти єдиний розв'язок системи, якщо система визначена, або загальний розв'язок для системи, що має безліч розв'язків. Крім того, в процесі перетворення матриці легко помітити, якщо система є несумісною. Зауважимо, що методи Крамера та оберненої матриці застосовуються тільки для розв'язування визначених систем. У цьому полягає їх обмеженість.

Повернемося до математичної моделі задачі про використання ресурсів, що наведена в главі 1 даного розділу:

$$\begin{cases} 176x_1 + 236,7x_2 + 279,9x_3 + 144,5x_4 = 17039, \\ 11,45x_1 + 15,22x_2 + 12,91x_3 + 34,63x_4 = 1183, \\ 6,00x_1 + 7,00x_2 + 7,00x_3 + 6,50x_4 = 513, \\ 3,75x_1 + 5,04x_2 + 5,86x_3 + 3,58x_4 = 365. \end{cases}$$

До розв'язання цієї системи можна застосувати будь-який із розглянутих методів, тому що визначник основної матриці системи відмінний від нуля ($\Delta = -4,739$), отже, система має єдиний розв'язок. Наведемо цей розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = 20,3; \\ x_2 = 32,4; \\ x_3 = 17,2; \\ x_4 = 6,8. \end{cases}$$

Відповідно до економічного змісту задачі знайдені значення невідомих повинні бути цілими числами, тому кінцевою відповіддю задачі буде наближений розв'язок: для найбільш повного використання матеріальних ресурсів, що є в наявності, підприємство повинно випускати: $x_1 = 20$ електродвигунів АІР80, $x_2 = 32$ електродвигунів АІР90, $x_3 = 17$ електродвигунів АІР100 та $x_4 = 6$ електронасосів БЦ 1,1-20.

За допомогою методів ***Гаусса*** та ***Жордана – Гаусса*** можна відшукати матрицю, ***обернену*** відносно даної, якщо вона існує, або довести, що така матриця не існує.

Нехай матриця X є матрицею, оберненою до матриці A, однак її елементи невідомі.

Запишемо матричну рівність:

$$AX = E. \qquad (3.14)$$

Помножимо обидві частини рівності (3.14) на A^{-1}, де A^{-1}– матриця, яка є оберненою до матриці A. Тоді маємо $A^{-1}AX = A^{-1}E$. Оскільки $A \cdot A^{-1} = E$, то отримуємо нову рівність: $E\,X = A^{-1}\,E$, або

$$X = A^{-1}E. \qquad (3.15)$$

Таким чином, визначення оберненої матриці еквівалентно розв'язанню системи лінійних рівнянь, основною матрицею якої є матриця A, а стовбцями вільних членів є n стовпців одиничної матриці. Звідси випливає спосіб знаходження оберненої матриці за методом Жордана – Гаусса.

Для цього необхідно до вихідної матриці A справа дописати одиничну матрицю, а далі шляхом елементарних перетворень матриці $A|E$ на місці вихідної матриці A одержати одиничну, тоді на місці одиничної міститиметься матриця, що є оберненою до вихідної матриці A:

$$A\,|E\ \sim E\ |A^{-1}.$$



Застосуємо цей метод для визначення матриці, оберненої до матриці A:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Допишемо до матриці A справа одиничну матрицю та проведемо елементарні перетворення таким чином, щоб на місці матриці A одержати одиничну:

$$A\,|\,E=\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 & -3\\ 0 & -1 & -6 & 1 & 0 & -4\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -3 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 5 & -6 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Звідси дістаємо

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 1\\ 5 & -6 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Обчислювання також можна проводити у таблиці з використанням контрольних сум. Якщо у процесі елементарних перетворень матриці контроль не здійснювався, то після визначення оберненої матриці слід перевірити, чи виконується співвідношення: $A^{-1}A = E$. Отже,

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -12+12+1 & -9+8+1 & -6+4+2 \\ 20-18-2 & 15-12-2 & 10-6-4 \\ -4+3+1 & -3+2+1 & -2+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким чином, перевірка підтвердила, що знайдена матриця дійсно є оберненою до вихідної матриці.

3.5. Лінійна балансова модель (модель Леонтьєва)

Одним з відомих прикладів застосування апарата лінійної алгебри в економічних дослідженнях є побудована Василем Леонтьєвим (1906 – 1999 рр.) модель міжгалузевого балансу, яка характеризує міжгалузеві виробничі зв'язки економіки країни. Цю модель також називають ***статичною моделлю Леонтьєва багатогалузевої економіки,*** або моделлю ***«витрати-випуск»***. Модель Леонтьєва є основою планування і прогнозування міжгалузевих виробничих зв'язків як у грошовій, так і у натуральній формах.

Розглянемо принципи побудови моделі міжгалузевого балансу.

Нехай є n галузей промисловості, кожна з яких виробляє свій вид продукції. Введемо такі позначення:

x_i – валовий випуск кожної з галузей, тобто загальний обсяг продукції, що виробляє i-та галузь $\left(i = \overline{1,n}\right)$;

x_{ij} – внутрішнє споживання, тобто кількість продукції i-ї галузі, яка використовується у виробництві продукції j-ї галузі, зокрема, у тому числі і всередині самої галузі $\left(j = \overline{1,n}\right)$;

y_i – кінцевий продукт i-ї галузі, або попит, тобто кількість готової продукції i-ї галузі, яку споживають зовні n галузей-виробників; це може бути експорт, споживання населенням країни або на поповнення (з тією чи іншою метою) товарних запасів та ін.

Валовий обсяг продукції i-ї галузі дорівнює сумі обсягів продукції, яку споживають n галузей у процесі виробництва, та кінцевого продукту, тобто

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.16}$$

Рівняння (3.16) називаються ***співвідношеннями балансу***. Його можна записати у вигляді:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.17}$$

де a_{ij} – технологічні коефіцієнти внутрішньогалузевого споживання, або прямі (внутрішні) витрати, тобто величини, які вказують кількість одиниць продукції i-ї галузі ($i = \overline{1,n}$), що використовується для виробництва однієї одиниці продукції j-ї галузі ($j = \overline{1,n}$). Відповідно

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}. \tag{3.18}$$

Запишемо співвідношення балансу (3.17) у вигляді матричного рівняння:

$$X = AX + Y, \tag{3.19}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

де X – матриця-стовпець валового випуску всіх видів продукції;

A – матриця прямих витрат (технологічні коефіцієнти);

Y – матриця-стовпець кінцевого попиту.

Отримане матричне рівняння (3.19) називають ***балансовою моделлю виробництва***, або ***моделлю міжгалузевого балансу виробництва***.

Основна задача міжгалузевого балансу полягає в знаходженні такої матриці X валової продукції, яка при відомій матриці A прямих витрат забезпечить задану матрицю Y кінцевої продукції.

Рівняння (3.19) можна переписати у вигляді

$$(E-A)X=Y. \tag{3.20}$$

Якщо $\Delta(E-A)\neq 0$, то за методом оберненої матриці отримуємо розв'язок системи:

$$X=(E-A)^{-1}Y=S\cdot Y. \tag{3.21}$$

Матриця $S=(E-A)^{-1}$ називається ***матрицею повних витрат***, а різниця матриць повних і прямих витрат, тобто матриця $K=S-A$ називається ***матрицею непрямих***, або ***опосередкованих витрат***.

Виходячи з економічного змісту задачі, $x_i\geq 0$, $y_i\geq 0$ та $a_{ij}\geq 0$.

За співвідношенням (3.21) маємо можливість розглядати валовий випуск продукції x_i як функцію від запланованих значень кінцевого попиту y_j:

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}s_{ij}y_j.$$

Матриця $S=(E-A)^{-1}$ дозволяє досліджувати зміни валового продукту залежно від кінцевого попиту, тому її називають ***матричним мультиплікатором***.



Розглянемо приклад побудови міжгалузевого балансу.

Нехай задана матриця прямих витрат $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}5\\ 0{,}3 & 0{,}2\end{pmatrix}$ і вектор $Y=\begin{pmatrix}400\\ 500\end{pmatrix}$, що описує кінцеву продукцію на плановий період (потреби). Знайдемо планові обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки та чисту продукцію галузей.

Визначимо матрицю $E-A$:

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,1 & 0,5\\ 0,3 & 0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,9 & -0,5\\ -0,3 & 0,8\end{pmatrix},$$

для якої

$$\Delta=\left|E-A\right|=0,9\cdot 0,8-0,3\cdot 0,5=0,57.$$

Оскільки матриця $E-A$ є невиродженою, визначаємо обернену до неї. Отже, маємо матрицю повних витрат:

$$S=\left(E-A\right)^{-1}=\frac{1}{0,57}\begin{pmatrix}0,8 & 0,5\\ 0,3 & 0,9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,404 & 0,877\\ 0,526 & 1,579\end{pmatrix}.$$

За формулою (3.21) обчислюємо вектор X валової продукції:

$$X=\begin{pmatrix}1,404 & 0,877\\ 0,526 & 1,579\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}400\\ 500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1000\\ 1000\end{pmatrix}.$$

З формули (3.18) видно, що $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$. Отже, за цією формулою можна знайти міжгалузеві поставки x_{ij}:

$$\begin{pmatrix}0,1\cdot 1000 & 0,5\cdot 1000\\ 0,3\cdot 1000 & 0,2\cdot 1000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100 & 500\\ 300 & 200\end{pmatrix}.$$

Чиста продукція є різницею між валовою продукцією галузі і витратами усіх галузей на виробництво цієї галузі. Одержані результати можна записати в таблицю міжгалузевого балансу (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

Таблиця міжгалузевого балансу

Галузі	I	II	Кінцевий продукт	Валовий продукт
I	100	500	400	1000
II	300	200	500	1000
Чиста продукція	600	300		
Валова продукція	1000	1000		

Зауваження. Однією із вимог, що висуваються в аналізі балансових рівнянь, є ***продуктивність матриці міжгалузевого балансу***. Вона пов’язана з

тим, що для отримання плану виробництва, згідно з яким кожна галузь виробляє певну кількість кінцевого продукту, системи балансових рівнянь (3.19) повинна мати невід'ємний розв'язок. Матриця прямих витрат $A=(a_{ij})_{m\times n}$, всі елементи якої є невід'ємними, називається ***продуктивною***, якщо для довільної матриці кінцевого попиту Y з невід'ємними елементами існує хоча б один розв'язок системи (3.20), тобто матриця валового випуску X всіх видів продукції, усі елементи якої є додатними. У такому випадку і модель Леонтьєва називається ***продуктивною***. Замість терміна «продуктивна матриця міжгалузевого балансу» використовують терміни «продуктивна економіка», «продуктивна економічна модель».



Ключові терміни

Ранг матриці; мінор; алгебраїчне доповнення; базисний мінор; елементарні перетворення матриць; еквівалентні матриці; теорема Кронекера – Капеллі; визначена та невизначена системи рівнянь; сумісна та несумісна системи рівнянь; загальний та частинний розв'язки; базисні та вільні змінні; базисний розв'язок; опорний розв'язок; метод Гаусса; метод Жордана – Гаусса; однорідна система рівнянь; тривіальний розв'язок; модель міжгалузевого балансу «витрати-випуск», або модель Леонтьєва; продуктивна матриця прямих витрат; продуктивна економічна модель.



Запитання для самоперевірки

1. Запишіть систему m лінійних рівнянь з n невідомими у стислій формі з використанням знака $\sum$ та у матричній формі.
2. Дайте означення рангу матриці.
3. Який мінор називається базисним?
4. Скільки може існувати базисних мінорів?
5. Які невідомі вважаються базисними, а які – вільними?
6. Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі.
7. Яку систему рівнянь називають сумісною (несумісною)?
8. Яку систему рівнянь називають визначеною (невизначеною)?

9. Який розв’язок невизначеної системи називають: а) загальним; б) частинним; в) базисним; г) опорним?

10. Якщо система сумісна, але невизначена, то скільки існує загальних розв’язків цієї системи і як їх визначити?

11. У чому полягає метод Гаусса?

12. Яка різниця між прямим і зворотним ходом методу Гаусса?

13. У чому полягає метод Жордана – Гаусса?

14. Яка різниця між методом Гаусса і методом Жордана – Гаусса?

15. Як за методом Жордана – Гаусса визначити обернену матрицю?

16. Яка система лінійних рівнянь називається однорідною?

17. Що таке тривіальний розв’язок однорідної системи рівнянь?

18. Що описує модель міжгалузевого балансу?

19. Що визначає матричний мультиплікатор?

20. Яка матриця називається продуктивною?

Глава 4. Лінійні (векторні) n-вимірні простори

4.1. Лінійні n-вимірні простори ($\mathbf{R}^n$): основні означення

Сукупність n дійсних чисел a_i, $i=\overline{1,n}$, упорядкованих за номером i, називається ***n-вимірним вектором***, а числа a_1, a_2, …, a_n – його ***координатами***. Узагалі n-вимірні вектори позначають маленькою літерою латинського алфавіту зі значком вектора зверху, або виділяють її жирним шрифтом, а координати вектора записують у круглих дужках у стовпець або в рядок:

$$\bar{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b}=\left(b_1,\ b_2,...,\ b_n\right). \tag{4.1}$$

Кількість координат вектора визначає його вимір, а множина усіх векторів утворює ***n-вимірний векторний простір***.

Згідно зі сказаним, n-вимірний вектор можна розглядати як окремий випадок матриць спеціального вигляду, а саме матрицю-стовпець розміру $n\times 1$ або матрицю-рядок розміру $1\times n$ і, навпаки, відповідні матриці можна розглядати як вектори. Отже, для n-вимірних векторів можна ввести ті самі означення і виконувати ті самі дії, що і над матрицями.

Розглянемо ***дії над векторами.***

1. Нульовим, або **нуль-вектором**, за аналогією з нульовою матрицею називається n-вимірний вектор, усі координати якого дорівнюють нулю, він позначається $\bar{0}$:

$$\bar{0}=\left(0,\ 0,\ ...,\ 0\right).$$

Зрозуміло, що існує тільки один нульовий вектор певної вимірності.

2. Два вектори $\bar{a}=(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$ і $\bar{b}=\left(b_1,\ b_2,...,\ b_n\right)$ однієї вимірності називаються ***рівними,*** якщо рівними є їх координати з однаковими індексами:

$$\bar{a}=\bar{b} \Leftrightarrow (a_i=b_i \quad \forall i=\overline{1,n}). \tag{4.2}$$

3. Одиничним n-вимірним вектором називається вектор, одна з координат якого дорівнює одиниці, а всі інші – нулю. Отже, існує n різних n-вимірних одиничних векторів. Як і одинична матриця, вони позначаються маленькою літерою $\bar{e}$ з індексом, де індекс вказує номер координати, що дорівнює одиниці:

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0); \quad \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0); \quad \ldots; \quad \bar{e}_n = (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1). \quad (4.3)$$

У тривимірному просторі ці вектори називаються одиничними ортами і мають власні позначення:

$$\bar{i} = (1,\ 0,\ 0); \quad \bar{j} = (0,\ 1,\ 0); \quad \bar{k} = (0,\ 0,\ 1).$$

Над n-вимірними векторами можна виконувати ті ж самі ***лінійні операції*** додавання і множення на число, як і над матрицями.

4. Сумою n-вимірних векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ та $\bar{b} = (b_1,\ b_2, ...,\ b_n)$ називається вектор $\bar{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$, що має ту ж саму вимірність, якщо кожна його координата визначається як сума координат векторів-доданків, що мають однакові індекси:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad (c_i = a_i + b_i \quad \forall i = \overline{1,\ n}). \quad (4.4)$$

Отже, $\bar{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$. Нагадаємо, що додавати можна тільки матриці однакового розміру. Відповідно, сума векторів існує тільки в тому разі, коли вектори-доданки мають однакову вимірність.

Наслідок. Для будь-якого вектора $\bar{a}$ маємо: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.

5. Добутком вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ **на скаляр** $\lambda \in R$ є вектор $\bar{c} = \lambda \cdot \bar{a}$, кожна координата якого визначається як добуток координати вектора **a**, що має той самий індекс, на цей скаляр:

$$\bar{c} = \lambda \cdot \bar{a} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{c} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n). \quad (4.5)$$

Наслідок. Для будь-яких вектора $\bar{a}$ і скаляра λ маємо: $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Вектори $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ називаються ***протилежними*** один одному, якщо їх координати, що мають однакові індекси, відрізняються множником -1, тобто

$$\bar{b} = -\bar{a} \quad \Leftrightarrow \quad (b_i = -a_i \ \ \forall i = \overline{1,\ n}).$$

Зрозуміло, що сумою протилежних векторів є нульовий вектор тієї ж вимірності.

6. Різницю векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ визначають як вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$, який є сумою вектора $\bar{a}$ і вектора $-\bar{b}$, тобто вектора, протилежного до вектора $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$:

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad (c_i = a_i + (-b_i) \quad \forall i = \overline{1,\ n}).$$

За умови, що $\lambda \neq 0$, при виконанні рівності $\bar{c} = \lambda \cdot \bar{a}$ вектори **a** і **c** називаються ***колінеарними***. Згідно з означенням координати колінеарних векторів, що мають однакові індекси, є пропорційними:

$$\frac{c_i}{a_i} = \lambda, \text{ де } \lambda \in R \setminus \{0\}, \quad \text{або} \quad c_i = \lambda \cdot a_i \quad \forall i = \overline{1,\ n}. \qquad (4.6)$$

Якщо $n \leq 3$, то геометрично це означає, що вектори лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

У частинному випадку, коли $\lambda = 1$, отримуємо рівні вектори.

Результатом виконання лінійних операцій над *n*-вимірними векторами є вектори тієї ж самої вимірності, що і вихідні вектори. Як і дії над матрицями, лінійни операції над векторами підпорядковуються ***асоціативному*** (сполучному), ***комутативному*** (переставному) та ***дистрибутивному*** (розподільному) законам.

Отже, дії над векторами мають такі ***властивості***:

1. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \bar{a} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{a}$.
2. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.
3. $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$.
4. $\lambda_1 \lambda_2 \cdot \bar{a} = \lambda_1 (\lambda_2 \bar{a}) = \lambda_2 (\lambda_1 \bar{a}) = (\lambda_1 \lambda_2) \cdot \bar{a}$. (4.7)
5. $\lambda \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \cdot \bar{a} + \lambda \cdot \bar{b}$,

де $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – n-вимірні вектори; λ_1, λ_2 – деякі числа.

Сукупність усіх n - вимірних векторів з дійсними координатами, для яких визначені лінійні операції (4.4) – (4.7), називається ***n-вимірним лінійним векторним простором*** і позначається R^n.

7. Скалярний добуток двох векторів. Аналогічно тому, як розглядався добуток матриць, можна ввести поняття ***скалярного добутку векторів*** *n*-вимірного лінійного простору. Нагадаємо, що умовою існування добутку матриць є рівність кількості стовпців першої матриці і кількості рядків другої матриці. Ця вимога виконується, якщо розглядати добуток вектора-рядка $\bar{a}$ на вектор-стовпець $\bar{b}$, які належать простору однієї вимірності. Такий добуток векторів, який визначається як сума добутків їх координат, що мають однакові індекси, називають ***скалярним добутком*** і позначають у круглих дужках або крапкою між векторами: $\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = \bar{a} \cdot \bar{b}$ Отже, скалярним добутком двох векторів є число (скаляр):

$$\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n . \tag{4.8}$$

Застосовуючи поняття скалярного добутку, можна дати означення ***довжини,*** або ***модуля*** *n*-вимірного вектора $\bar{a}$ як числа $|\bar{a}|$, що визначається рівністю:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})},$$

тобто

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2}. \tag{4.9}$$

Скалярний добуток можна розглядати як спільну числову характеристику двох векторів. За його допомогою можна дати означення кута φ між двома векторами φ, що визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} . \tag{4.10}$$

Укажемо такі ***властивості скалярного добутку:***

1. $\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = \left(\bar{b}, \bar{a}\right)$.

2. $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot c=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$.

3. $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$. (4.11)

4. $.\left(\lambda\bar{a},\bar{b}\right)=\left(\bar{a},\lambda\bar{b}\right)=\lambda\left(\bar{a},\bar{b}\right)$.

5. $\left(\lambda\bar{a}+\mu\bar{b},\bar{c}\right)=\lambda(\bar{a},\bar{c})+\mu(\bar{b},\bar{c})$, де $\lambda\in R$, $\mu\in R$.

Лінійний простір, для якого визначений скалярний добуток векторів, що має властивості (4.11), називається ***евклідовим простором.***

У теорії лінійних просторів будь-яку множину векторів однакової вимірності прийнято називати ***системою векторів***.

Нехай маємо систему, що складається з n векторів, які належать простору $\mathbf{R^m}$. Із (4.7) випливає, що систему з n векторів, що мають вимірність m, можна розглядати як матрицю розміром $m\times n$, стовпцями якої є m-вимірні вектори, і навпаки:

$$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\quad ...,\quad\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n}\\a_{21}\ a_{22}\ ...\ a_{2n}\\\vdots\quad\vdots\quad\quad\vdots\\a_{m1}\ a_{m2}\ ...\ a_{mn}\end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

За допомогою цієї системи векторів система лінійних алгебраїчних рівнянь, що складається з m рівнянь відносно n невідомих, можна подати у такому вигляді:

$$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}\cdot x_1+\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}\cdot x_2+...+\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}\cdot x_n=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Таким чином, будь-яку систему лінійних рівнянь можна записати як векторну рівність

$$x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2+\ldots+x_n\bar{a}_n=\bar{b}\ .$$

Формула (4.13) є розгорнутим записом співвідношення (1.8), що застосовувалося як одна з форм запису системи лінійних рівнянь.

Справді, якщо за правилами додавання векторів та множення на скаляр помножити кожний вектор $\bar{a}_j$ покоординатно на x_j ($j=\overline{1,n}$), а потім записати суму результатів і прирівняти координати отриманих векторів у лівій і правій частинах, то прийдемо, як сказано вище, до системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $m\times n$. Розв'язком такої системи буде n-вимірний вектор $\bar{X}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$.

Якщо за принципом (4.12) розглянути систему з n одиничних векторів n-вимірного простору, отримаємо одиничну матрицю n-го порядку.

Зауваження. На основі теорії n-вимірних лінійних просторів можна побудувати всю теорію матриць, зокрема матричну алгебру, теорію систем лінійних алгебраїчних рівнянь тощо. Тому ***лінійною алгеброю*** вважають розділ математики, об'єктом вивчення якого є лінійні (векторні) простори, а предметом – розробка відповідних алгебраїчних методів для встановлення властивостей просторів у цілому та їх елементів зокрема.

4.2. Лінійна залежність і незалежність системи векторів

Нехай є система векторів $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_n$, які належать простору певної вимірності $\mathbf{R}^n$, та дійсні числа (скаляри) k_j, $j=\overline{1,n}$. Тоді n-вимірний вектор $\bar{b}=(b_1,\ b_2,...,\ b_n)^T$, тобто вектор того ж самого простору $\mathbf{R}^n$, називають ***лінійною комбінацією*** векторів системи, якщо його можна подати у вигляді суми добутків чисел k_j на вектори $\bar{a}_j$:

$$\bar{b}=k_1\overline{a_1}+k_2\overline{a_2}+...+k_n\overline{a_n}=\sum_{j=1}^{n}k_j\overline{a_j}. \qquad (4.14)$$

Система векторів називається ***лінійно залежною***, якщо хоча б один з її векторів є лінійною комбінацією інших. У протилежному випадку, коли в системі векторів немає жодного вектора, який би був лінійною комбінацією інших векторів системи, система векторів називається ***лінійно незалежною***.

Теорема 4.1 (***про лінійну залежність системи векторів***). Якщо серед чисел k_j, $j=\overline{1,n}$, не всі дорівнюють нулю, і є правильною рівність

$$k_1\overline{a_1}+k_2\overline{a_2}+\ldots+k_n\overline{a_n}=\overline{0}\quad\text{або}\quad\sum_{j=1}^{n}k_j\overline{a_j}=\overline{0}, \qquad (4.15)$$

то система векторів $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_n$ є лінійно залежною.

Доведення. Нехай у рівності (4.15) серед чисел k_j, $j=\overline{1,n}$, існують числа, відмінні від нуля. Виберемо одне з них, неважливо яке саме. Нехай цим числом буде число k_1. Помножимо ліву і праву частини рівності (4.15) на $\frac{1}{k_1}\neq 0$, маємо:

$$\frac{1}{k_1}\left(k_1\overline{a_1}+k_2\overline{a_2}+\ldots+k_n\overline{a_n}\right)=\frac{1}{k_1}\overline{0}\Rightarrow\overline{a_1}+\frac{k_2}{k_1}\overline{a_2}+\ldots+\frac{k_n}{k_1}\overline{a_n}=\overline{0}.$$

Звідси отримуємо:

$$\overline{a_1}=-\frac{k_2}{k_1}\overline{a_2}-\ldots-\frac{k_n}{k_1}\overline{a_n},$$

а згідно з (4.9) це значить, що система векторів $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_n$ є лінійно залежною, оскільки вектор $\overline{a_1}$ є лінійною комбінацією інших векторів системи.

Наслідок з теореми 4.1 (***про лінійну незалежність системи векторів***). Система векторів є лінійно незалежною, якщо векторна рівність $\sum\limits_{j=1}^{n}k_j\overline{a_j}=\overline{0}$ виконується тільки у випадку $k_j=0\ \ \forall j=\overline{1,\ n}$ (усі числа дорівнюють нулю).

Доведення. Припустимо, що існують $k_j\neq 0$, де $j\in\{\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,n\ \}$, тоді з теореми 4.1 дістанемо лінійну залежність системи векторів, що суперечить умові.

Повернемося ще раз до рівності (4.15) і запишемо її в координатній формі:

$$k_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\ldots\\a_{m1}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\ldots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\ldots+k_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\ldots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}$$

або у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\ldots+a_{1n}k_n=0;\\a_{21}k_1+a_{22}k_2+\ldots+a_{2n}k_n=0;\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}k_1+a_{m2}k_2+\ldots+a_{mn}k_n=0.\end{cases}\qquad(4.16)$$

Система векторів є незалежною, якщо система однорідних рівнянь (4.16) матиме тільки тривіальний розв'язок: $k_j = 0 \quad \forall j = \overline{1,\ n}$. Отже, задача про дослідження системи векторів на лінійну незалежність перетворюється у задачу дослідження умов, за яких система однорідних лінійних рівнянь матиме єдиний (а тому нульовий) розв'язок. У випадку $n = r$ вже відомо (див. гл. 3), що для цього необхідно і достатньо, щоб визначник основної матриці системи, яка складається з координат векторів системи, не дорівнював нулю.



Розглянемо питання про лінійну залежність векторів, заданих своїми координатами:

$$\overline{a_1} = (1, 2, 3)^T\ a; \quad \overline{a_2} = (4, 5, 6)^T; \quad \overline{a_3} = (7, 8, 9)^T.$$

За системою рівнянь (4.16) запишемо матрицю, що складається з координат векторів системи, і обчислимо її визначник:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0.$$

Отже, однорідна система лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів k_j ($j = 1,2,3$) має безліч розв'язків.

Перетворення основної матриці системи за методом Жордана $-$Гаусса дозволяє визначити кількість лінійно незалежних векторів у цій системі:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці системи $r_A = 2 < 3$ менше кількості векторів, отже, система містить лише два лінійно незалежних вектори. Маємо:

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0, \\ k_2 + 2k_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_3, \\ k_2 = -2k_3. \end{cases}$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти у векторну рівність (4.15), дістанемо

$$k_3\overline{a_1} - 2k_3\overline{a_2} + k_3\overline{a_3} = \overline{0}.$$

Таким чином, вектори $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ та $\overline{a_3}$ є лінійно залежними і будь-який з них можна представити як лінійну комбінацію двох інших. Наприклад, якщо в останній рівності $k_3 \neq 0$, визначаємо вектор $\overline{a_1}$ як лінійну комбінацію векторів $\overline{a_2}$ та $\overline{a_3}$:

$$\overline{a_1} = 2\overline{a_2} - \overline{a_3}.$$

Розглянемо питання про найбільшу кількість векторів, яку може містити лінійно незалежна система n-вимірних векторів, тобто векторів лінійного простору $\mathbf{R}^n$. Нагадаємо, що координати кожного вектора можна розглядами як елементи стовпців основної матриці системи лінійних рівнянь. Звідси випливає, що кількість рівнянь визначається вимірністю простору – це кількість рядків основної матриці системи, а кількість векторів системи – це кількість стовпців цієї матриці. Нагадаємо, що питання про лінійну незалежність векторів передбачає розгляд системи однорідних рівнянь. Будемо виходити з порівняння кількості векторів системи (довільного скінченого числа) з вимірністю простору (фіксованого числа), враховуючи їх зв'язок з рангом матриці.

1^0. Якщо кількість векторів більша за вимірність простору, то маємо прямокутну основну матрицю системи однорідних рівнянь, кількість рядків якої (вимірність простору) менша за кількість стовпців (кількість векторів системи). Ранг цієї матриці не може перевищувати кількість рядків, отже, така система векторів завжди лінійно залежна.

2^0. Якщо кількість векторів дорівнює вимірності простору, то такій системі відповідає основна квадратна матриця, порядок якої відповідає вимірності простору. Система векторів буде лінійно незалежною, якщо визначник системи рівнянь відмінний від нуля ($\Delta \neq 0$).

Звідси випливає, що лінійно незалежна система векторів простору $\mathbf{R}^n$ може містити щонайбільше n векторів, тобто найбільша кількість ***лінійно незалежних*** векторів дорівнює ***вимірності*** лінійного простору.

4.3. Базис *n*-вимірного простору. Розкладання вектора за базисом

Поняття «базис» (від грецьк. basis – основа) є одним із фундаментальних понять теорії векторних просторів. Будь-яка система n ***лінійно незалежних*** n-вимірних векторів $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_n$ називається ***базисом*** лінійного простору $\mathbf{R}^n$. Таким чином, базис може утворювати будь-яка система лінійно незалежних n-вимірних векторів, кількість яких дорівнює вимірності простору. Відповідно, визначник, що складається з координат векторів базису, є відмінним від нуля. Ця сукупність векторів містить найбільшу кількість лінійно незалежних векторів, що може існувати у цьому просторі, і будь-який інший вектор є лінійною комбінацією базисних векторів.

Теорема 4.2 (***про розкладання*** n***-вимірного вектора за базисом***). Довільний вектор $\bar{b}=\left(b_1,\ b_2,...,b_n\right)^T$ із $\mathbf{R}^n$ можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів базису $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_n$ і до того ж єдиним способом.

Доведення. Представимо вектор $\bar{b}=\left(b_1,\ b_2,...,b_n\right)^T$ єдиним способом у вигляді лінійної комбінації векторів базису, тобто доведемо існування єдиного набору чисел $k_j,\ j=\overline{1,n}$, для якого виконується рівність

$$\bar{b}=k_1\overline{a_1}+k_2\overline{a_2}+\ldots+k_n\overline{a_n}\ \text{ або }\ \sum_{j=1}^{n}k_j\overline{a_j}=\bar{b}. \qquad (4.17)$$

Цю рівність можна подати в координатній формі:

$$k_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}+\ldots+k_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},$$

або представити як систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\ldots+a_{1n}k_n=b_1;\\a_{21}k_1+a_{22}k_2+\ldots+a_{2n}k_n=b_2;\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\ldots+a_{nn}k_n=b_n.\end{cases}$$

Оскільки визначник основної матриці цієї системи відмінний від нуля (за умовою вектори $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_n$ утворюють базис простору), то система лінійних рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок, яким є набір чисел $(k_1,\ k_2,\ ...,\ k_n)$.

Подання вектора $\bar{b}$ у вигляді лінійної комбінації векторів базису (4.17) називається ***розкладанням вектора за базисом,*** а числа $k_j,\ j=\overline{1,\ n}$, – ***коефіцієнтами розкладання***, або ***координатами*** вектора $\bar{b}$ за цим базисом.

Система n-вимірних одиничних векторів $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ldots,\ \bar{e}_n$ називається ***одиничним базисом*** $\mathbf{R}^n$. Одиничний базис є частинним випадком так званих ***ортогональних базисів***, тобто таких базисів, що скалярний добуток довільних двох векторів із базису дорівнює нулю: $\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j = 0\ \ \forall\ \ i \neq j$. Оскільки одиничні вектори за довжиною дорівнюють одиниці, тобто нормовані, тому базис, утворений цими векторами, є ***ортонормованим***.

Запис n-вимірного вектора у вигляді $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)^T$, тобто подання його у координатній формі, можна вважати розкладанням цього вектора за ортонормованим базисом.



Визначення базису простору і розкладання вектора за цим базисом можна розглядати в межах однієї задачі.

Нагадаємо, що аналогічне твердження було сформульовано відносно можливості застосування методів Гаусса та Жордана – Гаусса до дослідження сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь та її розв'язування.



Перевірити, чи утворюють базис вектори $\overline{a_1} = (1; 3; 2)^T$, $\overline{a_2} = (1; -1; 3)^T$, $\overline{a_3} = (2; 0; 1)^T$, і, у випадку позитивної відповіді, здійснити розкладання вектора $\bar{b} = (5; 13; 6)^T$ за цим базисом.

Зауважимо, що всі чотири вектори належать простору $\mathbf{R}^3$.

Для розв'язання задачі подамо вектор $\bar{b}$ як лінійну комбінацію векторів $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2$ та $\overline{a_3}$, тобто утворимо векторну рівність

$$\bar{b} = x_1\overline{a_1} + x_2\overline{a_2} + x_3\overline{a_3},$$

де x_1, x_2, x_3 позначимо невідомі координати вектора $\bar{b}$ за базисом $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ (якщо ці вектори справді утворюють базис простору).

У координатній формі маємо систему рівнянь відносно невідомих координат вектора $\bar{b}$:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 13 = 3x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 \\ 6 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{cases}.$$

Перевірку на лінійну незалежність векторів $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ та $\bar{a}_3$ та відшукання координат вектора $\bar{b}$ за базисом $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ можна проводити одночасно. Для цього запишемо розширену матрицю системи і проведемо її перетворення за методом Жордана – Гаусса:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 13 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ \textcircled{0} & 1 & -3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & \textcircled{0} & 18 & 18 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Оскільки елементарними перетворюваннями на місці основної матриці системи одержано одиничну матрицю третього порядку, то визначник початкової матриці відмінний від нуля, і система векторів $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ є лінійно незалежною, тобто вона утворює базис простору $\mathbf{R}^3$. Вектор $\bar{b}$ можна розкласти за цим базисом єдиним способом

$$\bar{b} = 4\bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3.$$

Отже, координатами вектора $\bar{b}$ в базисі $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ будуть $\bar{b} = (4, -1, 1)^T$.

Згідно з теоремою 4.2 вектор $\bar{b}$ можна розкласти за будь-яким базисом простору. Наприклад, в одиничному базисі він має вигляд $\bar{b} = (5;\ 13;\ 6)^T$, тобто

$$\bar{b} = 5\bar{i} + 13\bar{j} + 6\bar{k}.$$

4.3.1. Відшукання базисних розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Довільний вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$ із $\mathbf{R}^n$ можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \text{K}, \bar{e}_n$:

$$\bar{b} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + \ldots + b_n\bar{e}_n,$$

де b_j $(j = \overline{1,n})$ – координати вектора $\bar{b}$ у даному базисі.

З'ясуємо, як можна здійснити перехід від одного базису лінійного простору до іншого, тобто відшукати координати вектора $\bar{b}$ у новому базисі за відомими координатами даного вектора у початковому базисі.

Нехай в просторі $\mathbf{R}^n$ маємо два базиси: початковий $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ і новий $\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \ldots, \bar{e}_n^*$. Кожен з векторів нового базиса можна подати як лінійну комбінацію векторів початкового базиса:

$$\begin{cases} \bar{e}_1^* = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + ... + a_{1n}\bar{e}_n; \\ \bar{e}_2^* = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + ... + a_{2n}\bar{e}_n; \\ ..... \\ \bar{e}_n^* = a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + ... + a_n\bar{e}_n. \end{cases} \qquad (4.18)$$

Одержану систему можна записати в матричному вигляді: $\bar{E}^* = A \cdot \bar{E}$,

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \bar{E}^* = \begin{pmatrix} \bar{e}_1^* \\ \bar{e}_2^* \\ \text{M} \\ \bar{e}_n^* \end{pmatrix} \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \text{M} \\ \bar{e}_n \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається матрицею переходу від початкового базису до нового. Перехід від нового базису до початкового здійснюється за формулою: $\bar{E} = A^{-1} \cdot \bar{E}^*$. Можна показати, що залежність між координатами вектора в різних базисах визначається формулою: $\bar{b} = A^T \cdot \bar{b}^*$, $\bar{b}^* = (A^T)^{-1} \cdot \bar{b}$, де

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \bar{b}^* = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{pmatrix}$$

координати вектора $\bar{b}$ відповідно у початковому і новому базисах.

Питання розкладання вектора за базисом і відшукання його координат у новому базисі широко використовується при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь, а саме при відшуканні її базисних розв'язків. Нагадаємо, що базисним розв'язком системи рівнянь називається такий її частинний розв'язок, в якому вільні невідомі дорівнюють нулю. Невід'ємний базисний розв'язок називається опорним. Відмітимо, що саме множина невід'ємних базисних розв'язків системи лінійних рівнянь є такою множиною, на якій знаходяться оптимальні плани в задачах лінійного програмування, які є предметом математичних методів в економіці.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у векторній формі

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_n\bar{a}_n = \bar{b}\ , \qquad (4.19)$$

де коєфіцієнтами системи є вектори $\bar{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})^T$ $(j = \overline{1,n})$, які утворюють матрицю системи, вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$ – стовпець вільних членів, x_j – невідомі системи, або коефіцієнти в розкладанні вектора $\bar{b}$ за векторами $\bar{a}_j$. Тоді рівність (4.19) по суті є поданням вектора $\bar{b}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\bar{a}_j$.

Система лінійних рівнянь називається приведеною до одиничного базису, якщо серед векторів $\bar{a}_j$ є одиничний базис. Система рівнянь має єдиний розв'язок тільки у випадку, якщо кількість невідомих системи збігається з вимірністю векторів $\bar{a}_j$ і усі вектори системи утворюють базис. У загальному випадку, число векторів системи, що утворюють базис, менше за число векторів системи і розкладання вектора $\bar{b}$ за векторами $\bar{a}_j$ не є єдиним, а система лінійних рівнянь має безліч розв'язків. Серед нескінченної множини розв'язків системи базисними вважаються невідомі, вектори коефіцієнтів, яких утворюють базис, інші невідомі вважаються вільними. При знаходженні базисних розв'язків системи вільним невідомим системи надають нульові

значення. Число базисних розв'язків системи збігається з числом базисних векторів у системі векторів $\bar{a}_j$, а значення базисних невідомих дорівнюють відповідним коефіцієнтам у роз-кладанні вектора $\bar{b}$ за базисом.

Таким чином, для відшукання усіх базисних розв'язків системи можна запропонувати такий алгоритм:

1) систему лінійних рівнянь елементарними перетворюваннями приводимо до одиничного базису;

2) знаходимо значення невідомих, що відповідають даному базису, тобто координати вектора $\bar{b}$ у цьому базисі, вільні невідомі покладаємо рівними нулю;

3) виконуємо перетворення системи рівнянь з метою послідовного введення в базис інших векторів системи, тобто замінюємо базис. Тоді координати вектора $\bar{b}$ дорівнюють відповідним невідомим системи лінійних рівнянь у новому базисному розв'язку і т. д.

Зауважимо, що максимальна кількість базисних розв'язків дорівнює числу сполучень із n векторів системи по m – числу векторів системи, що можуть утворювати базис.

Розглянемо реалізацію наведеного алгоритму на прикладі.



Знайдемо всі базисні розв'язки системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}.$$

У векторній формі система рівнянь має вигляд

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 + x_4\bar{a}_4 = \bar{b}\,.$$

Отже, маємо систему векторів $\overline{a_1} = (1;4)^T$, $\overline{a_2} = (2;1)^T$, $\overline{a_3} = (-1;3)^T$, $\overline{a_4} = (3;-2)^T$ у двовимірному просторі, серед яких визначимо всі можливі базиси і виконаємо розкладання вектора $\bar{b} = (5;6)$ за кожним з цих базисів.

Приводимо систему лінійних рівнянь до одиничного базису. Запишемо матрицю коєфіцієнтів системи в табл. 4.1 і проведемо елементарні перетворення цієї системи за методом Жордана – Гаусса.

Таблиця 4.1

Зведення системи рівнянь до одиничного базису

N п/п	$\overline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_3}$	$\overline{a_4}$	$\overline{b}$	Контрольні суми	Примітки
I	1	2	-1	3	5	10	вихідні
II	4	1	3	-2	6	12	рівняння
III	1	2	-1	3	5	10	(I)
IV	0	-7	7	-14	-14	-28	(I) (-4)+II
V	1	0	1	-1	1	2	(VI)(-2)+ III
VI	0	1	-1	2	2	4	(IV):(-7)

За результатами останньої ітерації отримано одиничну матрицю. Отже, вектори $\overline{a_1}$ та $\overline{a_2}$ утворюють базис простору. Координати вектора $\overline{b}$ у цьому базисі $x_1 = 1, x_2 = 2$. Для відшукання базисного розв'язку системи покладемо $x_3 = x_4 = 0$, тоді базисним розв'язком системи буде $\overline{X} = (1,2,0,0)$.

Кількість базисів для даного прикладу визначається кількістю сполучень по два вектори з чотирьох, тобто дорівнює шести. Перетворення системи за схемою Жордана – Гаусса для відшукання інших базисних розв'язків системи проведені в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Знаходження базисних розв'язків

N п/п	$\overline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_3}$	$\overline{a_4}$	$\overline{b}$	Контрольні суми	Базисні розв'язки
1	1	0	1	-1	1	2	$\overline{X}_1$ = (1; 2; 0; 0)
	0	1	-1	2	2	4	
2	1	0	1	-1	1	2	$\overline{X}_2$ = (0; 3; 1; 0)
	1	1	0	1	3	6	
3	1	1	0	1	3	6	$\overline{X}_3$ = (0; 0; 4; 3)
	2	1	1	0	4	8	
4	1	1	0	1	3	6	$\overline{X}_4$ = (3; 0; -2; 0)
	0	-1	1	-2	-2	-4	
5	0	0,5	-0,5	1	1	2	$\overline{X}_5$ =(2; 0; 0; 1)
	1	0,5	0,5	0	2	4	
6	2	1	1	0	4	8	$\overline{X}_6$ =(0; 4; 0; -1)
	-1	0	-1	1	-1	-2	

У табл. 4.2 першим з базисних розв'язків системи наведено саме той розв'язок, який ми отримали в табл. 4.1.

Зауважимо, що серед шести базисних розв'язків даної системи лінійних рівнянь тільки $\bar{X}_4$ і $\bar{X}_6$ мають серед своїх координат від'ємні, тобто ці розв'язки не є опорними. Знаходження тільки опорних розв'язків системи можна здійснювати за спеціальним алгоритмом. При цьому немає необхідності вводити в базис вектори, які в новому базисі перетворюють вектор $\bar{b}$ на такий, що має від'ємні координати.

4.3.2. Однорідна система рівнянь. Особливості розв'язку

Розглянемо векторний підхід до знаходження загального розв'язку систем лінійних однорідних рівнянь. Нагадаємо деякі означення, що відомі із гл. 3.

Система лінійних рівнянь називається **однорідною**, якщо вона має вигляд:

$$AX = O, \tag{4.20}$$

де $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ – основна матриця системи;

$X = \left(x_j\right)_{n\times 1}$ – матриця-стовпець невідомих;

$O = (0)_{m\times 1}$ – нульова матриця-стовпець.

Властивості однорідної системи рівнянь:

1^0. Однорідна система рівнянь завжди сумісна.

Так, легко бачити, що $X = 0$ є розв'язком системи (4.20).

2^0. Якщо X є розв'язком однорідної системи, то kX, де $k = const$, також є розв'язком цієї системи.

Справді, якщо $AX = O$, то $A\left(kX\right) = kAX = O$.

3^0. Якщо X_1 та X_2 є розв'язками системи (4.20), то їхня лінійна комбінація $k_1X_1 + k_2X_2$ також є розв'язком однорідної системи.

Справді,

$$A\left(k_1X_1 + k_2X_2\right) = A\left(k_1X_1\right) + A\left(k_2X_2\right) = k_1AX_1 + k_2AX_2 = O.$$

Фундаментальною системою розв'язків однорідної системи рівнянь (4.20) називається така лінійно незалежна система векторів $\bar{X}_i$, де $i = \overline{1, n-r}$, що

усі їхні лінійні комбінації визначають всю нескінченну множину розв'язків системи (r – ранг матриці системи).

Із загальних властивостей системи лінійних алгебраїчних рівнянь маємо таке твердження.

Теорема 4.3. Якщо ранг матриці A дорівнює r $(r < n)$, то однорідна система рівнянь $AX = O$ може бути зведена елементарними перетвореннями до вигляду:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_n), \\ x_2 &= f_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= f_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_n), \end{aligned} \tag{4.21}$$

де $f_1, f_2, \ldots, f_r$ – деякі лінійні функції.

З властивостей однорідної системи рівнянь випливає, що будь-яка лінійна комбінація розв'язків системи також є розв'язком цієї системи. Звідси виникає природне бажання знайти лінійно-незалежні розв'язки однорідної системи рівнянь, лінійна комбінація яких визначає будь-який інший її розв'язок.

Будемо розглядати матрицю $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ як сукупність m-вимірних векторів $\bar{A}_j$ $(j = \overline{1,n})$, координати кожного з яких визначаються як стовпець основної матриці системи, що відповідає коефіцієнтам при невідомому з тим же індексом. Наприклад $\bar{A}_1 = (a_{11}; a_{21}; a_{31}; \ldots; a_{m1})^{\mathrm{T}}$. Тоді однорідну систему рівнянь можна записати у вигляді векторного рівняння:

$$\bar{A}_1 x_1 + \bar{A}_2 x_2 + \ldots + \bar{A}_n x_n = \bar{0}. \tag{4.22}$$

Фундаментальною системою розв'язків однорідної системи рівнянь називається така лінійно незалежна система векторів $\bar{X}_j$ $(j = \overline{1,n-r}$, r – ранг основної матриці системи), що їхні лінійні комбінації визначають усю нескінченну множину розв'язків системи.

Теорема 4.4. Однорідна система рівнянь (4.22) має фундаментальну систему розв'язків, що включає $n - r$ векторів $(r < n)$, де r – ранг системи рівнянь.

Доведення. Знайдемо загальний розв'язок (4.21) систем. Для знаходження $n-r$ лінійно незалежних розв'язків системи (4.22) надамо вільним невідомим x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n послідовно таких значень:

$$\begin{aligned} &x_{r+1}=1,\ x_{r+2}=0,\ \ldots,\ x_n=0;\\ &x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=1,\ \ldots,\ x_n=0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=0,\ \ldots,\ x_n=1. \end{aligned} \qquad (4.23)$$

Тоді базисні невідомі x_1, x_2, …, x_r одержимо з рівностей (4.21). При цьому дістанемо $n-r$ частинних розв'язків системи $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, …, $\bar{X}_{n-r}$. Доведемо, що система розв'язків $\bar{X}_j$, де $j=\overline{1,n-r}$, є фундаментальною системою. Тобто покажемо, що ця система векторів лінійно незалежна, а будь-який розв'язок системи рівнянь є лінійною комбінацією розв'язків $\bar{X}_j$.

Справді, система розв'язків $\bar{X}_j$ є лінійно незалежною, оскільки матриця, складена із координат цих векторів, включає одиничну матрицю порядку $n-r$, що задана рівностями (4.21), отже, маємо ненульовий мінор порядку $n-r$. Відповідна система рівнянь

$$k_1\bar{X}_1+k_2\bar{X}_2+\ldots+k_{n-r}\bar{X}_{n-r}=\bar{0}$$

має тільки нульовий розв'язок: $k_1=k_2=\ldots=k_{n-r}=0$.

Довільний вектор

$$\bar{X}=k_1\bar{X}_1+k_2\bar{X}_2+\ldots+k_{n-r}\bar{X}_{n-r},$$

де $k_j\in R$, $j=\overline{1,n-r}$ завжди буде розв'язком системи (4.22), як лінійна комбінація розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.

Далі покажемо, що довільний розв'язок $\bar{X}$ системи (4.22) для деяких значень $k_i\in R$, $i=\overline{1,\ n-r}$ можна подати у вигляді:

$$\bar{X}=k_1\bar{X}_1+k_2\bar{X}_2+\ldots+k_{n-r}\bar{X}_{n-r}. \qquad (4.24)$$

Справді, для цього достатньо взяти числа $k_1,k_2,\ldots,k_{n-r}$ такими, щоб вони дорівнювали тим координатам вектора $\bar{X}$, які відповідають вільним

невідомим системи рівнянь $\bar{X}_{r+1}, \bar{X}_{r+2}...., \bar{X}_n$. З формул (4.21) випливає, що такі значення однозначно визначають вектор $\bar{X}$, що й потрібно було довести.

Отже, для відшукання загального розв'язку однорідної системи рівнянь виконуємо такі дії:

1^0. Виражаємо базисні невідомі системи (4.21) через вільні.

2^0. Надаємо вільним $n-r$ невідомим системи значень, заданих у вигляді (4.21).

3^0. Підставляємо в (4.21) послідовно значення вільних невідомих (4.23), знаходячи базисні невідомі і дістаючи фундаментальну систему розв'язків

$$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_{n-r}.$$

4^0. Записуємо довільний розв'язок системи як лінійну комбінацію фундаментальних розв'язків (4.24).



Знайдемо фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases} \qquad (4.25)$$

Щоб виразити базисні невідомі системи через вільні невідомі, скористаємося методом Жордана – Гаусса. Застосувавши елементарні перетворення до основної матриці системи, отримуємо одиничну матрицю, яку утворюють елементи першого і четвертого стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 13 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 14 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1,4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, за останньою ітерацією базисними є x_1, x_4. Відповідно, невідомі x_2 та x_3 є вільними. Звідси отримаємо рівності (4.21) у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 0,4x_3; \\ x_4 = -1,4x_3 \\ x_2 \in R, \quad x_3 \in R. \end{cases}$$

Якщо вільним невідомим послідовно надати значень $x_2 = 1;\ x_3 = 0$, а потім $x_2 = 0;\ x_3 = 1$, дістанемо відповідні частинні розв'язки системи $\bar{X}_1 = (2;1;0;0)$ та $\bar{X}_2 = (-0,4;0;1;-1,4)$. Система векторів $\bar{X}_1$ та $\bar{X}_2$ і є фундаментальною.

Загальний розв'язок системи рівнянь у векторній формі знаходимо як лінійну комбінацію фундаментальних розв'язків, а саме:

$$\bar{X} = k_1\bar{X}_1 + k_2\bar{X}_2,$$

де $k_1, k_2 \in R$.

Зауваження. У векторній формі можна подати загальний розв'язок і неоднорідної системи рівнянь, що має безліч розв'язків.

Нехай система неоднорідних рівнянь

$$\bar{A}_1x_1 + \bar{A}_2x_2 + ... + \bar{A}_nx_n = \bar{B} \qquad (4.26)$$

сумісна, але ранг матриці системи $r < n$. Тоді загальний розв'язок системи (4.26) визначається формулою

$$\bar{X} = \bar{X}_0 + k_1\bar{X}_1 + k_2\bar{X}_2 + ... + k_{n-r}\bar{X}_{n-r},$$

де $X = X_0$ – довільний фіксований розв'язок неоднорідної системи (4.26), а

$$k_1\bar{X}_1 + k_2\bar{X}_2 + ... + k_{n-r}\bar{X}_{n-r}$$

– загальний розв'язок відповідної однорідної системи рівнянь (4.22).

Розглянемо наведений алгоритм на прикладі.



Знайдемо загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3; \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 6; \\ x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 21. \end{cases} \qquad (4.27)$$

У попередньому прикладі загальний розв'язок однорідної системи:

$\bar{X} = k_1\bar{X}_1 + k_2\bar{X}_2$ ($k_1, k_2 \in R$) де $\bar{X}_1 = (2;1;0;0)$, $\bar{X}_2 = (-0,4;0;1;-1,4)$.

Частинний розв'язок неоднорідної системи: $\bar{X}_0 = (-0,6;0;0;2,4)$ (у системі (4.27) покладемо $x_2 = x_3 = 0$ і знайдемо x_1 та x_4). Тоді загальним розв'язком системи (4.27) буде вектор:

$$\bar{X} = \bar{X}_0 + k_1\bar{X}_1 + k_2\bar{X}_2 (k_1, k_2 \in R),$$

де $\bar{X}_0 = (-0,6;0;0;2,4)$, $\bar{X}_1 = (2;1;0;0)$, $\bar{X}_2 = (-0,4;0;1;-1,4)$.



Ключові терміни

n-вимірний вектор; координатна форма надання вектора; нуль-вектор; одиничний вектор; лінійні операції над векторами; колінеарність векторів; лінійний (векторний) простір; скалярний добуток векторів; евклідовий простір; модуль вектора; лінійна незалежність векторів; базис простору; розкладання вектора за базисними векторами; ортогональні вектори; ортонормований базис; фундаментальна система векторів.



Запитання для самоперевірки

1. Що таке «*n*-вимірний вектор», «координати *n*-вимірного вектора»?
2. Які *n*-вимірні вектори називаються колінеарними, рівними?
3. Які операції над векторами називаються лінійними і які властивості вони мають?
4. Що таке «нуль-вектор», «протилежний вектор», «одиничний вектор»?

5. Дайте означення лінійного вимірного простору.

6. Що називають довжиною вектора, скалярним добутком векторів?

7. Що розуміють під системою n-вимірних векторів?

8. Що таке евклідовий простір?

9. Який вигляд має векторна форма запису системи лінійних алгебраїчних рівнянь $m \times n$?

10. Що розуміють під лінійною комбінацією векторів?

11. Що таке «лінійно залежна (незалежна)» система n-вимірних векторів?

12. Сформулюйте та доведіть теорему про лінійну залежність векторів і наслідок з неї.

13. Дайте означення базису $\mathbf{R}^n$.

14. Що розуміють під задачею дослідження системи векторів на лінійну незалежність? Опишіть порядок дій при її розв'язуванні.

15. Яку найбільшу кількість лінійно незалежних векторів може містити система векторів?

16. Який базис називають ортогональним?

17. Що таке ортонормований базис?

18. Наведіть і доведіть теорему про розклад вектора за базисом.

19. Опишіть процес розкладу вектора за заданим базисом.

20. Як відшукати базис серед заданої системи векторів?

21. Як здійснити перехід від одного базису до іншого?

22. Як знаходяться у векторній формі загальні розв'язки однорідної та неоднорідної систем лінійних рівнянь?

Глава 5. Власні вектори і власні числа квадратних матриць

5.1. Означення власного вектора і власного числа квадратної матриці

Ненульовий вектор ($\bar{X} \neq \bar{0}$) називають ***власним**, або **характеристичним вектором*** матриці A, якщо існує таке дійсне число ($\lambda \in \mathrm{R}$), що має місце рівність:

$$A\bar{X} = \lambda \bar{X}. \tag{5.1}$$

Якщо вказана вище рівність правильна, число λ називається ***власним***, або ***характеристичним**, **числом*** матриці A або *її* ***власним значенням,*** що відповідає власному вектору $\bar{X}$.

Згідно з означеннями власного числа і власного вектора маємо:

1) якщо $A=E$, то кожний ненульовий вектор із R^n є власним вектором матриці A, при цьому $\lambda=1$, адже за властивістю одиничної матриці маємо $E\bar{X}=\bar{X}$;

2) будь-який ненульовий n-вимірний вектор є власним вектором нульової матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$, при цьому $\lambda=0$, оскільки $A\bar{X}=\bar{0}=0\cdot\bar{X}$.

Розглянемо алгоритм обчислення власних чисел і власних векторів для заданої матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Так, спираючись на означення (5.1) і властивості операцій над матрицями, отримуємо:

$$A\bar{X}=\lambda\bar{X}\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ | за властивістю одиничної матриці | $\Rightarrow A\bar{X}=\lambda(E\bar{X})\ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ | за асоціативним законом | $\Rightarrow A\bar{X}=(\lambda E)\bar{X}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ | за властивістю дистрибутивності й означенням рівності матриць | $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \qquad (A-\lambda E)\bar{X}=\bar{0}. \tag{5.2}$$

Запишемо матричне рівняння (5.2) у розгорнутому вигляді:

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$



Таким чином, задача зводиться до розв'язання однорідної системи лінійних рівнянь порядку $n \times n$. Нас цікавлять (за означенням власного вектора) тільки ненульові вектори, тобто нетривіальні розв'язки системи, тому визначник системи (5.3) повинен дорівнювати нулю:

$$\Delta(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (5.4)$$

Розкриття визначника у співвідношенні (5.4) дає многочлен степеня n відносно $\lambda: P_n(\lambda)=\Delta(A-\lambda E)$, який називається ***характеристичним многочленом*** матриці A, а співвідношення (5.4), яке можна подати у вигляді $P_n(\lambda)=0$, визначає рівняння для відшукання власних чисел, яке називають ***характеристичним рівнянням*** матриці A.

Теорема 5.1 (***про єдиність власного числа, що відповідає власному вектору***). Якщо $\overline{X}$ – власний вектор матриці A, то існує єдиний скаляр λ, який задовольняє умову $A\overline{X}=\lambda\overline{X}$.

Доведення. Припустимо, що крім власного числа λ існує ще один скаляр λ_1, такий, що $A\overline{X}=\lambda_1\overline{X}$. Тоді повинна виконуватися рівність $\lambda_1\overline{X}=\lambda\overline{X}$. Оскільки за означенням власний вектор є ненульовим, тобто $\overline{X}\neq\overline{0}$, дістанемо $\lambda_1=\lambda$.

Згідно з теоремою 5.1 кажуть, що власний вектор $\overline{X}$ матриці A ***належить власному*** числу λ.

Теорема 5.2 (***про множину власних векторів, що належать власному числу***). Якщо матриця має власний вектор, що належить власному числу λ, то таких векторів нескінченно багато.

Доведення базується на означенні власного вектора та властивостях асоціативності та комутативності операції множення матриці на скаляр.

Справді, нехай $\overline{X}$ – власний вектор матриці A, тоді $A\overline{X}=\lambda\overline{X}$. Залучимо до розгляду вектор $\overline{Y}$, що є колінеарним вектору $\overline{X}$, тобто $\overline{Y}=\alpha\overline{X}$, де $\alpha\in \mathrm{R}\setminus\{0\}$, і покажемо, що Y також є власним вектором матриці A:

$$A\bar{Y} = A(\alpha\bar{X}) = \alpha(A\bar{X}) \ = \left|\bar{X} = \lambda\bar{X}\right| = \alpha(\lambda\bar{X}) = \lambda(\alpha\bar{X}) = \lambda\bar{Y}\,. \qquad (5.5)$$

Оскільки рівність (5.1) правильна для довільного $\alpha \in (-\infty,\ +\infty)\setminus\{0\}$, то існує безліч власних векторів, що належать даному власному числу.

Теорема 5.3 (*критерій існування власного вектора* $\bar{X}$*, відповідного власному числу* λ). Вектор $\bar{X}$ тоді і тільки тоді є власним вектором матриці $A = (a_{ij})_{n\times n}$, відповідним власному числу λ, коли його координати x_1, x_2, …, x_n утворюють ненульовий розв'язок однорідної квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $(A-\lambda E)\bar{X} = \bar{0}$:

$$(A\bar{X} = \lambda\bar{X}) \Leftrightarrow ((A-\lambda E)\bar{X} = \bar{0} \ \wedge\ \Delta(A-\lambda E) = 0). \qquad (5.6)$$

Доведення зводиться до тотожних перетворень матричних рівностей.

Необхідність уже доведено переходом від співвідношення $A\bar{X} = \lambda\bar{X}$, яке є означенням власного вектора і власного числа, до однорідної системи лінійних рівнянь порядку $n\times n$: $(A-\lambda E)\bar{X} = \bar{0}$, яку подано у розгорнутому вигляді (5.3).

Достатність. На підставі властивостей дій над матрицями з урахуванням умови $\Delta(A-\lambda E) = 0$, здійснимо перехід від однорідної системи рівнянь у матричній формі до співвідношення $AX = \lambda X$:

$$\begin{aligned}&(A-\lambda E)\bar{X} = \bar{0} \Rightarrow A\bar{X} - \lambda E\bar{X} = \bar{0} \Rightarrow A\bar{X} - \lambda(E\bar{X}) = \bar{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A\bar{X} - \lambda\bar{X} = \bar{0} \Rightarrow (A\bar{X} - \lambda\bar{X}) + \lambda\bar{X} = \bar{0} + \lambda\bar{X} \Rightarrow A\bar{X} = \lambda\bar{X}\,.\end{aligned} \qquad (5.7)$$

Теорема 5.4 (*про лінійну незалежність власних векторів*). Власні вектори, що належать різним власним числам, є лінійно незалежними.

Доведення проведемо методом від супротивного. Нехай $\bar{X}^{(1)}$, $\bar{X}^{(2)}$ – два довільні власні вектори, що належать відповідно власним числам λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Треба показати, що лінійна комбінація цих власних векторів $\alpha_1\bar{X}^{(1)} + \alpha_2\bar{X}^{(2)}$ є нуль-вектором, тобто

$$\alpha_1\bar{X}^{(1)} + \alpha_2\bar{X}^{(2)} = \bar{0}, \qquad (5.8)$$

тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Припустимо супротивне. Нехай (5.8) виконується за умови, що одне із чисел α_1, α_2 не є нулем, наприклад, $\alpha_1 \neq 0$.

Помножимо ліву і праву частини (5.8) на власне число λ_2. Тоді

$$\alpha_1\lambda_2\bar{X}^{(1)} + \alpha_2\lambda_2\bar{X}^{(2)} = \bar{0}. \qquad (5.9)$$

Ліву і праву частини рівності (5.9) помножимо на матрицю A зліва, і, ураховуючи властивості операцій над матрицями, дістанемо:

$$A\cdot(\alpha_1\bar{X}^{(1)} + \alpha_2\bar{X}^{(2)}) = A\cdot\bar{0} \;\Rightarrow\; \alpha_1(A\bar{X}^{(1)}) + \alpha_2(A\bar{X}^{(2)}) = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \; A\bar{X}^{(1)} = \lambda_1\bar{X}^{(1)},\; A\bar{X}^{(2)} = \lambda_2\bar{X}^{(2)} \right| \Rightarrow \alpha_1\lambda_1\bar{X}^{(1)} + \alpha_2\lambda_2\bar{X}^{(2)} = \bar{0}. \qquad (5.10)$$

Порівняємо (5.10) і (5.9). Отримуємо:

$$\alpha_1\lambda_1\bar{X}^{(1)} - \alpha_1\lambda_2\bar{X}^{(1)} = \bar{0} \Rightarrow \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{X}^{(1)} = \bar{0}. \qquad (5.11)$$

За умовою теореми $\lambda_1 \neq \lambda_2$. За означенням вектор $\bar{X}^{(1)}$ є ненульовим, тому рівність (5.11) можлива тільки при $\alpha_1 = 0$, тобто припущення про лінійну залежність векторів $\bar{X}^{(1)}$, $\bar{X}^{(2)}$ є хибним. Якщо маємо більше двох власних векторів, які належать попарно різним власним числам, доведення аналогічне (з використанням методу математичної індукції).

Зауважимо, що власні вектори, які належать різним власним числам, можна використати в якості базисних векторів.

Теорема 5.5 (*про суму і добуток власних чисел*). Якщо $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – власні числа матриці $A = (a_{ij})_{n\times n}$, то:

1) сума власних чисел дорівнює сумі елементів головної діагоналі матриці A:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{nn}; \qquad (5.12)$$

2) добуток власних чисел дорівнює визначнику матриці A:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \Delta A. \qquad (5.13)$$

Доведення ґрунтується на формулах Вієта, які описують співвідношення між коренями і коефіцієнтами многочлена n-го степеня у випадку, коли його старший коефіцієнт дорівнює одиниці.

Розглянемо найпростіший випадок $n=2$. Запишемо характеристичне рівняння у розгорнутому вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a_{11}-\lambda)\cdot(a_{22}-\lambda) - a_{12}\cdot a_{21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) = 0. \qquad (5.14)$$

Із (5.14) за теоремою Вієта (для квадратного рівняння) маємо:

1) $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + \quad a_{22}$; 2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \Delta A$.

Суму всіх діагональних елементів матриці називають ***слідом*** цієї матриці.

5.2. Відшукання власних чисел і власних векторів

Розглянемо алгоритм знаходження власних чисел матриці A та власних векторів, що їм належать.

Згідно із співвідношеннями (5.4) та (5.3) маємо такий порядок відшукання власних чисел та власних векторів матриці.

1^0. ***Складаємо*** за вихідною матрицею $A=(a_{ij})_{n\times n}$ характеристичне рівняння (5.4) і розв'язуємо його, тобто знаходимо власні числа.

За основною теоремою алгебри рівняння $P_n(\lambda)=0$ має не більше n дійсних коренів, а якщо говорити про комплексні корені, то їхня кількість дорівнює n, якщо кожен із коренів рахувати стільки разів, яка його кратність.

2^0. ***Підставляємо*** по черзі кожне власне число у систему (5.3), і знаходимо усі її нетривіальні розв'язки, що і дає множину власних векторів, які належать відповідному власному числу.

Зауваження. Множину всіх власних векторів, що належать певному власному числу, можна подати як лінійну комбінацію фундаментальних розв'язків однорідної системи рівнянь згідно з (4.19), гл. 4.



Знайдемо власні числа і власні вектори матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним рівнянням цієї матриці є квадратне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; (1-\lambda)(5-\lambda)+3=0 \;\Rightarrow\; \lambda^2-6\lambda+8=0.$$

Розв'язавши його, отримуємо власні числа $\lambda_1=2$ і $\lambda_2=4$.

Тепер описуємо множини $\bar{X}^{(1)}$, $\bar{X}^{(2)}$ усіх власних векторів, що належать знайденим власним числам. Для цього записуємо систему однорідних лінійних рівнянь, коефіцієнти якої отримуємо з елементів матриці $A-\lambda E$ після підстановки значення відповідного власного числа. Отже,

$$\lambda_1=2:\begin{cases} -x_1+x_2=0 \\ -3x_1+3x_2=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=t \\ x_2=t \end{cases}\Rightarrow \bar{X}^{(1)}=\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}\ \forall t\in \mathrm{R}\setminus\{0\};$$

$$\lambda_1=4:\begin{cases} -3x_1+x_2=0 \\ -3x_1+x_2=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=t \\ x_2=3t \end{cases}\Rightarrow \bar{X}^{(2)}=\begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}\ \forall t\in \mathrm{R}\setminus\{0\}.$$

Надаючи параметру t довільних значень, для даного власного числа λ отримаємо сукупність колінеарних між собою власних векторів.

Зазначимо, що характеристичне рівняння матриці може мати не тільки дійсні, а й комплексні корені, тобто числа вигляду $\lambda=a+bi$, де a, b – дійсні числа, $i=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Теорема 5.6 (*про власні числа і власні вектори симетричної матриці).* Симетрична матриця $(a_{ij}=a_{ji}\ \forall\, i=\overline{1,\ n},\quad j=\overline{1,\ n})$ – має тільки дійсні власні числа. Власні вектори, що належать різним власним числам, ортогональні та лінійно незалежні. Теорему наводимо без доведення.

Проілюструємо висновки даної теореми на прикладі.



Нехай маємо симетричну матрицю

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні числа і власні вектори цієї матриці і доведемо ортогональність власних векторів, що відповідають різним власним числам.

1. Складемо характеристичне рівняння цієї матриці

$$\Delta(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 3\\ 1 & 5-\lambda & 1\\ 3 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+7\lambda^2-36=0. \qquad (5.15)$$

Характеристичне рівняння в даному випадку є кубічним рівнянням відносно невідомих λ – власних чисел матриці A. Кубічне рівняння (5.15) можна розв'язати, якщо один із коренів знайти підбором, наприклад, $\lambda_1=3$, а інші перетворенням рівняння до вигляду:

$$(\lambda-3)(\lambda^2-4\lambda-12)=0.$$

Отже, два інших корені: $\lambda_2=6;\ \lambda_3=-2.$

2. Тепер опишемо множини $\bar{X}^{(1)}$, $\bar{X}^{(2)}$, $\bar{X}^{(3)}$ усіх власних векторів, що належать знайденим власним числам. Для цього запишемо систему однорідних лінійних рівнянь, коефіцієнти якої отримаємо з елементів матриці $A-\lambda E$ після підстановки замість λ значення відповідного власного числа. Отже,

$$\lambda_1=3:\ \begin{cases}-2x_1+ & x_2+ & 3x_3=0\\ x_1+ & 2x_2+ & x_3=0\\ 3x_1+ & x_2- & 2x_3=0\end{cases}. \qquad (5.16)$$

Спростивши систему (5.16) елементарними перетвореннями, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}x_1 - x_3=0\\ x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1 = t\\ x_2 = -t\\ x_3 = t\end{cases}\Rightarrow \bar{X}^{(1)}=\begin{pmatrix}t\\ -t\\ t\end{pmatrix}\ \forall t\in \mathrm{R}\setminus\{0\}.$$

Аналогічно знаходимо власні вектори $\bar{X}_2$ та $\bar{X}_3$.

$$\lambda_2 = 6: \begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathrm{R} \setminus \{0\}. \quad (5.17)$$

$$\lambda_3 = -2: \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathrm{R} \setminus \{0\}. \quad (5.18)$$

Система векторів $\bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)}, \bar{X}^{(3)}$ – лінійно незалежна, оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} t & t & -t \\ -t & 2t & 0 \\ t & t & t \end{vmatrix} \neq 0.$$

Переконаємося, що вектори $\bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)}, \bar{X}^{(3)}$ – попарно ортогональні. Для цього визначимо їх скалярні добутки:

$$\left(\bar{X}^{(1)} \cdot \bar{X}^{(2)}\right) = t^2 - 2t^2 + t^2 = 0;$$
$$\left(\bar{X}^{(1)} \cdot \bar{X}^{(3)}\right) = -t^2 + t^2 = 0;$$
$$\left(\bar{X}^{(2)} \cdot \bar{X}^{(3)}\right) = -t^2 + t^2 = 0.$$

Оскільки скалярні добутки векторів дорівнюють нулю, то вектори попарно ортогональні.

Зауважимо, що при знаходженні власних чисел для заданої матриці найважчою задачею є розв'язання алгебраїчного рівняння *n*-го степеня, що в багатьох випадках зробити неможливо без використання наближених методів. Вивчення наближених методів виходить за рамки програми. Тому пропонуємо скористатися відомими пакетами програм MATLAB, MATCAD тощо.

Наступний приклад було розв'язано в пакеті MATLAB. Укажемо кінцевий результат обчислень без проміжних викладок.



Знайдемо власні числа та відповідні їм власні вектори для матриці

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}.$$

Характеристичним рівнянням для знаходження власних чисел буде рівняння

$$\lambda^3-15\lambda^2+65\lambda-80=0,$$

коренями якого є числа $\lambda_1=8,388;\lambda_2=4,486;\lambda_3=2,126$, а відповідні їм власні вектори мають вигляд:

$$X^{(1)}=\begin{pmatrix}0,808t\\ 0,772t\\ t\end{pmatrix};\quad X^{(2)}=\begin{pmatrix}-0,228t\\ -1,056t\\ t\end{pmatrix};\quad X^{(3)}=\begin{pmatrix}-2,704t\\ 1,534t\\ t\end{pmatrix},$$

де параметр t може набувати довільних ненульових значень $(t\in R\setminus\{0\})$.

Власні числа та власні вектори матриць мають широкий спектр використання. Можно відмітити задачу аналітичної геометрії – перетворення квадра-тичної форми до канонічного виду з метою подальшої побудови кривої, задачі різних галузей природничих наук, серед яких важливе місце займає й економічна наука.

Далі наведено приклад застосування власних векторів і власних чисел у одній із багатьох задач економіки.

5.3. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)



Практично всі країни, крім внутрішнього товарообміну, здійснюють зовнішній товарообмін, тобто займаються зовнішньою торгівлею. Торгівля вважається ***збалансованою*** або ***бездефіцитною***, якщо для кожної країни прибуток від торгівлі не менший за обсяг коштів, які вона вкладає у товарообіг (внутрішній і зовнішній).

Постановка задачі. Декілька країн здійснюють взаємний товарообмін. Відома частка бюджетних коштів, що витрачає кожна країна на закупівлю товарів у іншої країни, ураховуючи й внутрішній товарообіг. Установити, яким повинне бути співвідношення бюджетів партнерів для того, щоб забезпечити бездефіцитність торгівлі.

Побудова математичної моделі. Введемо позначення кількісних характеристик – величин, якими описується торгівля, і визначимо зв'язок між ними. Нехай K_1, K_2, ... , K_n – країни, що беруть участь у міжнародній торгівлі. Частки коштів, які витрачає країна K_j на закупівлю товарів у країні K_i, ураховуючи й внутрішній товарообіг ($j = i$), позначимо через a_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$. Зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}. \tag{5.19}$$

Матрицю A, елементами якої є числа a_{ij}, називають ***структурною матрицею торгівлі:***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ця матриця описує взаємодію країн у процесі міжнародної торгівлі. Співвідношення (5.19) означає, що сума елементів кожного стовпця матриці дорівнює 1. Якщо обсяг коштів, які витрачає кожна країна на торгівлю, позначити через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно, то прибуток p_i кожної країни K_i від внутрішньої та зовнішньої торгівлі складе величину

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ \ldots \ + a_{in}x_n, \qquad \text{де } i = \overline{1,n}. \tag{5.20}$$

Для того щоб для кожної країни торгівля була збалансованою, за означенням повинна виконуватись умова $p_i \geq x_i$, $i = \overline{1,n}$, тобто прибуток від торгівлі не повинен бути меншим за витрати. Однак дотримання наведеної вимоги неможливе для всіх країн у сукупності. Справді, додамо ліві і праві частини вказаних нерівностей, змінюючи i від одиниці до n:

$$p_i \geq x_i,\ i=\overline{1,n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq \sum_{i=1}^{n} x_i\,. \qquad (5.21)$$

Групуючи в лівій частині доданки, що містять кожне із x_j, отримаємо:

$$x_1\sum_{i=1}^{n} a_{i1} + x_2\sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \ \ldots\ + x_n\sum_{i=1}^{n} a_{in} \ \geq\ x_1 + x_2 + \ \ldots\ + x_n\,. \qquad (5.22)$$

Зважаючи на співвідношення (5.19), дістанемо «неправильну нерівність»

$$x_1 + x_2 + \ \ldots\ + x_n \ \geq\ x_1 + x_2 + \ \ldots\ + x_n\,. \qquad (5.23)$$

Звідки випливає, що збалансована торгівля можлива тільки у разі знаку рівності. Це, гадаємо, зрозуміло не тільки з аналітичних викладок, а й з економічної точки зору (і просто здорового глузду): всі країни в сукупності не можуть отримати прибуток. Більш того, для жодної з країн не може виконуватись знак строгої нерівності $p_i > x_i$.

Отже, умовою збалансованої торгівлі є рівності $p_i = x_i,\ i=\overline{1,n}$, з яких одержимо:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = x_i,\ i=\overline{1,n} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n. \end{cases} \qquad (5.24)$$

Введемо до розгляду ***вектор*** (бюджетних) ***коштів*** $\bar{X} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^T$ і подамо систему (5.24) в матричній формі:

$$A\bar{X} = \bar{X}\,. \qquad (5.25)$$

Із (5.25) випливає, що за умовою збалансованості торгівлі між країнами, вектор коштів $\bar{X}$ повинен бути власним вектором структурної матриці торгівлі A, який належить власному числу $\lambda = 1$. Таким чином, розв'язання задачі зводиться до відшукання цього власного вектора $\bar{X}$, компоненти якого встановлюють співвідношення між бюджетами країн, що беруть участь у товарообміні.



Розглянемо товарообмін між трьома країнами. Нехай структурна матриця торгівлі країн $K_1,\ K_2,\ K_3$ має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вектор коштів, компонентами якого є частки від загального обсягу торгівлі, які повинна вкладати кожна з країн у зовнішній товарообіг для того, щоб торгівля була збалансованою.

Шуканий вектор коштів є власним вектором структурної матриці, що належить власному значенню $\lambda=1$. Його компоненти утворюють ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь порядку $n\times n$:

$$(A-E)\bar{X}=\bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3/4 & 1/3 \\ 1/2 & -1 & 2/3 \\ 1/2 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки система є однорідною, то розширена матриця еквівалентна основній матриці системи. Здійснимо елементарні перетворення основної матриці цієї системи рівнянь:

$$(A-E)\sim\begin{pmatrix} -12 & 9 & 4 \\ 3 & -6 & 4 \\ 2 & \textcircled{1} & -4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -30 & 0 & 40 \\ 15 & 0 & -20 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -3 & 0 & \textcircled{4} \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -3/4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ми отримали загальний розв'язок, у якому $x_2,\ x_3$ – базисні змінні, x_1 – вільна змінна. Отже,

$$\begin{cases} x_1=t \\ x_2=t \\ x_3=3/4t \end{cases} \Rightarrow \bar{X}=(t;\ t;\ 0{,}75t)^T,\ \ t\in R\setminus\{0\}.$$

Звідси випливає, що для збалансованості торгівлі необхідно, щоб кошти, які вкладає у зовнішній товарообіг кожна країна, співвідносилися як $x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 4 : 3$.



Ключові терміни

Власний вектор матриці; власне число матриці; характеристичний многочлен; характеристичне рівняння; слід матриці; алгоритм знаходження власних чисел та власних векторів; власні числа і власні вектори симетричних матриць.



Запитання для самоперевірки

1. На якому співвідношенні ґрунтуються означення власних векторів і власних чисел матриці?

2. Чому, на ваш погляд, до множини власних векторів заданої матриці не відносять нуль-вектор?

3. Чи може власному вектору матриці відповідати кілька власних чисел?

4. Чи може власному числу матриці відповідати кілька власних векторів?

5. До аналізу чого зводиться задача відшукання власних чисел і власних векторів матриці, і у чому полягає цей аналіз?

6. З якою числовою характеристикою матриці збігається кількість її власних чисел?

7. У якій послідовності відшукуються власні вектори і власні числа матриці: спочатку власні вектори, а потім власні числа, чи навпаки?

8. Яку підмножину n-вимірного простору складають власні вектори матриці першого порядку і яке власне число їм відповідає?

9. У чому полягають необхідна і достатня умови існування власного вектора, що належить певному власному числу, і чим вони відрізняються одна від одної?

10. Чому n власних векторів, що належать різним власним числам, можна взяти в якості базису n-вимірного простору?

11. Які власні числа має симетрична матриця?

Приклади та вправи за розділом 1

Приклади застосування лінійної алгебри до розв'язання задач з економіки.

1.1. Три меблевих комбінати – Харківський, Дніпропетровський та Ужгородський – виробляють 5 типів продукції: кухні, передні, вітальні, спальні, кутки з м'якими меблями. У бухгалтерії цих комбінатів надходять відомості про обсяги виробництва, які заносяться в облікову документацію і там накопичуються. Ці дані подаються у вигляді матриці. На перше червня матриця виробленої продукції мала вигляд:

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 102 & 103 & 240 & 520 & 134 \\ 203 & 370 & 270 & 185 & 243 \\ 150 & 88 & 106 & 72 & 78 \end{pmatrix},$$

де $i = \overline{1,3}$ (меблеві комбінати), $j = \overline{1,5}$ (продукція: кухні, передні, вітальні, спальні, кутки з м'якими меблями). Наприклад, Харківський комбінат виробив 102 кухні.

На кінець червня аналогічна матриця мала вигляд:

$$B = \left(b_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 117 & 109 & 242 & 525 & 156 \\ 223 & 385 & 279 & 188 & 258 \\ 166 & 108 & 116 & 73 & 82 \end{pmatrix}.$$

Знайти обсяг кожного типу продукції, що вироблена протягом червня.

Розв'язання. Обсяг продукції, що була вироблена протягом червня, визначається матрицею $C = B - A$. Отже,

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 2 & 5 & 22 \\ 20 & 15 & 9 & 3 & 15 \\ 16 & 20 & 10 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.2. Будівельна фірма «Надійний дах» виготовляє металочерепицю трьох видів: кольорова, стійка, екологічна. При цьому застосовуються різні

технологічні операції, що відповідають робочим місцям № 1 – 5. Зробити розрахунок заробітної плати, що припадає на кожне замовлення при виготовленні кожного з типів виробів, якщо відомо:

а) витрати часу (в годинах) на кожному робочому місці на виготовлення одиниці продукції відповідного типу, які наведені у вигляді таблиці:

Види металочерепиці	Витрати часу на робочому місці				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Кольорова	2	1	4	5	0
Стійка	1	4	2	5	2
Екологічна	0	1	0	3	4

б) кількість виробів (у штуках) у кожному замовленні у вигляді таблиці:

Замовлення	Обсяги замовлень за кожним видом металочерепиці		
	Кольорова	Стійка	Екологічна
Іванов І. І.	0	4	2
Петров П. В.	0	2	4
Сидоров С. І.	5	1	0

в) заробітна плата за 1 годину (в гривнях) на кожному робочому місці:

Робоче місце	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Заробітна плата	1,25	1,50	1,40	1,40	1,25

Розв'язання. Витрати часу на кожному робочому місці, кількість виробів та заробітну плату за 1 год. можна розглядати як елементи матриць A, B і P відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 1,50 \\ 1,40 \\ 1,40 \\ 1,25 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця P задає лінійну залежність між розміром заробітної плати і витратами робочого часу на кожному робочому місці, а матриця A – між витратами часу на даному робочому місці й одиницею виробу, що випускається, то матриця $C = A \cdot P$ характеризує нарахування заробітної плати, що припадає на одиницю кожного з видів виробів.

Отже,

$$C = A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,25 \\ 1,50 \\ 1,40 \\ 1,40 \\ 1,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,60 \\ 19,55 \\ 10,70 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця B означає кількість виробів у кожному замовленні, то добуток $B \cdot C = X$ означає розмір заробітної плати, яка припадає на виконання кожного замовлення.

Таким чином,

$$X = B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16,60 \\ 19,55 \\ 10,70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99,60 \\ 81,90 \\ 102,55 \end{pmatrix},$$

тобто на виконання замовлення Іванова І. І. нарахування заробітної плати складає 99,60 грн, замовлення Петрова П. В. – 81,90 грн, замовлення Сидорова С. І. – 102,55 грн.

1.3. Машинобудівний завод «ДорМаш» випускає трактори трьох видів: ДМТ-100, ДМТ-300 та ДМТ-500. При цьому використовується сталь трьох марок: Ст4пс, Ст2кп і Ст20кп. Норми витрат кожної марки сталі (т) на один трактор, а також запаси сталі задані у вигляді таблиці:

Марка сталі	Норми витрат сталі на один трактор (т)			Запаси сталі (т)
	ДМТ-100	ДМТ-300	ДМТ-500	
Ст4пс	4	1	1	7
Ст2кп	2	1	2	7
Ст20кп	3	2	1	7

Скільки тракторів кожного виду може випустити завод за умови використання усього запасу сталі.

Розв'язання. Позначимо через x_1, x_2, x_3 кількість тракторів кожного виду відповідно, що випускає завод. Очевидно, що $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. Відповідно до витрат сталі кожної марки маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему трьома способами: за формулами Крамера, за допомогою оберненої матриці і методом Жордана – Гаусса.

1. **Правило Крамера.** Обчислимо визначник системи Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники Δ_1, Δ_2 і Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -14.$$

За формулами Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2,$$

тобто $X^{\mathrm{T}} = (1;\ 1;\ 2)$.

2. **Матричний спосіб.** Для розв'язання системи за допомого оберненої матриці позначимо

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}7\\ 7\\ 7\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

У матричному вигляді система записується так: $AX=B$, звідси $X=A^{-1}B$, де A^{-1} – обернена матриця до матриці A.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 4 & 1 & -6\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix},$$

де $A_{ij}\left(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3}\right)$ – алгебраїчні доповнення елементів матриці A,

а саме:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=4,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-6,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2.$$

Тоді

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 4 & 1 & -6\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\ 7\\ 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Одержано той самий розв’язок: $X^{\mathrm{T}}=(1;\ 1;\ 2)$.

3. **Метод Жордана – Гаусса**. Розв’язання системи рівнянь подаємо в таблиці (схема Жордана – Гаусса).

№ п/п	x_1 x_2 x_3	Вільні члени	$\sum$	Примітки
1	2	3	4	5
I	4 1 1	7	13	
II	2 1 2	7	12	

III	3 2 1	7	13	
IV V VI	4 1 1 −2 0 1 −5 0 −1	7 0 −7	13 −1 −13	I IV ·(−1)+II IV ·(−2)+ III
1	2	3	4	5
VII VIII IX	6 1 0 −2 0 1 −7 0 0	7 0 −7	14 −1 −14	V·(−1)+ IV V V + VI
X XI XII	0 1 0 0 0 1 1 0 0	1 2 1	2 3 2	XII·(−6)+VII XII·2+VIII IX·(−1/7)

Таким чином, одержуємо: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Отже, машинобудівний завод за умови задачі випускає один трактор виду ДМТ-100, один трактор виду ДМТ-300 і два трактори виду ДМТ-500.

1.4. Сімейна фірма виробляє напої «Літо» і «Водограй». Для виробництва 1 л напою «Літо» потрібно 0,02 год. роботи обладнання, а для 1 л напою «Водограй» – 0,04 год. Витрати основних речовин напоїв дорівнюють 0,01 кг і 0,04 кг на 1 л напоїв «Літо» і «Водограй» відповідно. На день фірма має в розпорядженні 16 кг основних складових речовин та 24 год. роботи обладнання. Прибуток фірми від продажу 1 л напоїв «Літо» і «Водограй» складає 0,1 і 0,4 грн відповідно. Прибуток за один робочий день складає 160 грн.

Визначити, скільки напоїв кожного типу виробляє фірма щоденно, якщо відомо, що всі ресурси використовуються повністю.

Розв'язання. Запишемо умову задачі у вигляді таблиці:

Ресурси	Напої		Запаси ресурсів
	«Літо»	«Водограй»	
Основні складові речовини (кг)	0,01	0,04	16 кг
Фонд часу обладнання (год.)	0,02	0,04	24 год.
Прибуток (грн)	0,1	0,4	160 грн

Позначимо через $x_1 \geq 0$ кількість літрів напою «Літо», через $x_2 \geq 0$ – напою «Водограй», що виробляється щоденно, а через x_3 – залишок робочого часу обладнання, який фірма використовує для його ремонту.

Складемо математичну модель задачі. Це система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 0,04x_2 = 16, \\ 0,02x_1 + 0,04x_2 + x_3 = 24, \\ 0,1x_1 + 0,4x_2 = 160. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Жордана – Гаусса. Проведемо еквівалентні перетворення розширеної матриці системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,01 & 0,04 & 0 & 16 \\ 0,02 & 0,04 & 1 & 24 \\ 0,10 & 0,40 & 0 & 160 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0,01 & 0,04 & 0 & 16 \\ 0,01 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0,25 & 1 & 0 & 400 \\ 0,01 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Ранги матриці системи і розширеної матриці дорівнюють 2, а кількість змінних – 3. Це означає, що система має безліч розв'язків.

За перетвореною матрицею запишемо систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} 0,25x_1 + x_2 = 400, \\ 0,01x_1 + x_3 = 8, \end{cases}$$

де x_2 і x_3 – базисні невідомі, а x_1 – вільна невідома.

Визначимо базисні невідомі через вільні

$$\begin{cases} x_2 = 400 - 0,25x_1, \\ x_3 = 8 - 0,01x_1 \end{cases}$$

і запишемо розв'язок системи у матричній формі

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -0,25x_1 + 400 \\ -0,01x_1 + 8 \end{pmatrix}.$$

Система має безліч розв'язків залежно від того, які значення приймає вільна невідома x_1. Оскільки $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, знайдемо, в яких межах може змінюватися x_1:

$$\begin{cases} -0,25x_1 + 400 \geq 0, \\ -0,01x_1 + \quad 8 \quad \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 \leq 1600, \\ x_1 \leq \quad 800, \end{cases}$$

тобто $0 \leq x_1 \leq 800$. Таким чином, для будь-якого x_1 із проміжку $[0;800]$ будемо отримувати невід'ємні частинні розв'язки системи рівнянь.

Проаналізуємо одержаний результат. Нехай фірма буде виробляти 800 л напою «Літо» ($x_1 = 800$), тоді вона має виробляти 200 л напою «Водограй» ($x_2 = 200$), і робочий час обладнання використовується повністю, оскільки $x_3 = 0$. Отже, маємо частинний розв'язок системи: $X = (800;\ 200;\ 0)^{\mathrm{T}}$. За цих умов прибуток фірми складатиме $800 \cdot 0,1 + 200 \cdot 0,4 = 160$ грн. Однак, якщо фірмі необхідно мати резерв часу для технічного огляду обладнання, то вона може перепланувати випуск продукції. Наприклад, якщо $x_3 = 2$ год., то з рівняння $x_3 = -0,01x_1 + 8$ одержимо, що фірма може випускати 600 л напою «Літо» ($x_1 = 600$), а з рівняння $x_2 = -0,25x_1 + 400$ маємо, що напою «Водограй» слід випускати 250 л ($x_2 = 250$). При цьому прибуток залишається тим самим, тобто 160 грн: $600 \cdot 0,1 + 250 \cdot 0,4 = 160$ (грн). Отже, за таким припущенням одержано ще один із частинних розв'язків системи: $X = (600; 250; 2)^{\mathrm{T}}$.

1.5. У таблиці наведено міжгалузевий баланс за звітний період в умовних грошових одиницях:

Галузь виробництва	Споживання		Кінцевий попит	Валовий випуск
	Енергетика	Машино-будування		
Енергетика	7	21	72	100
Машинобудування	12	15	63	100

Обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання енергетичної галузі необхідно збільшити у два рази, а машинобудування – залишити на попередньому рівні.

Розв'язання. Позначимо через x_1 валовий випуск енергетичної галузі, через x_2 – машинобудування, через a_{11} – кількість продукції енергетичної галузі, що споживається самою енергетичною галуззю при виробництві одиниці продукції, a_{12} – кількість енергетичної продукції, що іде на виробництво одиниці продукції машинобудування, через a_{21} і a_{22} – кількість продукції машинобудування, що використовується при виробництві одиниці продукції енергетичною і машинобудівною галузями відповідно, а через y_1 і y_2 – кінцевий попит на енергетичну і машинобудівну продукції відповідно.

Модель Леонтьєва «витрати-випуск» буде мати вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1; \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2. \end{cases}$$

За умовами задачі маємо: $x_1 = 100$, $x_2 = 100$. Також:

$$a_{11}x_1 = 7; \quad a_{12}x_2 = 21; \quad a_{21}x_1 = 12; \quad a_{22}x_2 = 15.$$
$$y_1 = 72; \quad y_2 = 63.$$

Звідси знайдемо коефіцієнти прямих витрат. Маємо:

$$a_{11} = 0,07; \quad a_{12} = 0,21; \quad a_{21} = 0,12; \quad a_{22} = 0,15.$$

Запишемо матрицю прямих витрат у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,21 \\ 0,12 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Усі елементи матриці є невід'ємними. Перевіримо, чи є ця матриця продуктивною. Знайдемо власні значення матриці за характеристичним рівнянням:

$$|A - \lambda E| = 0,$$

тобто:

$$\begin{vmatrix} 0,07 - \lambda & 0,21 \\ 0,12 & 0,15 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристичний многочлен матриці має вигляд:

$$(0,07-\lambda)(0,15-\lambda)-012\cdot 0,21=0,$$

або

$$\lambda^2-0,22\lambda-0,0047=0.$$

Звідси знаходимо: $\lambda_1=0,24$, $\lambda_2=-0,02$.

Отже, λ_1 – додатне власне число, $|\lambda_1|>|\lambda_2|$, λ_1 – простий корінь характеристичного многочлена, тоді $\lambda(Z)=\lambda_1=0,24<1$. Це означає, що матриця продуктивна. Тому для будь-якого вектора кінцевої продукції Y можна знайти необхідний обсяг валового випуску X за формулою:

$$X=(E-A)^{-1}Y.$$

Розглянемо випадок, коли кінцеве споживання енергетичної галузі збільшилося вдвоє, а у машинобудуванні – залишилося на попередньому рівні. У цьому випадку маємо:

$$Y=\begin{pmatrix}144\\63\end{pmatrix},$$

$$E-A=\begin{pmatrix}0,93 & -0,21\\-0,12 & 0,85\end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці:

$$|E-A|=0,7653\neq 0.$$

Отже, існує обернена матриця $(E-A)^{-1}$:

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,7653}\begin{pmatrix}0,85 & 0,21\\0,12 & 0,93\end{pmatrix}.$$

Тоді:

$$X=\frac{1}{0,7653}\begin{pmatrix}0,85 & 0,21\\0,12 & 0,93\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}144\\63\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}177,2\\99,1\end{pmatrix},$$

тобто валовий випуск продукції в енергетичній галузі потрібно збільшити до 177,2 умовних одиниць, а в машинобудуванні – до 99,1 умовних одиниць.

1.6. Знайти співвідношення національних прибутків Казахстану, України та Білорусі для збалансованої торгівлі, якщо структурна матриця має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складаємо матричне рівняння: $(A-E)X=0$,

де $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець, що визначає національні прибутки країн.

Маємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0.$$

Це матричне рівняння можна надати у вигляді системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{3}x_3=0; \\ \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=0; \\ \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{4}x_2-\frac{2}{3}x_3=0. \end{cases}$$

Після еквівалентних перетворень система набуває вигляду:

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0, \\ \frac{3}{8}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0, \end{cases}$$

звідси маємо загальний розв'язок: $x_1 = \frac{2}{3}x_3$, $x_2 = \frac{4}{3}x_3$.

Нехай $x_3 = 3$, тоді $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Отже, збалансованість торгівлі трьох країн: Казахстану, України та Білорусії – досягається, якщо їх національні прибутки визначаються, відповідно, за співвідношенням $2:4:3$.



Задачі та вправи для самостійного розв'язання

Знайти добуток матриць:

1.7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.8. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.9. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.10. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.12. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

1.14. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.15. Знайти матрицю $C = AB - BA$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.16. Знайти матрицю $C=A^2-(A+B)(A-3B)$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти обернену матрицю до матриці A:

1.17. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.18. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.19. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.20. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв’язати матричні рівняння:

1.21. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв’язати методом оберненої матриці системи рівнянь:

1.23. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=-2, \\ 4x_1+3x_2+7x_3=0. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=2, \\ 3x_1+x_2+x_3=8. \end{cases}$

Знайти за допомогою елементарних перетворень ранги матриць:

1.25. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$.

1.26. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\ 2 & -1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2 & 5\\ 3 & -6 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

1.27. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 11 & 2\\ 1 & 0 & 4 & -1\\ 11 & 4 & 56 & 5\\ 2 & -1 & 5 & -6\end{pmatrix}$.

1.28. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4 & 1\\ 11 & 3 & 5 & 5 & 2\\ 5 & 5 & 3 & 17 & 12\\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Обчислити визначники:

1.29. $\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{vmatrix}$.

1.30. $\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}$.

1.31. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2 & 2\\ -2 & -2 & 3 & 2\\ -2 & -2 & -2 & 4\end{vmatrix}$.

1.32. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 3 & -1 & -4 & -6\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 7\end{vmatrix}$.

Розв’язати рівняння:

1.33. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & x+5 & 4\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}=0$.

1.34. $\begin{vmatrix}x^2 & 4 & 9\\ x & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$.

Розв’язати за формулами Крамера системи рівнянь:

1.35. $\begin{cases}2x_1+5x_2+7x_3=2,\\ 6x_1+3x_2+4x_3=11,\\ 5x_1-2x_2-3x_3=11.\end{cases}$

1.36. $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=-7,\\ x_1+4x_2+2x_3=-1,\\ x_1-4x_2=-5.\end{cases}$

Дослідити та розв’язати систему рівнянь, якщо вона сумісна:

1.37. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$ **1.38.** $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -2. \end{cases}$

1.39. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$ **1.40.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$

1.41. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 7, \\ -4x_1 + 2x_2 \quad = -2, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

Розв’язати однорідну систему рівнянь:

1.42. $\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ **1.43.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

Розв’язати методом Жордана – Гаусса систему рівнянь:

1.44. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ **1.45.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

1.46. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 \qquad - x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 4, \\ \qquad x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$ **1.47.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

1.48. Кондитерська фірма «Марципан» накопичує відомості про обсяг продажу своїх виробів щомісячно. Вони наведені за типом виробів – шоколадні

цукерки, мармелад, зефір – та районами збуту – Харківський, Барвенківський, Лозівський – у таблиці:

Тип виробів	Райони продажу		
	Харківський	Барвенківський	Лозівський
Шоколадні цукерки	98	24	42
Мармелад	39	15	22
Зефір	22	15	17

Знайти обсяг продажу виробів у кожному районі за два місяці, якщо збут за другий місяць надано у вигляді матриці:

$$\begin{pmatrix} 55 & 19 & 44 \\ 43 & 53 & 38 \\ 11 & 40 & 20 \end{pmatrix}.$$

1.49. Визначити кількість вітамінів кожного виду, що містить раціон, який включає 110 г ізюму, 90 г яблук та 200 г кураги, якщо вміст вітамінів A, C і Р (у мг) на 1 г ізюму, яблук та кураги наведено у вигляді таблиці:

Харчові продукти	Вітаміни, мг		
	A	B	C
Ізюм	0,1	0,3	0,4
Яблука	0,2	0,3	0,5
Курага	0,3	0	0,3

1.50. При виготовленні деталей чотирьох видів, кількість яких становить 10, 2, 8 та 4 одиниці відповідно, використовуються матеріальні ресурси: сировина, робоча сила та електроенергія (ум. од.), які задані таблицею

Ресурси	Витрати на одну деталь			
	1	2	3	4
Сировина, кг	1	3	0,5	2
Робоча сила, люд.-год.	1,5	2	3	1
Електроенергія, кВт/год.	2	1	1	0,5
Кількість деталей, од.	10	2	8	4

Обчислити потребу у сировині, робочій силі та електроенергії для виготовлення заданої кількості деталей.

Вказівка. Позначити через A матрицю норм витрат матеріальних ресурсів, через X – матрицю кількості виробів за умовою, через Y – матрицю загальної потреби в ресурсах і розв'язати рівняння: $Y = A \cdot X$.

1.51. Компанія постачає тротуарне покриття для трьох споживачів, а саме для фірм «БудІнвест», «ДорСтрой» і «Шлях». Визначити план виготовлення продукції за умови, що всі ресурси будуть використані, якщо запаси ресурсів та норми їх витрат на виробництво 1 кв. м покриття згідно з вимогами до якості кінцевої продукції кожного з постачальників наведені в таблиці:

Ресурси	Витрати на побудову 1 кв. м покриття			Запас
	«БудІнвест»	«ДорСтрой»	«Шлях»	
Сировина, кг	5	7	4	24
Допоміжні матеріали, кг	10	5	20	75
Обладнання, год.	5	2	1	10

1.52. Задано матрицю коефіцієнтів прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,15 \\ 0,25 & 0,12 \end{pmatrix}$ і матрицю $Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}$ кінцевої продукції на плановий термін. Знайти плановий обсяг валової продукції (з точністю до першого знака після десяткової коми).

1.53. Задана матриця коефіцієнтів витрат у трьох галузях: сільське господарство, промисловість і будівництво (A) та кінцевий попит на продукцію цих галузей (Y):

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 40 \\ 200 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Знайти валовий випуск продукції кожної галузі (з точністю до першого знака після десяткової коми).



Відповіді

1.7. $\begin{pmatrix} 5 & 22 \\ -2 & 28 \end{pmatrix}$. **1.8.** $\begin{pmatrix} 2 & 41 \\ 11 & 30 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}$. **1.9.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.10. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. **1.11.** (13). **1.12.** $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.13. $(5;\ -19;\ 5)$. **1.14.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$. **1.15.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.16. $\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$. **1.17.** $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. **1.18.** $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.19. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. **1.20.** $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

1.21. $\begin{pmatrix} -8 & -14 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. **1.22.** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & -11 & 13 \\ 21 & 3 & 16 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1.23. $(1;\ 1;\ -1)^{\mathrm{T}}$. **1.24.** $(1;\ 2;\ 3)^{\mathrm{T}}$.

1.25. $r = 2$. **1.26.** $r = 3$. **1.27.** $r = 2$.

1.28. $r = 3$. **1.29.** 9. **1.30.** 10.

1.31. 180. **1.32.** -72. **1.33.** $\{-1,\ 5\}$.

1.34. $\{2;\ 3\}$. **1.35.** $(2;\ 1;\ -1)^{\mathrm{T}}$. **1.36.** $(-1;\ 1;\ -2)^{\mathrm{T}}$.

1.37. $(1;\ 2;\ -2)^{\mathrm{T}}$. **1.38.** Несумісна.

1.39. $x_1 = -3 + 9x_2,\ x_3 = 1 - 3x_2,\ x_2 \in R$. **1.40.** $(1;\ 2;\ 3)^{\mathrm{T}}$.

1.41. $x_2 = 2x_1 - 1,\ x_3 = -6,\ x_1 \in R$. **1.42.** $(0;\ 0;\ 0)^{\mathrm{T}}$.

1.43. $x_1 = 8x_3 - 7x_4,\ x_2 = -6x_3 + 5x_4,\ x_3 \in R,\ x_4 \in R$.

1.44. $(-1;\ 3;\ 1)$. **1.45.** Несумісна.

1.46. $x_2 = 24 - 6x_1 + x_4,\ x_3 = -7 + 2x_1 - x_4,\ x_1 \in R,\ x_4 \in R$.

Розділ 2. Векторна алгебра й аналітична геометрія

 Поняття «вектор» (від лат. vector – носій), як відрізка, що має певну довжину та певний напрям, вперше з'явилося у ірландського математика Уільяма Гамільтона (1805 – 1865) в роботах з побудови числових систем. Це поняття пов'язане з об'єктами, які характеризуються величиною та напрямом, наприклад, швидкість, сила, прискорення. При цьому швидкість можна розуміти в широкому сенсі, наприклад, швидкість зміни витрат виробництва, доходів, попиту, споживання і пропозиції та ін. Вектор може вказувати напрям найбільшого зростання або спадання функції, що описує різноманітні економічні процеси. Вектори, що будуть розглянуті в даному розділі, є окремим випадком
n-вимірних векторів: вони припускають геометричну інтерпретацію, бо належать до векторних лінійних просторів вимірності 1,2,3: $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$.

Для графічного представлення розв'язку економічних задач на площині та у просторі застосовується математичний апарат ***аналітичної геометрії,*** об'єктом вивчення якої є геометричні фігури, а предметом – установлення їх властивостей засобами алгебри за допомогою координатного методу.

Засновником методу координат і, разом з тим, аналітичної геометрії є Рене Декарт (1596 – 1650) – французький філософ, математик, фізик і фізіолог. Його ім'ям і названа відома «декартова прямокутна система координат», яка дозволяє визначити положення фігури на площині та тіла у просторі.



Після вивчення даної теми ви зможете:

- використовувати інструмент векторної алгебри для геометричного зображення й аналізу об'єктів економічних процесів;
- розуміти та застосовувати рівняння прямої лінії на площині для геометричної інтерпретації залежності між функціональною ознакою і фактор-аргументом, що на нього впливає;
- розуміти та застосовувати рівняння кривих другого порядку при нелінійних моделях відповідних економічних задач;
- розуміти геометричну форму зображення розв'язків задач в економіці за допомогою поверхонь та площини.

Глава 6. Елементи векторної алгебри

6.1. Вектори: основні означення, лінійні операції

Вектором називається ***напрямлений відрізок***. Напрям вектора вказується стрілкою. Початком вектора називається точка його прикладення, а стрілка розташовується в кінці відрізка. Це точки A (початок) та B (кінець) на рис. 6.1.

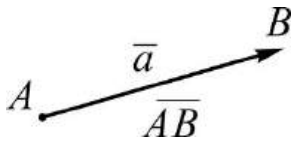


Рис. 6.1

Такий вектор називається ***зв'язаним***, оскільки він має фіксовану точку прикладення. Відповідно зв'язаний вектор позначається двома літерами $\overset{\cup\cup}{AB}$ або $\overline{AB}$, перша з яких відповідає початку вектора (точка A), а друга – його кінцю (точка B).

Якщо вектор не має точки прикладення, тобто є ***вільним***, то він позначається $\bar{a}$ або $\bar{a}$. Властивості і, відповідно, означення для зв'язаних і вільних векторів дещо відрізняються. Оскільки вектори, які застосовуються в економічних задачах, як правило, є вільними, то у подальшому при розгляді властивостей векторів будемо вважати, що вектори є вільними.

Довжиною, або **модулем**, вектора називається довжина відповідного відрізка і позначається одним із символів: $|\bar{a}|$, a, $|\overline{AB}|$, AB.

Нульовим вектором $\bar{0}$, або **нуль-вектором**, називається вектор, довжина якого дорівнює нулю, а напрям його вважається довільним.

Одиничним вектором $\bar{e}$ називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці.

Рівними векторами називаються ***вектори,*** які можна сумістити шляхом паралельного перенесення. Ці вектори паралельні або є відрізками однієї прямої, ***однаково напрямлені*** та мають ***рівні довжини***.

Взаємно протилежними називаються вектори, які паралельні або є відрізками однієї прямої, мають ***рівні довжини,*** але ***різні за напрямом.***

Розглянемо ***лінійні операції над векторами***.

1. Сумою кількох векторів, наприклад, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ називається вектор

$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\,, \qquad (6.1)$$

який за величиною та напрямом дорівнює вектору, початком якого є початок вектора $\vec{a}$ (першого доданка), а кінцем – кінець вектора $\vec{d}$ (останнього доданка). Вектори вважаються вільними, тобто побудова суми векторів здійснюється їх паралельним перенесенням (рис. 6.2):

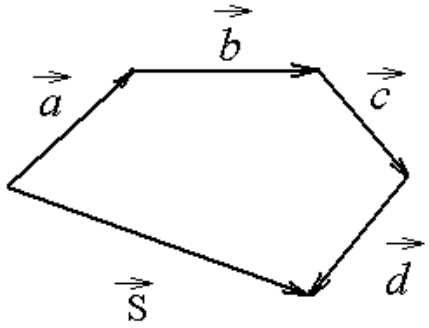


Рис. 6.2

Відповідно до означення суми векторів наведемо відоме зі шкільного курсу правило паралелограма. Нехай є два ненульові вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Здійснимо їх паралельне перенесення таким чином, щоб сумістити початки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, і на векторах як на сторонах побудуємо паралелограм (рис. 6.3).

Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який визначається діагоналлю паралелограма, початком якого є початок векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

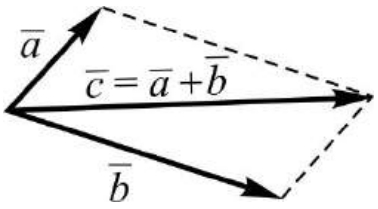


Рис. 6.3

Легко довести, що ***сума векторів має такі властивості:***

1) переставна, або комутативна:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$$

2) сполучна, або асоціативна:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c};$$

3) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;

4) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Зауважимо, що різницю $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ можна розглядати як суму вектора $\vec{a}$ та вектора, протилежного вектору $\vec{b}$:

$$\vec{c}=\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}.$$

2. Множення вектора на скаляр. Нехай λ – деяке дійсне число. ***Добутком вектора $\vec{a}$ зі скаляром λ*** називається вектор $\vec{b}$, модуль якого дорівнює добутку модулів $|\bar{a}|$, $|\lambda|$, а напрям $\bar{b}$ співпадає з напрямом $\bar{a}$, якщо $\lambda>0$, або є протилежним напряму $\bar{a}$, якщо $\lambda<0$ (рис. 6.4):

$$\bar{b}=\lambda\bar{a}=\bar{a}\lambda. \qquad (6.2)$$



Рис. 6.4

При $\lambda=0$ довжина $|\lambda\bar{a}|$ дорівнює нулю, і вектор $\bar{b}$ перетворюється в нуль-вектор (точку), який не має напряму.

Операція ***множення вектора*** на скаляр має такі ***властивості:***

1) переставний, або комутативний, закон:

$$\lambda\bar{a}=\bar{a}\lambda, \text{ де } \lambda=Const;$$

2) сполучний, або асоціативний, закон:

$$\lambda(\mu\bar{a})=\mu(\lambda\bar{a}), \text{ де } \mu=Const,\ \lambda=Const;$$

3) розподільний, або дистрибутивний, закон:

$$\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b},\ (\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a};$$

4) $1\cdot\vec{a}=\vec{a};\ (-1)\vec{a}=-\vec{a}$;

5) $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони належать одній прямій або паралельним прямим. Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів є їх пропорційність, тобто

$$\vec{b} = k\vec{a}\ (k - \text{скаляр}).$$

Три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називаються ***компланарними,*** якщо вони належать одній площині або паралельним площинам. Можна довести, що три ненульові вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні тоді та лише тоді, коли один з них є лінійною комбінацією двох інших, тобто

$$\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}\ ,$$

де k, l – скаляри.

Розглянемо ще одне поняття, що має дуже важливе значення в теорії векторів. Це поняття ***проекції вектора на вісь***. Нагадаємо, що ***вісь*** – це ***пряма***, яка має ***напрям***. Заданий напрям будемо вважати додатним, протилежний напрям – від'ємним.

Компонентою вектора $\bar{a}$ відносно осі Ox називають вектор $\bar{a}_1 = \overline{A_1B_1}$, початок якого є проекцією початку вектора $\overline{AB}$ на вісь Ox, кінець – проекцією кінця вектора $\overline{AB}$ на вісь Ox (рис. 6.5).

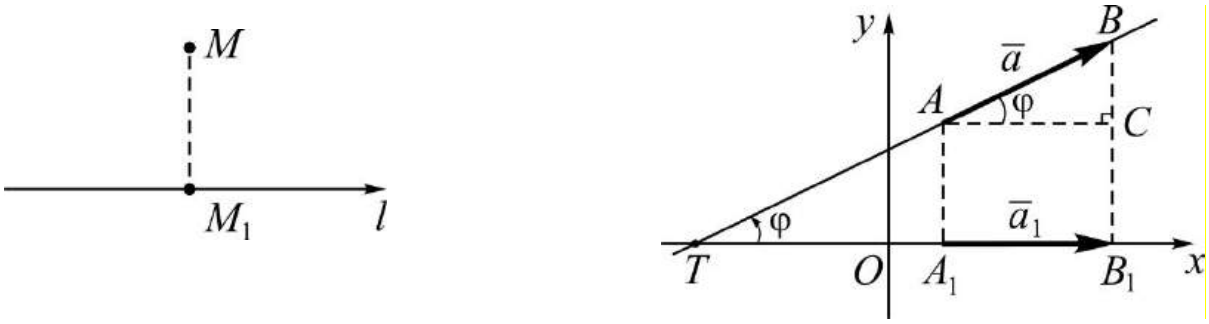


Рис. 6.5

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь l називають скаляр

$$np_l\bar{a} = \pm\left|\overline{A_1B_1}\right|,$$

який дорівнює ***довжині*** компоненти вектора $\vec{a}$ на вісь l, якщо її напрям збігається з напрямом осі l, та ***мінус довжині*** компоненти, коли її напрям протилежний напряму осі.

Основними властивостями проекції вектора на вісь вважаються:

1. Проекція вектора на вісь l дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ та косинуса кута між вектором та віссю, тобто

$$np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi,\ \varphi = \angle\left(\vec{a},\vec{l}\right). \tag{6.3}$$

2. Проекція суми будь-якого числа векторів на дану вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь.

3. Проекція на вісь добутку вектора зі скаляром дорівнює добутку зі скаляром проекції самого вектора на вісь:

$$np_l\left(k\vec{a}\right) = k\cdot np_l\vec{a}.$$

6.2. Прямокутна система координат у просторі. Вектори, що задані своїми координатами

Нехай (рис. 6.6) Ox, Oy, Oz – три взаємно перпендикулярні прямі, які мають напрями та масштаб (одиницю виміру довжини). Для кожної точки M простору існує її радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, початком якого є початок координат O, а кінцем є дана точка M.

Під декартовими прямокутними координатами точки M у просторі розуміють проекції її радіус-вектора $\vec{r}$ на відповідні осі координат, тобто

$$x = np_{Ox}\vec{r},\ y = np_{Oy}\vec{r},\ z = np_{Oz}\vec{r}.$$

Точка M з координатами x, y, z позначається через $M\left(x, y, z\right)$. Для знаходження координат точки необхідно знайти проекції вектора $\vec{r}$ на координатні осі. А саме побудувати прямокутний паралелепіпед з діагоналлю, що є радіус-вектором $\vec{r}$ (рис. 6.6).

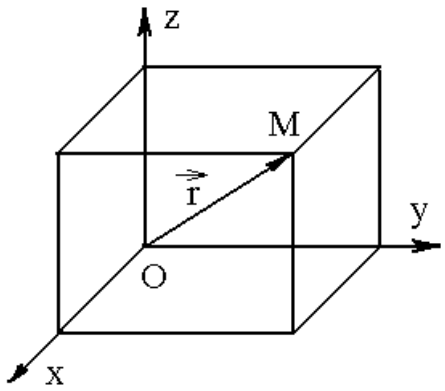


Рис. 6.6

Довжина діагоналі паралелепіпеда визначається за формулою: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Якщо позначити через α, β, γ кути, що утворені радіус-вектором з координатними осями, то будемо мати

$$x = |\vec{r}| \cos\alpha; \quad y = |\vec{r}| \cos\beta \quad z = |\vec{r}| \cos\gamma. \tag{6.4}$$

Косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються ***напрямними косинусами*** радіус-вектора $\vec{r}$. Їх властивість легко доводиться:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Координатами будь-якого вектора $\vec{a}$ у просторі називаються його ***проекції на осі координат.*** Вектор, що заданий координатами, позначається:

$$\vec{a} = \vec{a}(a_x, a_y, a_z) \text{ або } \vec{a} = (a_x, a_y, a_z),$$

де $a_x = np_{Ox}\vec{a}$; $a_y = np_{Oy}\vec{a}$; $a_z = np_{Oz}\vec{a}$.

Довжина вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{6.5}$$

Напрямні косинуси можна знайти з рівнянь:

$$a_x = |\vec{a}| \cos\alpha; \quad a_y = |\vec{a}| \cos\beta; \quad a_z = |\vec{a}| \cos\gamma.$$



Знайти довжину та напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (1, 2, -2)$.

Маємо

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3,$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{1}{3};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{2}{3};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = -\frac{2}{3}.$$

Визначимо основні дії над векторами, які задані координатами.

Нехай вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ заданий своїми проекціями на осі координат Ox, Oy, Oz. Тоді в паралелепіпеді (див. рис. 6.6), діагоналлю є вектор $\vec{a}$, а ребрами будуть його компоненти відносно відповідних координатних осей. Маємо очевидний розклад:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3.$$

Якщо введемо одиничні вектори осей (орти) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, які напрямлені вздовж осей координат, то на основі зв'язку між компонентами вектора та його проекціями будемо мати:

$$\vec{a}_1 = a_x\vec{i};\ \vec{a}_2 = a_y\vec{j};\ \vec{a}_3 = a_z\vec{k}.$$

Тоді:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \Rightarrow \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \qquad (6.6)$$

Якщо вектор $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ заданий своїми координатами, то

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Лінійні операції над векторами, що задані координатами, можна записати в такому вигляді:

1) $\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}$.

Отже, $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$,

де $\lambda -$ скаляр. Таким чином, при множенні вектора на скаляр координати вектора необхідно помножити на цей скаляр;

2) $\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x\pm b_x\right)\vec{i}+\left(a_y\pm b_y\right)\vec{j}+\left(a_z\pm b_z\right)\vec{k}$.

Звідси, вектор алгебраїчної суми векторів має координати:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\left(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\right).$$

Таким чином, при додаванні (відніманні) векторів їх координати додаються (віднімаються).

6.3. Скалярний, векторний, мішаний добутки векторів

Скалярним добутком $\bar{a}\cdot\bar{b}$ двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається число (скаляр), яке дорівнює добутку їх модулів та косинуса кута між ними $\varphi=\angle(\bar{a},\bar{b})$:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\varphi. \qquad (6.7)$$

Замість $\bar{a}\cdot\bar{b}$ часто пишуть $\bar{a}\,\bar{b}$ або використовують позначення $(\bar{a}\bar{b})$.

Назва цієї операції цілком узгоджується з її суттю, а саме – скалярний добуток є скаляром, тобто числом.

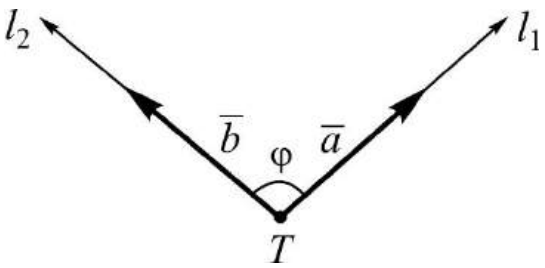


Рис. 6.7

Нагадаємо, що для визначення кута φ між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ необхідно сумістити їх початки. Розглядають менший з кутів, що утворюють ці вектори (рис. 6.7). Якщо кут φ гострий, то $\bar{a}\cdot\bar{b}>0$, якщо тупий, то $\bar{a}\cdot\bar{b}<0$.

Основні властивості скалярного добутку векторів випливають із його означення (6.7).

1^0. **Скалярний добуток** $\bar{a}\cdot\bar{b}$ ненульових векторів дорівнює нулю тоді, тільки тоді і лише тоді, коли вектори взаємно перпендикулярні (***ортогональні***):

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=0\Leftrightarrow\left(\varphi=\pi/2\right). \qquad (6.8)$$

2^0. **Скалярний квадрат** вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=a\cdot a\cdot\cos\angle(\bar{a},\bar{a})=a^2. \tag{6.9}$$

3^0. **Скалярний добуток** підпорядковується усім законам арифметики чисел відносно лінійних операцій:

$$\begin{gathered}\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a},\quad \bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c},\\ (\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})=\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b}).\end{gathered} \tag{6.10}$$

4^0. **Скалярний добуток** двох векторів дорівнює добутку модуля одного з них із проекцією другого на вісь, напрям якої визначається першим вектором:

$$\begin{aligned}\bar{a}\cdot\bar{b}&=a\left(b\cdot\cos\varphi\right)=a\cdot np_a\bar{b},\\ \bar{a}\cdot\bar{b}&=b\left(a\cdot\cos\varphi\right)=b\cdot np_b\bar{a}.\end{aligned} \tag{6.11}$$

Доведення цієї властивості ґрунтується на означенні (6.3).

Скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, що задані у координатній формі. Нехай маємо два вектори $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$.

1. Обчислимо скалярні добутки одиничних векторів $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. За властивістю 2^0 $\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1$. Для інших пар на підставі властивості 1^0 маємо: $\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{i}=0$.

2. Знаходимо добуток $\bar{a}\cdot\bar{b}$, подаючи вектори у формі (6.6) і використовуючи розподільний закон:

$$\begin{cases}\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\\ \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\end{cases}\Rightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\right)\cdot\left(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\right).$$

Розкриваємо дужки й отримуємо:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{6.12}$$



Отже, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат. Це повністю збігається з означенням скалярного

добутку
n-вимірних векторів.

Як наслідок із (6.12) при $\bar{a} = \bar{b}$ одержуємо значення модуля вектора (6.5) аналітичним шляхом:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Визначимо ***кут між двома ненульовими векторами*** $\bar{a}$ ***і*** $\bar{b}$, що задані в координатній формі.

Для цього скористаємось означенням скалярного добутку (6.7) і співвідношенням (6.5). Отримуємо:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi \ \Rightarrow\ \cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{a \cdot b}\ .$$

Отже, косинус кута між двома векторами визначається формулою:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\ . \qquad (6.13)$$

Звідси $\varphi = \arccos(\cos\varphi)$ $(0 \le \varphi \le \pi)$.



Як наслідок із співвідношенням (6.13) отримаємо ***критерій ортогональності*** двох векторів, що задані у координатній формі:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0\,. \qquad (6.14)$$



Визначимо умови, за яких вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, що задані в координатній формі, колінеарні. Із умови колініарності двох векторів $\bar{a} = k\bar{b}$ маємо ***критерій колінеарності*** цих векторів:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}\,. \qquad (6.15)$$

Векторний добуток двох векторів. Нехай $\bar{a}$, $\bar{b}$ – вектори в $\mathbf{R}^3$ ($\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$), що визначають деяку площину ρ. Вектор $\bar{s}$ називається ***векторним добутком*** векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$

$$\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b},$$

якщо вектор $\vec{s}$ задовольняє умови:

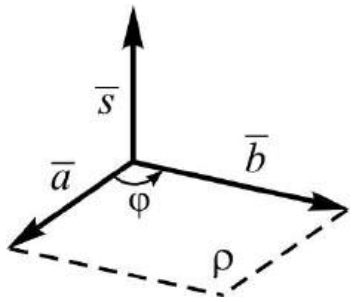


Рис. 6.8

1) модуль його чисельно дорівнює площі паралелограма, що побудований на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах;

2) він є перпендикулярним площині паралелограма і напрямлений таким чином, що з його кінця поворот вектора $\bar{a}$ до суміщення з вектором $\bar{b}$ найкоротшим шляхом відбувається проти руху годинникової стрілки (рис. 6.8).

Векторний добуток позначається символами: $\bar{a} \times \bar{b}$, $[\bar{a}, \bar{b}]$, $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Отже, вектор $\vec{s}$ є векторним добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:

$$|\bar{s}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi \ ; \ \bar{s} \perp \rho,$$

де $\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$ – найменший із кутів $(0 < \varphi < \pi)$, що відповідає суміщенню вектора $\bar{a}$ з вектором $\bar{b}$ шляхом повороту його проти годинникової стрілки.

Основні властивості векторного добутку випливають з його означення.

$1^{0.}$. Векторний добуток ненульових векторів дорівнює нуль-вектору тоді і тільки тоді, коли вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ є колінеарними:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a} = k\bar{b}. \qquad (6.16)$$



Тобто ***критерієм колінеарності*** векторів є рівність нульовому вектору їх векторного добутку.

2^0. Векторні добутки з різним порядком співмножників є взаємно протилежними векторами:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\left(\bar{b} \times \bar{a}\right). \tag{6.17}$$

Це означає, що векторний добуток не підпорядковується переставному (комутативному) закону.

3^0. Векторний добуток підпорядковується ***асоціативному (сполучному)*** закону відносно скалярного множника і ***дистрибутивному* (*розподільному*)** закону відносно додавання:

$$\lambda\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = \left(\lambda \bar{a}\right) \times \bar{b} = \bar{a} \times \left(\lambda \bar{b}\right); \quad \bar{a} \times \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}\,. \tag{6.18}$$

Знайдемо ***векторний добуток векторів*** $\bar{a}$ ***і*** $\bar{b}$***, які задані у координатній формі:***

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \bar{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

1. Визначаємо векторні добутки ортів $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (рис. 6.9).

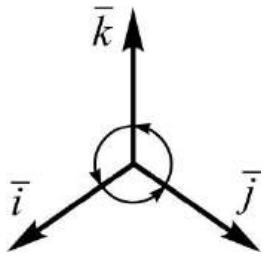


Рис. 6.9

Векторний добуток однойменних векторів за властивістю 1^0 дає нуль-вектор: $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$. Однак усі векторні добутки різнойменних одиничних векторів даватимуть теж одиничні вектори, бо їх модулі чисельно дорівнюють площі квадрата, стороною якого є одиничний вектор.

Напрям добутку кожної пари ортів або збігатиметься з третім ортом, або буде протилежним йому, а саме:

$$\begin{aligned} &\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}; \\ &\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}, \quad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}, \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Як приклад розглянемо добуток $\bar{i} \times \bar{j}$. Суміщення $\bar{i}$ з $\bar{j}$ найкоротшим шляхом (вказано дугою зі стрілкою на рис. 6.9) відбувається проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора $\bar{k}$, отже, $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$. Тоді за властивістю 2^0 $\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$.

2. Знаходимо добуток $\bar{a}\times\bar{b}$, подаючи вектори в алгебраїчній формі і використовуючи арифметичні властивості (6.18) та співвідношення (6.19):

$$\bar{s}=\bar{a}\times\bar{b}=\left(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\right)\times\left(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\right)=a_xb_y\left(\bar{i}\times\bar{j}\right)+$$
$$+a_xb_z\left(\bar{i}\times\bar{k}\right)+a_yb_x\left(\bar{j}\times\bar{i}\right)+a_yb_z\left(\bar{j}\times\bar{k}\right)+a_zb_x\left(\bar{k}\times\bar{i}\right)+a_zb_y\left(\bar{k}\times\bar{j}\right)=$$
$$=a_xb_y\bar{k}-a_xb_z\bar{j}-a_yb_x\bar{k}+a_yb_z\bar{i}+a_zb_x\bar{j}-a_zb_y\bar{i}=$$
$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\bar{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\bar{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\bar{k}.$$

Множники при $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – це розкриті визначники 2-го порядку, тому

$$\bar{s}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\bar{k}. \qquad (6.20)$$

Коефіцієнти при одиничних векторах у співвідношенні (6.20) є координатами вектора $\bar{s}$ як векторного добутку векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$.



Якщо символи $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ у співвідношенні (6.20) вважати елементами першого рядка визначника 3-го порядку, то остаточно отримаємо:

$$\bar{s}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$ – ***подання*** $\bar{a}\times\bar{b}$ ***у вигляді визначник*****а**. (6.21)

Коефіцієнти при одиничних векторах у співвідношенні (6.20) відповідають координатам вектора $\bar{s}$ як векторного добутку векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$.



Знайдемо векторний добуток векторів $\bar{a}=(1,-2,3)$ та $\bar{b}=(2,0,-3)$:

$$\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}\Rightarrow\left(s_x=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & -3\end{vmatrix}=6,\ \ s_y=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -3\end{vmatrix}=9,\ \ s_z=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=4\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow \bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} = (6,\ 9,\ 4)$.

Визначаючи модуль векторного добутку $|\bar{s}| = \sqrt{36+81+16} = \sqrt{133}$, знаходимо площу паралелограма, побудованого на цих векторах.

Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається векторний добуток двох із них, помножений скалярно на третій вектор, тобто: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$, $(\bar{a} \times \bar{c}) \cdot \bar{b}$, $(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a}$ і т. д. ***Мішаний добуток*** можна позначати трійкою векторів, у якій перші два елементи вважають пов'язаними векторним добутком, а результат векторного добутку домножують на третій вектор скалярно, тобто $(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a})$ – це все одно, що $(\bar{c} \times \bar{b}) \cdot \bar{a}$. Зрозуміло, що результатом мішаного добутку є скаляр, оскільки векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$ є вектором (позначимо його через $\bar{s}$), а добуток $\bar{s} \cdot \bar{c}$ дає скаляр.

Геометричний зміст мішаного добутку. Нехай $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ – некомпланарні вектори.

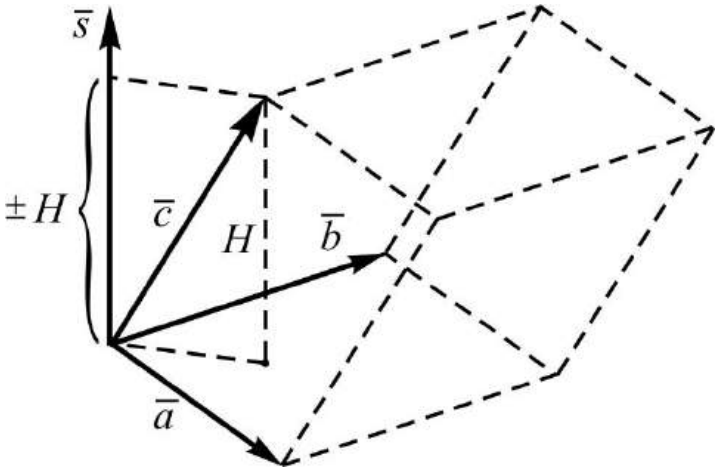


Рис. 6.10

Побудуємо на цих векторах як на ребрах паралелепіпед (рис. 6.10). Вектор $\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b}$ за довжиною чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах. Цей вектор є перпендикулярним площині паралелограма. Згідно з (6.11) скалярний добуток $\bar{s} \cdot \bar{c}$ можна подати як добуток модуля $|\bar{s}|$ та проекції вектора $\bar{c}$ на вісь, що визначається вектором $\bar{s}$:

$$(\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{s} \cdot \bar{c} = |\bar{s}| \cdot |\bar{c}| \cos\left(\bar{s}\,\hat{}\,\bar{c}\right) = |\bar{s}| \cdot np_{\bar{s}}\,\bar{c}, \qquad (6.22)$$

де $np_{\bar{s}}\,\bar{c}$ є додатним числом, якщо кут між $\bar{s}$ і $\bar{c}$ гострий, і від'ємним, якщо кут тупий. За модулем ця проекція дорівнює висоті паралелепіпеда H.

Отже, ***модуль мішаного добутку*** трьох векторів чисельно дорівнює ***об'єму паралелепіпеда*** V, який побудовано на векторах як на ребрах:

$$\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right| = |s|\cdot H = V. \qquad (6.23)$$

Основні властивості мішаного добутку випливають із його означення і геометричного тлумачення.

1^0. Мішаний добуток ненульових векторів дорівнює нулю, якщо:

а) принаймні два з трьох векторів колінеарні;

б) вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарні.

Отже, для ненульових векторів рівність $\left(\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right)=0$ є ***необхідною і достатньою умовою їх компланарності.***

Перш ніж перейти до розгляду інших властивостей мішаного добутку, сформулюємо допоміжне означення.

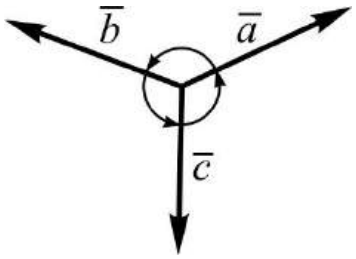


Рис. 6.11

Пов'яжемо із зображеними на площині векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ коло, як показано на рис. 6.11. Перелічення векторів, починаючи з будь-якого, відповідно до додатного або від'ємного руху по колу (рис. 6.11), назвемо відповідно ***додатним*** або ***від'ємним переставленням*** векторів. Додатне переставлення називають ***циклічним***, або ***коловим***.

2^0. Циклічне переставлення трьох співмножників мішаного добутку не змінює його величини, а від'ємне переставлення – міняє його знак на протилежний:

$$(\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}) = (\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a}) = (\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b}) = -(\bar{a}\ \bar{c}\ \bar{b}) = -(\bar{b}\ \bar{a}\ \bar{c}) = -(\bar{c}\ \bar{b}\ \bar{a}). \quad (6.24)$$

Знайдемо ***мішаний добуток*** векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ та $\bar{c}$, що задані у координатній формі:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \bar{b} = (b_x, b_y, b_z),\ \bar{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

За означенням мішаного добутку та поданням векторного і скалярного добутків у координатній формі маємо:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{s}\cdot\bar{c}=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)\cdot(c_x,c_y,c_z)=$$

$$=c_x\cdot\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-c_y\cdot\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+c_z\cdot\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Аналізуючи отриману суму добутків, маємо розклад визначника 3-го порядку матриці, складеної з координат векторів, за елементами третього рядка, тобто

$$(\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (6.25)$$



Звідси випливає, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ***компланарні*** тоді і лише тоді, коли визначник 3-го порядку, елементами рядків якого є координати цих векторів, дорівнює нулю (див. властивість 1^0):

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0. \qquad (6.26)$$



За допомогою мішаного добутку векторів легко установити, чи належать ***чотири точки A, B, C, D одній площині.*** Для цього слід перевірити виконання умови компланарності трьох векторів зі спільним початком в одній із точок.

6.4. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

Задача про визначення довжини відрізка. Знайти довжину відрізка A_1A_2, якщо відомі координати його точок: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Цю задачу можна також розглядати як задачу про відшукання відстані між двома точками.

1. Введемо в розгляд вектор $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$ з початком A_1 і кінцем A_2 і допоміжні вектори $\bar{b} = \overline{OA_1}$, $\bar{c} = \overline{OA_2}$ (рис. 6.12).

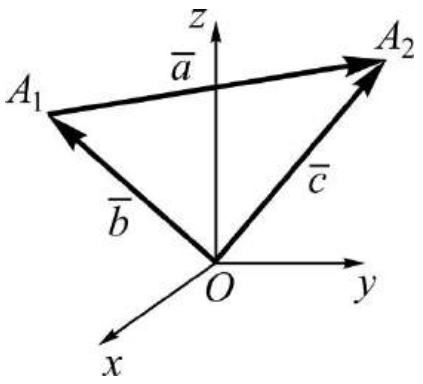


Рис. 6.12

2. Визначимо координати векторів $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{a}$. Оскільки початки векторів $\bar{b}$, $\bar{c}$ збігаються з початком координат, то координати цих векторів збігаються з координатами відповідно точок A_1 та A_2. Тобто маємо що вектори $\bar{b} = \overline{OA_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{c} = \overline{OA_2} = (x_2, y_2, z_2)$ є відповідно ***радіус-векторами*** точок A_1, A_2. Тоді вектор $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$ є різницею векторів $\bar{c}$ і $\bar{b}$,

тобто:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

3. Знаходимо модуль вектора $\bar{a}$, що і відповідає довжині відрізка A_1A_2:

$$|\bar{a}| = \left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (6.27)$$

Задача про визначення площі трикутника. Знайдемо площу трикутника, заданого координатами вершин: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

Позначимо вершини трикутника: A_1, A_2 та A_3. За аксіомою стереометрії відомо, що три точки у просторі визначають площину і до того ж тільки одну. Для спрощення викладу, яке не порушує загальності, домовимось розглядати трикутник $A_1A_2A_3$, що належить площині xOy: $A_1(x_1, y_1, 0)$, $A_2(x_2, y_2, 0)$ та $A_3(x_3, y_3, 0)$.

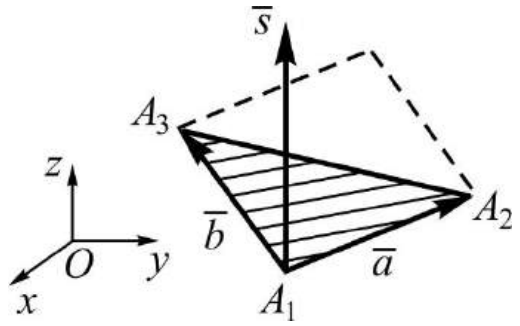


Рис. 6.13

1. Введемо в розгляд такі вектори (рис. 6.13):

$$\bar{a} = \overline{A_1A_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0\right),$$

$$\bar{b} = \overline{A_1A_3} = \left(x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0\right)$$

і знайдемо їх векторний добуток

$$\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b}\,.$$

За співвідношенням (6.20) маємо:

$$\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} = \left(0,\ 0,\ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right) = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \bar{k}\,.$$

2. Обчислимо модуль вектора $\bar{s}$, що чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудовано на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ як на сторонах (див. рис. 6.13), а її половина є площею трикутника:

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2} = \pm \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Отже, площа трикутника:

$$S_\Delta = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \qquad (6.28)$$

Знак «+» чи «–» береться залежно від того, яким буде визначник – додатним чи від'ємним.

Якщо трикутник належить не площині xOy, а будь-якій іншій площині у просторі, то його площу теж можна знайти за формулою: $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$.

Приклад Знайдемо площу трикутника з вершинами $A_1(-3,\ 5,\ 1)$, $A_2(2,\ 0,\ -3)$, $A_3(4,\ -1,\ 5)$. Введемо до розгляду вектори:

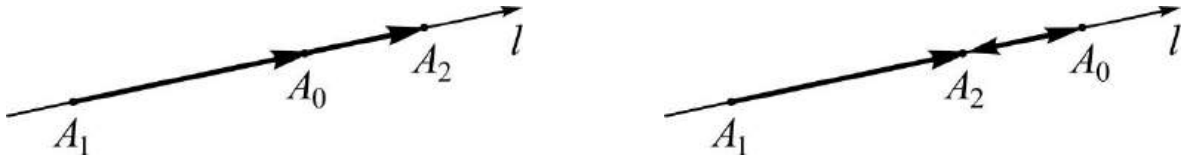
$$\bar{a} = \overline{A_1A_2} = (5, -5, -4) \text{ та } \bar{b} = \overline{A_1A_3} = (7, -6, 4).$$

Визначимо їх векторний добуток $\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -5 & -4 \\ 7 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (-44, -48, 5)$.

Тоді

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{44^2 + 48^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4265} \approx 33 \text{ (кв. од.)}.$$

Задача про поділ відрізка у заданому відношенні. Перш ніж перейти до розв'язання цієї задачі, визначимо поняття «поділ відрізка у заданому відношенні». Поділ заданого відрізка у відношенні $1:1$ означає, що його треба поділити на дві рівні за довжиною частини, тобто навпіл, і не суттєво від якого з двох кінців відрізка відкладати його половину. Якщо ж розглядати, наприклад, питання поділу на частини медіан трикутника точкою їх перетину, то це відношення дорівнює $2:1$, якщо відлік вести від вершини трикутника. Отже, у за-гальному випадку треба визначитись, яку з двох кінцевих точок відрізка приймати за початок, а яку за кінець. Тому доцільно з відрізком A_1A_2 пов'язувати вісь l, згідно з напрямом якої визначається напрям на відрізку, що перетворює його у вектор (рис. 6.14). При цьому, якщо точка A_0 належить відрізку A_1A_2 (рис. 6.14а), то кажуть, що вона здійснює ***внутрішній поділ*** відрізка на частини, якщо не належить (рис. 6.14б) – то ***зовнішній***.



а) б)

Рис. 6.14

Відношення λ, у якому точка A_0 поділяє напрямлений відрізок, тобто вектор $\overline{A_1A_2}$, визначається за формулою:

$$\lambda = \frac{np_{\overline{A_1A_2}}\,\overline{A_1A_0}}{np_{\overline{A_1A_2}}\,\overline{A_0A_2}}, \qquad (6.29)$$

де $\lambda > 0$, якщо A_0 здійснює внутрішній поділ відрізка на частини; та $\lambda < 0$, якщо A_0 здійснює зовнішній поділ.

Задача полягає в знаходженні координат точки $A_0(x, y, z)$, **що поділяє відрізок** A_1A_2 **у відношенні** λ. Відрізок A_1A_2 задано координатами початку – $A_1(x_1, y_1, z_1)$ та кінця $-A_2(x_2, y_2, z_2)$.

Нехай точкам $A_1; A_0; A_2$ відповідають радіус-вектори $\vec{r}_1, \vec{r}, \vec{r}_2$. Тоді вектор $\overrightarrow{A_1A_0} = \lambda\overrightarrow{A_0A_2}$,

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda\left(\vec{r}_2 - \vec{r}\right).$$

З цієї векторної рівності знайдемо вектор $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1+\lambda},$$

або у координатах:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (6.30)$$

Звідси, якщо відрізок поділити на дві рівні частини точкою C, то координати точки C можуть бути знайдені таким чином:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (6.31)$$

Доведіть самостійно, що координати точки перетину медіан трикутника, якщо його вершини задано векторами $\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{r}_3(x_3, y_3, z_3)$, обчислюються за формулами:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},\ z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}. \qquad (6.32)$$



Ключові терміни

Вектор; зв’язаний та вільний вектори; геометрична форма представлення вектора; напрямні косинуси; довжина вектора; координатна форма представлення вектора; проекція вектора на вісь; координати вектора; нульовий

вектор; одиничний вектор; орт; алгебраїчна форма представлення вектора; рівні вектори; протилежні вектори; колінеарні та компланарні вектори.

Лінійні операції над векторами; сума векторів; правило паралелограма для визначення суми векторів; різниця векторів; добуток вектора та скаляра.

Скалярний добуток векторів; векторний добуток векторів; мішаний добуток векторів; геометричне тлумачення операцій над векторами.



Запитання для самоперевірки

1. Що є об’єктом і предметом вивчення векторної алгебри?
2. Яка форма подання вектора називається геометричною і що таке модуль вектора?
3. Яким умовам згідно з означенням повинні відповідати рівні, протилежні, колінеарні, компланарні вектори?
4. Що розуміють під сумою, різницею, добутком вектора та скаляра?
5. Які операції над векторами називають лінійними?
6. Яка форма представлення вектора називається координатною?
7. Як визначається модуль вектора, який задано координатами?
8. Дайте визначення скалярного добутку двох векторів.
9. Як за скалярним добутком відшукати кут між двома векторами?
10. Що називають векторним добутком двох векторів?
11. Як визначається векторний добуток векторів за їх координатами?
12. Дайте визначення мішаного добутку трьох векторів.
13. Який геометричний зміст мішаного добутку векторів?
14. Як визначається мішаний добуток векторів у координатній формі?
15. Як визначають координати точки, що поділяє даний відрізок у заданому відношенні?

Глава 7. Пряма на площині

7.1. Поняття про рівняння лінії на площині. Основні задачі аналітичної геометрії

Будь-яку лінію L на площині xOy в аналітичній геометрії розглядають як геометричне місце точок, які мають певні спільні для даної лінії властивості.

Посилаючись на ці геометричні властивості, встановлюють співвідношення між координатами x і y точок лінії.

Рівняння $\Phi(x, y) = 0$ називається ***рівнянням лінії*** L, якщо координати будь-якої точки $M(x, y)$, що належить даній лінії, задовольняють це рівняння. При цьому координати жодної точки, що не належать цій лінії, не задовольняють рівняння. Виконується і обернене ствердження, тобто, якщо пара чисел (x, y) задовольняє рівняння, то x і y є координатами точки, що належить лінії.

Отже, рівнянням лінії на площині є рівняння виду

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{7.1}$$

де Φ – закон, який відображує властивість точок лінії.

Змінні x і y, що входять у рівняння лінії, називаються ***поточними координатами*** точок лінії: під x, y розуміються координати будь-якої точки лінії.



Складемо рівняння ***кола*** радіуса R з центром у точці $C(x_0, y_0)$ (рис. 7.1).

Колом називається лінія, усі точки якої знаходяться на однаковій відстані від заданої точки, яку називають центром ***кола.*** Отже, відома геометрична властивість точок, що належать даній лінії. Застосуємо стандартну методику розв'язання таких задач, а саме:

1) вибираємо систему координат;

2) довільну точку лінії позначаємо $M(x, y)$;

3) записуємо аналітично умову, якій задовольняє будь-яка точка лінії.

Нехай $M(x, y)$– довільна точка кола, тоді $CM = R$,

$$CM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

або

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{7.2}$$

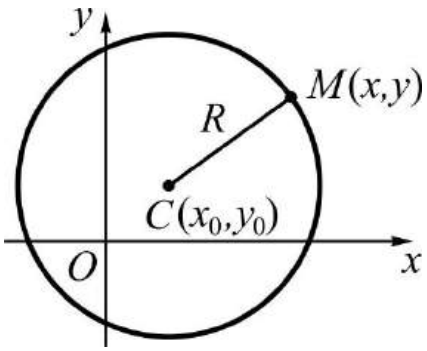


Рис. 7.1

Рівняння (7.2) називають ***канонічним рівнянням кола***. Якщо центр кола лежить у початку координат, то його канонічне рівняння має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (7.3)$$

Приклад. Знайдемо рівняння лінії, всі точки якої рівновіддалені від двох точок $A_1(1;5)$ і $A_2(5;1)$.

Нехай точка $M(x;y)$ належить лінії (рис. 7.2).

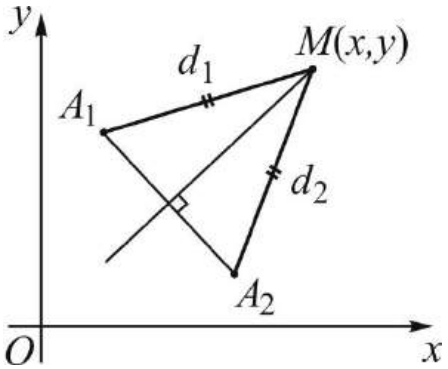


Рис. 7.2

Знайдемо відстань між двома точками

$$A_1M = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2}, \quad A_2M = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}.$$

За умовою $A_1M = A_2M$, тобто

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}.$$

Спростимо це рівняння. Підносячи до квадрату обидві частини, маємо

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = (x-5)^2 + (y-1)^2,$$

далі

$$x^2-2x+1+y^2-10y+25=x^2-10x+25+y^2-2y+1,$$

$$8x-8y=0,\ \ y=x.$$

Одержали рівняння прямої лінії, яка перпендикулярна відрізку A_1A_2 і поділяє його навпіл.

До ***основних задач*** аналітичної геометрії на площині відносять такі задачі:

1. Скласти рівняння заданої кривої за геометричною властивістю точок, що їй належать. Розв'язання цієї задачі розглянуто на прикладі ***кола***. Саме таким чином складаються рівняння відомих ліній, таких, як пряма, гіпербола, парабола, еліпс. Розгляд таких ліній і є предметом даного розділу.

2. Побудувати лінію за заданим її рівнянням. Друга задача в загальному випадку не дає відповіді на питання щодо геометричних властивостей цієї лінії і є задачею математичного аналізу.

7.2. Різновиди рівнянь прямої на площині

Поняття «пряма лінія», або просто «пряма», є первинним у геометрії. Із аксіом елементарної геометрії відомо: через дві точки можна провести пряму і тільки одну; через точку, що не належить прямій, можна провести пряму, яка паралельна початковій прямій і до того ж тільки одну, та ін. Кожна пряма лінія l в системі координат xOy на площині має певні геометричні властивості, відповідно до яких можна одержати рівняння прямої у різних виглядах.

Задамо на площині систему координат xOy і деяку пряму l.

1^0. Рівняння прямої із заданим нормальним вектором.

Будь-який ненульовий вектор $\overline{N}=(A,B)$, перпендикулярний до прямої, називається ***нормальним вектором*** прямої (рис. 7.3). Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ і має нормальний вектор $\overline{N}=(A,B)$.

Для цього візьмемо на прямій довільну точку $M(x,y)$, яка відмінна від $M_0(x_0,y_0)$, і введемо в розгляд вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$.

З умови ортогональності векторів $\overline{N}$ і $\overline{M_0M}$ маємо:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (7.4)$$

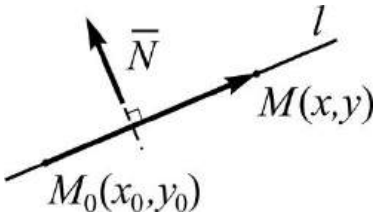


Рис. 7.3

Зауваження. Якщо в (7.4) розкрити дужки, то отримаємо стандартний запис лінійного рівняння з двома змінними:

$$Ax + By + C = 0, \tag{7.5}$$

де $C = -Ax_0 - By_0$ – вільний член рівняння (деяке число).

2^0. Загальне рівняння прямої та його дослідження.

Рівняння , що має вигляд

$$Ax + By + C = 0,$$

де $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, лінійне відносно змінних x і y, називається ***загальним рівнянням*** прямої на площині, або рівнянням прямої у ***загальному вигляді.***

Теорема 7.1. Будь-яка пряма описується рівнянням (7.5); кожне рівняння виду (7.5) визначає пряму лінію.

Доведення базується на рівнянні (7.4).

1. Довільну пряму можна описати рівнянням

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Звідки (див. (7.5)) маємо:

$Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої.

2. Нехай задано рівняння (7.4), де $A^2 + B^2 \neq 0$ (оскільки вектор $\overline{N} = (A, B)$ ненульовий), і покладемо $B \neq 0$. Тоді

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow A(x - 0) + B\left(y - \frac{-C}{B}\right) = 0. \tag{7.6}$$

Рівняння (7.6) визначає пряму, яка проходить через точку $M_0\left(0,-C/B\right)$ і має нормальний вектор $\overline{N}=\left(A,B\right)$.

Дослідження загального рівняння прямої передбачає з'ясування особливостей розташування прямої відносно координатних осей залежно від значення тих чи інших із чисел A, B, C:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \left(A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0\right)\Rightarrow\ Ax+By+C=0 \text{ – рівняння прямої загального положення;}\\
&2)\ \left(A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0\right)\Rightarrow\ \left|\ \overline{N}=(0,B)\perp Ox\right|\ \Rightarrow\ By+C=0\ \Rightarrow\\
&\Rightarrow\ y=-\frac{C}{B}\ \Rightarrow\ l\,||\,Ox;\\
&3)\ \left(A\neq 0,\ B=0,\ C\neq 0\right)\Rightarrow\ \left|\ \overline{N}=(A,0)\perp Oy\right|\ \Rightarrow\ Ax+C=0\ \Rightarrow\\
&\Rightarrow\ x=-\frac{C}{A}\ \Rightarrow\ l\,||\,Oy;\\
&4)\ \left(A\neq 0,\ B\neq 0,\ C=0\right)\Rightarrow\ Ax+By=0\ \Rightarrow\ y=-\frac{A}{B}x\ \Rightarrow\\
&\Rightarrow\ O(0,0)\in l;\\
&5)\ \left(A=C=0,\ B\neq 0\right)\Rightarrow\ By=0\ \Rightarrow\ y=0 \text{ – } \textit{рівняння осі } Ox;\\
&6)\ \left(B=C=0,\ A\neq 0\right)\Rightarrow\ Ax=0\ \Rightarrow\ x=0 \text{ – } \textit{рівняння осі } Oy.
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

3⁰. Канонічне та параметричне рівняння прямої.

Будь-який ненульовий вектор $\bar{s}=\left(m,n\right)$, що паралельний прямій l або лежить на ній, називається ***напрямним вектором*** прямої. Координати напрямного вектора подаються так:

$$m=\left|\bar{s}\right|\cdot\cos\alpha,\quad n=\left|\bar{s}\right|\cdot\cos\beta=\left|\bar{s}\right|\cdot\sin\alpha,\tag{7.8}$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – напрямні косинуси вектора $\bar{s}=\left(m,n\right)$.

Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\left(x_0,y_0\right)$ і має напрямний вектор $\bar{s}=\left(m,n\right)$. Для цього виберемо на прямій l (рис. 7.4)

довільну точку $M(x, y)$, що не збігається з точкою M_0, і введемо в розгляд вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$.

Вектори $\overline{M_0M}$ і $\bar{s}$, який є напрямним вектором прямої, колінеарні, тому їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{7.9}$$

Ми отримали рівняння прямої**,** що має назву ***канонічного***.

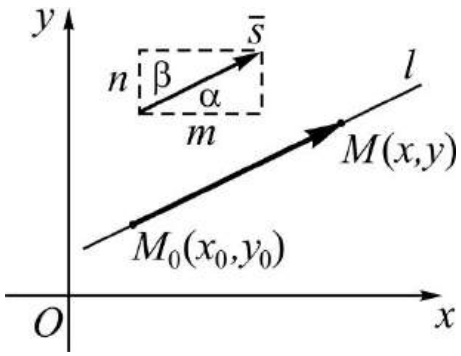


Рис. 7.4

Наслідки:

1) якщо за напрямний вектор взяти одиничний вектор $\bar{s}_0$, то $m = \cos\alpha$, $n = \sin\alpha$, а рівняння (7.9) набуває вигляду:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha}, \tag{7.10}$$

це канонічне рівняння прямої з одиничним напрямним вектором;

2) якщо в (7.9) покласти коефіцієнт пропорційності рівним t, то отримаємо:

$$\left(\frac{x - x_0}{m} = t,\ \frac{y - y_0}{n} = t\right) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt\ ,\ t \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{7.11}$$

Співвідношення (7.11) називають ***параметричним рівнянням прямої.***

У випадках, коли одна з координат m або n, дорівнює нулю, отримуємо параметричні рівняння прямих, що паралельні відповідно осі Oy або осі Ox.

4^0. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. З цією метою виберемо на прямій l (рис. 7.5) довільним чином точку $M(x, y)$, яка відмінна від точок M_1 і M_2, і введемо в розгляд вектори $\overline{M_1M}$ і $\overline{M_1M_2}$:

$$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1),$$

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Оскільки ці вектори колінеарні, то шукане рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (7.12)$$

Рівняння прямої (7.12) називають ***рівнянням прямої, що проходить через дві дані точки.***

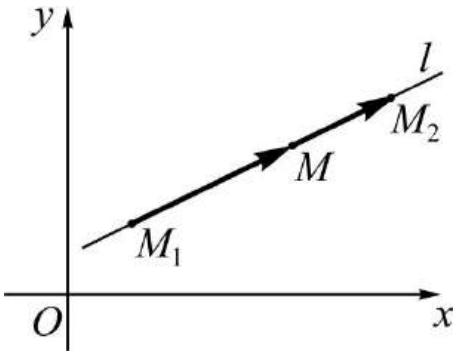


Рис. 7.5

Зауважимо, що вектор $\overline{M_1M_2}$ є напрямним вектором прямої, як і протилежний вектор $\overline{M_2M_1}$.

5^0. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямі.

Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і нахилена до осі *Ox* під кутом α (рис. 7.6). Розв'язання задачі базується на канонічному рівнянні прямої (7.9) і співвідношенні (7.8):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0) \Rightarrow \left| \frac{n}{m} = \frac{|\bar{s}| \sin\alpha}{|\bar{s}| \cos\alpha} = tg\alpha \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - y_0 = \operatorname{tg}\alpha \cdot (x - x_0).$$

Звідси

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0),$$

де $k = \operatorname{tg}\alpha$ – ***кутовий коефіцієнт*** прямої.

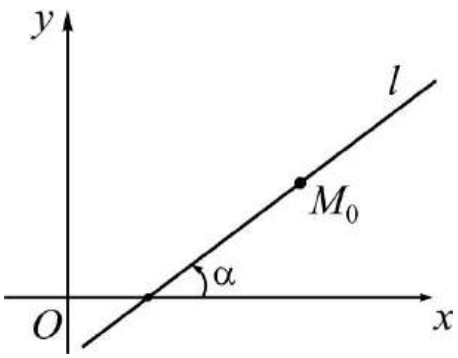


Рис. 7.6

Рівняння прямої у вигляді:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0), \qquad (7.13)$$

при будь-яких значеннях параметра $k \in R$ визначає нескінченну множину прямих, тому його називають також ***рівнянням сім'ї прямих*** з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$.

6^0. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Складемо рівняння прямої, яка нахилена до осі Ox під кутом α і відтинає на осі Oy відрізок величиною b (рис. 7.7).

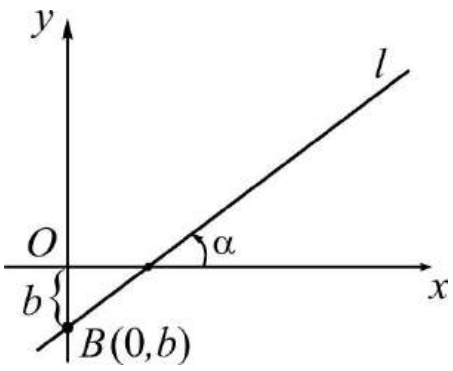


Рис. 7.7

Розв'язок отримуємо як наслідок із (7.13), якщо за x_0, y_0 взяти координати точки $B(0, b)$:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0) \Rightarrow \left| \begin{matrix} x_0 = 0 \\ y_0 = b \end{matrix} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - b = k \cdot x \Rightarrow y = k \cdot x + b.$$

Рівняння

$$y = k \cdot x + b \qquad (7.14)$$

називають ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.***

7^0. Рівняння прямої у відрізках на осях.

Побудувати рівняння прямої, яка перетинає осі координат Ox і Oy відповідно в точках $A(a,0)$ і $B(0,b)$ (рис. 7.8).

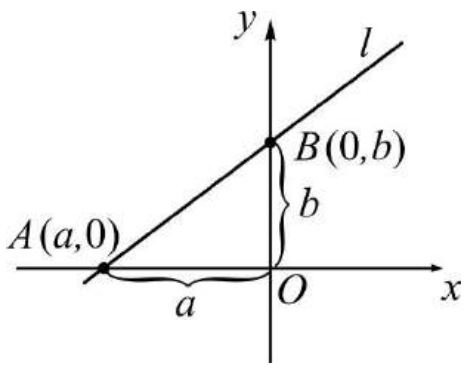


Рис. 7.8

Для цього скористаємося рівнянням (7.12), вибираючи замість точок M_1 і M_2 точки $A(a,0)$ і $B(0,b)$:

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0} \Rightarrow \frac{x}{-a}+1=\frac{y}{b}\ .$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (7.15)$$

Рівняння (7.15) називається ***рівнянням прямої у відрізках*** на осях.

8^0. Нормальне рівняння прямої. Одержимо рівняння прямої за умов: відстань від початку координат до прямої дорівнює p $(p>0)$, нормальний вектор до прямої l утворює є віссю Ox кут α (рис. 7.9). Для цього виберемо на прямій довільну точку $M(x,y)$ і введемо до розгляду вектор $\overline{OM}=(x,y)$. Нехай l_0 – пряма, яка має одиничний напрямний вектор $\bar{s}_0=(\cos\alpha,\sin\alpha)$. На цій прямій відкладемо відрізок довжиною p.

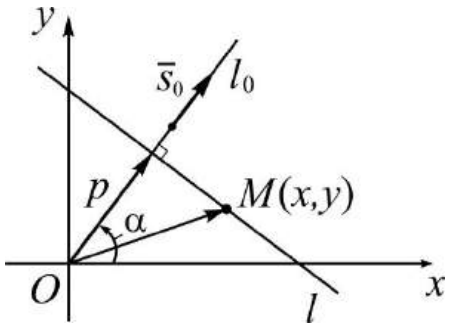


Рис. 7.9

Використовуючи скалярний добуток двох векторів, отримуємо з одного боку

$$\overline{OM}\cdot\bar{s}_0=x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha\ ,$$

а з іншого – $\overline{OM}\cdot\bar{s}_0=\left|\bar{s}_0\right|\cdot np_{l_0}\overline{OM}=p$.

Таким чином, шукане рівняння має вигляд:

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha=p\ ,$$

або

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0. \qquad (7.16)$$

Відзначимо ***властивості*** нормального рівняння прямої (7.16):

1) сума квадратів коефіцієнтів при поточних координатах дорівнює одиниці $(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1)$;

2) вільний член рівняння завжди від'ємний $(-p<0)$.

Ці властивості використовуються при зведенні загального рівняння прямої до нормального вигляду.

7.3. Основні задачі на пряму лінію на площині

1. Взаємне розташування двох прямих. Нехай дві прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями: $A_1x+B_1y+C_1=0\ (l_1)$, $A_2x+B_2y+C_2=0\ (l_2)$. Встановити умови: 1) перетину; 2) паралельності; в) збігу двох прямих.

Задача зводиться до дослідження системи двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=-C_1, \\ A_2x+B_2y=-C_2, \end{cases}$$

кожне з рівнянь якої є рівнянням відповідної прямої.

1. Якщо прямі перетинаються, то вони мають спільну точку і до того ж тільки одну. Це означає, що координати цієї точки задовольняють обом рівнянням, отже, система сумісна і має єдиний розв’язок.

За правилом Крамера визначник цієї системи Δ повинен бути відмінним від нуля. Звідси маємо ***умову перетину*** двох прямих, що задані загальними рівняннями:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=A_1B_2-B_1A_2\neq 0.$$

Звідси $$\frac{A_1}{B_1}\neq\frac{A_2}{B_2}. \qquad (7.17)$$

2. Якщо прямі паралельні, то вони не мають спільних точок. Це означає, що система несумісна. Тоді $\Delta=0$ і треба перевірити умову:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}. \qquad (7.18)$$

Якщо умова (7.18) виконується, то вона є ***умовою паралельності*** двох прямих.

3. Якщо прямі збігаються, то вони мають безліч спільних точок. Це означає, що система сумісна і невизначена. Тоді маємо ***умову збігу*** двох прямих:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{7.19}$$

2. Кут між двома прямими, що задані загальними рівняннями. Нехай прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \ (l_1); \ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \ (l_2).$$

Визначити кут між прямими.

Кутом між двома прямими будемо називати один із суміжних кутів між нормальними векторами $\overline{N}_1 = (A_1, B_1)$ і $\overline{N}_2 = (A_2, B_2)$ (рис. 7.10) прямих.

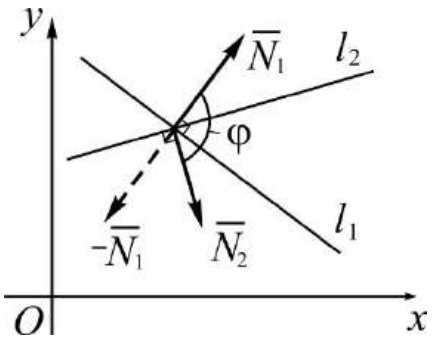


Рис. 7.10

За формулою кута між векторами $\overline{N}_1 = (A_1, B_1)$ і $\overline{N}_2 = (A_2, B_2)$ маємо:

$$\cos\varphi = \cos\left(\overline{N}_1 \hat{} \overline{N}_2\right) = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{N_1 \cdot N_2} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Звідки

$$\varphi = \arccos(\cos\varphi) = \arccos\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{7.20}$$

Якщо нормальні вектори $\overline{N}_1$ і $\overline{N}_2$ утворюють тупий кут (див. рис. 7.10), то і кут між прямими тупий; якщо за нормальний вектор прямої l_1 вибрати вектор $-\overline{N}_1$, то в цьому разі φ – гострий кут.

Із (7.20) отримуємо ***умову ортогональності*** прямих:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0\,. \qquad (7.21)$$



Оскільки кожне з рівнянь, наведених в 1^0 – 6^0, допускає зображення у загальному вигляді, то формули (7.17) – (7.21) можна записати через параметри відповідного різновиду рівняння прямої.

Визначимо кут між прямими, що задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами (рис. 7.11):

$$y = k_1x + b_1 \quad (l_1)\ , \qquad \text{де } k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1,\ \alpha_1 = \left(l_1\,\hat{}\,Ox\right),$$

$$y = k_2x + b_2 \quad (l_2), \qquad \text{де } k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2,\ \alpha_2 = \left(l_2\,\hat{}\,Ox\right).$$

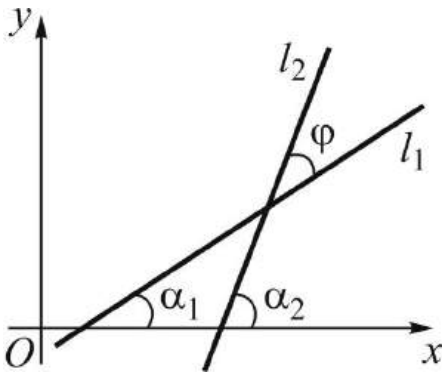


Рис. 7.11

Тоді кут між прямими можна обчислити за формулою:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}\,.$$

Звідси маємо: дві прямі ***паралельні***, якщо $k_1 = k_2$, а ***перпендикулярні*** заумови: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

3. Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду.

Нехай загальне рівняння прямої l має вигляд:

$$Ax + By + C = 0. \tag{7.22}$$

Зведемо рівняння (7.22) до нормального вигляду (7.16).

Згідно з нормальним рівнянням прямої (7.16) коефіцієнтами рівняння при змінних x і y є координати одиничного нормального вектора прямої $\bar{N}_0(\cos\alpha, \cos\beta)$. Для виконання властивостей нормального рівняння прямої (7.16) домножимо загальне рівняння прямої (7.22) на $M = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{1}{\pm|\bar{N}|}$.

Знак дробу $\pm\dfrac{1}{|\bar{N}|}$ береться протилежним знаку вільного члена C загального рівняння прямої відповідно до другої властивості нормального рівняння прямої $(-p < 0)$.

Нормальним рівнянням прямої (7.22) буде

$$\frac{A}{\pm|\bar{N}|}x + \frac{B}{\pm|\bar{N}|}y + \frac{C}{\pm|\bar{N}|} = 0. \tag{7.23}$$

Число $\pm\dfrac{1}{|\bar{N}|}$ з певним знаком називається ***нормувальним множником*** M загального рівняння прямої.



Нехай пряма задана загальним рівнянням: $2x - 3y + 5 = 0$. Визначимо відстань від прямої до початку координат, для цього перейдемо від загального до нормального рівняння прямої.

Так, згідно з загальним рівнянням, пряма має нормальний вектор $\bar{N} = (2, 3)$. Знаходимо модуль нормального вектора і обчислюємо нормувальний множник. Оскільки вільний член загального рівняння прямої $C = 5 > 0$, то маємо $M = -1/|\bar{N}| = -1/\sqrt{2^2 + 3^2} = -1/\sqrt{13}$. Здійснюємо нормування загального рівняння, помножуючи ліву і праву частини рівняння на *M*, одержимо:

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{5}{\sqrt{13}} = 0.$$

За нормальним рівнянням відстань від початку координат до прямої дорівнює $p = 5/\sqrt{13}$.

4. Відстань від точки до прямої. Нехай пряма задана нормальним рівнянням: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Знайдемо відстань d від точки $M_0(x_0, y_0)$ до цієї прямої. Для цього на прямій (див. рис. 7.10) виберемо довільну точку $M(x, y)$ і введемо в розгляд вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Запишемо скалярний добуток векторів $\overline{M_0M}$ і $\overline{N}_0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$:

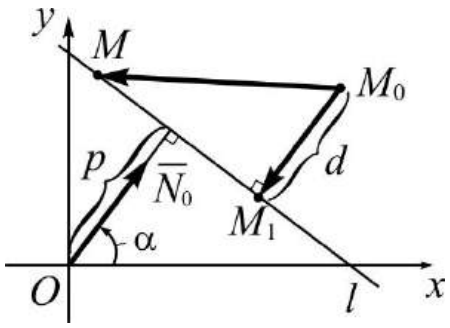


Рис. 7.12

$$\overline{M_0M} \cdot \overline{N}_0 = \left|\overline{N}_0\right| \cdot \text{ï ð}_{\overline{N}_0} \overline{M_0M} =$$

$$= \text{ï ð}_{\overline{N}_0} \overline{M_0M}, \text{ бо } \left|\overline{N}_0\right| = 1.$$

Оскільки $\left|\text{ï ð}_{\overline{N}_0} \overline{M_0M}\right| = \left|\overline{M_0M_1}\right| = d$ (рис. 7.12), то відстань d дорівнює модулю скалярного добутку векторів $\overline{M_0M}$ і $\overline{N}_0$:

$$d = \left|\overline{M_0M} \cdot \overline{N}_0\right| =$$

$$= \left|(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha\right| =$$

$$= \left|x\cos\alpha + y\sin\alpha - (x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha)\right|. \qquad (7.24)$$

Для будь-якої точки прямої виконується рівність: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, отже, остаточно отримуємо:

$$d = \left|x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p\right|. \qquad (7.25)$$

Якщо пряма описується загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то маємо:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|. \qquad (7.26)$$

5. Рівняння бісектрис кутів між двома прямими.

Нехай прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями:

$$A_1x+B_1y+C_1=0\ \ (l_1)$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0\ \ (l_2).$$

Знайдемо рівняння бісектрис кутів, що утворені цими прямими. Нагадаємо, що бісектриса кута є геометричним місцем точок однаково віддалених від сторін кута. Розв'язання ґрунтується на формулі (7.25) відстані від точки до прямої.

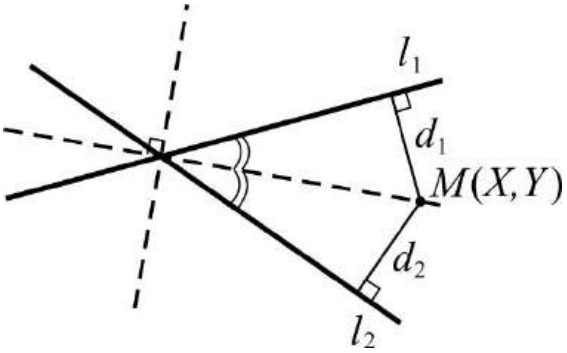


Рис. 7.13

Позначимо поточні координати точок бісектриси через X, Y і виберемо на ній довільну точку $M(X,Y)$ (рис. 7.13). За властивістю бісектрис кутів відстані d_1 і d_2 рівні між собою, тому на підставі (7.26) маємо:

$$\frac{1}{|\bar{N}_1|}|A_1X+B_1Y+C_1|=\frac{1}{|\bar{N}_2|}|A_2X+B_2Y+C_2|,$$

де $|\bar{N}_1|=\sqrt{A_1^2+B_1^2}$, $|\bar{N}_2|=\sqrt{A_2^2+B_2^2}$.

Знімаючи символи модулів, отримаємо два рівняння:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\bar{N}_1|}(A_1X+B_1Y+C_1)=\frac{1}{|\bar{N}_2|}(A_2X+B_2Y+C_2),\\&\frac{1}{|\bar{N}_1|}(A_1X+B_1Y+C_1)=-\frac{1}{|\bar{N}_2|}(A_2X+B_2Y+C_2).\end{aligned}\qquad(7.27)$$



Запишемо рівняння бісектрис кутів між двома прямими, що задані рівняннями:

$$3x+2y-1=0\ \ (l_1),\ 4x-6y-19=0\ \ (l_2).$$

Згідно з (7.27) знаходимо модулі нормальних векторів і записуємо рівняння бісектрис, повертаючись до позначення координат поточних точок бісектрис малими літерами:

$$\left(N_1=\sqrt{13},\quad N_2=2\sqrt{13}\right)\Rightarrow\begin{bmatrix}3x+2y-1=\quad 2x-3y-9{,}5\Rightarrow\quad x+5y+8{,}5=0\\ 3x+2y-1=-2x+3y+9{,}5\Rightarrow 5x-y-10{,}5=0\end{bmatrix}.$$

Підсумок розглянутого подамо у вигляді таблиці (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Різновиди рівнянь прямої в $\mathbf{R}^2$

№	Назва	Символічний запис	Опис складових: змінних, параметрів, констант
1	2	3	4
1	Канонічне рівняння прямої	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$	(x_0,y_0) – точка, через яку проходить пряма; m, n – координати напрямного вектора прямої
2	Параметричні рівняння прямої	$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\end{cases}$	(x_0,y_0) – точка, що належить прямій; $\bar{s}=(m,n)$ – напрямний вектор прямої
3	Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	(x_1,y_1), (x_2,y_2) – точки, через які проходить пряма
4	Рівняння прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямі	$y-y_0=k(x-x_0)$	(x_0,y_0) – точка, що належить прямій; $k=tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт, де $\alpha=l\hat{}Ox$
5	Рівняння прямої з кутовим коефіці-єнтом	$y=kx+b$	k – кутовий коефіцієнт; b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy
6	Рівняння прямої у відрізках на осях	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	a, b – величини відрізків, які пряма відтинає на Ox, Oy
7	Нормальне рівняння прямої	$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$	p – відстань прямої до початку координат; α – кут нахилу відповідного

			відрізка до Ox

Закінчення табл. 7.1

1	2	3	4
8	Рівняння прямої із заданим нормальним вектором	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	$A,\ B$ – координати нормального вектора; (x_0, y_0) – точка, що належить прямій
9	Загальне рівняння прямої	$Ax+By+C=0$	$A,\ B$ – координати нормального вектора

7.4. Використання рівняння прямої при розв'язанні економічних задач

Формула простих відсотків. Нехай здійснюється вклад заощаджень у банк під ***прості відсотки*** – відсотки, що нараховуються лише на ***початкову***, або ***основну***, суму грошей. Яка сума підлягає виплаті вкладнику через t років?

Введемо позначення величин, про які йдеться в умові задачі:

S_0 – початкова (вихідна, основна) сума внеску;

p – відсотки, що нараховуються за рік (*ставка* простих відсотків);

t – кількість років, за які нараховується простий відсоток;

S_t – сума, що підлягає виплаті вкладнику через t років.

За умовою задачі за один рік вклад збільшиться на суму $S_0 \cdot \frac{p}{100}$, тоді через t років нарахування складатимуть суму в t разів більшу.

Отже,

$$S_t = S_0 + S_0 \frac{p}{100} t = S_0(1+\frac{p}{100} t), \qquad (7.28)$$

де множник $(1+\frac{p}{100} t)$ називають ***коефіцієнтом нарощування*** суми простих відсотків, а співвідношення (7.28) – ***формулою простих відсотків.***

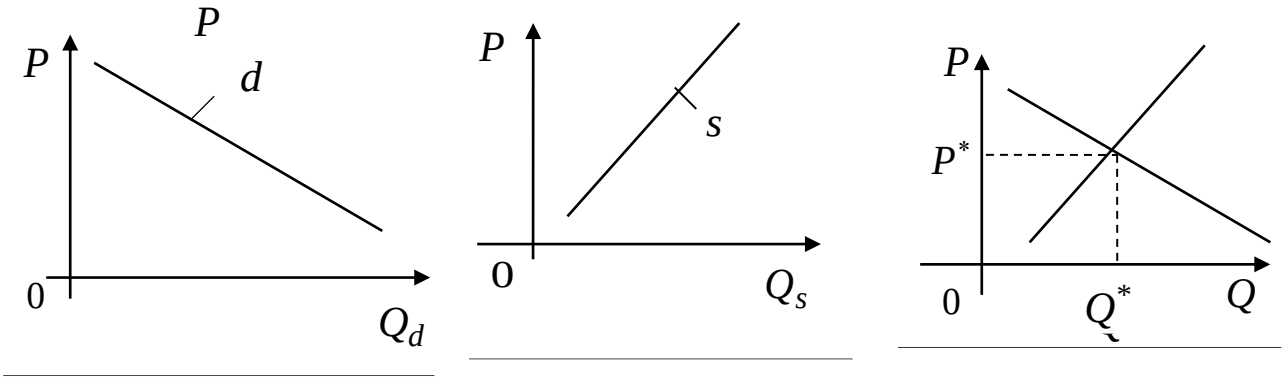
Формула простих відсотків містить дві змінні величини (t, S_t), що знаходяться між собою в лінійній залежності.

Модель «*попит-пропозиція*». Наступна задача потребує знань деяких економічних понять, пов'язаних з товарним ринком. Нагадаємо ці поняття. Так, ***попит*** – це потреба у товарах з боку покупців, а ***пропозиція*** –

представлена на ринку можливість придбати товар.

Закон попиту – закон, згідно з яким зниження ціни зумовлює відповідне зростання величини попиту, і навпаки. ***Закон попиту та пропозиції*** – ціна будь-якого товару змінюється, щоб врівноважити попит (обсягу Q_d) і пропозицію (обсягу Q_s). ***Рівновага товарного ринку*** – стан ринку, коли для продажу пропонується така кількість товару, яку споживач готовий купити. ***Рівновагова ціна*** P^* – ціна, яка врівноважує попит і пропозицію. ***Рівноваговий обсяг*** Q^* – обсяг пропозиції та обсяг попиту в умовах, коли врівноважуються попит і пропозиція. Якщо попит на товар перевищує пропозицію товару, виникає ***дефіцит пропозиції,*** або ***надлишковий попит.*** Якщо попит на товар менший за пропозицію товару, виникає ***надлишок пропозиції,*** або ***дефіцит попиту.***

Економічну модель, що описує процес ціноутворення на ринку, називають моделлю «***попит-пропозиція***». Найпростіший випадок математичної моделі отримуємо в разі лінійної залежності обсягів попиту і пропозиції від ціни товару і навпаки. На рис. 7.14 схематично відтворено пряму попиту d, пряму пропозиції s, точку рівноваги (Q^*, P^*).



а) б) в)

Рис. 7.14

Розглянемо конкретний приклад ***задачі про попит і пропозицію***. За даними табл. 7.2 знайти точку рівноваги товарного ринку.

Залежність попиту та пропозиції від ціни товару лінійна (прирости однакові).

Розв’язання задачі зводиться до відшукання точки перетину двох прямих. Для запису рівнянь прямих попиту та пропозиції скористаємось рівнянням прямої, що проходить через дві точки (див. (7.12)).

Таблиця 7.2

Початкові дані для побудови моделі «попит-пропозиція»

Ціна, грн (P)	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
Обсяг попиту, тис. кг (Q_d)	250	230	210	190	170
Обсяг пропозиції, тис. кг (Q_s)	200	210	220	230	240

Рівняння прямої попиту має вигляд:

$$\frac{P-2}{4-2}=\frac{Q_d-250}{170-250} \Rightarrow Q_d=-40P+330.$$

Рівняння прямої пропозиції:

$$\frac{P-2}{4-2}=\frac{Q_s-200}{240-200} \Rightarrow Q_s=20P+160.$$

Розв'язуємо систему двох рівнянь з двома невідомими за умови, що має місце рівність: $Q_d=Q_s=Q$. Отримуємо:

$$\begin{cases} Q=-40P+330, \\ Q=20P+160, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P^*=2,8(3); \\ Q^*=216,(6). \end{cases}$$

Отримано значення рівновагової ціни $P^*=2,8(3)$ та рівновагового попиту $Q^*=216,(6)$.

При $P=2,5$ попит на товар – $Q_d=-40\cdot 2,5+330=230$ – перевищує пропозицію – $Q_s=20\cdot 2,5+160=210$. Отже, на ринку товарний дефіцит.

Ключові терміни

Дві основні задачі аналітичної геометрії; геометричне місце точок; пряма; загальне рівняння прямої; нормальний вектор; напрямний вектор; параметричне рівняння прямої; нормальне рівняння прямої; нормувальний множник; канонічне рівняння прямої; рівняння прямої, що проходить через дві точки;

кутовий коефіцієнт; відрізки, які пряма відтинає на осях.



Запитання для самоперевірки

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символічній формі, обґрунтуйте на підставі означень, теорем, правил, формул тощо, наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що розуміють під рівнянням лінії на площині?

2. Виведіть канонічне рівняння кола та поясніть значення параметрів, що входять до цього рівняння.

3. У чому полягають основні задачі аналітичної геометрії в $\mathbf{R}^2$?

4. Виведіть рівняння прямих, опишіть геометричний зміст параметрів і констант, які вони містять, якщо задано:

а) точку, через яку проходить пряма і її напрямний вектор;

б) дві точки, що належать прямій;

в) точку на прямій і кут нахилу прямої до осі абсцис;

г) кут нахилу прямої до осі абсцис і величину відрізка, який відтинає пряма на осі ординат;

д) величини відрізків, які пряма відтинає на координатних осях;

е) відстань від початку координат до прямої і кут нахилу відповідного відрізка до осі абсцис;

ж) точку на прямій і нормальний вектор прямої.

5. Яке рівняння називають загальним рівнянням прямої?

6. Поясніть смисл параметрів загального рівняння прямої.

7. Наведіть теорему про загальне рівняння прямої.

8. Проведіть перетворення кожного з відомих рівнянь прямої до її загального рівняння.

9. Проведіть дослідження загального рівняння прямої, супроводжуючи кожний випадок геометричною ілюстрацією.

10. Установіть на аналітичному рівні умови, за яких дві прямі перетинаються, паралельні чи збіжні.

11. Як відшукати кут між двома прямими, що описуються рівняннями у загальному вигляді?

12. Як відшукати кут між двома прямими за відомими кутовими коефіцієнтами обох прямих?

14. Визначте відстань від прямої до початку координат, для чого здійсніть перехід від загального рівняння прямої до рівняння нормального вигляду.

15. Розв'яжіть задачу відшукання відстані від точки до прямої.

16. Виведіть рівняння бісектрис кутів, що утворені двома прямими, які задані загальними рівняннями.

17. Як записується формула простих відсотків?

18. Наведіть модель задачі «попит-пропозиція».

Глава 8. Криві другого порядку

8.1. Загальні рівняння кривої другого порядку: типи кривих

Кривою другого порядку називається лінія, яка описується рівнянням

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (8.1)$$

де x, y – змінні – ***поточні координати*** точок лінії;

A, B, C, D, E, F – задані дійсні числа – ***коефіцієнти*** при змінних і ***вільний член*** F; при цьому числа A, B, C одночасно не можуть дорівнювати нулю: $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Рівняння (8.1) називають ***загальним рівнянням лінії 2-го порядку***. За певних умов стосовно значень коефіцієнтів при змінних і вільного члена воно описує одну із чотирьох, знайомих зі школи, кривих: ***коло, еліпс, гіперболу, параболу***.

Однак може трапитись, що не існує точок (x, y) з дійсними координатами, які б задовольняли рівняння (8.1). У цьому випадку говорять, що рівняння визначає ***уявну*** криву 2-го порядку. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 + 5 = 0$, або $x^2 + y^2 = -5$, визначає ***уявне*** коло.

Крім того, зустрічаються випадки виродження кривих 2-го порядку у прямі або точку. Наприклад:

$x^2 + y^2 = 0$ – рівнянню задовільняють лише координати точки $(0,0)$;

$x^2 - a^2 = 0$ $(a \geq 0)$ – рівняння паралельних або збіжних прямих;

$x^2 - y^2 = 0$ – рівняння прямих, що перетинаються $(y = x,\ y = -x)$.

Відомо, що залежно від знака величини $AC-B^2$ рівняння (8.1) описує один із трьох типів ліній другого порядку:

1) еліптичний, якщо $AC-B^2>0 \Rightarrow$ рівняння (8.1) описує еліпс (коло при $A=C$ і $B=0$), уявну криву або криву, яка вироджується в точку;

2) гіперболічний, якщо $AC-B^2<0 \Rightarrow$ рівняння (8.1) описує гіперболу або пару прямих, що перетинаються;

3) параболічний, якщо $AC-B^2=0 \Rightarrow$ рівняння (8.1) описує параболу, пару паралельних прямих або уявну криву.

8.2. Канонічні рівняння кола та еліпса

Коло – це множина точок площини, відстань від яких до однієї фіксованої точки, що називається центром, є величиною сталою. Відстань від центра кола до будь-якої точки – це радіус кола.

Канонічне рівняння кола (7.2) було одержано в прикладі гл. 7:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (8.2)$$

Якщо в рівнянні (8.2) розкрити дужки, одержимо загальне рівняння кривої 2-го порядку при $A=C=1$ і $B=0$, тобто рівняння

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

яке називається ***загальним рівнянням кола***.

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок (***фокусів***) є величиною сталою. Нехай точка $M(x,y)$ є довільною точкою еліпса (рис. 8.1), фокуси еліпса розташовані на осі Ox і знаходяться у точках $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, а сума відстаней точок еліпса до фокусів дорівнює $2a$.

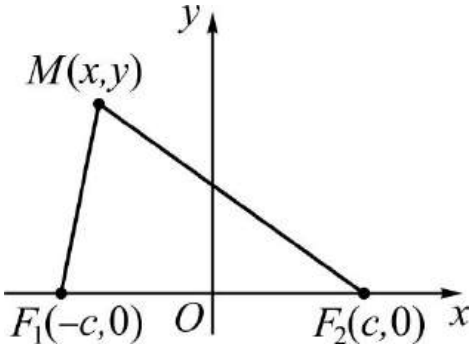


Рис. 8.1

Тоді згідно з означенням еліпса має місце співвідношення: $F_1M+F_2M=2a$.

Використовуючи формулу відстані між двома точками, маємо:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a, \qquad (8.3)$$

або

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \qquad (8.4)$$

Далі позбавляємося від ірраціональності піднесенням до квадрату обох частин (8.4) і спрощуємо рівняння:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^2\left(x^2+2cx+c^2+y^2\right)=a^4+2a^2cx+c^2x^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)\Rightarrow\left|\begin{matrix}\text{покладаємо}\\ a^2-c^2=b^2\end{matrix}\right|\Rightarrow\; b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\;,\text{ або}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{8.5}$$

Рівняння (8.5) називають ***канонічним рівнянням еліпса***.

Оскільки $2a>2c$ (сума двох сторін трикутника більше третьої сторони), тому позначення a^2-c^2 через b^2 є коректним.

Аналізуючи рівняння (8.5), робимо ***висновки***:

1) з рівняння (8.5) маємо

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,,$$

тобто $-a\le x\le a$, $-b\le y\le b$;

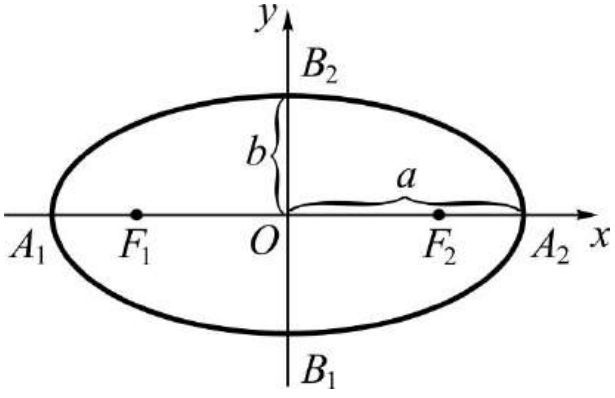


Рис. 8.2

2) еліпс є симетричним відносно осей координат, оскільки рівняння містить тільки квадрати поточних координат x і y; отже, координатні осі є ***осями симетрії*** еліпса; вісь симетрії, на якій лежать фокуси, називається ***фокальною віссю***; точку перетину осей симетрії називають ***центром симетрії***, або ***центром*** еліпса;

3) крива перетинає координатні осі в точках – ***вершинах*** еліпса – з абсцисами $x=\pm a$ і з ординатами $y=\pm b$ (рис. 8.2): $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$; відрізки A_1A_2 і B_1B_2, що з'єднують протилежні вершини

еліпса, а також їхні довжини $2a$ і $2b$, називають відповідно ***великою і малою осями*** еліпса; довжини a і b – ***великою і малою півосями.***

Форма еліпса відносно осі Ox визначається відношенням відстані між фокусами $2c$ до великої осі $2a$, яке називається ***ексцентриситетом*** еліпса ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{8.6}$$

За допомогою співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ ексцентриситет ε легко подати через півосі a і b:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \tag{8.7}$$

Відзначимо, що при $a = b$ одержимо $\varepsilon = 0$. Тобто ексцентриситет кола дорівнює нулю. Отже, якщо ε еліпса наближається до нуля, то за своєю формою еліпс наближається до кола. Якщо ж ε наближається до одиниці, то еліпс за формою наближається до відрізка.



Відомо, що кожна планета і комета мають своїми орбітами еліпси. Орбіти планет близькі до кіл, а орбіти комет – до витягнутих еліпсів (ексцентриситет орбіти Землі $\varepsilon = 0{,}02$, а комети Галлея – $\varepsilon = 0{,}97$)

Лінії $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, що паралельні малій осі еліпса, називаються ***директрисами еліпса***. Відстані від довільної точки еліпса до його фокусів називають ***фокальними радіусами еліпса*** (див. рис. 8.1):

$$MF_1 = r_1;\ MF_2 = r_2.$$

Можна довести, що $r_1 = a - \varepsilon x,\ r_2 = a + \varepsilon x$, тоді $r_1 + r_2 = 2a$.

Зауваження. Канонічне рівняння еліпса можна вивести, вибираючи фокуси на Oy, тоді великою буде піввісь b.



Наприклад, знайдемо рівняння еліпса L, який проходить через точку $M_0(5, -3)$, а його ексцентриситет дорівнює $0{,}8$. Для цього необхідно визначити параметри його рівняння.

Оскільки точка $M_0(5,-3) \in L$, то її координати задовольняють рівнянню еліпса. Відповідно умові задачі $c = 0,8a$ $(\varepsilon = 0,8)$, звідки $b^2 = 0,36a^2$. Таким чином, для знаходження параметрів еліпса маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{25}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1; \\ b^2 = 0,36a^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5\sqrt{2}; \\ b = 3\sqrt{2}. \end{cases}$$

Отже, рівнянням еліпса буде

$$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1.$$

8.3. Канонічне рівняння гіперболи. Асимптоти гіперболи

Гіперболою називається геометрична множина точок площини, модуль різниці відстаней яких до двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, відмінною від нуля.

Виберемо осі координат таким чином, щоб фокуси гіперболи були розташовані на осі Ox і їх координати відповідно становили $F_1(-c,\ 0)$ та $F_2(c,\ 0)$, а модуль різниці відстаней від точок гіперболи до фокусів позначимо $|F_1M - F_2M| = 2a \quad (a > 0)$.

Скористаємося рис. 8.1, на якому тепер $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи. Згідно з означенням $F_1M - F_2M = \pm 2a$. За формулою відстані між двома точками отримуємо:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a, \tag{8.8}$$

або

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Виконуємо перетворення, аналогічні тим, які здійснювались при виведенні рівняння еліпса:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right) \Rightarrow \left|\begin{matrix}\text{покладаємо}\\ c^2-a^2=b^2\end{matrix}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

$$\text{або}\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{8.9}$$

Рівняння (8.9) називається ***канонічним рівнянням гіперболи***.

Оскільки $2c>2a$ (різниця двох сторін трикутника завжди менше третьої сторони), тому різниця c^2-a^2 є додатним числом, яке позначили через b^2.

Аналіз отриманого рівняння дозволяє прийти до ***висновків***:

1) з рівняння (8.9) $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$,

звідки, $x\le -a,\ x\ge a$;

2) гіпербола симетрична відносно осей координат, оскільки її рівняння містить тільки квадрати змінних x та y; отже, координатні осі є осями симетрії гіперболи; вісь симетрії, на якій лежать фокуси, називається ***фокальною,*** або дійсною ***віссю***; друга – ***уявною віссю симетрії***; точка перетину осей симетрії є центром симетрії гіперболи або ***центром*** гіперболи;

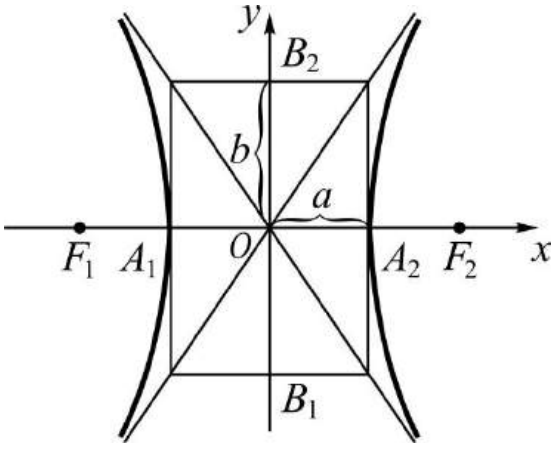


Рис. 8.3

3) крива перетинає вісь Ox у точках – ***вершинах*** гіперболи – з абсцисами $x=\pm a$: $A_1(-a,0)$, $A_2(a,\ 0)$ (рис. 8.3); з віссю Oy крива спільних точок не має; вісь Ox називається ***дійсною,*** а вісь Oy – ***уявною*** осями гіперболи. Відрізок $A_1A_2=2a$, який з'єднує вершини гіперболи, належить ***дійсній осі*** Ox; відрізок $B_1B_2=2b$ належить ***уявній осі*** гіперболи Oy.

Прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$ та центром симетрії у початку координат називають ***основним прямокутником*** гіперболи.

Прямі, на яких лежать його діагоналі, з рівняннями

$$y=-\frac{b}{a}x,\quad y=\frac{b}{a}x \tag{8.10}$$

називаються ***асимптотами*** гіперболи. Ці прямі мають таку властивість: при необмеженому зростанні абсциси x $(x \to \pm\infty)$ відстань від точок гіперболи до асимптот необмежено зменшується і наближається до нуля. Покажемо це на прикладі асимптоти з рівнянням $y = \frac{b}{a}x$. Нехай $M(x, y)$ – точка гіперболи, де $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, тоді відстань від цієї точки до асимптоти становить (7.26):

$$d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left| bx - a \cdot \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \right| = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left| x - \sqrt{x^2 - a^2} \right|. \qquad (8.11)$$

Поділимо і помножимо праву частину (8.11) на вираз, спряжений до виразу під знаком модуля, тобто на вираз $x + \sqrt{x^2 - a^2}$, тоді отримаємо:

$$d = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \qquad (8.12)$$

При необмеженому зростанні x знаменник дробу необмежено збільшується, а самий дріб зменшується і стає все ближче і ближче до нуля.

Згідно з означенням асимптот гіперболи геометричне зображення гіперболи починають з побудови основного прямокутника та її асимптот. Частини графіка кривої при $x \le -a$ і $x \ge a$ називають ***гілками*** гіперболи.

Як і для еліпса, форму гіперболи характеризує відношення фокусної відстані $2c$ до дійсної осі $2a$ і, як і для еліпса, таке відношення називається ***ексцентриситетом:***

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon > 1. \qquad (8.13)$$

Лінії $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, що паралельні уявній осі гіперболи, називаються ***директрисами гіперболи***. Відстані від довільної точки гіперболи до її фокусів називають ***фокальними радіусами гіперболи***:

$$MF_1 = r_1;\ MF_2 = r_2.$$

З означення гіперболи: $|r_1 - r_2| = 2a$.

Зауваження:

1) канонічне рівняння гіперболи можна записати для випадку розташування її фокусів на осі Oy, тоді дійсною буде вісь Oy, а уявною – вісь Ox:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{8.14}$$

Криві, що описуються рівняннями (8.9) та (8.14), називаються ***взаємно спряженими*** гіперболами;

2) якщо в рівняннях (8.9) та (8.14) покласти $a=b$, одержимо

$$x^2-y^2=a^2 \quad \text{або} \quad x^2-y^2=-a^2. \tag{8.15}$$

Криві, що описуються рівняннями (8.15), називаються ***рівнобічними гіперболами***.



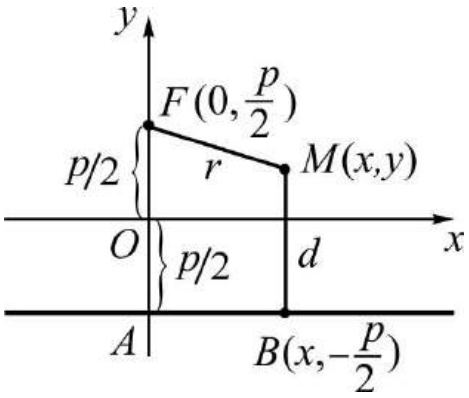
Нехай задане загальне рівняння гіперболи: $9x^2-16y^2=144$. Знайдемо її параметри та визначимо координати вершин. Для цього запишемо рівняння у канонічній формі

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Звідси маємо, що $a^2=16$ і $b^2=9$. Тобто осі гіперболи: $2a=8$, $2b=6$. Відповідно, вершини гіперболи мають координати: $A_2(4;0)$, $A_1(-4;0)$.

8.4. Парабола. Канонічне рівняння

Параболою називається множина точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки (***фокуса***) та фіксованої прямої (***директриси***).



Виберемо на площині систему координат xOy (рис. 8.4). Позначимо відстань від фокуса параболи F до директриси AB через $p>0$. Знайдемо рівняння параболи, фокус якої має координати $x=0,\ y=\frac{p}{2}$, тобто належить осі

Рис. 8.4

Oy, а директриса паралельна осі Ox і має рівняння: $y = -\frac{p}{2}$.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка параболи. Тоді згідно з означенням параболи $FM = BM$. За формулою відстані між двома точками маємо:

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}$$

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4},$$

або $$x^2 = 2py. \qquad (8.16)$$

Рівняння (8.16) називається ***канонічним рівнянням параболи***.

Число p – відстань від фокуса до директриси називають ***параметром*** параболи.

Рівняння параболи також може мати вигляд:

$$y^2 = 2px.$$

Така парабола має фокус у точці $F(p/2,\ 0)$ та ***директрису*** $x = -p/2$.

Аналізуючи рівняння (8.16), приходимо до ***висновків***:

1) для точок парабол (8.16) має місце нерівність $y \geq 0$.

2) крива симетрична відносно осі Oy, оскільки змінна x входить у рівняння у другому степені; вісь симетрії називають ***віссю*** параболи; точка $O(0,0)$ належить кривій і є точкою дотику параболи з її віссю, цю точку називають
вершиною параболи;

3) при зростанні x за модулем від 0 до $+\infty$ змінна y необмежено зростає за законом $y = \frac{1}{2p}x^2$ (рис. 8.5а); якщо $p = 1/2$, то отримуємо рівняння параболи $y = x^2$, яке відоме ще зі шкільного курсу математики.

Інші варіанти канонічного рівняння параболи одержуємо, вибираючи фокуси і директриси як показано на рис. 8.5:

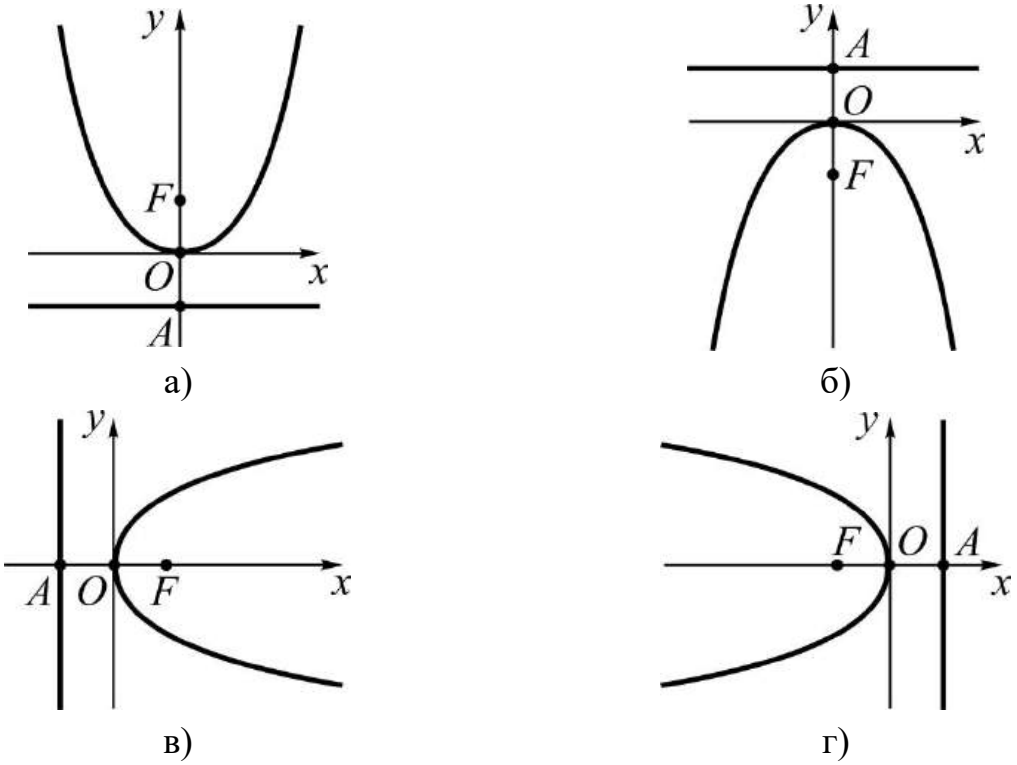
а) $x^2 = 2py$; б) $x^2 = -2py$; в) $y^2 = 2px$; г) $y^2 = -2px$.

Наприклад, складемо рівняння параболи, яка проходить через точку $M_0(5,-3)$, а її віссю є вісь Ox.

Оскільки точка M_0 лежить у четвертому квадранті і віссю симетрії параболи є вісь Ox, то відповідне рівняння має вигляд: $y^2 = 2px$. Підставляємо координати заданої точки у рівняння і знаходимо значення p, при якому воно задовольняється:

$$(-3)^2 = 2p \cdot 5 \;\Rightarrow\; p = \frac{9}{10} \;\Rightarrow\; y^2 = \frac{9}{5}x, \text{ або } y = \pm 3\sqrt{\frac{x}{5}}.$$

Рівняння $y = 3\sqrt{x/5}$ та $y = -3\sqrt{x/5}$ визначають ***гілки*** параболи. У цьому випадку говорять, що гілки параболи ***напрямлені вправо***.



а) б) в) г)

Рис. 8.5

Криві коло, еліпс та гіпербола називаються ***центральними*** кривими другого порядку, а парабола – ***нецентральною***; її ***ексцентриситетом*** вважається відношення ***фокального радіуса*** $FM = r$ довільної точки M

параболи до відстані $BM = d$ (див. рис. 8.4) від цієї точки до директриси, тобто $\varepsilon = r/d = 1$.

Задача виведення рівнянь кривих 2-го порядку ускладнюється, якщо центр центральних кривих лежить не у початку координат або осі симетрії не є координатними осями; а для нецентральних кривих – якщо фокус не лежить на координатній осі або директриса не ортогональна жодній із осей координат. Для встановлення положення на площині кривих 2-го порядку, які описуються загальним рівнянням, шляхом паралельного перенесення або повороту вихідної системи координат переходять до такої системи координат, у якій загальне рівняння набуває канонічного виду.

8.5. Перетворення загального рівняння кривої другого порядку

Нагадаємо, що розуміють під ***перетворенням системи координат.*** Якщо на площині вибрати дві системи координат, то координати тієї ж самої точки у цих системах координат будуть різними.

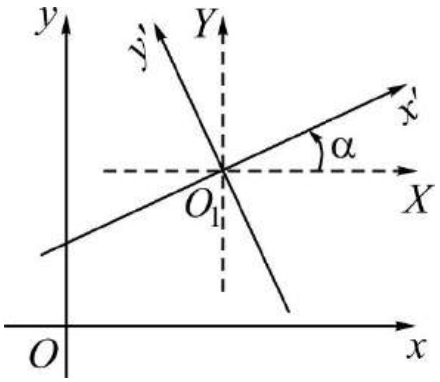


Рис. 8.6

Задача перетворення координат полягає в тому, щоб знайти співвідношення між координатами точок у двох системах координат, одну з яких назвемо ***вихідною***, другу – ***новою***. Будь-яку нову систему координат $x'O_1y'$ (рис. 8.6) можна отримати із вихідної системи xOy шляхом ***перенесення початку координат*** у точку O_1 зі збереженням напряму осей (система координат XO_1Y), а потім поворотом нової системи XO_1Y на деякий кут α навколо початку координат O_1.

Паралельне перенесення. Встановимо зв'язок між координатами довільної точки M у системах з різними початками координат, але з однаковим напрямом осей (рис. 8.7).

Нехай xOy – вихідна, XO_1Y – нова системи координат (рис. 8.7). Введемо такі позначення: $(x,\ y)$ – координати точки M у вихідній системі координат; (X, Y) – координати цієї ж точки M у ***новій*** системі координат;

$(x_0,\ y_0)$ – координати нового початку O_1 у ***вихідній*** системі координат, тобто $O_1(x_0, y_0)$.

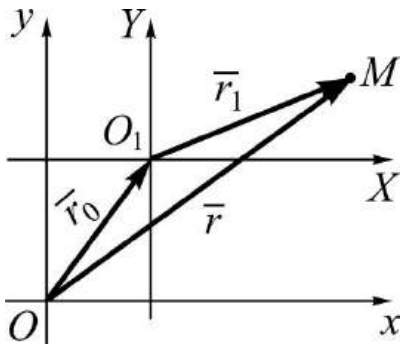


Рис. 8.7

Розглянемо вектори $\overline{r_0}$, $\overline{r_1}$, $\overline{r}$:
$\overline{r_0} = \overrightarrow{OO_1}; \overline{r_1} = \overrightarrow{O_1M}; \overline{r} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 8.7).
Отже, вектор $\overline{r_1} = \overline{r} - \overline{r_0}$, або в координатах:

$$\begin{bmatrix} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0, \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0. \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

Співвідношення (8.17) називаються ***формулами паралельного перенесення***.

Поворот осей координат. Установимо зв'язок між координатами довільної точки M у системах зі спільним початком і різним напрямом осей координат. Нехай xOy – вихідна, а XOY – нова системи координат (рис. 8.8). Введемо позначення: $(x,\ y)$ – координати точки M у вихідній системі координат; (X, Y) – координати точки M у новій системі координат; α – кут повороту старої системи навколо точки O.

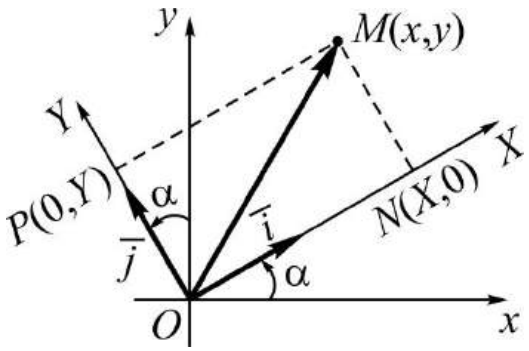


Рис. 8.8

Знайдемо напрямні косинуси нових осей OX та OY у вихідній системі xOy, або, що те ж саме, координати одиничних векторів $\overline{i}$ та $\overline{j}$ нової системи координат. Проекції вектора $\overline{OM} = (x, y)$ на напрями цих векторів визначають координати X і Y.

Отже, одиничні вектори нових осей мають вигляд:

$$\overline{i} = (\cos\alpha, \sin\alpha),\ \overline{j} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), \cos\alpha\right).$$

Знайдемо проекції вектора $\overline{OM} = (x, y)$ на нові осі координат як скалярний добуток цього вектора на напрямні вектори $\overline{i}$ та $\overline{j}$ відповідно. Тоді:

$$\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{cases} \tag{8.18}$$

Співвідношення (8.18) називають ***формулами повороту осей координат***.

Якщо здійснюється паралельне перенесення та поворот осей координат, то вихідні координати (x, y) можна визначити через нові (x', y') таким чином:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0. \end{aligned} \tag{8.19}$$



Отримаємо рівняння рівнобічної гіперболи

$$x^2 - y^2 = a^2$$

в системі координат, що одержана з вихідної системи поворотом навколо початку координат на кут $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$ (координатні осі нової системи – асимптоти кривої).

Тоді, якщо в рівняння гіперболи підставити

$$\begin{cases} x = X\dfrac{\sqrt{2}}{2} + Y\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = -X\dfrac{\sqrt{2}}{2} + Y\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

то після нескладних перетворень отримаємо:

$$Y = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{X} = \frac{k}{X}, \quad k = \frac{a^2}{2}.$$

Тобто маємо відому формулу обернено пропорційної залежності, або відоме із шкільного курсу рівняння гіперболи.

Залежно від вигляду загального рівняння кривої 2-го порядку застосовуються ті чи інші способи перетворення. Спочатку розглянемо окремий випадок. Припустимо, що ***у загальному рівнянні кривої 2-го порядку*** $B = 0$, тоді загальне рівняння не містить добутку змінних:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{8.20}$$

Перетворення рівняння (8.20) до канонічного вигляду здійснюється за допомогою паралельного перенесення системи координат, якому передує виділення повних квадратів за обома змінними.

 Розглянемо приклад зведення рівняння кривої до канонічного виду:

$$3x^2+3y^2+6x-12y+3=0 \;\Rightarrow\; x^2+y^2+2x-4y+1=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (x+1)^2+(y-2)^2-4=0 \;\Rightarrow\; (x+1)^2+(y-2)^2=4.$$

Отже, ми отримали канонічне рівняння кола з центром у точці $(x_0, y_0)=(-1, 2)$ і його радіус $R=2$.

 Нехай задане загальне рівняння кривої: $4x^2-25y^2-24x-50y-89=0$. Визначимо тип цієї кривої та її параметри.

Розв'язання задачі передбачає такі етапи:

1^0. ***Групуємо*** в лівій частині рівняння члени зі змінними x, y і виділяємо повні квадрати двочленів із цими змінними:

$$4\left(x^2-6x\right)-25\left(y^2+2y\right)-89=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left(\left(x^2-2\cdot 3x+9\right)-9\right)-25\left(\left(y^2+2y+1\right)-1\right)-89=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-3)^2-25(y+1)^2=100 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y+1)^2}{4}=1.$$

2^0. ***Вводимо*** нові координати:

$$x-3=X\;;\; y+1=Y$$

і записуємо канонічне рівняння у новій системі з початком у точці $(3,-1)$:

$$\frac{X^2}{25}-\frac{Y^2}{4}=1.$$

Отже, крива 2-го порядку, що розглядається, є гіперболою з центром у точці $(3,-1)$, її півосі такі: $a=5$, $b=2$.

Розглянемо тепер перетворення загального рівняння кривої 2-го порядку, усі параметри якого відмінні від нуля:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Його перетворення до канонічного виду здійснюється у два етапи:

1-й етап. ***За допомогою повороту осей координат*** зводимо загальне рівняння до рівняння (8.20), яке не містить добутку змінних. Відповідний кут повороту осей α визначається співвідношенням (виводити його не будемо):

$$ctg\,2\alpha = \frac{A-C}{B}. \tag{8.21}$$

Вибір кута α для переходу від вихідних координат (x, y) до нових (X, Y) здійснюється за формулами (8.18):

$$\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha, \end{aligned} \tag{8.22}$$

що дає можливість отримати рівняння відносно змінних X і Y, яке не містить їх добутку.

2-й етап. ***За допомогою паралельного перенесення осей координат*** перетворюємо до канонічного виду рівняння, що було отримане на першому етапі.

Зауваження. Перетворення загального рівняння кривої 2-го порядку можна також починати з паралельного перенесення осей з метою позбутися членів, які містять змінні у першому степені. В цьому випадку отримують квадратичну форму, яку приводять до канонічого виду відомими методами, наприклад, Лагранжа, Якобі, Сільвестра. Крім того, застосовують апарат приведення матриці коефіцієнтів квадратичної форми до діагонального виду за допомогою власних чисел та власних векторів цієї матриці. Дані методи є досить громіздкими і виходять за рамки даного підручника.

Наведемо ще один приклад на застосування паралельного перенесення осей.



Проведемо дослідження кривої 2-го порядку, що задана загальним рівнянням:

$$Bxy + Dx + Ey + F = 0. \tag{8.23}$$

Це рівняння можна подати у вигляді дробово-лінійної функції:

$$y(Bx+E)=-Dx-F \;\Rightarrow\; y=\frac{-Dx-F}{Bx+E} \quad \left(\frac{D}{B}\neq\frac{F}{E},\ B\neq 0\right). \tag{8.24}$$

Поділимо чисельник на знаменник дробу (8.24), тобто виділяємо цілу частину дробу, а саме:

$$y=-\frac{D}{B}+\frac{DE-FB}{B(Bx+E)} \Leftrightarrow y+\frac{D}{B}=\frac{DE-FB}{B^2(x+\frac{E}{B})}. \tag{8.25}$$

Позначимо:

$$Y=y+\frac{D}{B}; X=x+\frac{E}{B}\ , \qquad \frac{DE-FB}{B^2}=k\ .$$

Рівняння (8.25) в новій системі координат набуває такого вигляду:

$$Y=\frac{k}{X}.$$

Отже, графіком ***дробово-лінійної функції*** є гіпербола з асимптотами, паралельними осям координат, і центром симетрії у точці $\left(-\frac{E}{B},-\frac{D}{B}\right)$.



Ключові терміни

Крива 2-го порядку на площині; загальне рівняння кривої 2-го порядку; канонічне рівняння кривої 2-го порядку; коло; еліпс; гіпербола; парабола; фокус; ексцентриситет; асимптоти; директриса; мала і велика півосі еліпса; дійсна та уявна осі гіперболи; центральні та нецентральні криві 2-го порядку; паралельне перенесення системи координат; поворот системи координат.



Запитання для самоперевірки

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символічній формі, обґрунтуйте на підставі означень, теорем, правил, формул тощо, наведіть відповідні конкретні приклади.

2. Які існують різновиди кривих 2-го порядку і які умови визначають тип кривої?

3. Яке рівняння називають загальним рівнянням кола і як здійснюється перехід від нього до рівняння канонічного виду?

4. Який вигляд має канонічне рівняння еліпса?

5. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи?

6. Дайте визначення асимптот та ексцентриситету гіперболи.

7. Як одержати канонічне рівняння параболи?

8. Які криві 2-го порядку називаються центральними, нецентральними?

9. У чому полягає задача перетворення координат?

10. Наведіть формули паралельного перенесення координат.

11. Наведіть формули повороту осей координат.

12. У чому полягає алгоритм перетворення загального рівняння кривої 2-го порядку до канонічного виду?

Глава 9. Площина у просторі

9.1. Поняття про рівняння поверхні

Рівнянням поверхні S називається рівняння виду $\Phi(x, y, z) = 0$, де Φ – закон, якому підпорядковуються координати точок x, y, z, що належать поверхні, і не підпорядковуються координати точок, що даній поверхні не належать, а саме: $\Phi(x, y, z) = 0$ є рівнянням S, якщо $(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \Phi(x, y, z) = 0$.

Координати x, y, z називають ***поточними координатами*** точок поверхні.

Таким чином, якщо відома геометрична властивість точок, які належать поверхні, то можна знайти відповідне цій властивості рівняння поверхні, тобто

$$\Phi(x, y, z) = 0. \qquad (9.1)$$

Наприклад, складемо рівняння поверхні, усі точки якої розташовані на однаковій відстані R від точки $C(x_0, y_0, z_0)$. Таку поверхню називають ***сфе-***

ричною, або сферою ***радіуса*** R з ***центром*** у точці з координатами x_0, y_0, z_0. Розв'язання зводиться до використання формули відстані між двома точками.

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка поверхні, тоді отримуємо співвідношення:

$$CM = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2, \qquad (9.2)$$

що має назву ***канонічного рівняння сфери***.

У випадку, коли центром сфери є початок координат, то її канонічне рівняння набуває вигляду:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

9.2. Різновиди рівнянь площини у просторі

Поняття «площина», як і поняття прямої, у геометрії є первинним. Із аксіом елементарної геометрії і наслідків із них відомо, що площину, і до того ж тільки одну, визначають:

а) дві прямі, що перетинаються;

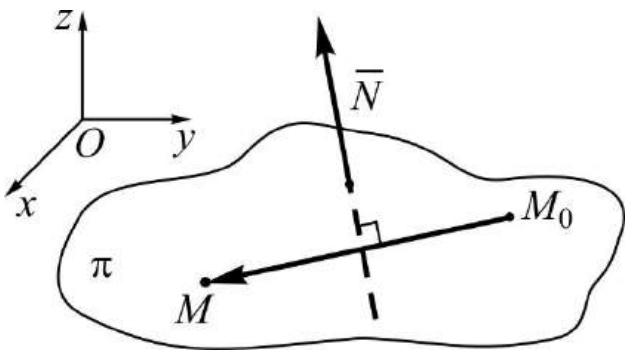
б) пряма і точка, яка не належить цій прямій;

в) три точки, які не належать одній прямій, та ін.

Задамо у просторі декартову прямокутну систему координат і деяку площину π (рис. 9.1).

1^0. Рівняння площини, яка проходить через дану точку, і має заданий нормальний вектор.

Будь-який ненульовий вектор, який перпендикулярний до площини, називається ***нормальним*** вектором площини, або ***нормаллю***.



Нехай на площині задано точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і ненульовий вектор-нормалі до площини $\overline{N} = (A, B, C)$. Виберемо на площині (рис. 9.1) довільну точку $M(x, y, z)$. Введемо в розгляд $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Оскільки за означенням нормалі

Рис. 9.1

$\overline{N} \perp \pi$, то $\overline{N} \perp \overline{M_0M}$. Отже, скалярний добуток $\overline{N} \cdot \overline{M_0M} = 0$.

Подамо його через координати векторів і отримаємо рівняння площини:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (9.3)$$

2^0. Загальне рівняння площини та його дослідження.

Повернемось до співвідношення (9.3). Якщо в (9.3) розкрити дужки, то отримаємо загальне лінійне рівняння з трьома змінними x, y, z:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (9.4)$$

де $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ – деяке число (вільний член рівняння).

Рівняння (9.4) називають ***загальним рівнянням площини***, або ***рівнянням площини у загальному вигляді.*** Підкреслимо, що рівняння площини (9.4) є лінійним рівнянням відносно змінних x, y, z – поточних координат точок площини.

Теорема 9.1 (***про загальне рівняння площини***):

1) будь-яка площина описується рівнянням (9.4);

2) кожне рівняння виду (9.4) визначає площину.

Доведення базується на рівнянні (9.3).

1. У п. **1^0** показано, що площину можна описати рівнянням (9.3), звідки і отримуємо загальне рівняння.

2. Нехай задано рівняння (9.4), у якому параметри A, B і C не дорівнюють одночасно нулю $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.

Покладемо, наприклад, $A \neq 0$ і виконаємо тотожні перетворення:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow A\left(x - \frac{-D}{A}\right) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0.$$

Отримали рівняння площини, що проходить через точку $(-D/A,\ 0,\ 0)$ і має нормальний вектор $\overline{N} = (A, B, C)$.

Дослідження загального рівняння площини передбачає аналіз особливостей розташування площини відносно координатних осей і координатних площин залежно від рівності нулю тих чи інших параметрів

рівняння $A,\ B,\ C,\ D$. Для стислості записів домовимося указувати тільки рівні нулю параметри (інші, за замовчуванням, вважатимемо відмінними від нуля).

Якщо жодне з чисел $A,\ B,\ C,\ D$ не дорівнює нулю, то кажуть, що рівняння (9.4) визначає площину ***загального положення***. Для інших випадків розташування площини має такі особливості:

1) $D=0 \ \Rightarrow \ Ax+By+Cz=0$ – площина проходить через початок координат $O\ (O\in\pi)$;

2) $$\left.\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} By+Cz+D=0 \Rightarrow \left|\ \overline{N}\perp Ox\right| \Rightarrow \pi \,||\, Ox, \\ Ax+Cz+D=0 \Rightarrow \left|\ \overline{N}\perp Oy\right| \Rightarrow \pi \,||\, Oy, \\ Ax+By+D=0 \Rightarrow \left|\ \overline{N}\perp Oz\right| \Rightarrow \pi \,||\, Oz; \end{array}\right.$$

3) $$\left.\begin{array}{l} A=D=0 \\ B=D=0 \\ C=D=0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} By+Cz=0 \Rightarrow \left|\ \overline{N}\perp Ox,\ O\in\pi\right| \Rightarrow \pi \supset Ox, \\ Ax+Cz=0 \Rightarrow \left|\ \overline{N}\perp Oy,\ O\in\pi\right| \Rightarrow \pi \supset Oy, \\ Ax+By=0 \Rightarrow \left|\ \overline{N}\perp Oz,\ O\in\pi\right| \Rightarrow \pi \supset Oz; \end{array}\right.$$

4) $$\left.\begin{array}{l} A=B=0 \\ A=C=0 \\ B=C=0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} Cz+D=0 \Rightarrow \left|\ \overline{N}\perp Ox,\ \overline{N}\perp Oy\right| \Rightarrow \pi \,||\, xOy, \\ By+D=0 \Rightarrow \left|\ \overline{N}\perp Ox,\ \overline{N}\perp Oz\right| \Rightarrow \pi \,||\, xOz, \\ Ax+D=0 \Rightarrow \left|\ \overline{N}\perp Oy,\ \overline{N}\perp Oz\right| \Rightarrow \pi \,||\, yOz; \end{array}\right.$$

5) $$\left.\begin{array}{l} A=B=D=0 \\ B=C=D=0 \\ A=C=D=0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} Cz=0 \Rightarrow \left|\ \overline{N}\perp xOy,\ O\in\pi\right| \Rightarrow \pi-\text{площина } xOy, \\ Ax=0 \Rightarrow \left|\ \overline{N}\perp yOz,\ O\in\pi\right| \Rightarrow \pi-\text{площина } yOz, \\ By=0 \Rightarrow \left|\ \overline{N}\perp xOz,\ O\in\pi\right| \Rightarrow \pi-\text{площина } xOz. \end{array}\right.$$

3^0. Рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Складемо рівняння площини, що проходить через точки $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$, $M_3\left(x_3,y_3,z_3\right)$ (рис. 9.2).

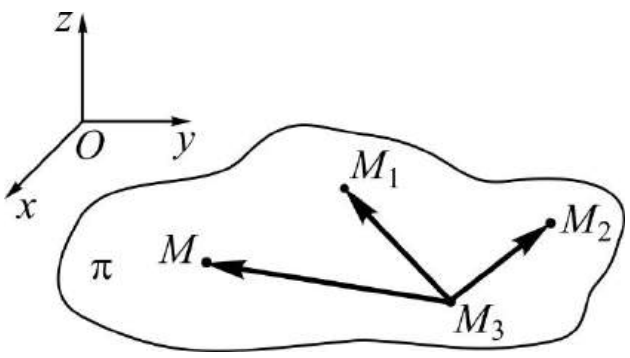


Рис. 9.2

Для цього на площині виберемо довільну точку $M(x, y, z)$, яка не збігається з жодною із заданих, і введемо до розгляду вектори, початок кожного з яких знаходиться в одній із заданих точок, наприклад, у точці M_3:

$$\overline{M_3M} = (x - x_3,\ y - y_3,\ z - z_3),$$

$$\overline{M_3M_1} = (x_1 - x_3, y_1 - y_3, z_1 - z_3),$$

$$\overline{M_3M_2} = (x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3).$$

Ці вектори компланарні, тобто належать одній площині. За умовою компланарності трьох векторів визначник 3-го порядку, що складається із координат цих векторів, дорівнює нулю. Отже, рівняння площини має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9.5)$$

Після розкриття визначника отримуємо лінійне рівняння відносно поточних координат x, y, z.

Приклад Знайдемо рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1,\ 2,\ 1)$, $M_2(3, 2, 2)$, $M_3(-2, 0, 1)$. За співвідношенням (9.5) маємо:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z-1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow 2x - y - 8z + 12 = 0.$$

Зауважимо, якщо точки M_1, M_2, M_3 належать одній прямій, то вектори $\overline{M_3M_1}$, $\overline{M_3M_2}$ колінеарні, а значить, їх координати пропорційні:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}, \qquad (9.6)$$

що є ***умовою належності трьох точок одній прямій***.

Зауваження. Відшукання рівняння площини, яка визначається двома прямими, що перетинаються, або прямою і точкою, що не належить прямій, зводиться до розв'язання задачі побудови рівняння площини за трьома точками.

4^0. Рівняння площини у відрізках на осях.

Знайдемо рівняння площини, якщо відомі величини відрізків, які ця площина відтинає від координатних осей: a, b та c. Це означає, що задані абсциса, ордината, апліката точок перетину площини з осями Ox, Oy, Oz (рис. 9.3).

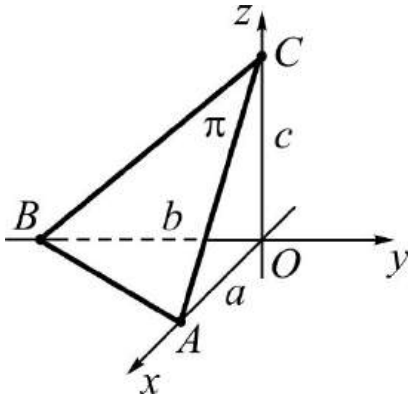


Рис. 9.3

Отже, маємо три точки: $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ і $C(0, 0, c)$, які належать площині. За співвідношенням (9.5):

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow bc(x-a) + acy + abz = 0 \Rightarrow$$

$$bcx + acy + abz = abc.$$

За умов $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$ отримуємо:

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (9.7)$$

Співвідношення (9.7) називається ***рівнянням площини у відрізках на осях.*** Відрізки AB, AC, BC (див. рис. 9.3) називають ***слідами площини*** π на координатних площинах xOy, xOz, yOz (у відповідному октанті).

5^0. Нормальне рівняння площини.

Побудуємо рівняння площини, якщо відома відстань p від початку координат до площини, та кути, які утворює нормальний вектор площини з осями координат: α, β, γ (рис. 9.4).

За напрямними косинусами заданих кутів побудуємо одиничний вектор нормалі до площини $\overline{N}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ та виберемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$, тоді радіус-вектором цієї точки є вектор $\overline{OM} = (x, y, z)$.

Скалярний добуток векторів

$$\overline{OM} \cdot \overline{N}_0 = \left|\overline{OM}\right| \cdot \left|\overline{N}_0\right| \cos\varphi = \left|\overline{N}_0\right| \cdot np_{\overline{N}_0} \overline{OM} = np_{\overline{N}_0} \overline{OM}.$$

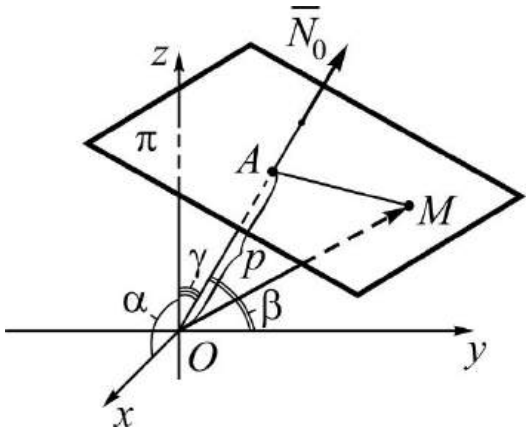


Рис. 9.4

Довжина відрізка $OA = p$ є проекцією вектора $\overline{OM}$ на напрям вектора $\overline{N}_0$, тобто $np_{\overline{N}_0}\overline{OM} = p$. З іншого боку, скалярний добуток $\overline{OM} \cdot \overline{N}_0$ теж дає $np_{\overline{N}_0}\overline{OM}$:

$$\overline{OM} \cdot \overline{N}_0 = \left|\overline{N}_0\right| \cdot np_{\overline{N}_0}\overline{OM} = p.$$

Звідси

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

або

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (9.8)$$

– нормальне рівняння площини.

Властивості нормального рівняння площини аналогічні властивостям нормального рівняння прямої на площині, а саме:

1) сума квадратів коефіцієнтів дорівнює одиниці:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

2) вільний член рівняння від'ємний $(-p < 0)$.

9.3. Основні теоретичні задачі на площині

1. Взаємне розташування площин. Нехай дві площини задані загальними рівняннями (9.9), а вектори $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1); \vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ відповідні
нормальні вектори цих площин.

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ \ (\pi_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \ \ (\pi_2). \end{aligned} \tag{9.9}$$

Визначимо умови, за яких площини: а) є паралельними; б) збігаються; с) перетинаються:

а) якщо площини ***паралельні*** $(\pi_1 \,||\, \pi_2)$, то їх нормальні вектори колінеарні, тобто координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}; \tag{9.10}$$

б) якщо площини ***збігаються***, то вони повинні описуватись одним рівнянням, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}; \tag{9.11}$$

с) якщо площини ***перетинаються***, то не виконується умова колінеарності нормальних векторів (9.10).

2. Кут між двома площинами. Під ***кутом між двома площинами*** розуміють будь-який із двох суміжних кутів між їх нормальними векторами. Знайдемо кут між двома площинами, які задані рівняннями у загальному вигляді (9.9). Отже, визначаємо кут між двома векторами нормалей: $\overline{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ та $\overline{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ (рис. 9.5), а саме:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right| \cdot \left|\overline{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{9.12}$$

Звідки

$$\varphi = \arccos\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{9.13}$$

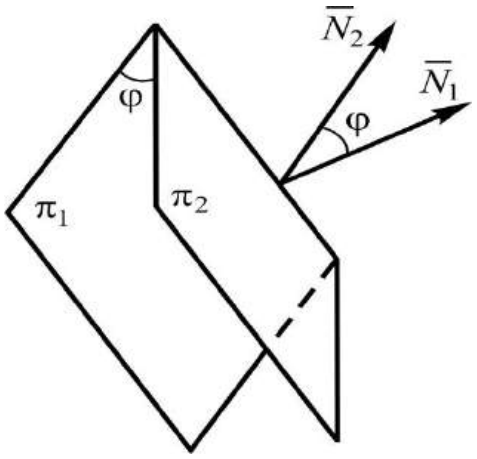


Рис. 9.5

Як наслідок маємо ***умову ортогональності площин:***

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0$$

або в координатах

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{9.14}$$

При розв'язанні задач із конкретними даними оперують, як правило, рівняннями площини у загальному вигляді, проте у багатьох випадках розв'язання задачі передбачає перехід до інших видів рівнянь. Розглянемо приклади таких перетворень.

3. Перехід від загального рівняння площини до рівняння у відрізках.

Розв'язання зводиться до тотожних перетворень вихідного рівняння (9.2).

Нехай усі коефіцієнти загального рівняння площини відмінні від нуля, тобто площина перетинає усі три осі координат і не проходить через початок координат. Тоді:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = -D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Позначимо:

$$a = -D/A, b = -D/B, c = -D/C.$$

Отримали рівняння площини у відрізках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

4. Перехід від загального рівняння площини до нормального рівняння площини здійснюється аналогічно тому, як це робилося для прямої в $\mathbf{R}^2$ за допомогою нормувального множника M.

Розглянемо загальне рівняння площини

$$Ax+By+Cz+D=0,\ \overline{N}=(A,B,C).$$

Згідно з першою властивістю нормального рівняння площини сума квадратів його коефіцієнтів дорівнює одиниці. Помножимо загальне рівняння на нормувальний множник M. Отже,

$$MAx+MBy+MCz+MD=0.$$

Нормувальний множник M знаходимо із умови:

$$M^2A^2+M^2B^2+M^2C^2=1.$$

Звідси $$M=\frac{1}{\pm|\overline{N}|},\ \text{де}\ |\overline{N}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Тоді загальне рівняння площини набуває вигляду:

$$\frac{A}{\pm|\overline{N}|}x+\frac{B}{\pm|\overline{N}|}y+\frac{C}{\pm|\overline{N}|}z+\frac{D}{\pm|\overline{N}|}=0,$$

або $$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

де $$\cos\alpha=\frac{A}{\pm|\overline{N}|},\ \cos\beta=\frac{B}{\pm|\overline{N}|},\ \cos\gamma=\frac{C}{\pm|\overline{N}|},\ p=\frac{-D}{\pm|\overline{N}|}.$$

Знак перед радикалом береться протилежним до знака вільного члена D загального рівняння згідно з умовою $-p<0.$



Розглянемо на прикладі перехід від рівняння (9.4) до рівняння (9.8):

$$2x-3y+6z+14=0\ \Rightarrow\ \left|\ D>0\ \Rightarrow\ M=\frac{-1}{\sqrt{4+9+36}}=-\frac{1}{7}\ \right|\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-2=0\Rightarrow\left(\cos\alpha=-\frac{2}{7},\ \ \cos\beta=\frac{3}{7},\ \ \cos\gamma=-\frac{6}{7},\ \ p=2\right).$$

Отже, площина розташована на відстані двох одиниць від початку координат, а її нормаль, що проведена із точки O, складає гострий кут із віссю Oy і тупі кути з осями Ox та Oz, що визначається знаками напрямних косинусів.

5. Відстань від точки до площини. Для розв'язання задачі про відшукання відстані r від довільної фіксованої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини, що задана загальним рівнянням, застосуємо формулу, яка аналогічна формулі для визначення відстані r від точки до прямої на площині:

$$r=\left|\, x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\,\right|. \tag{9.15}$$

Отже, для знаходження відстані від точки до площини необхідно привести загальне рівняння площини до нормальної форми і підставити в це рівняння координати даної точки, а саме

$$r=\frac{\left|\, Ax_0+By_0+Cz_0+D\,\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{9.16}$$



За співвідношенням (9.16) також можна визначити відстань між двома паралельними площинами. Для цього необхідно визначити координати будь-якої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить одній з площин, і підставити їх у нормальне рівняння іншої площини.

6. Рівняння бісекторних площин. За аналогією із задачею про побудову рівнянь бісектрис кутів, що утворені двома прямими на площині, розв'яжемо задачу про відшукання рівнянь ***бісекторних площин***, тобто площин, які поділяють навпіл двогранні кути між заданими площинами. Для цього знайдемо рівняння площин, всі точки яких знаходяться на однаковій відстані від двох заданих:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\quad(\pi_1),$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\quad(\pi_2).$$

Розв'язання цієї задачі принципово нічим не відрізняється від розв'язання задачі про бісектрису кута між двома прямими на площині. Так, нехай $M(X,Y,Z)$ – довільна точка бісекторної площини, а r_1, r_2 – відстані від цієї точки до площин π_1 і π_2 відповідно, причому $r_1 = r_2$. За формулою (9.16) маємо:

$$\frac{1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}\left|A_1X+B_1Y+C_1Z+D_1\right| = \frac{1}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\left|A_2X+B_2Y+C_2Z+D_2\right|.$$

Знімаємо знаки модулів і отримуємо рівняння двох бісекторних площин.



Знайдемо рівняння площин, що є бісекторними відносно площин

$$x+2y-2z+5=0,$$
$$2x+y+2z-3=0.$$

Нехай точка $M(X,Y,Z)$ – довільна точка бісекторної площини. Тоді відстань від цієї точки до площини (1) дорівнює відстані до площини (2), а саме:

$$\frac{|x+2y-2z+5|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|2x+y+2z-3|}{\sqrt{1+4+4}},$$

або $$x+2y-2z+5=2x+y+2z-3\ ,$$

$$x+2y-2z+5=-(2x+y+2z-3).$$

Отже, отримали рівняння двох взаємно перпендикулярних бісекторних площин:

$$x-y+4z-8=0,$$
$$3x+3y+2=0.$$

7. Рівняння площини, що проходить **через точку** $M_0(x_0,y_0,z_0)$ **паралельно векторам** $\bar{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$, $\bar{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$.

Складемо рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ паралельно векторам $\bar{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ та $\bar{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$, які не є колінеарними. Для цього шляхом паралельного перенесення сумістимо початки обох векторів у точці M_0, як показано на рис. 9.6. Тоді вони належатимуть площині π. Оскільки за аксіомою геометрії через дві прямі, що перетинаються,

можна провести площину і до того ж тільки одну, то задача має єдиний розв'язок.

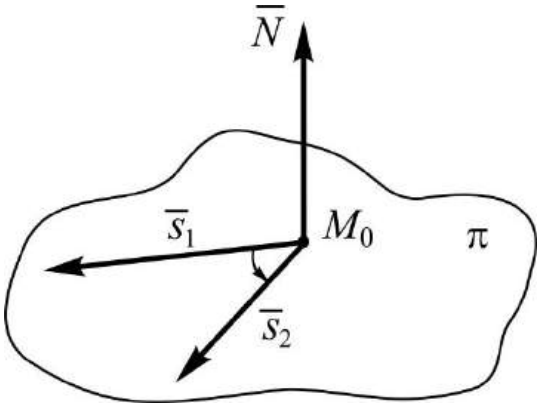


Рис. 9.6

Векторний добуток $\overline{s}_1 \times \overline{s}_2$ є нормальним вектором площини π. Отже,

$$\overline{N} = (A, B, C) = \overline{s}_1 \times \overline{s}_2 = \left(\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right). \qquad (9.17)$$

Тепер ми маємо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить площині, і нормальний вектор $\overline{N} = (A, B, C)$. За цими даними записуємо рівняння площини:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (9.18)$$

Ключові терміни

Поверхня; сфера і її канонічне рівняння; площина; загальне рівняння площини; види рівнянь площини; умова належності трьох точок одній прямій; умова перетину площин; умова паралельності площин; умова ортогональності площин; кут між площинами; бісекторні площини.

Запитання для самоперевірки

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символічній формі, обґрунтуйте на підставі означень, теорем, правил, формул

тощо, наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що розуміють під поверхнею у просторі?

2. Дайте означення сфери і виведіть її канонічне рівняння.

3. Запишіть рівняння площини, що проходить через три задані точки.

4. У чому полягає умова належності трьох точок одній прямій?

5. Наведіть рівняння площини у відрізках на осях.

6. Який зміст мають параметри рівняння площини у нормальному вигляді?

7. Отримайте рівняння площини, яка проходить через дану точку і має заданий нормальний вектор.

8. Яке рівняння називають загальним рівнянням площини? Який зміст мають параметри цього рівняння?

9. Сформулюйте і доведіть теорему про рівняння площини у загальному вигляді.

10. Який вигляд має загальне рівняння площини, що проходить через початок координат?

11. Якими загальними рівняннями описуються площини, що є паралельними одній із осей координат?

12. Який вигляд має загальне рівняння площини, якщо ця площина проходить через одну із координатних осей?

13. Як напрямлений відносно осей координат нормальний вектор площини, яка паралельна координатній площині? Запишіть ці рівняння для кожної з координатних площин.

14. За яких умов загальне рівняння площини описує координатну площину? Запишіть ці рівняння для кожної з координатних площин.

15. За яких умов дві площини, які задані загальними рівняннями: 1) перетинаються; 2) паралельні; 3) збігаються?

16. За якою формулою обчислюється кут між двома площинами? Сформулюйте умову ортогональності площин.

17. Як здійснюється перехід від загального рівняння площини до рівняння: 1) у відрізках на осях; 2) у нормальному вигляді?

18. За якими формулами обчислюється відстань від точки до площини?

19. Що таке бісекторні площини і якими рівняннями вони описуються?

Глава 10. Пряма у просторі. Взаємне розташування прямої і площини. Поверхні другого порядку

10.1. Різновиди рівнянь прямої

1^0. Загальне рівняння прямої. В аналітичній геометрії у просторі лінія визначається як множина спільних точок двох поверхонь. Пряму у просторі можна розглядати як лінію перетину двох площин (рис. 10.1). ***Загальним рівнянням прямої у просторі*** називається система двох рівнянь першого степеня, якими задаються площини:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (\pi_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (\pi_2). \end{cases} \tag{10.1}$$

Координати точок прямої задовольняють перше і друге рівняння системи.

Система двох рівнянь першого степеня визначає пряму лінію за умови, що нормальні вектори площин $\bar{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ та $\bar{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ неколінеарні. Тільки в цьому випадку площини будуть перетинатися та визначати пряму l.

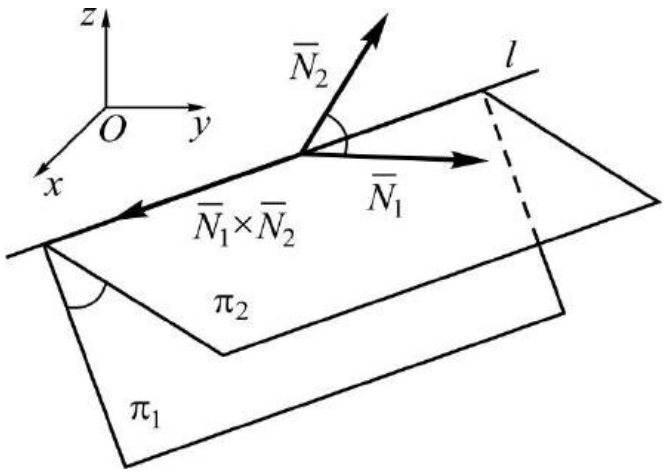


Рис. 10.1

Наприклад, можна стверджувати, що система рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 10 = 0, \\ 3x - 6y + 10z + 10 = 0, \end{cases}$$

кожне з яких є загальним рівнянням площини, описує пряму (нормальні вектори цих площин $\overline{N}_1 = (2, -3, 5)$ та $\overline{N}_2 = (3, -6, 10)$ неколінеарні).

2^0. Параметричні і канонічні рівняння прямої.

Будь-який ненульовий вектор, що є колінеарним прямій, називається ***напрямним вектором*** цієї прямої. Побудуємо рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямний вектор $\overline{s} = (m, n, p)$.

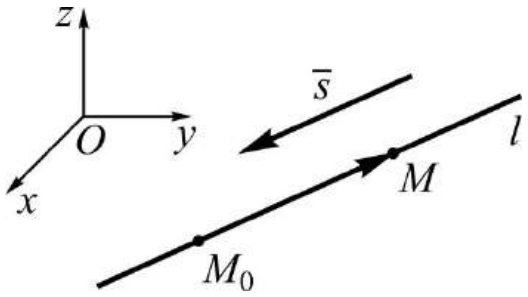


Рис. 10.2

Виберемо на прямій (рис. 10.2) довільну точку $M(x, y, z)$ і пов'яжемо з нею вектор $\overline{M_0M}$:

$$\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Вектори $\overline{M_0M}$ і $\bar{s}=(m, n, p)$ колінеарні, тобто $\overline{M_0M}=t\bar{s}$, де t – параметр або у координатах

$$\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \\ z &= z_0 + pt. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Рівняння (10.2) називаються ***параметричними рівняннями прямої.***

Знайдемо параметр t із рівнянь (10.2):

$$\frac{x-x_0}{m}=t,\ \frac{y-y_0}{n}=t,\ \frac{z-z_0}{p}=t.$$

Звідси одержимо:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ . \tag{10.3}$$

Рівняння (10.3) називаються ***канонічними рівняннями прямої.***

Нехай напрямний вектор прямої є ***одиничним вектором:*** $\bar{s}_0=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, тоді згідно з рівняннями (10.3) маємо

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}, \tag{10.4}$$

де α, β, γ – кути, які утворює вектор $\bar{s}_0$ з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно, а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси прямої.

Виходячи з канонічних рівнянь прямої (10.3), розглянемо окремі випадки розташування прямої у просторі.

Нехай у співвідношенні (10.3) один із знаменників дорівнює нулю, наприклад, $m=0$, тоді згідно з рівняннями (10.3) отримаємо систему:

$$\begin{cases} x = x_0, \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}. \end{cases} \tag{10.5}$$

Кожне з рівнянь цієї системи визначає площину, а система рівнянь визначає пряму, яка перпендикулярна до осі Ox. Пряма належить площині $x=x_0$, тобто $x-x_0=0$.

Якщо в рівняннях (10.3) будь-які два знаменники дорівнюють нулю, наприклад, $m = n = 0$, то із рівнянь (10.3) одержимо таку систему:

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0. \end{cases} \tag{10.6}$$

Пряма, яка визначається системою (10.6), паралельна осі Oz як лінія перетину двох площин перпендикулярних до осей Ox та Oy відповідно. Інші випадки розташування прямої розглядаються аналогічно.



Нехай маємо пряму, що описується канонічними рівняннями:

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{0}.$$

Можна стверджувати, що ця пряма проходить через точку $(2, -5, 1)$ і розташована паралельно осі Oy. Звідси отримуємо її параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = 2 + 0 \cdot t; \\ y = -5 + 3 \cdot t; \\ z = 1 + 0 \cdot t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = -5 + 3t; \\ z = 1. \end{cases}$$

3⁰. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Складемо рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ можна вважати напрямним вектором прямої (рис. 10.3). Виберемо на прямій довільну точку $M(x, y, z)$ і пов'яжемо з нею вектор $\overline{M_1M}$:

$$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1).$$

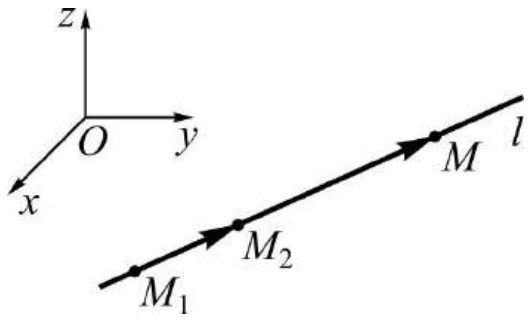


Рис. 10.3

Вектори $\overline{M_1M}$ та $\overline{M_1M_2}$ є колінеарними. Отже, отримуємо співвідношення, якому відповідають координати точок прямої, і тільки вони:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{10.7}$$

Рівняння (10.7) і є рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

10.2. Основні задачі на пряму у просторі

1. Зведення загального рівняння прямої до канонічного вигляду.

Нехай пряма лінія l у просторі задана загальним рівнянням

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ (\pi_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \ (\pi_2). \end{cases} \tag{10.8}$$

Знайдемо канонічне рівняння прямої

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \ . \tag{10.9}$$

Для того щоб звести загальне рівняння прямої до канонічного вигляду, треба знайти:

а) коодинати будь-якої точки, що належить прямій;

б) координати напрямного вектора $\bar{s} = (m, n, p)$.

Оскільки система рівнянь (10.8) визначає пряму, тобто має безліч розв'язків, то надамо, наприклад, змінній z довільне значення. Нехай $z = z_0 = 0$. Тоді для знаходження невідомих x_0, y_0 отримаємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} A_1 x_0 + B_1 y_0 = -D_1, \\ A_2 x_0 + B_2 y_0 = -D_2. \end{cases} \tag{10.10}$$

Якщо визначник системи (10.10) не дорівнює нулю, одержимо точку, що належить прямій.

Знайдемо координати напрямного вектора прямої $\bar{s}$. Вектор $\bar{s}$ перпендикулярний до кожного з нормальних векторів площин $\bar{N}_1$ та $\bar{N}_2$ відповідно. Тому вектор $\bar{s}$ можна знайти як векторний добуток $\overline{N}_1 \times \overline{N}_2$ нормальних векторів площин π_1 та π_2:

$$\overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \bar{s} = (m, n, p), \text{ а саме}$$

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Отже, координати векторного добутку такі:

$$m=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};\ n=-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix};\ p=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0\left(x_0, y_0, 0\right)$, а її напрямним вектором є вектор $\bar{s}$, можна записати в канонічному вигляді:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z}{p}.$$



Нехай пряма задана загальним рівнянням:

$$\begin{cases} x-2y+2z=0; \\ 2x-4y+z+1=0. \end{cases}$$

Знайдемо канонічне рівняння прямої.

1. Покладемо в системі рівнянь $x_0=0$ і визначимо $y_0=1/3,\ z_0=1/3$.

Точка $M\left(x_0, y_0, z_0\right)=\left(0,\ 1/3,\ 1/3\right)$ належить прямій.

2. $\left.\begin{array}{l} \overline{N}_1=\left(1,-2,\ 2\right) \\ \overline{N}_2=\left(2,-4,1\right) \end{array}\right] \Rightarrow\ \overline{s}=\left(m, n,\ p\right)=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\left(6,\ 3,\ 0\right)$, тому канонічне рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x}{6}=\frac{y-1/3}{3}=\frac{z-1/3}{0}\ .$$

2. Взаємне розташування прямих у просторі. Нехай дві прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ \left(l_1\right),\quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\ \left(l_2\right). \qquad (10.11)$$

Установити умови, за яких ці прямі: а) паралельні; б) збігаються; в) перетинаються; г) перехресні.

1. Якщо прямі l_1 та l_2 є ***паралельними***, то їх напрямні вектори колінеарні, а тому координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (10.12)$$

Однак ця умова не є достатньою, оскільки при її виконанні прямі можуть бути не тільки паралельними, але й збігатися.

2. Для ***збігу*** прямих одночасно з умовою (10.12) треба перевірити таку умову: чи належить точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ прямій l_2 або точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ прямій l_1, тобто перевірити виконання (10.11) для відповідних точок.



Перевіримо, наприклад, чи збігаються прямі:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}; \quad \frac{x-7}{6}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{2}.$$

Спочатку переконаємося, що напрямні вектори прямих паралельні. Це дійсно так, оскільки виконується умова (10.12): $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Потім перевіряємо, чи мають спільну точку ці дві паралельні прямі. Для цього достатньо перевірити виконання умови: точка $M_2(7,-1,2)\in l_1$. Оскільки

$$\frac{1-7}{6}=\frac{-5+1}{4}=\frac{0-2}{2}=-1, \text{ то прямі збігаються.}$$

3. Визначимо умови ***перетину*** прямих. Нехай прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями (10.11). Припустимо, що вони перетинаються у точці $T_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 10.4).

Дві різні прямі, що перетинаються, визначають площину, і до того ж тільки одну. Оскільки напрямні вектори $\bar{s}_1$ та $\bar{s}_2$ заданих прямих, а також вектор $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ належать цій площині, то вони компланарні.

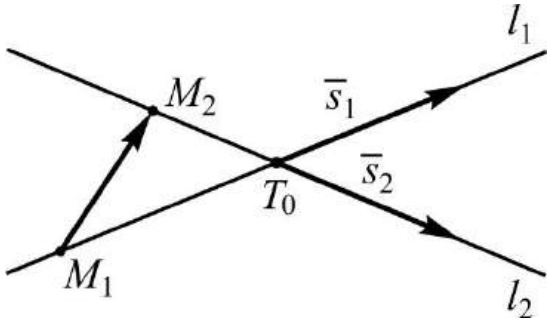


Рис. 10.4

За умовою компланарності трьох векторів отримуємо ***необхідну умову перетину прямих***:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (10.13)$$

Ця умова у сукупності з умовою неколінеарності напрямних векторів дають ***достатню умову перетину*** прямих.

Перевіримо, наприклад, чи перетинаються прямі:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{-1} \qquad (l_1), \qquad \bar{s}_1 = (3, 2, -1), \qquad M_1(x_1, y_1, z_1) = M_1(-1, 5, -2)$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{3} \qquad (l_2), \qquad \bar{s}_2 = (4, 0, 3), \qquad M_2(x_2, y_2, z_2) = M_2(1, 0, -2).$$

Визначник (10.13) не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 13 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 13 & 6 \end{vmatrix} = 77 \neq 0,$$

отже, прямі не перетинаються, тобто не належать одній площині.

4. **Перехресними прямими** називаються дві прямі, через які неможливо провести площину. Тоді із викладеного вище випливає, що ***умовою перехрещування*** двох прямих є відмінність від нуля визначника (10.13). У прикладі, що ми щойно розглянули, прямі є перехресними.

3. Кут між двома прямими, які задані:

а) канонічними рівняннями;

б) рівняннями загального вигляду.

Як і для прямої на площині, під ***кутом між прямими*** у просторі будемо розуміти будь-який із суміжних кутів між їхніми напрямними векторами.

А. Нехай прямі l_1 і l_2 задані відповідно рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Тоді косинус кута між двома прямими визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}\ , \qquad (10.14)$$

де φ – кут між прямими l_1 і l_2.

Як наслідок із (10.14) отримуємо ***критерій перпендикулярності прямих:***

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0\,. \qquad (10.15)$$

Б. Знайдемо кут між прямими l_1 і l_2, що задані загальними рівняннями:

$$\begin{cases} A_1^{(1)}x + B_1^{(1)}y + C_1^{(1)}z + D_1^{(1)} = 0 \\ A_2^{(1)}x + B_2^{(1)}y + C_2^{(1)}z + D_2^{(1)} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} A_1^{(2)}x + B_1^{(2)}y + C_1^{(2)}z + D_1^{(2)} = 0 \\ A_2^{(2)}x + B_2^{(2)}y + C_2^{(2)}z + D_2^{(2)} = 0 \end{cases}.$$

Спочатку знаходимо напрямні вектори обох прямих за допомогою векторного добутку

$$\bar{s}_1 = \left(m^{(1)}, n^{(1)}, p^{(1)}\right), \quad \bar{s}_2 = \left(m^{(2)}, n^{(2)}, p^{(2)}\right),$$

а потім користуємося формулою

$$\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}|_1 \cdot |\bar{s}_2|}\ ;\ \varphi = \arccos\frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|}\,. \qquad (10.16)$$



Знайдемо кут між прямими:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0; \\ x + 3y - z + 1 = 0; \end{cases} \left(l_1\right), \quad \begin{cases} x - 3y + 5z - 2 = 0; \\ 5x + 3z - 4 = 0. \end{cases} \left(l_2\right).$$

Знаходимо напрямні вектори прямих:

$$\bar{s}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -13\bar{i} + 8\bar{j} + 11\bar{k};\ \bar{s}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9\bar{i} + 22\bar{j} + 15\bar{k},$$

або $\bar{s}_1 = (-13, 8, 11), \quad \bar{s}_2 = (-9, 22, 15)$.

За формулою (10.14) отримуємо:

$$\cos\varphi = \frac{13 \cdot 9 + 8 \cdot 22 + 11 \cdot 15}{\sqrt{354} \cdot \sqrt{790}} = \frac{229}{\sqrt{177} \cdot \sqrt{395}} \approx 0{,}8661 \ \Rightarrow\ \varphi = \arccos 0.8661 \approx 30^\circ.$$

4. Відстань між паралельними прямими. Знайдемо відстань d між двома прямими l_1 і l_2, що задані рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}, \qquad \frac{x-x_2}{m}=\frac{y-y_2}{n}=\frac{z-z_2}{p}. \tag{10.17}$$

Перенесемо початок напрямного вектора $\bar{s}=(m,n,p)$ прямих у точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і розглянемо вектор $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ (рис. 10.5).

Тоді з одного боку площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{s}$ і $\overline{M_1M_2}$ як на сторонах, дорівнює модулю векторного добутку $\bar{h}=\bar{s}\times\overline{M_1M_2}$, а з іншого – це добуток $|\bar{s}|\cdot d$.

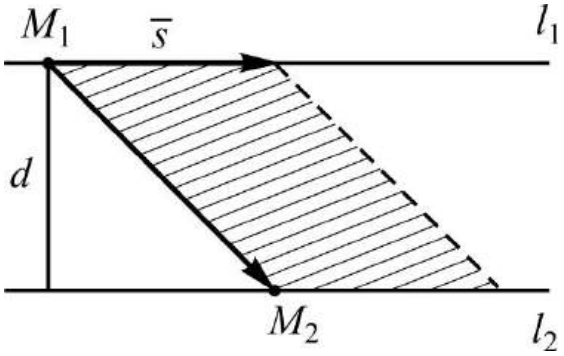


Рис. 10.5

Тоді $|\bar{h}|=|\bar{s}|\cdot d$.

Звідки знаходимо:

$$d=\frac{|\bar{h}|}{|\bar{s}|}. \tag{10.18}$$

Визначаємо:

$$\bar{h}=\bar{s}\times\overline{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ m & n & p\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}\Rightarrow|\bar{s}\times\overline{M_1M_2}|=\sqrt{h_x^2+h_y^2+h_z^2},$$

де $h_x=\begin{vmatrix} n & p\\ y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}$, $h_y=-\begin{vmatrix} m & p\\ x_2-x_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}$, $h_z=\begin{vmatrix} m & n\\ x_2-x_1 & y_2-y_1\end{vmatrix}$.

Остаточно формула (10.18) набуває вигляду:

$$d=\frac{\sqrt{h_x^2+h_y^2+h_z^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{10.19}$$

5. Кут і відстань між прямими, що перехрещуються. Нехай прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\,(l_1),\qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\,(l_2).$$

Для обчислення кута між l_1 і l_2 сумістимо початки напрямних векторів $\bar{s}_1$ та $\bar{s}_2$ шляхом паралельного перенесення і застосуємо формулу (10.14).

Далі визначимо відстань між прямими. Як відомо із стереометрії, під ***відстанню між двома перехресними прямими*** розуміють довжину їх спільного перпендикуляра (рис. 10.6). Щоб побудувати спільний перпендикуляр (його довжину позначимо через d) треба через l_2 провести площину π_2, паралельну прямій l_1, і через довільну точку прямої l_1 провести перпендикуляр до π_2.

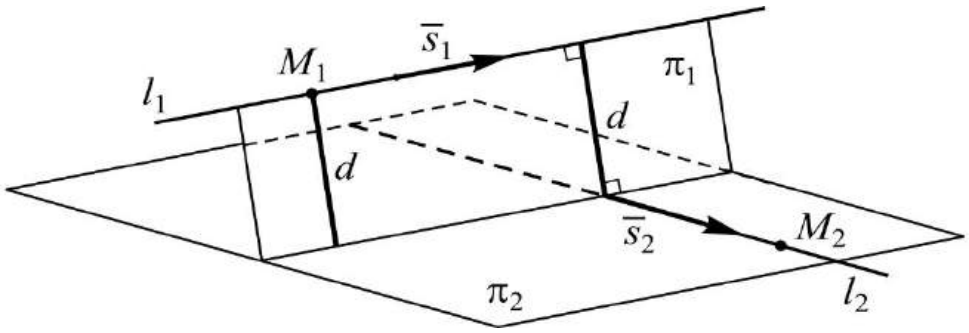


Рис. 10.6

Отже, розв'язання задачі зводиться до реалізації двох кроків:

1) за відомими напрямними векторами $\bar{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$, $\bar{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ і даною точкою $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ***складаємо*** рівняння π_2 (див. (9.21)):

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow A(x-x_2)-B(y-y_2)+C(z-z_2)=0,\quad (10.20)$$

де $A=\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$;

2) ***обчислюємо*** відстань від точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до площини π_2:

$$d=\frac{\left|A(x_1-x_2)-B(y_1-y_2)+C(z_1-z_2)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\qquad (10.21)$$

Вираз під знаком модуля у чисельнику в (10.21) – мішаний добуток $\left(\bar{s}_1 \times \bar{s}_2\right) \cdot \overline{M_1 M_2}$, а у знаменнику (10.21) – модуль векторного добутку $\bar{s}_1 \times \bar{s}_2$.

Таким чином, отримуємо стислий запис формули (10.21):

$$d = \frac{\left|\left(\bar{s}_1 \times \bar{s}_2\right) \cdot \overline{M_1 M_2}\right|}{\left|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2\right|}. \qquad (10.22)$$

10.3. Пряма і площина, аналіз взаємного розташування

1. Взаємне розташування у просторі прямої і площини. Існують три можливі випадки. Пряма l і площина π можуть мати:

1) одну спільну точку T, тобто l і π ***перетинаються***;

2) порожню множину спільних точок, тобто l і π ***паралельні***;

3) нескінченну множину спільних точок, тобто ***пряма*** l ***належить площині*** π.

Нехай пряма l і площина π задані відповідно рівняннями:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (10.23)$$

Опишемо в алгебраїчній формі можливі випадки взаємного розташування l та π. Для цього здійснемо перехід до параметричної форми завдання рівнянь прямої і зведемо сумісний аналіз рівнянь l і π до аналізу одного рівняння від однієї змінної – параметра t:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0; \\ x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \Rightarrow A\left(x_0 + mt\right) + B\left(y_0 + nt\right) + C\left(z_0 + pt\right) + D = 0.$$

Звідки отримуємо рівняння відносно параметра t

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \qquad (10.24)$$

Проведемо аналіз отриманого рівняння (10.24):

1) якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, то t має єдине значення

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp},$$

тобто пряма l і площина π мають одну спільну точку;

2) якщо $Am + Bn + Cp = 0$, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то рівняння (10.24) не має розв'язку, тобто пряма l паралельна площина π;

3) якщо $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то рівняння (10.24) має безліч розв'язків і параметр t може бути будь-яким дійсним числом, тобто пряма l належить площині π.

Зауваження. Якщо пряма і площина перетинаються, то співвідношення (10.24) дає можливість легко знайти координати точки T перетину l з π, а саме:

$$x_T = x_0 + mt, \quad y_T = y_0 + nt, \quad z_T = z_0 + pt. \qquad (10.25)$$

2. Кут між прямою і площиною. Знайдемо кут між прямою l і площиною π, які описуються рівняннями (10.23), і визначимо умову перпендикулярності прямої і площини.

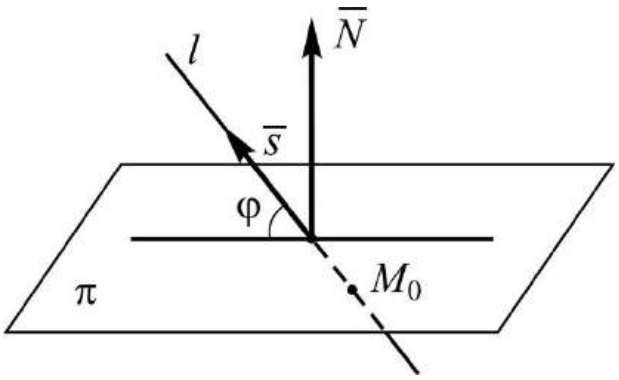


Рис. 10.7

Під ***кутом між прямою і площиною*** розуміють будь-який із суміжних кутів, що утворені прямою і її проекцією на площину (рис. 10.7). Залежно від того, який кут обрано, гострий чи тупий, і як спрямовані вектори $\bar{N}$ (нормальний вектор до площини) і $\bar{s}$ (напрямний вектор прямої), кут між ними дорівнюватиме $\frac{\pi}{2} - \varphi$ або $\frac{\pi}{2} + \varphi$ (рис. 10.7), де φ – кут між прямою l і площиною π.

Для косинуса кута між двома векторами маємо:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\bar{N} \cdot \bar{s}}{|\bar{N}| \cdot |\bar{s}|}.$$

За формулами зведення:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \varphi\right) = \pm \sin\varphi, \text{ тому } \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \varphi\right)\right| = \sin\varphi.$$

Отже,

$$\sin\varphi = \frac{\left|\bar{N}\cdot\bar{s}\right|}{\left|\bar{N}\right|\cdot\left|\bar{s}\right|} = \frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \qquad (10.26)$$

а кут $\varphi = \arcsin(\sin\varphi)$.

Якщо пряма задана рівнянням у загальному вигляді (10.1), то у співвідношення (10.26) замість m, n, p слід підставити відповідні координати векторного добутку (див. (6.20)).

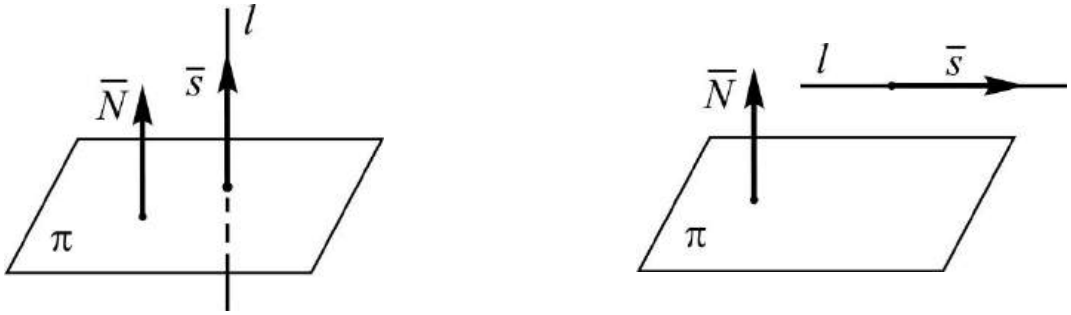
Умови перпендикулярності і паралельності прямої l і площини π:

1) умова перпендикулярності (рис. 10.8а): $l \perp \pi \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Дійсно, в цьому випадку нормальний вектор до площини $\bar{N}(A,B,C)$ і напрямний вектор прямої $\bar{s}(m,n,p)$ – колінеарні;

2) умова паралельності (рис. 10.8б): $l \parallel \pi \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

У цьому випадку нормальний вектор до площини $\bar{N}(A,B,C)$ і напрямний вектор прямої $\bar{s}(m,n,p)$ – ортогональні.



а) б)

Рис. 10.8

10.4. Поверхні другого порядку. Довідкові відомості

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору, яка в декартовій системі координат задається рівнянням

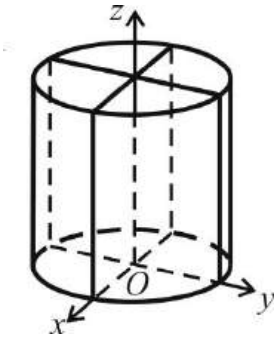
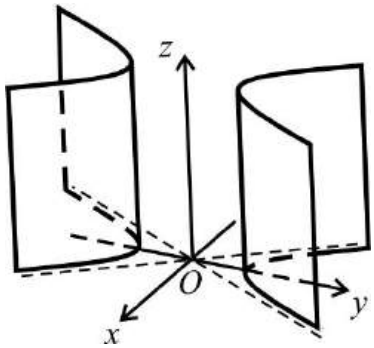
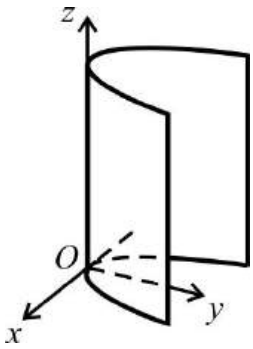
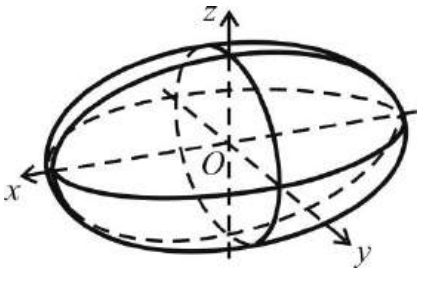
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Kx + Ly + Mz + N = 0,$$

при цьому коефіцієнти A, B, C, D, E, F не можуть одночасно дорівнювати нулю. Далі в табл. 10.1 наводяться канонічні рівняння та рисунки поверхонь

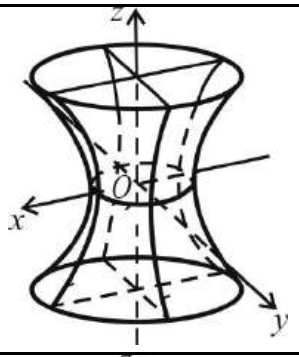
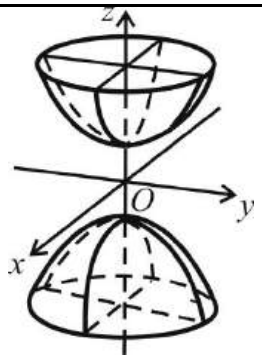
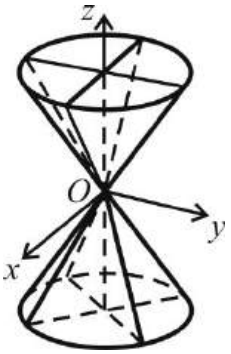
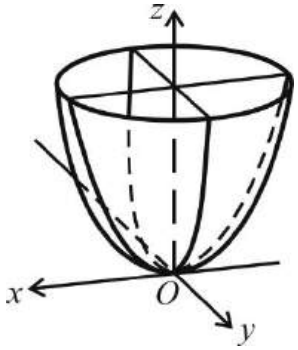
другого порядку.

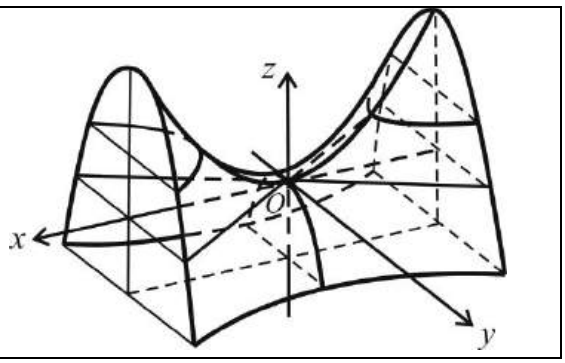
Таблиця 10.1

Поверхні другого порядку

№	Рівняння поверхні	Назва поверхні	Зображення поверхні
1	2	3	4
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Еліптичний циліндр (при $a=b$ – круговий)	
2	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Гіперболічний циліндр	
3	$x^2=2py$	Параболічний циліндр	
4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Тривісний еліпсоїд	

Закінчення табл. 10.1

1	2	3	4
5	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Однопорожнинний гіперболоїд	
6	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	Двопорожнинний гіперболоїд	
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Конус	
8	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ q>0)$	Еліптичний параболоїд	

9	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = \pm 2z$ $(p > 0,\ q > 0)$	Гіперболічний параболоїд	

Ключові терміни

Канонічне, параметричне і загальне рівняння прямої; рівняння прямої, що проходить через дві точки; паралельність прямих; необхідна і достатня умови перетину прямих; умови перехрещування прямих; кут між прямими; відстань між прямими; точка перетину прямої і площини; паралельність прямої і площини; ортогональність прямої і площини.

Запитання для самоперевірки

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символічній формі, обґрунтуйте на підставі означень, теорем, правил, формул тощо, наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Виведіть рівняння прямої: а) канонічні; б) параметричне; в) за двома точками.
2. Що називають рівнянням прямої у загальному вигляді?
3. Як здійснюється перехід від загального рівняння прямої до її канонічних рівнянь?
4. Які є випадки розташування прямої у просторі?
5. Запишіть умови: паралельності; збігу; перетину і перехрещування двох прямих.
6. Розв’яжіть задачу про визначення спільної точки двох прямих, що перетинаються.
7. За якою формулою обчислюється кут між двома прямими, якщо прямі задані канонічними рівняннями або рівняннями у загальному вигляді?
8. Як відшукати відстань між паралельними прямими?
9. Як відшукати відстань між прямими, що перехрещуються?

10. Які існують випадки взаємного розташування прямої і площини?

11. Як визначити кут між прямою і площиною?

12. Як описати в алгебраїчній формі випадки взаємного розташування прямої і площини?

13. Виведіть формулу для обчислення кута між прямою і площиною.

14. Які умови паралельності прямої і площини?

15. Яка умова перпендикулярності прямої і площини?

Приклади та вправи за розділом 2

Приклади застосування векторної алгебри й аналітичної геометрії до розв'язання задач з економіки.

2.1. За плановий період підприємство виготовило 200 одиниць продукції першого виду, 150 одиниць другого і 100 одиниць третього виду. Прибуток від реалізації одиниці кожного виду складає відповідно 3, 5 і 10 грн.

Обчислити прибуток від реалізації всієї продукції.

Розв'язання. Прибутки від реалізації кожної одиниці продукції можна вважати координатами вектора $\bar{a} = (3; 5; 10)$, а обсяг виготовленої продукції трьох видів опишемо вектором $\bar{b} = (200; 150; 100)$. Тоді прибуток від реалізації всієї продукції можна визначити як скалярний добуток $\bar{a} \cdot \bar{b}$. Отже,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (3; 5; 10) \cdot (200; 150; 100) = 600 + 750 + 1000 = 2350 \text{ (грн).}$$

2.2. Витрати підприємства на виготовлення 10 одиниць продукції складають 1 000 грн, а на 50 одиниць цієї ж продукції – 2 000 грн. Визначити витрати підприємства на виготовлення 30 одиниць продукції за умови, що загальні витрати на виробництво продукції є лінійною функцією від обсягу продукції.

Розв'язання. За умовою задачі витрати на виробництво є лінійною функцією від обсягу продукції. Рівняння відповідної лінії будемо шукати як рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Використовуючи умову задачі, маємо:

$$\frac{y - 1000}{2000 - 1000} = \frac{x - 10}{50 - 10}.$$

Звідси:

$$y - 1000 = 25(x - 10) \Rightarrow y = 25x + 750.$$

Отже, ми одержали функцію, що характеризує залежність витрат виробництва від обсягу продукції. Тепер знайдемо значення цієї функції при $x = 30$:

$$y = 25 \cdot 30 + 750 = 1500 \text{ (грн)}.$$

Відповідь: на виробництво 30 одиниць товару витрачається 1500 грн.

2.3. Через пункти A і B проходить шосейна дорога. На плані місцевості ці пункти мають координати $(2;4)$ та $(16;0)$. Завод C, який на тому ж плані має координати $(11;9)$, необхідно з'єднати найкоротшою дорогою з цим шосе. Знайти на шосе точку D входження в нього дороги.

Розв'язання. Спочатку знайдемо рівняння прямої, яка на плані місцевості відповідає шосе. Для цього запишемо рівняння прямої AB, що проходить через точки $A(2;4)$ та $B(16;0)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Отже:

$$\frac{y-4}{0-4}=\frac{x-2}{16-2}, \quad \frac{y-4}{-2}=\frac{x-2}{7} \quad \Rightarrow \quad 2x+7y-32=0.$$

Найкоротша пряма, що пройде через точку C, є перпендикуляром до прямої AB. Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої AB: $k_{AB}=-\frac{2}{7}$. Умову перпендикулярності прямих можна записати таким чином: $k_1 \cdot k_2 = -1$. Звідси обчислимо кутовий коефіцієнт прямої CD: $k_{CD}=\frac{7}{2}$. Для того щоб записати рівняння прямої CD, треба використати рівняння прямої, що проходить через точку в заданому напрямі: $y-y_0=k(x-x_0)$. Отже, маємо:

$$y-9=\frac{7}{2}(x-11), \quad \text{або} \quad 7x-2y-59=0.$$

Тепер знайдемо точку перетину прямих AB і CD:

$$\begin{cases} 2x+7y-32=0 \\ 7x-2y-59=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9; \\ y=2. \end{cases}.$$

Таким чином, точка D має координати: $x = 9$, $y = 2$.

Відповідь: $D(9;2)$.

2.4. У попередньому році ціна одиниці деякого товару становила 50 грн, а у поточному – збільшилась до 60 грн. Знайти залежність ціни товару від номеру року, якщо припустити, що ціна щороку буде збільшуватися на ту саму величину. Скласти прогноз ціни на 3 та на 5 років уперед.

Розв'язання. Позначимо номер попереднього року через 1, тоді поточному року відповідає номер 2.

Складемо рівняння прямої, що проходить через дві точки, а саме через точки $A(1;50)$ і $B(2;60)$:

$$\frac{y-50}{60-50}=\frac{x-1}{2-1} \quad \Rightarrow \quad y=10x+40.$$

Через три роки, тобто для року, номер якого дорівнює $x=2+3=5$, ціна товару буде складати $y=10\cdot 5+40=90$ (грн), а через 5 років (при $x=7$) ціна товару досягне $y=10\cdot 7+40=110$ (грн).

2.5. Пропозиція та попит на цукор у деякий період на ринку описувалися функціями:

$$P=0{,}6q+5, \quad S=-0{,}4q+13,$$

де q – ціна одного кг цукру в грн, а P і S – вага у кг.

Знайти ринкову ціну на цукор у цей період.

Розв'язання. Ринкова ціна визначається умовою $P=S$, а саме:

$$0{,}6q+5=-0{,}4q+13,$$

звідси $q=8$ (грн).

2.6. Підприємство витрачає на виробництво одиниці продукції 20 грн (постійні витрати). Витрати, які не залежать від обсягу продукції, наприклад, зарплатня, амортизаційні відрахування тощо (змінні витрати), дорівнюють 200 грн за тиждень. Знайти собівартість одиниці продукції.

Розв'язання. Нехай x – кількість одиниць продукції, що виготовлена протягом тижня. Витрати на виробництво цієї продукції складають $20x+200$. Витрати (y) на виробництво одиниці продукції:

$$y=\frac{20x+200}{x}, \quad \text{або} \quad y=20+\frac{200}{x} \quad (x>0).$$

Таким чином, витрати на виробництво одиниці продукції обернено пропорційно залежать від обсягу виробництва, а саме: при зростанні x собівартість продукції спадає і прямує до $y=20$.

2.7. Залежність обсягу виробництва від витрат ресурсів двох видів x і y задається виробничою функцією:

$$Z = 9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y.$$

Визначити витрати ресурсів на виготовлення 23 одиниць продукції.

Розв'язання. За умовою задачі $Z = 23$, отже, співвідношення між x та y описується рівнянням:

$$9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y = 23.$$

Зведемо це рівняння лінії 2-го порядку до канонічного вигляду:

$$\left(9x^2 - 18x\right) + \left(4y^2 - 8y\right) = 23 \;\Rightarrow\; 9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(x^2 - 2x + 1) - 4 = 23;$$

$$9(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = 36;$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Отже, ми отримали рівняння, яке визначає еліпс з центром у точці $(1;1)$, а його півосі дорівнюють $a = 2$, $b = 3$.

Для кожного значення обсягу витрат ресурсу першого виду, що описуються значенням x з проміжку $(0;3)$, обсяг витрат другого ресурсу y набуває значення з проміжку $(0;4)$. Наприклад, якщо витрати першого ресурсу x дорів-нюють 2 (од.), то витрати y другого ресурсу, які визначаються за рівнянням еліпса, дорівнюють $y = \frac{3}{2}\sqrt{3} + 1 \approx 3{,}6$ (од.).

2.8. Відстань між двома торгівельними організаціями дорівнює 8 км. Знайти множину можливих місць розташування бази таким чином, щоб сума відстаней від бази до цих організацій була сталою величиною і дорівнювала 10 км.

Розв'язання. Виберемо осі координат таким чином: торгівельні організації – точки A і B, які лежать на осі OX, а вісь OY проходить через середину відрізка AB. У цій системі координат точки, відповідно, мають координати $A(-4;0)$ та $B\ (4;0)$. Якщо база розташована у точці $C\ (x;y)$, то за умовою задачі:

$$AC + CB = 10.$$

Визначимо AC та CB як відстань між двома точками:

$$AC=\sqrt{(x+4)^2+y^2},\quad CB=\sqrt{(x-4)^2+y^2}.$$

Тоді:

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=10,$$

або

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10-\sqrt{(x-4)^2+y^2}.$$

Підносимо обидві частини даного співвідношення до квадрата і отримуємо:

$$x^2+8x+16+y^2=100-20\sqrt{(x-4)^2+y^2}+x^2-8x+16+y^2\ \Rightarrow$$

$$16x=100-20\sqrt{(x-4)^2+y^2},\quad \text{або}\qquad 5\sqrt{(x-4)^2+y^2}=25-4x.$$

Піднесемо ще раз обидві частини співвідношення до квадрата:

$$25\left(x^2-8x+16+y^2\right)=625-200x+16x^2\Rightarrow 9x^2+25y^2=225.$$

Поділивши обидві частини даного співвідношення на 225, отримаємо рівняння еліпса в канонічній формі:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Відповідь: якщо база розташована на лінії, яка є еліпсом: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, то сума відстаней від неї до торгівельних організацій буде 10 км.



Задачі та вправи для самостійного розв'язання

2.9. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут 120º. Знайти $|\bar{a}+\bar{b}|$ і $|\bar{a}-\bar{b}|$, якщо $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$.

2.10. Обчислити $|\bar{a}+\bar{b}|$, якщо $|\bar{a}|=11$ $|\bar{b}|=23$ і $|\bar{a}-\bar{b}|=30$.

2.11. Знайти $(3\bar{a}-5\bar{b})(2\bar{a}+7\bar{b})$, якщо $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=1$, $\bar{a}\perp\bar{b}$.

2.12. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Знайти довжину вектора $\bar{c} = 3\bar{a} + 5\bar{b}$, якщо $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$.

2.13. При якому значенні α вектори $\bar{m} = 3\bar{a} + \alpha\bar{b}$ і $\bar{n} = \bar{a} - 2\bar{b}$ будуть взаємно перпендикулярні, якщо $|\bar{a}| = 7\sqrt{2}$, $|\bar{b}| = 2$, $(\bar{a}\hat{}\bar{b}) = \frac{\pi}{4}$.

2.14. Знайти кут між векторами $\bar{a} = 2\bar{m} + 4\bar{n}$ і $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$, якщо $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$ і $(\bar{m}\hat{}\,\bar{n}) = 120^{\circ}$.

2.15. Знайти довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = 5\bar{m} + 2\bar{n}$ і $\bar{b} = \bar{m} - 3\bar{n}$, якщо $|\bar{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}\hat{}\,\bar{n}) = \frac{\pi}{4}$.

2.16. Задані вектори $\bar{a} = (-3;4;-1)$, $\bar{b} = (-1;2;3)$, $\bar{c} = (-4;-2;1)$. Знайти вектор $\bar{d} = -5\bar{a} + 4\bar{b} + \bar{c}$ і його довжину.

2.17. Знайти гострий кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = (2;1;0)$ і $\bar{b} = (0;-1;1)$.

2.18. Знайти вектор $\bar{x}$, який колінеарний вектору $\bar{a} = (2;1;-1)$, і задовольняє умову $\bar{x} \cdot \bar{a} = 6$.

2.19. Знайти вектор $\bar{x}$, який колінеарний вектору $\bar{a} = (-12;16;15)$, утворює тупий кут з віссю Oz і його довжина $|\bar{x}| = 100$.

2.20. Знайти $np_{\bar{b}+\bar{c}}\bar{a}$, якщо $\bar{a} = (1;-3;4)$, $\bar{b} = (3;-4;2)$, $\bar{c} = (-1;1;4)$.

2.21. Вектори $\bar{m}$ і $\bar{n}$ утворюють кут $\varphi = 45^{\circ}$. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = 2\bar{m} - 3\bar{n}$ і $\bar{b} = 3\bar{m} + 2\bar{n}$, якщо $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$.

2.22. Знайти площу трикутника з вершинами $A(-3;-2;-4)$, $B(-1;-4;-7)$, $C(1;-2;2)$.

2.23. Знайти вектор $\overline{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\overline{a}=(2;-3;1)$ і $\overline{b}=(1;-2;3)$ і задовольняє умову $\overline{x}\left(\overline{i}+2\overline{j}-7\overline{k}\right)=10$.

2.24. Знайти об'єм трикутної піраміди, вершини якої розташовані у точках: $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ і $D(4;1;3)$.

2.25. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2;8)$ і середину відрізка MN, який задано координатами його кінців: $M(6;-5)$, $N(-2;1)$.

2.26. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $3x+2y+7=0$ і $4x+3y+9=0$ паралельно прямій $y=-2x+3$.

2.27. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;3)$ перпендикулярно до прямої, якій належать точки $A(1;7)$ і $B(-2;-5)$.

2.28. Знайти проекцію точки $M(3;4)$ на пряму $2x+5y+3=0$.

2.29. Знайти точку B, яка симетрична точці $A(2;-5)$ відносно прямої $2x+8y-15=0$.

2.30. Точка $A(2;-5)$ є вершиною квадрата, одна зі сторін якого лежить на прямій $x-2y-7=0$. Знайти площу квадрата.

2.31. Перевірити, що точки $A(-4;-3)$, $B(-5;0)$, $C(5;6)$ і $D(1;0)$ є вершинами трапеції. Знайти висоту трапеції.

2.32. Скласти рівняння бісектрис кутів між прямими $3x+4y-5=0$ і $5x-12y+3=0$.

2.33. Знайти рівняння кола, центр якого лежить в точці $C(1;-1)$, а дотична до нього описується рівнянням $3x-4y+3=0$.

2.34. Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(-1;3)$, $B(0;2)$ і $C(1;-1)$.

2.35. Знайти відстань між центрами двох кіл: $x^2+y^2+6x-14y-6=0$ і $x^2+y^2-24x+2y-51=0$.

2.36. Еліпс проходить через точки $M(1;-1{,}5)$ і $N(-2;0)$, а його фокуси лежать на осі Ox. Скласти канонічне рівняння еліпса і знайти координати його фокусів.

2.37. Еліпс, ексцентриситет якого $\varepsilon = 0{,}5$, а фокуси лежать на осі Ox, проходить через точку $M\left(-4;\sqrt{15}\right)$. Скласти рівняння цього еліпса і знайти відстані його фокусів до точки M.

2.38. Скласти рівняння гіперболи, якщо її вершини знаходяться у точках $(-3;0)$ і $(3;0)$, а фокуси – у точках $\left(-3\sqrt{5};0\right)$ і $\left(3\sqrt{5};0\right)$.

2.39. Скласти рівняння гіперболи, якщо вона проходить через точку $M\left(10;-3\sqrt{3}\right)$ і має асимптоти $y = \pm\frac{3}{5}x$.

2.40. Скласти рівняння гіперболи, яка має спільні фокуси з еліпсом $7x^2 + 16y^2 = 448$, за умови, що її ексцентриситет $\varepsilon = 1{,}2$.

2.41. Показати, що задане рівняння $x^2 - y^2 + 4x - 10y - 25 = 0$ є рівнянням гіперболи.

2.42. Написати рівняння параболи, що проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 4y = 0$, а її фокус знаходиться на осі ординат.

2.43. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(3;4;5)$ перпендикулярно до вектора $\bar{N}(1;2;-3)$.

2.44. На осі Oy знайти координати точок рівновіддалених від площин

$$3x - 4y + 2z - 9 = 0 \text{ і } 4x + 2y - 3z - 21 = 0.$$

2.45. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(-1;-1;2)$ і перпендикулярна до площин

$$x + 2y - 2z + 4 = 0 \text{ і } x - 2y + 2z - 4 = 0.$$

2.46. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(5;-8;1)$ і паралельна прямій

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+2}{-1}.$$

2.47. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2;0;6)$ і перпендикулярна до прямих:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-2}{-3} \text{ і } \frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{-5}.$$

2.48. Знайти координати точки перетину прямої

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{5}$$

з площиною $x+2y-3z-4=0$.

2.49. Знайти рівняння перпендикуляра до площини $x+4y-8z-4=0$, який проведено з точки $A(3;-6;7)$.

2.50. Знайти проекцію точки $M(4;-3;1)$ на площину

$$x+2y-z-3=0.$$

2.51. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1;2;-1)$ і яка перпендикулярна до прямої

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}.$$

2.52. Перевезення вантажу до першого пункту, що знаходиться на відстані 150 км, коштує 250 грн/од., а до другого, відстань до якого 350 км, – 400 грн/од. Знайти залежність вартості перевезення (y) від відстані (x), якщо вартість є лінійною функцією від відстані.

2.53. Витрати на перевезення двома видами транспорту виражаються так:

$$y_1=20x+150,$$
$$y_2=10x+200,$$

де x – відстань, на яку здійснюється перевезення, км;

y_1 і y_2 – транспортні витрати на перевезення, грн.

Знайти відстань, при якій витрати на перевезення обома видами транспорту будуть однакові. Визначити, при яких відстанях краще користуватися іншим видом транспорту.

2.54. Ринкова ціна одиниці деякого товару складає 4 грн. За цією ціною виготовляється 8 000 одиниць даного товару. За ціною 2 грн недоцільно виробляти даний товар, тобто пропозиція відсутня. За ціною 12 грн не буде продано жодної одиниці товару, тобто попит відсутній. Знайти функцію попиту і фун-кцію пропозиції, вважаючи їх лінійними.

2.55. Відстань між двома заводами, що виготовляють однакову продукцію, складає 200 км. Транспортні витрати на перевезення продукції від заво-

ду A в три рази дорожче, ніж від B. Визначити лінію – межу районів, на якій

однаково вигідно отримувати продукцію заводів A і B (початок координат взяти посередині між цими заводами; завод B розташований праворуч від заводу A).

2.56. Два підприємства, які віддалені на 100 км одне від одного, виготовляють однакові вироби. Транспортні витрати на 1 км шляху при перевезенні одного виробу від підприємства A і B до споживача однакові і складають

1 грн/км, а ціна реалізації кожного виробу на підприємствах A і B дорівнюють 200 і 250 грн відповідно. Для яких споживачів витрати на придбання одиниці виробу у підприємств A і B будуть однакові? (Підприємство A знаходиться в початку координат).



Відповіді

2.9. $\sqrt{19};7$. **2.10.** 20. **2.11.** 19. **2.12.** $\sqrt{661}$.

2.13. -35. **2.14.** 120°. **2.15.** $15;\sqrt{593}$.

2.16. $(7;-14;18)$, $\sqrt{569}$. **2.17.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. **2.18.** $(2;1;-1)$.

2.19. $(48;-64;-60)$. **2.20.** 5. **2.21.** $6{,}5\sqrt{2}$ кв. од.

2.22. 14 кв. од. **2.23.** $(7;5;1)$. **2.24.** 3 куб. од.

2.25. $5x+2y-6=0$. **2.26.** $2x+y+5=0$. **2.27.** $x+4y-14=0$.

2.28. $(1;-1)$. **2.29.** $(5;7)$. **2.30.** 5 кв. од.

2.31. $\frac{18}{\sqrt{34}}$. **2.32.** $7x+56y-40=0$, $32x-4y-25=0$.

2.33. $(x-1)^2+(y+1)^2=4$. **2.34.** $(x+4)^2+(y+1)^2=25$.

2.35. 17. **2.36.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, $F_1(-1;0)$, $F_2(1;0)$.

2.37. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$, $F_1M=4$, $F_2M=8$. **2.38.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$.

2.39. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$. **2.40.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$.

2.41. $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y+5)^2}{4}=1$. **2.42.** $x^2=-2y$.

2.43. $x+2y-3z+4=0$.

2.44. $(0;2;0)$, $(0;-15;0)$.

2.45. $2x+3y+4z-3=0$.

2.46. $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+8}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$.

2.47. $\dfrac{x+2}{13}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-6}{8}$.

2.48. $(6;5;4)$.

2.49. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+6}{4}=\dfrac{z-7}{-8}$.

2.50. $(5;-1;0)$.

2.51. $x-3y+4z+9=0$.

2.52. $3x-4y+550=0$.

2.53. а) $x=5$, б) $x>5$. **2.54.** $P-4000q+8000=0$, $S+1000q-12000=0$.

2.55. $(x-125)^2+y^2=75^2$.

2.56. $\dfrac{(x-50)^2}{625}-\dfrac{y^2}{1875}=1$.

Розділ 3. Вступ до математичного аналізу

Під математичним аналізом розуміють сукупність розділів математики, що займаються дослідженням функцій методами диференціального та інтегрального числення. Завдяки математичному аналізу математика набула значення як інструмент для побудови і дослідження моделей різноманітних процесів та явищ довкілля у їх розвитку. Основою математичного аналізу разом з такими поняттями, як змінна та функція, є поняття границі. Саме визначення цих понять і розглядається у вступі до математичного аналізу.



Після вивчення даної теми ви зможете:

- застосовувати теоретико-множинний підхід у дослідженнях економічних об’єктів;
- визначати функціональні залежності між ознаками об’єктів в економічних дослідженнях;
- вміти будувати графіки функцій при моделюванні економічних ситуацій;
- знати типи виробничих функцій однієї змінної в економіці;
- розуміти співвідношення між сумарними, середніми і граничними величинами в економіці;
- знати методи визначення границь для проведення маргінального аналізу.

Глава 11. Функціональна залежність. Класифікація функцій. Застосування функцій в економіці

11.1. Множини. Абсолютна величина дійсного числа

Теорія множин як математична дисципліна створена німецьким математиком Георгом Кантором (1845 – 1918 рр.). Поняття «множина» є одним із первинних (до того ж фундаментальних) понять математики, яким неможливо дати означення, використовуючи інші математичні поняття. Тому вдаються до описового пояснення поняття множини.

Під ***множиною*** розуміють сукупність об'єктів, що об'єднані за певною ознакою. Об'єкти, що складають множину, називають її ***елементами***. Стосовно поняття множини Г. Кантор висловився так: «Множина є багато що, яке ми сприймаємо як єдине». Наприклад, можна говорити про множину студентів у групі, клієнтів банку, множину країн, які пов'язані певними угодами, тощо.

Множини позначають, як правило, великими літерами латинського або грецького алфавітів, а їх елементи – малими літерами, бажано тими ж самими. Так, якщо A – це певна множина, a_i є її елементом, то пишуть: $a_i \in A$, тобто «a_i належить A». У протилежному випадку, коли a_i не є елементом множини A, пишуть: $a_i \notin A$, тобто «a_i не належить A».

Існує два способи задання множин:

1) ***перелік***, згідно з яким указують всі елементи, що складають множину, яка розглядається;

2) ***опис***, що ґрунтується на заданні так званої ***характеристичної властивості*** $P(x)$ елементів x, де $x \in A$, за якою елементи й об'єднані у множину.

Для символьного запису множини використовують фігурні дужки, між якими через кому або крапку з комою записують її елементи $A = \{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ або через вертикальну риску записують характеристичну властивість елементів цієї множини, а саме $A = \{\, x \,|\, P(x)\}$. У даному випадку символ «$|$» означає: «за властивістю», «що мають властивість».

Так, множина A задана як перелік своїх елементів: $A = \{1; 2; 3;\ 4; 5\}$. Множина C задана за допомогою опису характеристичної властивості, тобто $C = \{x | x^2 - 1 = 0\}$. Також можна задати перелік елементів цієї множини: $C = \{\pm 1\}$.

Відзначимо, що спосіб переліку зручно застосовувати, якщо треба задати множину, що має відносно невелику кількість елементів. У випадку, коли множина має велику кількість елементів або взагалі перелічити їх усі неможливо, застосовують опис як спосіб задання елементів множини.

Розглянемо основні поняття теорії множин.

Одними з вихідних понять теорії множин є поняття «порожня множина».

Порожньою множиною називається множина, яка не містить жодного елемента. Вона позначається символом $\varnothing$. Існує тільки єдина пуста множина.



Так, множина дійсних коренів рівняння $x^2+10=0$ є порожньою, оскільки не існує такого числа із множини дійсних чисел, щоб його квадрат у сумі з числом 10 дорівнював би нулю, тобто $\left\{x\in R\,\middle|\,x^2+10=0\right\}=\varnothing$.

Множини A і B називаються ***рівними***, якщо вони складаються з тих же самих елементів, і пишуть: $A=B$.

Розглянемо дві непорожні множини A і B. Множина A називається ***підмножиною*** множини B, якщо кожний елемент із A належить множині B, і позначається це так:

$$A\subset B,\ \text{або}\ \ \forall x: x\in A\Rightarrow x\in B, \tag{11.1}$$

де $\subset$ – символ ***включення***, він читається: «є підмножиною», «міститься в», «включається до», тобто A і B співвідносяться як частка і ціле.

У тому випадку, коли A не є підмножиною B, то пишуть: $A\not\subset B$ і кажуть: «A не включається до B».

Співвідношення між множинами, а також операції над множинами зручно ілюструвати за допомогою ***діаграм Венна – Ейлера***. Для побудови такої діаграми в межах прямокутника наносять замкнені фігури, які відповідають множинам. Найчастіше для зображення множини застосовується коло (воно називається ***колом Ейлера***). Точки, що належать колу (або будь-якій іншій замкненій фігурі, що відображує множину), вважаються елементами відповідної множини.

Розглянемо **основні дії** над множинами.

1. ***Об'єднанням*** множин A і B називається множина C, яка містить усі елементи множини A та всі елементи множини B. Відповідно, елементи множини C належать або множині A, або множині B, або є спільними елементами обох множин, якщо такі елементи існують. Об'єднання множин познача-ється так:

$$C=A\cup B\ \Leftrightarrow\ C=\left\{x\middle|\,x\in A\vee x\in B\right\}, \tag{11.2}$$

де $\cup$ – символ об'єднання множин.

На рис. 11.1 наведено приклад об'єднання множин A і B для випадку, коли вони мають спільні елементи. Елементи множини C, що належать одночасно і множині A, і множині B, відповідають точкам фігури, яка утворюється перетином вихідних множин. На рис. 11.1 об'єднанням множин є

вся заштрихована фігура. Ті елементи, які є спільними для A і B, відзначені подвійною штриховкою, вони включаються до множини C лише раз.

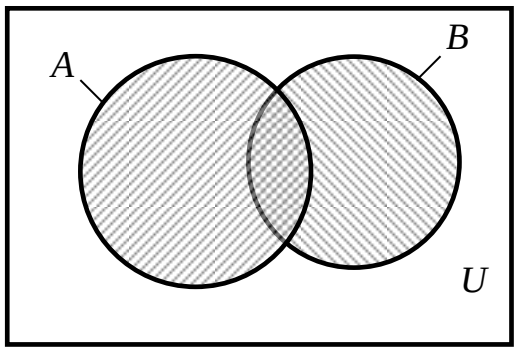


Рис. 11.1

Слід зазначити, що для об'єднання множин правильними є твердження:

$\forall A:\ U \cup A = U;$
$\forall A:\ \varnothing \cup A = A;$
$\forall A:\ A \cup A = A.$

2. ***Перетином*** множин A і B називається така множина C, яка містить усі спільні елементи множин A та B. Перетин множин позначають так:

$$C = A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad C = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}, \tag{11.3}$$

де $\cap$ – символ перетину множин.

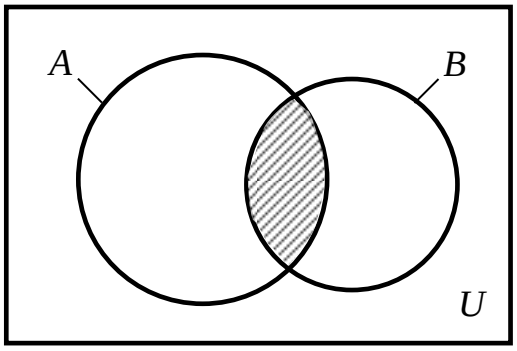


Рис. 11.2

На рис. 11.2 наведено приклад перетину множин A і B для випадку, коли вони мають спільні елементи. Об'єднання множин позначено штриховкою. Якщо множини A і B не мають спільних елементів (на діаграмі Венна – Ейлера відповідні цим множинам фігури зображуються окремо, без перетинання), то їх перетин є пустою множиною.

Слід зазначити, що для перетину множин правильними є твердження:

$$\forall A:\ U \cap A = A;$$
$$\forall A:\ \varnothing \cap A = \varnothing;$$
$$\forall A:\ A \cap A = A.$$

3. ***Різницею*** множин A і B називається множина C, яка містить усі елементи множини A, що не належать множині B (рис. 11.3).

Цю різницю позначають так:

$$C = A \setminus B \Leftrightarrow C = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}, \tag{11.4}$$

де \ – символ різниці, який читається як «A без B».

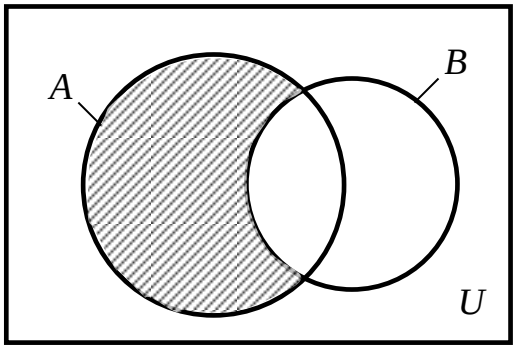


Рис. 11.3

У математиці переважно розглядаються ***числові множини***, тобто множини, елементами яких є числа. Прикладами відомих зі шкільного курсу математики числових множин є такі множини:

N – множина натуральних чисел, тобто $N = \{1; 2; 3; 4; ..., n, ...\}$;

Z – множина цілих чисел, тобто $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; ...; \pm n; ...\}$;

Q – множина раціональних чисел (звичайних дробів);

I – множина ірраціональних чисел (нескінченних неперіодичних десяткових дробів);

R – множина дійних чисел, яка є об'єднанням множин раціональних та ірраціональних чисел. Якщо вважати множину раціональних чисел універсумом, то множина ірраціональних чисел є доповненням множини Q до множини дійсних чисел, тобто $I = R \setminus Q$, або $I = \overline{Q}$.

Між указаними множинами має місце співвідношення:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Для наочності множину дійсних чисел можна представляти ***числовою прямою*** або ***числовою віссю***, що встановлює взаємно однозначну відповідність між дійсним числом і точкою на цій осі. Числова вісь містить початок координат, який відповідає нулю, а числове значення довільної точки відповідає її відстані до початку координат. Управо від нуля відкладаються додатні числа, уліво – від'ємні.

Із числових множин у математичному аналізі достатньо часто використовується поняття «проміжок». ***Проміжок***, або ***проміжок числової прямої***, є множиною дійсних чисел, що має таку властивість: якщо два будь-які числа належать проміжку, то і число, що розташовано між ними, теж належить цьому проміжку. З використанням символів математичної логіки це означення можна записати таким чином. Множина X є проміжком, якщо

$$\forall x \ \ \forall y \ \ \forall z : (x \in X) \wedge (z \in X) \wedge (x < y < z) \Rightarrow y \in X .$$

Скінченний проміжок складається з множини чисел, які розташовані між двома числами a і b, де a – початок, b – кінець проміжку. Якщо кінці проміжку теж належать йому, то такий проміжок називається ***відрізком*** і позначається $[a;b]$. За означенням:

$$[a;b]=\{x\in R:\ a\le x\le b\}.$$

У випадку, коли $a=b$, відрізок складається з однієї точки.

Якщо числа a і b не належать проміжку, то такий проміжок називається ***інтервалом*** і позначається $(a;b)$. Відповідно

$$(a;b)=\{x\in R:\ a<x<b\}.$$

Проміжки $[a;b)$ та $(a;b]$ називаються ***півінтервалами***, або ***піввідкритими інтервалами***. Їм відповідають співвідношення: $a\le x<b$ та $a<x\le b$.

Довжиною проміжку називається різниця між його кінцем і початком: $b-a$. Отже, на числовій осі довжина проміжку визначається як відстань між його кінцями.

Якщо множину дійсних чисел доповнити елементами $+\infty$ та $-\infty$ (так звані ***невласні числа***), то отримаємо ***розширену числову пряму***, яка дозволяє розглядати ***нескінченні проміжки***: $(-\infty;b]$, $(-\infty;b)$, $[a;+\infty)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$. Це означає відповідно: $x\le b$, $x<b$, $x\ge a$, $x>a$, $-\infty<x<+\infty$. Отже, множина всіх дійсних чисел $R=(-\infty;+\infty)$ є нескінченним проміжком.

Розглянемо ще одне важливе поняття, що є характеристикою елементів числових множин, це поняття абсолютної величини числа.

Модулем, або **абсолютною величиною числа** x, називається саме число x, якщо воно є невід'ємним, і $-x$, якщо x є від'ємним, тобто:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

За геометричною інтерпретацією модуль числа визначається як відстань на числовій осі від точки, що відповідає даному числу, до початку координат.

З означення модуля випливає:

$$|x|\ge 0;\ |x|\ge x \quad \text{та} \quad |x|\ge -x. \tag{11.5}$$

Укажемо на важливі **властивості абсолютних величин числа**.

1^0. Нерівність

$$|x| < \alpha \tag{11.6}$$

еквівалентна подвійній нерівності:

$$-\alpha < x < \alpha. \tag{11.7}$$

Доведення. Дійсно, виходячи з (11.5), маємо такі нерівності: $x \le |x| < \alpha$ та $-x \le |x| < \alpha$. Звідси $x < \alpha$ та $-x < \alpha$, або $x > -\alpha$. Таким чином, отримали подвійну нерівність (11.7). Має місце і обернене твердження, тобто із нерівності (11.7) випливає нерівність (11.6).

2^0. Абсолютна величина суми не перевищує суму абсолютних величин доданків, тобто

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$

Доведення. Нехай x та y – будь-які дійсні числа.

Для них маємо

$$-|x| \le x \le |x|; \ -|y| \le y \le |y|. \tag{11.8}$$

Додамо почленно ці нерівності:

$$-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|.$$

Звідси за першою властивістю отримуємо:

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$

3^0. Абсолютна величина різниці не менше за різницю абсолютних величин:

$$|x - y| \ge |x| - |y|. \tag{11.9}$$

Доведення. Дійсно, з тотожності $x = (x - y) + y$ за другою властивістю будемо мати нерівність:

$$|x| = |(x - y) + y| \le |x - y| + |y| \quad \Rightarrow \quad |x - y| \ge |x| - |y|.$$

4^0. Абсолютна величина добутку дорівнює добутку абсолютних величин множників, тобто

$$|xy| = |x||y|. \qquad (11.10)$$

Указана властивість випливає із таких понять, як добуток та абсолютна величина.

5^0. Абсолютна величина частки дорівнює частці абсолютних величин:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \text{якщо } y \neq 0. \qquad (11.11)$$

Остання властивість також є очевидною.

Множина A називається ***скінченною (нескінченною)***, якщо існує (не існує) невід'ємне ціле число n $\left(n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\right)$, якому дорівнює число елементів.

Розглянемо дві непорожні множини A, B. Якщо кожному елементу x множини A можна поставити у відповідність тільки один елемент y множини B так, що кожний елемент $y \in B$ є відповідним тільки одному елементу $x \in A$, то говорять, що між множинами A і B установлено ***взаємно однозначну відповідність.***

Будь-яка нескінченна множина, між елементами якої та множиною натуральних чисел $\mathbf{N}$ існує (не існує) ***взаємно однозначна відповідність,*** тобто елементи якої можна (не можна) занумерувати за допомогою натуральних чисел, називається ***зліченною (незліченною).***

Нехай a – довільне дійсне число, ε – будь-яке додатне число із множини дійсних чисел, тобто $\{\varepsilon \mid \varepsilon > 0 \wedge \varepsilon \in R\}$. ***$\varepsilon$-околом*** точки a називається інтервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ і позначається $A(a,\varepsilon)$, де a – ***центр околу***, ε – ***радіус околу*** (рис. 11.4):

$$A(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon) \quad \text{або} \quad |x-a| < \varepsilon, \quad A = \{\, x \mid |x-a| < \varepsilon, a \in R\}.$$

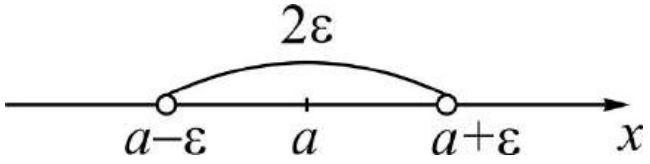


Рис. 11.4

Числові множини за структурою поділяють на дискретні та неперервні. Точка a деякої множини A називається ***ізольованою точкою*** цієї множини, якщо у неї є окіл, який не містить інших точок множини A.

Множина A, елементами якої є лише ізольовані точки, називається ***дискретною*** множиною.

Непорожня множина, яка не містить ізольованих точок, називається ***неперервною*** множиною.

11.2. Функції: основні означення, способи задання

Дослідження будь-якого процесу або явища зводять, здебільшого, до вивчення тих чи інших числових характеристик цього процесу і у подальшому до обчислення кількісних співвідношень поміж ними. Для створення загальних теорій, що застосовуються до вивчення числових характеристик різної природи, у математиці абстрагуються від конкретного змісту цієї числової характеристики і всі величини поділяють на змінні і сталі.

Змінною величиною, або просто *змінною,* називається величина, яка відповідно до умов може набувати різних числових значень. Та ж величина, яка набуває лише одного значення при дослідженні певного процесу, називається ***сталою.*** Здебільшого величини позначаються літерами латинського алфавіту (з індексами або без них). Як правило, значення сталих величин вважаються відомими у даному дослідженні, і вони позначаються початковими літерами латинського алфавіту ($a, b, c, \ldots$), а змінні – невідомими, тому позначаються кінцевими літерами ($x, y, z, \ldots, w$).



При дослідженні різних процесів залежно від задачі, що розглядається, одна і та ж сама величина може відігравати роль як змінної, так і сталої.

Так, питомий прибуток підприємства від реалізації одиниці виробленої продукції можна вважати сталою величиною при дослідженні впливу обсягу виробництва на загальний прибуток від його реалізації. Та ж сама величина може розглядатися як змінна при дослідженні впливу продуктивності праці або технологічних показників на загальний прибуток.

Абсолютними, або **універсальними**, сталими називаються такі величини, які не змінюються за будь-яких умов. Наприклад, відношення довжини кола до його діаметра є абсолютною константою і становить $\pi = 3{,}1415\ldots$

Параметром у даному дослідженні називають величину, яка характеризує однотипні об’єкти (процеси, стани) у тому сенсі, що кожне її значення характеризує деякий конкретний об’єкт. Наприклад, рівняння прямої

$y = k \cdot x$ містить поточні координати точок прямої (змінні x, y) і параметр k, залежно від значення якого рівняння визначає певну пряму серед безліч інших прямих.

Областю змінювання змінної величини називається множина всіх числових значень, які вона може набувати. Змінна вважається заданою, якщо вказано область її змінювання.

Досвід установлення кількісних співвідношень при дослідженні реальних процесів та явищ показує, що числові характеристики того чи іншого процесу здебільшого змінюються не незалежно одна від одної, а так, що зміна значень одних із них є причиною зміни значень інших. Вивчення кількісних співвідношень між величинами, що змінюються у взаємозв'язку, абстрагуючись від їх конкретного змісту, якраз і є предметом математичного аналізу. Функція та

функціональна залежність є основними поняттями математичного аналізу.

Якщо кожному елементу x із множини $X\left(x \in X\right)$ за певним правилом або законом можна поставити у відповідність один і лише один елемент y із множини Y $(y \in Y)$, то закон за яким здійснюється відображення елементів множини X на множину Y, називається ***функцією***. Стисло це записують так:

$$f : X \to Y \quad \text{або} \quad y = f(x).$$

У цьому випадку говорять, що між змінними x та y існує ***функціональна залежність***. Змінна x називається ***аргументом,*** або ***незалежною змінною***, а y – ***залежною змінною,*** тобто ***функцією*** від змінної x.

Запис $y = f(x)$ означає, що залежна змінна y є ***функцією від однієї змінної*** x.

Якщо множину X розглядати як переріз множин X_1, X_2, …, X_n, то відображення елементів множини X на множину Y називають ***функцією кількох змінних*** і записують $y = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, де $x_i \in X_i$, $i \in \overline{1,n}$.

Множину значень аргументу називають ***областю існування функції***, або ***областю визначення функції***, і позначають через $D(f)$. Відповідно, множину змінювання функції $y = f(x)$ називають ***областю значень функції*** і позначають через $E(f)$.

Слід відзначити, що при означенні поняття функції можна виходити із більш загальної точки зору, коли кожному значенню незалежної змінної x

відповідає не одне, а декілька значень y. Таку функцію називають ***багатозначною***.

Значення функції $y = f(x)$ при окремому значенні аргументу, тобто при $x = x_0$, позначають символами: $y_0 = f(x_0)$, $f(x)\big|_{x=x_0}$, $y = y(x_0)$, або $y\big|_{x=x_0}$. Відзначимо, що значення $f(x)$, які відповідають різним значенням x, не обов'язково повинні бути різними, функція може набувати єдиного значення в усій області визначення. Таку функцію називають ***сталою***: $y = c$, де $c - const$.

Закон відповідності між значеннями аргументу і функції можна подавати різними способами.

Існує три основних ***способи задання функцій***.

1^0. **Аналітичний спосіб**. Функція задана ***аналітично,*** якщо функціональна залежність виражається у вигляді аналітичного виразу (формули). При цьому вказується, для яких значень аргументу ця функція розглядається. Якщо множина X не задається, то маються на увазі всі значення аргументу x, за яких функція скінченна та дійсна. У цьому випадку область існування функції називається ***областю припустимих значень***.



Спроби аналітичного способу задання функції можна знайти у книзі «Початки», де Евклід при побудові конічних перетинів описує «симптоми», тобто словесно формулює рівняння кривих, визначаючи їх класи відповідності. Однак перші застосування алгебраїчних рівнянь до визначення функції ми знаходимо лише у XVII сторіччі у працях Ферма і Декарта.

Наведемо декілька функцій, що задані аналітично, вказавши область припустимих значень цих функцій:

1. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

3. $y = \arcsin x$; $D(f) = [-1; 1]$.

Аналітичний спосіб задання передбачає, що існує аналітичний вираз, який пов'язує значення функції й аргументу, тобто маємо рівняння:

$$F(x,\ y) = 0. \qquad (11.12)$$

Якщо рівняння (11.12) не розв'язане відносно функції, то ***функція задана неявно***. Якщо рівняння (11.12) розв'язати відносно y, то отримаємо ***функцію у явному вигляді***: $y = f(x)$.

2^0. **Графічний спосіб**. Множину всіх точок координатної площини (x, y), координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$, називають ***графіком функції***. Якщо $f : X \to Y$, то множина: $\Gamma = \{(x,\ f(x)) \mid x \in X\}$ є графіком функції. Функція $y = f(x)$ називається ***заданою графічно***, якщо побудовано її графік. Така ситуація може виникати при дослідженнях, пов'язаних з використанням приладів, які фіксують зміну певних характеристик у часі. Тоді відповідність між незалежною змінною x та функцією y визначається за допомогою деякої лінії. Такий спосіб задання функції дає можливість визначати значення функції тільки наближено, що є недоліком такого задання функції, водночас, досягається наочність її властивостей.

3^0. **Табличний спосіб**. Функція називається ***заданою таблично***, якщо побудована таблиця, що містить значення її аргументу і відповідні їм значення функції. Такий підхід до задання функції практикується у багатьох галузях знань, а саме: в економіці, соціології, техніці тощо, де залежність між величинами встановлюється експериментально або шляхом спостережень. Наприклад, обсяг випуску продукції y_i (млн грн) для певного підприємства залежно від терміну роботи підприємства x_i (роки) можна надати у вигляді таблиці:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,5	1,0	2,0	3,4	6,1



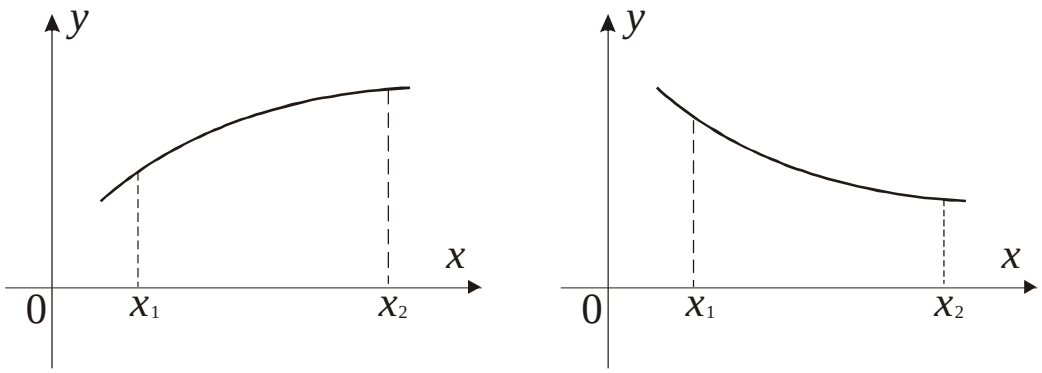
Табличний спосіб задання функції був історично першим. Так, ще у IV сторіччі до н. е., вивчаючи циклічність руху планет, вавілонські астрономи побудували таблиці, завдяки яким можна було визначати дати місячних та сонячних затемнень.

З розглянутих способів задання функції основним є аналітичний спосіб. Від аналітичного способу задання функції легко перейти до табличного і графічного, але не навпаки. Взагалі, маючи таблицю чи графік, складно знайти відповідну формулу (аналітичний вираз), хіба що наближено.

Розроблені у математичному аналізі методи дослідження функцій найкраще пристосовані до аналітичного способу задання функції, інші ж використовуються як допоміжні: графічний – для наочності, табличний – для зручності надання інформації.

11.3. Класифікація функцій за їх властивостями

11.3.1. Монотонність функції. Функція $f(x)$ є ***зростаючою***, якщо на деякій множині X, яка є областю існування цієї функції, з нерівності $x_1 < x_2$, де $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Функція є ***спадною,*** якщо на деякій множині X, яка є областю існування цієї функції, з нерівності $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$, $x_2 \in X$) випливає нерівність $f(x_1) > f(x_2)$. Зростаючі та спадні функції називаються ***монотонними*** (рис. 11.5).



а) б)

Рис. 11.5

Якщо з нерівності $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$, $x_2 \in X$) випливає $f(x_1) \le f(x_2)$, то така функція називається ***неспадною***, а якщо випливає нерівність $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функція називається ***незростаючою***.

Функція називається ***кусково-монотонною*** на множині X, якщо цю множину можна розбити на такі множини, на яких ця функція буде монотонною. Інтервали, на яких функція зростає (або спадає) називаються ***інтервалами монотонності*** функції.



Наприклад, функція $y = 2x^2 - 6x + 4$ є кусково-монотонна, тому що на інтервалі $(-\infty; 1,5)$ вона спадає, а на $(1,5; +\infty)$ – зростає (рис. 11.6).

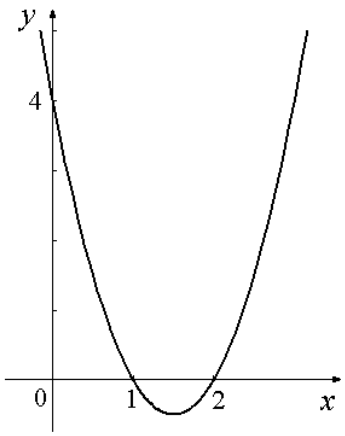


Рис. 11.6

Інтервали монотонності функції легко визначити, якщо в рівнянні параболи виділити повний квадрат:

$$y = 2x^2 - 6x + 4 = 2(x^2 + 3x + 2) =$$
$$= 2(x^2 + 2 \cdot 1{,}5x + 2{,}25) - 4{,}5 + 4 =$$
$$= 2(x + 1{,}5)^2 - 0{,}5.$$

11.3.2. Обмеженість функції. Функція $y = f(x)$ є ***обмеженою*** на множині X, якщо існують такі числа m і M, що $m \le f(x) \le M$ для всіх $x \in X$; якщо таких чисел не існує, то функція називається ***необмеженою***. Нехай число C – найбільше з чисел m і M, тоді для функції має виконуватися умова $|f(x)| \le C$ (рис. 11.7).

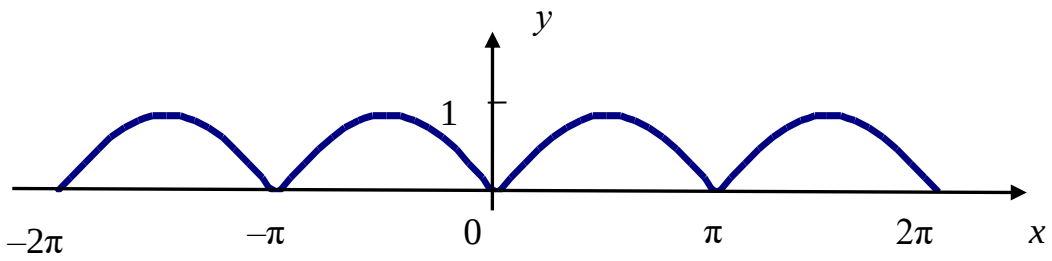


Рис. 11.7

11.3.3. Парність та непарність функції. Множина X зветься ***симетричною відносно початку координат***, якщо з кожним значенням $x \in X$ вона містить і значення $-x$. Функція $f(x)$, область визначення якої є симетричною, називається ***парною***, якщо виконується рівність:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in X. \tag{11.13}$$

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат (див. рис. 11.7).

Якщо область визначення функції є симетричною і виконується рівність:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X, \tag{11.14}$$

то функція називається ***непарною***. Її графік симетричний відносно початку координат (рис. 11.8).

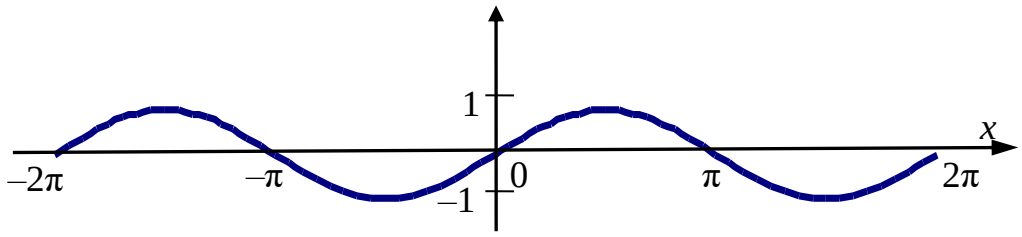


Рис. 11.8

Наприклад, розглянемо функцію $y = x^2 + 1$. Виконаємо перетворення:

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x).$$

Оскільки $\forall x \in X \;\; f(-x) = f(x)$, то ця функція є парною.

Функція $y = x^3$ є непарною, оскільки $f(-x) = -f(x)$.

Функція $y = 2x^2 - 6x + 4$ не є ані парною, ані непарною (див. рис. 11.6), це функція ***загального вигляду***.

11.3.4. Періодичність функції. Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною*** на множині X, якщо існує таке число $T > 0$, що для будь-якої точки x, яка належить області визначення, точки $x + T$ і $x - T$ також належать цій області і виконується умова:

$$f(x \pm T) = f(x) \qquad \forall x \in X \,. \tag{11.15}$$

У цьому випадку число T називається ***періодом*** функції $f(x)$.

Із співвідношення (11.15) випливає, що

$$f(x + kT) = f(x), \text{ де } k \in Z,$$

тобто добуток $kT \; (k \in Z)$ теж можна вважати періодом функції. Але коли говорять про період функції, то мають на увазі її найменший додатний період.

Наприклад, для функції $y = \sin x$ співвідношення (11.15) виконується і для величини $kT = 4\pi$, але періодом функції є $T = 2\pi$ (див. рис. 11.8). Для функції $y = |\sin x|$ періодом є $T = \pi$ (див. рис. 11.7).

Зауважимо, що при побудові графіка періодичної функції достатньо побудувати його фрагмент на будь-якому проміжку $[x_0; x_0 + T]$, а далі розповсюдити цей фрагмент на всю числову вісь.

11.3.5. Обернена функція. Розглянемо поняття оберненої функції. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині X: $D(f) = X$, а областю її значень є множина Y: $E(f) = Y$. Якщо кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає лише одне значення змінної $x \in X$, то на множині Y можливо визначити функцію

$$x = \varphi(y), \tag{11.16}$$

причому таку, що $f(\varphi(y)) = y$ для всіх $y \in Y$. Функцію $\varphi(y)$ називають ***оберненою*** до функції $f(x)$. Отже, якщо відображення $f: X \to Y$ визначає вихідну функцію, то відображення $\varphi: Y \to X$ визначає обернену функцію.

На тих же підставах можна вважати, що функція $y = f(x)$ є оберненою до $x = \varphi(y)$ за умов, що $\varphi(f(x)) = x$. Отже, функції $y = f(x)$ та $x = \varphi(y)$ є ***взаємно оберненими***. Взаємно обернені функції можна отримати, якщо розв'язати рівняння $F(x, y) = 0$, що визначає функцію у неявному вигляді, як відносно y, так і відносно x.

Теорема 11.1. Якщо функція $y = f(x)$ монотонна на множині X, то на відповідній множині Y існує також монотонна функція $x = \varphi(y)$, яка є оберненою до вихідної.

Доведення. Дійсно, нехай функція $y = f(x)$ зростає, тоді кожне її значення $y \in Y$ відповідає тільки одному значенню її аргументу $x \in X$, тобто існує обернена функція $x = \varphi(y)$.

Тепер покажемо, що обернена функція є зростаючою на множині Y, тобто із нерівності $y_2 > y_1$ випливає нерівність $x_2 > x_1$. Припустимо супротивне: $y_2 > y_1$, але $x_2 = \varphi(y_2) < \varphi(y_1) = x_1$. Оскільки функція $y = f(x)$ зростає, то $f(x_2) \le f(x_1)$, що суперечить нерівності $y_2 > y_1$. Отже, якщо $y_2 > y_1$, то $x_2 > x_1$, тобто функція $x = \varphi(y)$ зростає на множині Y.

Для спадної функції теорема доводиться аналогічно.

Оскільки більш звичним вважається позначення аргументу через x, а функції – через y, то обернену функцію записують як $y = \varphi(x)$. Тоді графіки прямої та оберненої функцій будуть симетричні відносно бісектриси першого та третього координатних кутів, тобто відносно прямої $y = x$ (рис. 11.9).

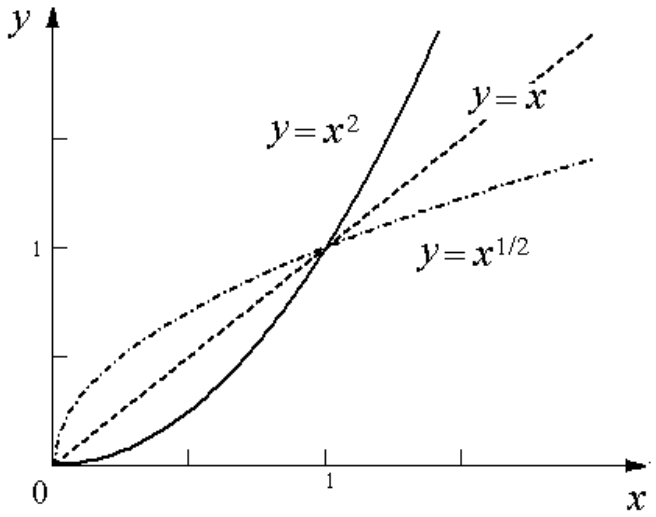


Рис. 11.9

11.4. Класифікація функцій за діями над аргументом

Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині X, називається ***елементарною***, якщо вона задається однією формулою так, що її значення при будь-якому $x \in X$ може бути знайдене за допомогою скінченого числа таких операцій як додавання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня, логарифмування, обчислення тригонометричних та обернених тригонометричних функцій. Залежно від операцій, які виконуються над аргументом, елементарні функції поділяються на алгебраїчні та неалгебраїчні. До ***алгебраїчних*** належать функції, над аргументом яких здійснюється скінчене число алгебраїчних дій: додавання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня. Усі інші елементарні функції, що не належать до алгебраїчних, називаються ***трансцендентними***.

Елементарні функції широко застосовуються для опису економічних процесів, тому згадаємо ***основні елементарні функції***, які вивчались ще у шкільному курсі математики.

1. **Степенева функція** $y = x^{\alpha}$, де $\alpha \in R$, а області визначення та значень залежать від α.

2. **Показникова функція**

$y = a^x \left(a > 0; a \neq 1\right)$, функція визначена на множині $\left(-\infty; +\infty\right)$, а областю значень є інтервал $\left(0; +\infty\right)$.

3. **Логарифмічна функція**

$y=\log_a x\left(a>0, a\neq 1\right)$, область визначення $\left(0;+\infty\right)$, а область значень $(-\infty;+\infty)$. Функція є оберненою до $y=a^x$.

4. **Тригонометричні функції**

$$y=\sin x;\ y=\cos x;\ x\in R;\ |y|\leq 1;$$

$$y=\operatorname{tg} x;\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\left(k\in Z\right);\ y\in R;$$

$$y=\operatorname{ctg} x;\ x\neq\pi k\ (k\in Z);\ y\in R.$$

5. **Обернені тригонометричні функції**

$$y=\arcsin x;\ x\in[-1;1];\ y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$$

$$y=\arccos x;\ x\in[-1;1];\ y\in[0;\pi];$$

$$y=\operatorname{arctg} x;\ x\in R;\ y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y=\operatorname{arcctg} x;\ x\in R;\ y\in\left(0;\pi\right).$$

Якщо аргумент функції $y=f(u)$ сам є функцією від іншої змінної, тобто $u=\varphi(x)$, то функцію $y=f\left(\varphi(x)\right)$ називають ***складеною функцією,*** або ***функцією від функції***, де u та x – змінні, які відповідно є ***проміжним*** та ***основним*** аргументами; $u=\varphi\left(x\right)$ та $y=f\left(u\right)$ – ***внутрішня*** та ***зовнішня*** функції.



Так, функція $y=\sqrt[3]{\sin x^2}$ є складеною, вона утворюється за допомогою двох вкладень. Зовнішньою є функція $y=\sqrt[3]{u}$, а внутрішніми – функції $u=\sin v$ та $v=x^2$.

Функцію також можна задати і у вигляді кількох формул; при цьому указують, на якій саме множині значень аргументу розглядається кожна з формул. Функції, що задані кількома формулами, ***не є елементарними.***



Наприклад, функція:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{при } x < 0, \\ \sin x, & \text{при } 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Областю визначення цієї неелементарної функції є нескінченний інтервал: $D(f) = (-\infty, +\infty)$, графік функції має вигляд (рис. 11.10).

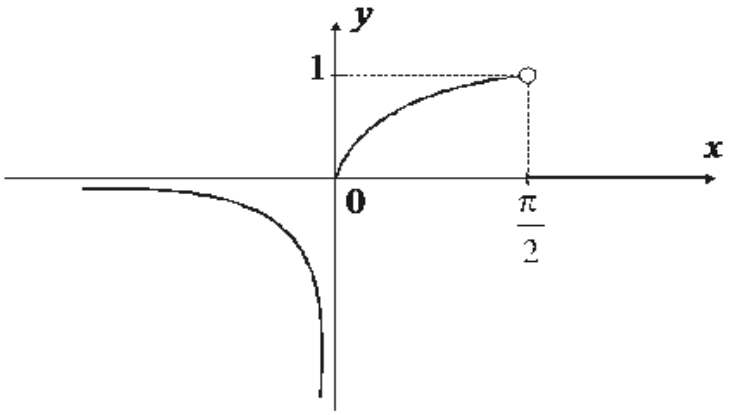


Рис. 11.10

Ще одним прикладом неелементарної функції є ***факторіал***:

$$n! = \begin{cases} n! = 1, \quad n = 0; \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \ n \in N. \end{cases}$$

До класу неелементарних функцій відносять також функції, у яких кількість операцій над аргументом є нескінченною.

11.5. Застосування елементарних функцій в економіці

Розглянемо лінійну функцію:

$$y = kx + b.$$

Якщо x – обсяг продукції, а k – витрати на одиницю продукції (питомі витрати), b – постійні витрати, то функція $y = f(x)$ описує загальні витрати виробництва.

Нехай маємо загальні витрати $y = kx + b,$ тоді собівартість одиниці продукції записуємо у вигляді дробово-лінійної функції:

$$y = \frac{kx + b}{x}.$$

Останню функцію можна визначити, як питомі витрати, тобто середні витрати виробництва на одиницю продукції.

Наведемо функції, що найчастіше використовуються в економіці для опису певних процесів, а тому мають власну назву. Серед них відзначимо такі:

1. ***Виробнича функція*** – функція, що описує залежність певного результату виробничої діяльності від факторів, які його зумовлюють.

2. ***Функція корисності*** описує залежність корисності, тобто результату, або ефекту деякої дії, від рівня (інтенсивності) цієї дії.

3. ***Функція випуску*** (один із видів виробничої функції) описує залежність обсягу виробництва від наявності або споживання ресурсів.

4. ***Функція витрат*** (один із видів виробничої функції) описує залежність витрат виробництва від обсягу продукції.

5. ***Функції попиту, споживання*** чи ***пропозиції*** описують залежність обсягу попиту, споживання або пропозиції щодо окремих товарів та послуг від

різних факторів (наприклад, ціни, прибутку тощо).

Як ще один приклад розглянемо ***формулу простих відсотків***.

Нехай у банку, що нараховує на внесок $p\,\%$ щомісячно, відкрито депозит, і початковий внесок дорівнює A_0. Визначимо, яку суму буде накопичено за цих умов протягом n місяців, де $n \le 12$.

Якщо початковий внесок дорівнював A_0, то отримуємо наприкінці

першого місяця: $A_1 = A_0 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$;

другого місяця: $A_2 = A_1 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{2 \cdot p}{100}\right)$.

Отже, загальна сума, що накопичена на депозиті за n місяців ($n \le 12$) становитиме:

$$A_n = A_0 \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right).$$

При збереженні коштів на депозиті протягом кількох років за умов, що вкладник не знімає нараховані відсотки, відбувається капіталізація відсотків. Отже, поряд з первинним внеском базою для нарахування відсотків стають

відсотки попередніх років, тобто здійснюється схема «відсотки на відсотки». Розглянемо ***формулу складних відсотків.***

Нехай сума A_0 внесена у банк під $p\,\%$ річних і зберігається протягом n років. Визначимо суму, яка буде накопичена на рахунку через n років.

На кінець першого року сума складає

$$A_1 = A_0 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

на кінець другого року завдяки капіталізації відсотків попереднього року загальна сума на рахунку становитиме:

$$A_2 = A_1 + \frac{p}{100} A_1 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Звідси отримуємо формулу складних відсотків:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n. \qquad (11.17)$$

Формулу (11.17) можна довести методом математичної індукції.

У банк зроблено внесок під 10 % річних складних відсотків. Через скільки років цей внесок збільшиться в два рази?

Застосовуючи формулу складних відсотків, маємо:

$$A_n = 2A_0 = A_0 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^n = A_0 \cdot (1{,}1)^n \Rightarrow (1{,}1)^n = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \lg 1{,}1 = \lg 2 \Rightarrow n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}1} = 7{,}2725 \approx 7.$$

Отже, вклад збільшиться в два рази через 7 років.

Ключові терміни

Множина; порожня множина; універсум; числові множини; діаграма Венна – Ейлера; змінна; область змінювання; функція; аргумент; область визначення функції; область значень функції; спосіб задання функції; парність

(непарність) функції; монотонність функції; період функції; взаємо обернені функції; алгебраїчні функції; трансцендентні функції; елементарні функції; складена функція; неелементарні функції.



Запитання для самоперевірки

1. Що таке множина? Які існують способи її задання? Наведіть приклади, що пояснюють ці поняття.

2. Що таке підмножина? Які існують види множин?

3. Поясність за допомогою діаграм Венна – Ейлера додавання, віднімання та добуток множин.

4. Яку множину називають дискретною, неперервною?

5. Що таке змінна і стала величини?

6. Яка залежність називається функціональною?

7. Які існують засоби задання функції?

8. Які функції називають парними, непарними, функціями загального вигляду? Які властивості мають графіки цих функцій?

9. Які функції називають періодичними? Що таке період функції? Назвіть властивості графіка цих функцій.

10. Які функції називають монотонними?

11. Що таке обернена функція? Які властивості мають графіки взаємно обернених функцій?

12. Дайте означення елементарної функції.

13. Що таке складена функція?

14. Наведіть приклад неелементарних функцій.

15. Наведіть приклади застосування елементарних функцій в економіці.

16. Який вигляд має формула простих відсотків?

17. Який вигляд має формула складних відсотків?

Глава 12. Границя функції натурального аргументу

12.1. Числові послідовності: основні означення та арифметичні операції

Числовою послідовністю називають функцію $y = f(x)$, де $x \in N$. У цьому випадку функцію позначають $x_n = f(n)$. Отже, послідовність є функцією, що визначена на множині натуральних чисел, x_n називають ***загальним членом*** числової послідовності. Числова послідовність позначається символом $\{x_n\}$.

Числова послідовність вважається заданою, якщо для кожного номера n ($n \in N$) можна однозначно визначити відповідний член послідовності. З означення послідовності як функції натурального аргументу випливає, що всі способи задання функції можна застосувати і для послідовності, але найчастіше задання послідовності здійснюється аналітичним способом, тобто у вигляді формули загального члена $x_n = f(n)$. Іноді застосовують ***рекурентну форму*** задання послідовності, коли кожний наступний її член, починаючи з деякого номера n, подається через попередній або через декілька попередніх її членів.



Так, арифметичну прогресію, яка є прикладом числової послідовності, можна задати за допомогою формули загального члена:

$$x_n = a_1 + d(n-1).$$

Отже,

$$\{x_n\}: \ a_1, \ a_1 + d, \ a_1 + 2d, \ \dots, \ a_1 + d(n-1), \ \dots,$$

де a_1 – перший член прогресії;

d – різниця.

Якщо цю ж послідовність задати за допомогою рекурентного співвідношення, то отримуємо: $x_{n+1} = x_n + d$, де $x_1 = a_1$.

Арифметичні операції над числовими послідовностями зводяться до відповідних дій над їхніми членами з однаковими номерами:

$$\{z_n\} = \{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\};$$

$$\{z_n\} = \{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\};$$

$$\{z_n\} = c \cdot \{x_n\} = \{c \cdot x_n\} \qquad (c - const);$$

$$\{z_n\} = \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} \quad (y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}).$$

Серед числових послідовностей виділяють обмежені і необмежені, монотонні і немонотонні.

Обмеженою послідовністю $\{x_n\}$ називається така послідовність, для якої існує таке число $M>0$, що всі члени послідовності за модулем не перевищують M . Отже,

$$\exists M>0\ \forall x_n (n\in N): |x_n|\le M\ . \qquad (12.1)$$

Необмеженою послідовністю є така послідовність, що для будь-якого числа $M>0$ можна знайти відповідне йому значення x_n, яке за модулем перевищує число M , тобто

$$\forall M>0\ \exists x_n (n\in N): |x_n|>M\ . \qquad (12.2)$$



Так, послідовність $\{x_n\}=\dfrac{n}{n+1}-$обмежена, оскільки умова (12.1) задовольняється, наприклад, для $M=1,$ а послідовність $\{x_n\}=2^n-$необмежена.

Монотонно зростаючою **(*спадною*)** ***послідовністю*** називається така послідовність $\{x_n\}$, для всіх членів якої виконується нерівність:

$$x_{n+1}>x_n\ \forall n\in N\ \ (x_{n+1}<x_n\ \forall n\in N)\ . \qquad (12.3)$$

Наприклад, відома зі шкільного курсу послідовність $\{x_n\}$, члени якої утворюють геометричну прогресію $x_n=q^n$, є послідовністю зростаючою, якщо її знаменник q>1, і спадною при $0<q<1$.

12.2. Границя числової послідовності

Для того щоб підійти до поняття границі, наведемо декілька числових послідовностей і проаналізуємо, як змінюється величина їх членів зі збільшенням номера. Наприклад:



1) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}:\ \ 1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\ldots,\dfrac{1}{n},\ldots;$

2) $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$: $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots;$

3) $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots;$

4) $\{x_n\} = \{2^n\}$: $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$.

При зростанні n змінна x_n для першої з наведених послідовностей наближається до нуля, для другої − теж за абсолютною величиною наближається до нуля, але значення x_n коливаються навколо нуля; для третьої − змінна, поступово зростаючи ($x_n < 1$), наближається до 1. Спільним для цих послідовностей є те, що при зростанні номера n різниця між x_n і певною сталою величиною a зменшується і залишається малою. Але поведінка послідовності $\{x_n\}$, де $x_n = 2^n$ якісно відмінна від поведінки трьох попередніх послідовностей, а саме зі збільшенням n вона необмежено зростає.

Число a називають ***границею послідовності*** $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε, яке б мале воно не було, знайдеться такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх значень змінної x_n, у яких $n > N$, виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Стисло означення границі можна подати так:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon \ . \qquad (12.4)$$

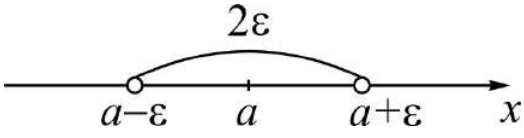
Якщо a – границя послідовності $\{x_n\}$, то це позначають так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,, \qquad (12.5)$$

де $n \to \infty$ читається як «n необмежено збільшується», або «n прямує до нескінченності»;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ читається як «границя числової послідовності x_n при $n \to \infty$».

Послідовності, що мають скінченну границю (12.5), тобто ***збігаються***, називаються ***збіжними***. У противному разі послідовності називаються ***розбіжними***.



У ***геометричній інтерпретації*** умова $|x_n - a| < \varepsilon$ означає, що при змінюванні n усі члени числової послідовності (окрім,

Рис. 12.1

можливо, скінченного числа точок) потрапляють у ε-окіл точки a, тобто $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ (рис. 12.1).

Звідси маємо ***геометричний зміст границі*** числової послідовності: якщо число a є границею послідовності $\{x_n\}$, то який би ε-окіл точки a не взяти, всі члени послідовності $\{x_n\}$, починаючи з $n>N,$ повинні потрапити до цього околу. Отже, поза цим околом залишається скінченна кількість членів x_n.



Розглянемо числову послідовність:

$$\{x_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}.$$

Згідно з означенням доведемо, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Нехай $\varepsilon>0-$довільне, знайдемо таке $N(\varepsilon)$, що при $n>N(\varepsilon)$ виконується нерівність:

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon.$$

Звідси

$$\left|-\frac{1}{n+1}\right|<\varepsilon\Rightarrow n+1>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1.$$

Тому достатньо за $N(\varepsilon)$ узяти $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$, де запис $\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$ означає, що розглядається ціла частина того числа, що стоїть у квадратних дужках.

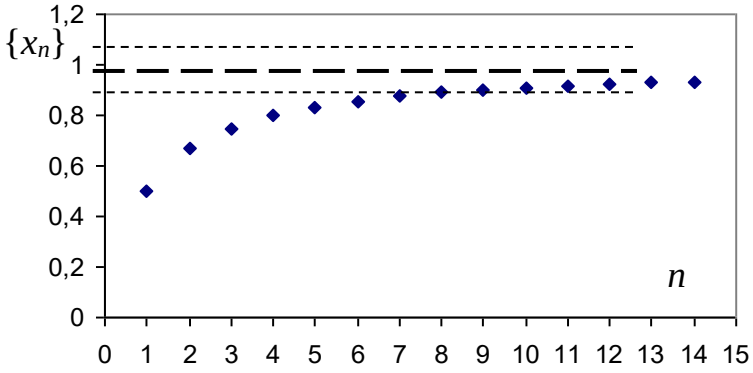


Рис. 12.2

На рис. 12.2 наведено графік числової функції $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$. Видно, що із збільшенням n значення x_n зростає, наближаючись до 1, однак не перевищуючи її. На графіку визначено ε-окіл для $\varepsilon = 0{,}1$, $N(0{,}1) = 10$.

Аналогічно можна довести співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{та} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.$$

12.3. Нескінченно малі послідовності: означення, властивості

Числова послідовність $\{x_n\}$ називається ***нескінченно малою***, якщо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \tag{12.6}$$

тобто для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке $N(\varepsilon)$, що $|x_n| < \varepsilon$, коли $n > N(\varepsilon)$. Отже, стисло:

$$\forall \varepsilon > 0 : |x_n| < \varepsilon \ \ \forall n > N(\varepsilon). \tag{12.7}$$

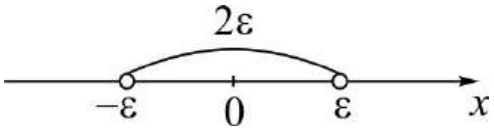


Рис. 12.3

У ***геометричній інтерпретації*** умова $|x_n| < \varepsilon$ означає, що при необмеженому зростанні n $(n \to \infty)$ усі члени x_n (крім, можливо, скінченного числа) потрапляють у інтервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$, який є ε-околом нуля (рис. 12.3).



Наприклад, розглянемо геометричну прогресію з першим членом $x_1 = 0{,}1$ і знаменником $q = 0{,}1$. Загальний член такої послідовності має вигляд:

$$x_n = 10^{-n}.$$

Ця послідовність є нескінченно малою. Дійсно, з умови $10^{-n} < \varepsilon$ отримуємо $n > [-\lg \varepsilon] = N(\varepsilon)$, тобто нескінченне число значень змінної потрапляє до інтервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$, яким би малим він не був.

Щоб відрізняти нескінченно малі послідовності, їх члени позначають буквами грецького алфавіту: $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ тощо.

Арифметичні властивості нескінченно малих послідовностей. Із означення нескінченно малих послідовностей випливають такі ***арифметичні властивості:***

1) сума (різниця) двох нескінченно малих послідовностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ теж є нескінченно малою:

$$\alpha_n \pm \beta_n = \gamma_n; \tag{12.8}$$

2) сума обмеженої послідовності $\{x_n\}$ і нескінченно малої є обмеженою послідовністю: $\{x_n + \alpha_n\}$;

3) добуток двох нескінченно малих $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ теж є нескінченно малою:

$$\alpha_n \beta_n = \gamma_n; \tag{12.9}$$

4) добуток обмеженої послідовності $\{x_n\}$ і нескінченно малої $\{\alpha_n\}$ є нескінченно малою:

$x_n \cdot \alpha_n = \beta_n$ (зокрема, якщо $x_n = c - const$, то $c \cdot \alpha_n = \beta_n$).

Доведення.

1. Покажемо, що $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}$ є нескінченно малою.

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне. Оскільки $\alpha_n \to 0$ і $\beta_n \to 0$, то існують такі N_1 і N_2, що $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N_1$ і $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N_2$.

Для суми $\alpha_n + \beta_n$ маємо:

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n > \max\{N_1, N_2\}.$$

Для різниці $\{\alpha_n\} - \{\beta_n\}$ окремого доведення не знадобиться, оскільки її можна подати як суму нескінченно малих $\{\alpha_n\}$, $\{-\beta_n\}$.

2. Виберемо таке $M > 0$, що $|x_n| \le M$ для всіх $n \in N$, і таке $\varepsilon > 0$, що всі члени послідовності $\{\alpha_n\}$, починаючи з першого включно, за модулем не перевищують ε, тоді для суми $\alpha_n + x_n$ маємо:

$$|\alpha_n + x_n| \le |\alpha_n| + |x_n| \le \varepsilon + M = M_1.$$

Отже, усі члени послідовності, де $x_n + \alpha_n = y_n$, не перевищують числа M_1: $|y_n| \le M_1$, а значить $\{y_n\}$ – обмежена числова послідовність.

3. Якщо $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ є нескінченно малими послідовностями, то для довільних $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$, якими б малими вони не були, виконуються нерівності:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 : |\alpha_n| < \varepsilon_1 \quad \forall n > N_1 \quad \text{і} \quad \forall \varepsilon_2 > 0 : |\beta_n| < \varepsilon_2 \quad \forall n > N_2.$$

Виберемо $\forall \varepsilon > 0 : |\alpha_n| < \sqrt{\varepsilon}, |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon}$. Для добутку маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 : |\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon},$$

тобто $\forall \varepsilon > 0 : |\alpha_n \cdot \beta_n| < \varepsilon \quad \forall n > \max\{N_1, N_2\}$.

4. За означеннями обмеженої послідовності та нескінченно малої:

$$|x_n| \le M \quad \text{і} \quad \forall \varepsilon_1 > 0 : |\alpha_n| < \varepsilon_1 \quad \forall n > N.$$

Покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ має місце нерівність: $|x_n \alpha_n| < \varepsilon$. За властивостями нерівностей отримуємо:

$$|x_n \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \varepsilon_1.$$

Оскільки ε довільне, виберемо його рівним ε / M; тоді приходимо до нерівності $|x_n| \cdot |\alpha_n| < \varepsilon$. Таким чином, $|x_n \alpha_n| < \varepsilon \; \forall \varepsilon > 0$, а це й означає, що змінна $x_n \alpha_n = \beta_n$ – нескінченно мала.

Зокрема, якщо $x_n = c = const$, то $c\alpha_n = \beta_n$.



Слід зазначити, що властивості алгебраїчної суми і добутку двох нескінченно малих поширюються на будь-яке ***скінченне*** число доданків і співмножників.

Теорема 12.1 (***зв'язок між нескінченно малою та границею***). Число a є скінченою границею числової послідовності $\{x_n\}$ тоді і лише тоді, коли загальний член x_n цієї послідовності є сумою числа a і деякої нескінченно малої α_n.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad x_n = a + \alpha_n. \tag{12.10}$$

Доведення.

Необхідність. Якщо a – границя числової послідовності, то за означенням границі (12.4) різниця між x_n і a є нескінченно малою: $x_n - a = \alpha_n$, отже, $x_n = a + \alpha_n$.

Достатність. Нехай виконується рівність $x_n = a + \alpha_n$. Тоді $x_n - a = \alpha_n$, а за означенням нескінченно малої $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \ \forall n > N$, що означає:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

12.4. Нескінченно великі послідовності: означення, властивості, зв'язок з нескінченно малими

Нескінченно великою числовою послідовністю $\{x_n\}$, або просто ***нескінченно великою,*** називається така послідовність, яка при своїй зміні стає і залишається за модулем більше будь-якого наперед заданого, скільки завгодно великого числа $M > 0$, тобто

$$\forall M > 0 : |x_n| > M \quad \forall n > N. \tag{12.11}$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ – нескінченно велика числова послідовність, то можливі такі випадки.

1. Послідовність $\{x_n\}$ прямує до $+\infty$ (позначають це так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$), якщо для довільного $M > 0$ існує таке N, що $x_n > M \quad \forall n > N$.

2. Послідовність $\{x_n\}$ прямує до $-\infty$ (позначають це так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$), якщо для довільного $M > 0$ існує таке N, що $x_n < -M \quad \forall n > N$.

У ***геометричній інтерпретації*** умова

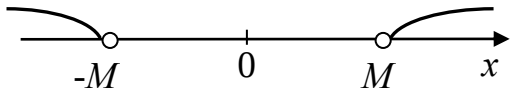


Рис. 12.4

$|x_n| > M$, означає, що при $n \to \infty$ усі значення x_n (крім, можливо, скінченого числа точок) потрапляють і залишаються зовні M-околу нуля, тобто $x < -M \cup x > M$ (рис. 12.4).



Наприклад, розглянемо послідовність $\{x_n\}$ з загальним членом $x_n = 10^n$.

При довільному виборі M за умовою $10^n > M$ визначаємо, що для всіх $n > \lg M$ нескінченне число значень змінної опиниться поза інтервалом $(-M, M)$, яким би великим він не був.

Найпростішою нескінченно великою є змінна, значеннями якої є натуральні числа, що взяті у природному порядку.

Розглянемо арифметичні властивості нескінченно великих послідовностей.

Нехай $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – дві нескінченно великі послідовності (будемо позначати їх граничними значеннями: $\infty, \pm\infty$), а z_n – обмежена змінна. За означенням нескінченно великої та обмеженої змінних випливають такі ***арифметичні властивості***:

1) сума двох нескінченно великих, однакових за знаком, теж є нескінченно великою того ж знака:

$$\begin{cases} (+\infty) + (+\infty) = +\infty \ , \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \ ; \end{cases} \tag{12.12}$$

2) сума обмеженої змінної z_n (або $const$) та нескінченно великої є нескінченно великою:

$$z_n + (\pm\infty) = \pm\infty; \tag{12.13}$$

3) добуток двох нескінченно великих є нескінченно великою:

$$\begin{cases} +\infty \cdot (+\infty) = +\infty, \\ -\infty \cdot (\mp\infty) = \pm\infty; \end{cases} \tag{12.14}$$

4) добуток обмеженої змінної z_n (або $const \neq 0$) з нескінченно великою теж є нескінченно великою:

$$z_n \cdot \infty = \infty . \qquad (12.15)$$

Теорема 12.2 (***про зв'язок між нескінченно великою і нескінченно малою***). Справедливі такі твердження:

1) якщо послідовність з загальним членом x_n – нескінченно велика, то обернена до неї послідовність з загальним членом $\frac{1}{x_n}$ є нескінченно малою:

$$\{x_n\} \text{ – нескінченно велика, то } \left\{\frac{1}{x_n}\right\} = \{\alpha_n\} \text{ – нескінченно мала;} \qquad (12.16)$$

2) якщо послідовність з загальним членом α_n – нескінченно мала, то обернена до неї послідовність з загальним членом $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ є нескінченно великою:

$$\{\alpha_n\} \text{ – нескінченно мала, то } \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\} = \{x_n\} \text{ – нескінченно велика.} \qquad (12.17)$$

Доведення базується на означеннях нескінченно великої і нескінченно малої послідовностей:

1) оскільки за умовою $\{x_n\}$ – нескінченно велика, то згідно з означенням

$$\forall M > 0 : |x_n| > M \ \ \forall n > N .$$

Треба показати, що послідовність $\{1/x_n\}$ є нескінченно малою, тобто $\forall \varepsilon > 0 : |1/x_n| = |\alpha_n| < \varepsilon \ \forall n > N$.

За властивостями нерівностей і модуля відношення двох чисел маємо:

$$\frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{M} \ \forall n > N \quad \text{і} \quad \left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{M} \ \forall n > N .$$

Оскільки M – довільна стала, виберемо її рівною $1/\varepsilon$. Тоді приходимо до нерівності $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall n > N$, а це означає, що $\{1/x_n\} = \{\alpha_n\}$, тобто $\{1/x_n\}$ є нескінченно малою;

2) аналогічно доводиться справедливість співвідношення (12.17).

12.5. Властивості границь числових послідовностей

Властивості збіжних послідовностей формулюються у вигляді теорем, які далі застосовуються в теоретичних та практичних дослідженнях.

Теорема 12.3. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має границю $a>0$ $(a<0)$, то, починаючи з деякого номера, всі члени послідовності $x_n>0\,(x_n<0)$.

Доведення. За означенням границі послідовності для будь-якого $\varepsilon>0$, наприклад, $\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0,$ знайдеться такий номер N, що при $n>N$ буде виконуватися нерівність:

$$|x_n-a|<\varepsilon, \text{ або } a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon.$$

Звідси, якщо $\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0,$ одержимо

$$\frac{a}{2}<x_n<a+\frac{a}{2}, \text{ або } x_n>\frac{a}{2}>0.$$

Теорема 12.4. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має скінченну границю, то ця послідовність є обмеженою.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}$ має скінченну границю: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер N, що для всіх $n>N$ буде виконуватись подвійна нерівність: $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$. Отже, кількість членів послідовності, що не потрапляють в інтервал $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, є скінченною. Тоді серед чисел

$$x_1, x_2, ..., x_N, \quad x_n\notin(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\ \ \forall n<N$$

виберемо найбільше M та найменше m. Очевидно, що всі значення x_n задовольняють нерівність $m\le x_n\le M$, що означає обмеженість $\{x_n\}$.

Теорема 12.5. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має скінченну границю, то ця границя тільки єдина.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Припустимо, що існує інша границя, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$ та $a\ne b$. За теоремою (12.1) маємо:

$$x_n=a+\alpha_n,\ x_n=b+\beta_n,$$

де α_n, β_n є нескінченно малими величинами. Віднявши почленно ці співвідношення, отримаємо

$$\beta_n - \alpha_n = a - b \text{ або } |\beta_n - \alpha_n| = |a - b|.$$

Ця рівність неможлива. Дійсно, різниця $\beta_n - \alpha_n$ є нескінченно малою, тому

$$|\beta_n - \alpha_n| = |a - b| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Якщо вибрати $\varepsilon = |a - b|$, то здобудемо хибну нерівність $|\beta_n - \alpha_n| < |a - b|$. Тобто припущення щодо існування іншої границі є невірним.

Теорема 12.6. Якщо члени послідовностей $\{x_n\}; \{y_n\}; \{z_n\}$, починаючи з деякого $n(n > N_0)$, задовольняють нерівність $x_n \le y_n \le z_n$ та $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то послідовність $\{y_n\}$ збіжна і має ту ж саму границю: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доведення. За означенням границі послідовності $\{x_n\}$ маємо нерівність:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \ , \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \forall n > N_1.$$

Для послідовності $\{z_n\}$ виконується аналогічна нерівність

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \ , \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \forall n > N_2.$$

Якщо вибрати із номерів N_0, N_1, N_2 найбільший $N = \max(N_0, N_1, N_2)$, то для $n > N$ маємо нерівність:

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall n > N,$$

отже, послідовність $\{y_n\}$ збіжна і має ту ж саму границю:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Теорема 12.7. Якщо члени двох послідовностей задовольняють нерівність $x_n \le y_n$, то їх границі задовольняють нерівність $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Наводимо теорему без доведення.

Теорема 12.8 (*ознаки збіжності монотонних послідовностей*).

1. Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає і обмежена зверху деяким числом C, то така послідовність має скінчену границю, а саме існує

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \le C. \tag{12.18}$$

2. Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонно спадає і обмежена знизу деяким числом C, то така послідовність має скінчену границю, а саме існує

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ge C. \tag{12.19}$$

Наводимо теорему без доведення.

Теорема 12.9. Нехай $\{x_n\}, \{y_n\}$ – збіжні послідовності, границі яких відомі: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a;\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$ тоді їх сума (різниця), добуток, частка (якщо границя знаменника $\neq 0$) також мають границю, при цьому виконуються співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n \pm y_n\right) = a \pm b;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = ab; \tag{12.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}\left(b \neq 0\right).$$

Наведені співвідношення поширюються і на випадок кількох, але скінченого числа, доданків чи множників.

Доведемо одне з тверджень теореми, наприклад:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b.$$

Доведення. За визначенням границі

$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n,$$

де α_n і β_n – нескінченно малі.

Знайдемо добуток

$$x_n \cdot y_n = \left(a + \alpha_n\right)\left(b + \beta_n\right) = ab + \underbrace{b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n}_{\gamma_n}.$$

Спираючись на властивості нескінченно малих (до доданку ab додається нескінченно мала), маємо:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b.$$

Наслідок з теореми про границю добутків числових послідовностей: сталий множник k можна виносити за знак границі:

$$\lim_{n\to\infty} k \cdot x_n = k \cdot \lim_{n\to\infty} x_n, \quad k = const. \tag{12.21}$$

Інші властивості доводяться аналогічно.

Зауважимо, що при розв'язуванні прикладів на знаходження границь послідовностей застосовуються арифметичні властивості нескінченно малих і нескінченно великих (у поєднанні з обмеженими змінними) та границі суми, добутку, частки тільки у тих випадках, коли послідовності задовольняють умовам теорем. Окремі випадки знаходження границь, в яких указані теореми застосувати неможливо, розглядатимуться пізніше.



Розглянемо приклади обчислення границь числової послідовності:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{0,5^n + 3\operatorname{arctg} 2n}{5\pi + arc\operatorname{ctg}(1/n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(0,5^n + 3\operatorname{arctg} 2n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5\pi + arc\operatorname{ctg}(1/n)\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 0,5^n + 3\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} 2n}{5\pi + \lim\limits_{n\to\infty} arc\operatorname{ctg}(1/n)} =$$

$$= \frac{0 + 3\cdot \pi/2}{5\pi + \pi/2} = \frac{3}{11}.$$

Після граничного переходу враховано властивості основних елементарних функцій, взаємозв’язок між нескінченно великими і нескінченно малими, арифметичні властивості границь числової послідовності.

Границі чисельника $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ і знаменника $\left(\frac{11\pi}{2}\right)$ скінченні, тому границя числової послідовності дорівнює їх відношенню;

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\left(3n^2 + 5n - 1\right) = \left|3\cdot\infty^2 + 5\cdot\infty - 1 = \infty + \infty\right| = \infty.$$

Отже, враховуючи властивості нескінченно великих, отримуємо, що числова послідовність розбігається;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\ln(n+1)}+3\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\ln(n+1)}+\lim\limits_{n\to\infty}3\left(1+\frac{1}{n}\right)=3.$

Враховано взаємозв’язок між нескінченно великими і нескінченно малими, арифметичні властивості границь числової послідовності;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9+\sqrt{\frac{8}{n^3}+1}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}+4}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(9+\sqrt{\frac{8}{n^3}+1}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n^2}+4}}=5.$

При розв'язуванні прикладу застосовані арифметичні властивості нескінченно малих і нескінченно великих послідовностей та границі їх суми і частки.



Ключові терміни

Числова послідовність; загальний член послідовності; рекурентна форма задання послідовності; функція натурального аргументу; обмежена послідовність; монотонна послідовність; границя послідовності; збіжність послідовності; нескінченно мала величина; нескінченно велика величина.



Запитання для самоперевірки

1. Що називається числовою послідовністю?

2. Які існують способи задання числової послідовності? Наведіть приклади задання числових послідовностей за допомогою формули загального члена та рекурентного співвідношення.

3. Назвіть арифметичні операції над числовими послідовностями і сформулюйте правила отримання загального члена послідовності, яку отримують як результат застосування цих операцій.

4. Які числові послідовності називають обмеженими та необмеженими?

5. Які послідовності відносять до класу монотонних послідовностей?

6. Які послідовності називають нескінченно малими? Наведіть їх геометричну інтерпретацію.

7. Назвіть арифметичні властивості нескінченно малих.

8. Які змінні називають нескінченно великими?

9. В якому випадку говорять, що змінна в процесі змінювання прямує до нескінченності?

10. Назвіть арифметичні властивості нескінченно великих.

11. Сформулюйте теорему про зв’язок між нескінченно малими і нескінченно великими.

12. Наведіть означення границі числової послідовності.

13. У чому полягає критерій збіжності числової послідовності «мовою нескінченно малих»?

14. Сформулюйте і доведіть теорему про єдиність границі.

15. Сформулюйте і доведіть теорему про арифметичні властивості збіжних числових послідовностей.

Глава 13. Границя функції неперервного аргументу

13.1. Означення границі функції

Розглянуті елементи теорії границь функцій натурального аргументу – числової послідовності – є основою для побудови теорії границь функції неперер-вного аргументу.

Поняття границі числової послідовності, яке розглядалося у попередній главі, можна поширити і на функцію $y = f(x)$, аргументом якої є неперервна змінна $x \in X$. Отже, число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо при необмеженому зростанні послідовності значень аргументу відповідна послідовність значень функції збігається до A:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A. \tag{13.1}$$

Тобто, якщо $x_1, x_2, ..., x_n, ... \to \infty$, то $y_1, y_2, ..., y_n, ... \to A$.

Розглянемо поняття границі функції у точці.

Нехай x_0 – певне фіксоване число, тобто точка числової осі, у деякому околі якої функція $y = f(x)$ визначена; у самій точці функція може і не існувати. Точка $x = x_0$ називається ***граничною точкою*** множини $X = \{x_i\}$, якщо в будь-якому околі точки існують значення $x \in X$, які відмінні від x_0.

Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$, коли x прямує до x_0 (або у точці x_0), якщо для будь-якої послідовності значень аргументу, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції збігається до A:

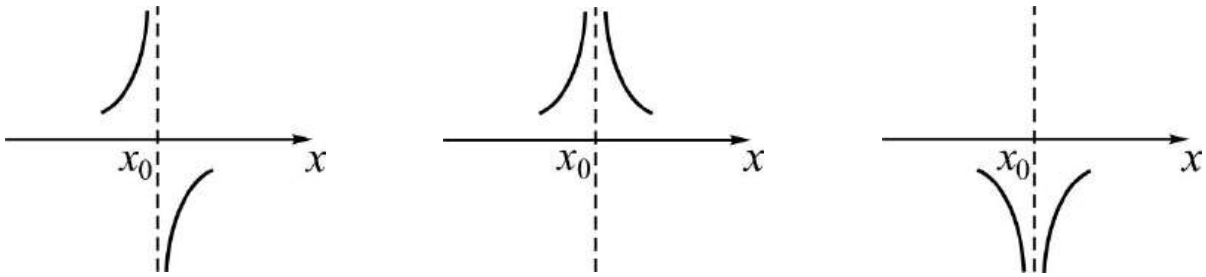
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A\ . \tag{13.2}$$

Оскільки для означення границі функції застосовується поняття послідовності, то говорять, що наведене означення границі функції сформульовано ***мовою послідовностей***. Воно називається ***означенням границі функції за Гейне***.

Якщо A – нескінченність, то говорять, що функція має ***нескінченну границю***, або $f(x)$ ***збігається до нескінченності***:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Можливі випадки збіжності функції до нескінченності при $x \to x_0$ наведені на рис. 13.1: а) $f(x) \to \pm\infty$; б) $f(x) \to \pm\infty$; в) $f(x) \to \pm\infty$.



а) б) в)

Рис. 13.1

Означення границі функції залишається й у тому випадку, коли x_0 – один із символів: ∞, $+\infty$, $-\infty$, тобто коли x прямує до нескінченності (13.1). *Пропонуємо* підтвердити розуміння всіх випадків прямування x до нескінченності $(\infty, +\infty, -\infty)$, схематично зображаючи поведінку функції, яка має скінченну границю чи нескінченну границю, або не має границі при $x \to \infty$.

Наведемо ще одне означення границі функції.

Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$, коли x прямує до x_0 (або у точці x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Застосовуючи символи математичної логіки, означення границі функції можна подати так: число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$, коли x прямує до x_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x: \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (13.3)$$

Наведене означення границі сформульовано ***мовою нескінченно малих*** (або мовою «$\varepsilon - \delta$»). Воно називається означенням ***границі функції за Коші***.

Можна довести, що означення границі функції (13.2) і (13.3) еквівалентні.

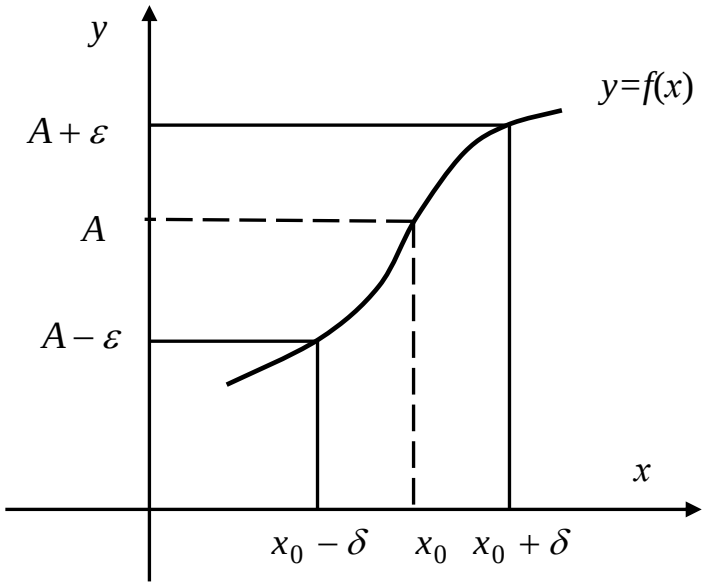


Рис. 13.2

Розглянемо геометричну інтерпретацію границі функції у точці (рис. 13.2). За означенням границі функції мовою нескінченно малих (за Коші) якщо число A є границею функції $y = f\left(x\right)$ при $x \to x_0$, то який би малий ε-окіл точки A ми не взяли, знайдеться такий δ-окіл точки x_0, що для всіх $x \neq x_0$ відповідні їм значення функції $y = f\left(x\right)$ містяться у смузі $\left(A-\varepsilon; A+\varepsilon\right)$.

Приклад Використовуючи означення границі (13.2), доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ не існує.

Застосуємо для цього означення границі за Гейне. Візьмемо послідовність значень аргументу, що прямує до нуля:

$$\frac{1}{\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots, \frac{1}{\left(2n-1\right)\pi}, \ldots \to 0,$$

тоді маємо таку послідовність відповідних значень функції:

$$\cos\pi, \cos 3\pi, \ldots, \cos\left(2n-1\right)\pi, \ldots \to -1.$$

Візьмемо іншу послідовність аргументу, яка теж прямує до нуля:

$$\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi}, \ldots, \frac{1}{2n\pi}, \ldots \to 0.$$

Тоді маємо таку послідовність значень функції:

$$\cos 2\pi, \cos 4\pi, \ldots, \cos 2n\pi, \ldots \to 1.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ не існує, тому що для двох різних послідовностей значень x, обидві з яких збігаються до нуля, одержано різні границі відповідних послідовностей значень функцій.



Згідно з означенням границі (13.3) доведемо, що

$$\lim_{x\to 2}(3x-1)=5.$$

Застосуємо для цього означення границі за Коші. Виберемо будь-яке довільне $\varepsilon>0$ і знайдемо відповідне йому $\delta(\varepsilon)>0$, для якого

$$|3x-1-5|=|3(x-2)|<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x-2|<\varepsilon/3.$$

Отже, якщо вибрати $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{3}$, то для будь-яких x, що задовольняють нерівність $|x-2|<\varepsilon/3$, буде виконуватися нерівність $|f(x)-2|<\varepsilon$. Отже, твердження доведене.

Звернемо увагу на поняття ***односторонніх границь*** функції. Згідно з означенням границі функції співвідношення $\lim\limits_{x\to\tilde{o}_0} f(x)=A$ передбачає, щоб відповідні умови означення виконувались для всіх точок, близьких до x_0, як справа, так і зліва від неї. Але на практиці існують функції, що поводять себе по-різному справа та зліва поблизу точки x_0. Наприклад, $f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ x^2, & x\ge 1\end{cases}$.

У зв'язку з цим вводяться поняття правосторонньої та лівосторонньої границь.

Число A називають ***границею*** функції $f(x)$ ***зліва*** (***справа***), якщо для будь-якої послідовності значень аргументу, що є збіжною до x_0, при цьому $x_n<x_0$ ($x_n>x_0$), відповідна послідовність значень функції збігається до A.

Позначаються:

ліва границя – $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$,

права границя – $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$.

Між односторонніми границями та границею функцій у точці x_0 існує певний зв'язок. Якщо односторонні границі функції існують і рівні між собою, то існує $\lim\limits_{x\to\tilde{o}_0} f(x)$, яка дорівнює тому ж числу, тобто

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=A \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} f(x)=A. \qquad (13.4)$$

Як і для послідовностей, поняття нескінченно малої (великої) існують і для функцій. Однак суттєва відмінність полягає в тому, що одна і та сама функція при різних значеннях її аргументу поводить себе неоднаково.

Функція $y=f(x)$ називається ***нескінченно малою функцією*** при $x\to x_0$ або при $x\to\infty$, якщо її відповідна границя дорівнює нулю:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \quad \text{або} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0. \qquad (13.5)$$

Для позначення нескінченно малої функції, як і для нескінченно малої послідовності, використовують перші літери грецького алфавіту, отже, пишуть: $\alpha=\alpha(x)$, $\beta=\beta(x)$ тощо, підкреслюючи функціональну залежність від аргументу x.

Функція $y=f(x)$ називається ***нескінченно великою функцією*** при $x\to x_0$ або при $x\to\infty$, якщо її границею є нескінченність:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty(+\infty,-\infty). \qquad (13.6)$$

Наприклад, одна і та сама функція $y=\dfrac{1}{x}$ є нескінченно малою при $x\to+\infty$ або при $x\to-\infty$ і нескінченно великою при $x\to 0$.



Властивості нескінченно малої, нескінченно великої і зв'язок між ними, що розглянуті для числової послідовності, а також арифметичні властивості послідовностей справедливі і для функцій неперервного аргументу.

Як **наслідок** із означення границі функції у точці випливає необхідна і достатня умови існування границі.

Теорема 13.1 (*критерій існування скінченної границі*). Функція $f(x)$ у точці x_0 має границею число A тоді і лише тоді, коли її можна подати у вигляді суми числа A і нескінченно малої функції $\alpha(x)$ при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x). \tag{13.7}$$

Доведення цієї теореми здійснюється аналогічно доведенню теореми щодо критерію збіжності числових послідовностей (пропонуємо зробити це самостійно).

13.2. Поширення теорії границь послідовностей на функції

Границі функції неперервного аргументу мають властивості, які аналогічні тим, що були доведені для послідовностей. Цей факт легко доводиться, якщо границі функції визначати мовою послідовностей.

Для розв'язування прикладів наведемо теорему про знаходження границі суми, добутку та частки.

Теорема 13.2. Нехай на множині X з граничною точкою x_0 задаються функції $f(x)$ та $g(x)$, які у точці x_0 мають скінченні границі:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B.$$

Тоді границя суми, добутку, частки цих функцій дорівнює відповідно сумі, добутку, частці границь цих функцій (якщо границя знаменника не дорівнює нулю).

Сформульована теорема у стислому вигляді запишеться так:

$$\begin{aligned}
&1)\ \lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = A + B; \\
&2)\ \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x) \right) = A - B; \\
&3)\ \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = A \cdot B; \\
&4)\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, B \neq 0.
\end{aligned} \tag{13.8}$$

Як приклад, доведемо теорему для першого співвідношення (13.8).

Доведення. За означенням границі функції для будь-якої послідовності значень змінної $x \in X$, які відмінні від x_0, тобто $x_1, x_2, ..., x_n, ... \to x_0$, існують відповідні послідовності значень функцій:

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ... \to A;$$
$$g(x_1), g(x_2), ..., g(x_n), ... \to B.$$

Оскільки для функцій натурального аргументу

$$f(x_1)+g(x_1), f(x_2)+g(x_2), f(x_3)+g(x_3),..., f(x_n)+g(x_n),... \to A+B,$$

то теорему доведено.

Інші співвідношення доводяться аналогічно.

Якщо наведені умови теореми не виконуються, то маємо справу з так званими невизначеностями, границі яких можна знайти за допомогою відповідних перетворень. Якщо функція визначена у точці x_0, то обчислення границі зведеться до підстановки замість x його граничного значення, тобто використовується рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)$.

 Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-1}{x^2+x+1}$.

Для розв'язання цього прикладу застосуємо теореми про границю суми та частки двох функцій. Отже, отримуємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}.$$

 Знайдемо границю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^3-x-2}=\left[\frac{8}{0}\right]=\infty.$$

У точці $x=2$ функція невизначена, знаменник дробу дорівнює нулю і теорема про границю частки не працює. Але із властивостей нескінченно малих ця функція нескінченно велика при $x\to 2$.

Отже, при $x\to 2$ функція наближається до нескінченності.

13.3. Різні типи невизначеностей та їх розкриття. Перша та друга чудові границі

При знаходженні границі функцій необхідно мати на увазі теореми, яким задовольняють функції, що мають границю. Однак на практиці досить часто маємо справу з такими функціями, для яких неможливе використання зазначених теорем без перетворювання виразу, границю якого треба обчислити. Такі вирази називають ***невизначеностями***.

Загальний підхід до обчислення границі в умовах невизначеності передбачає:

1) ***тотожні перетворення*** функції, границя якої обчислюється, з метою звести ситуацію до можливості застосування властивостей границь, а також властивостей нескінченно малих і нескінченно великих;

2) ***застосування еталонних границь*** – границь, які часто зустрічаються на практиці і використовуються, як готові формули;

3) ***введення нової*** (допоміжної) ***змінної*** з метою спрощення початкового аналітичного виразу.

Перелічені кроки здійснюються незалежно один від одного у довільному порядку і не обов'язково разом: те чи інше їх поєднання залежить від типу невизначеності й обумовлюється кожним конкретним прикладом.

Можна запропонувати загальний алгоритм відшукання границь (рис. 13.3).

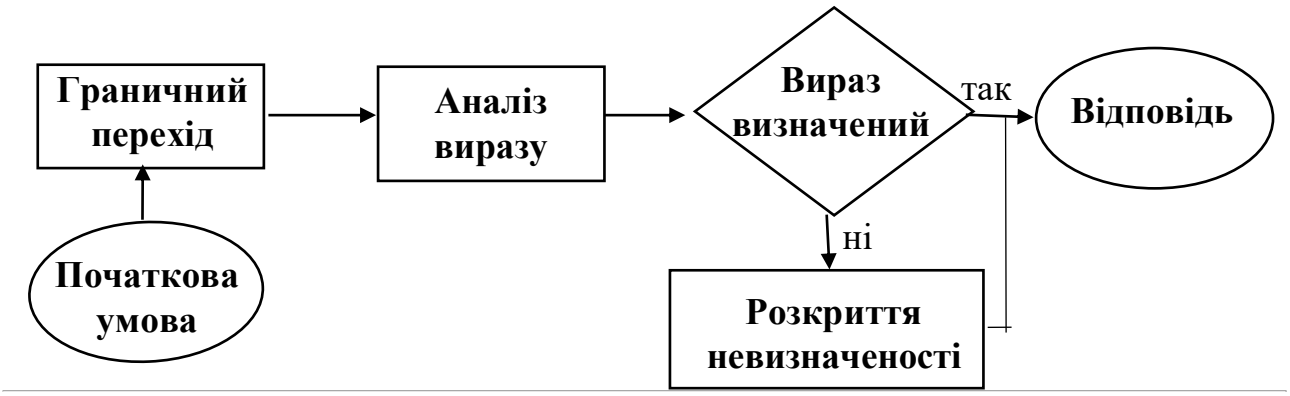


Рис. 13.3

Пояснення кожного кроку наведене нижче:

1) ***здійснюємо*** граничний перехід, що формально зводиться до підстановки у досліджувану функцію замість змінної x її значення x_0;

2) ***аналізуємо*** отриманий вираз з метою встановлення, чи є він визначеним або невизначеним;

3) ***записуємо*** відповідний результат у разі визначеного виразу;

4) ***розкриваємо*** невизначеність за допомогою допоміжних перетворень, а потім даємо відповідь.

Розглянемо ряд найбільш важливих невизначеностей різного типу. Під «важливими» розуміємо такі границі, які достатньо широко використовуються (можливо, і як готові формули) при обчисленні границь.

13.3.1. Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ виникає при знаходженні границі відношення двох многочленів від змінної x, коли аргумент прямує до нескінченності. Для розкриття невизначеності такого типу потрібно із чисельника та знаменника дробу винести за дужки найвищий ступінь x, тобто x^n, де $n = \max\{k,\ m\}$, а після скорочення виразу на x^n обчислити границю, підставивши у функцію значення, до якого прямує аргумент:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_k(x)}{P_m(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \text{K} + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \text{K} + b_1 x + b_0} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \begin{cases} \infty, & k > m; \\ a_k / b_k, & k = m; \\ 0, & k < m. \end{cases} \qquad (13.9)$$

Застосування формули (13.9) дає змогу зразу записати результат, порівнявши степені чисельника k і знаменника m.



Наприклад, обчислимо границю:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3 + 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(5 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)} = \frac{5}{2}.$$

Зауваження. Висновки співвідношення (13.9) можуть бути застосованими і до дробів, у яких чисельник або знаменник містять степені з дробовими показниками.

 Обчислимо границю за правилом (13.9):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}.$$

Оскільки у цьому прикладі найвищі степені чисельника і знаменника однакові (це перший степінь змінної x), то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при цьому степені змінної чисельника до знаменника.

13.3.2. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Розглянемо границю частки двох функцій: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, коли при $x\to x_0$ обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ прямують до 0. Це означає, що $x=x_0$ є коренем функції, що стоїть у чисельнику, а також коренем функції, що стоїть у знаменнику. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ є многочленами, то для розкриття невизначеності їх можна розкласти на множники, одним з яких є $(x-x_0)$:

$$f(x)=P_k(x)=(x-x_0)P_{k-1}(x);$$

$$g(x)=P_m(x)=(x-x_0)P_{m-1}(x).$$

Потім скоротимо дріб на вираз $(x-x_0)$. Це можна здійснити, оскільки $x-x_0\neq 0$, бо змінна x не дорівнює x_0, а лише прямує до неї. Після скорочення дробу здійснюємо повторно граничний перехід. Якщо x_0 є простим коренем багаточленів, то невизначеність розкрито. У тому ж випадку, коли x_0 є кратним коренем обох многочленів, то знову прийдемо до невизначеності «нуль на нуль». Операцію спрощування повторюють стільки разів, яка найменша кратність кореня $x=x_0$ чисельника і знаменника. Для того щоб виділити у чисельнику і знаменнику множник $x=x_0$, можна поділити їх «сходинками» на вираз $(x-x_0)$.

 Наприклад,

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{x^4-2x^2+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{(x^2-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)^2}=0.$$



Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+5x-7}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2x^2+2x+7\right)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+2x+7}{x-2}=-11.$$

Якщо треба розкрити невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, коли чисельник та (або) знаменник містять квадратні корені, то найбільш поширеною при цьому операцією, що дозволяє позбутися ірраціональності, є множення чисельника і знаменника дробу на спряжений вираз. Як наслідок, отримуємо раціональні функції, для яких і виділяємо множник $\left(x-x_0\right)$.



Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{14+x}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{6-x}-2\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}{\left(\sqrt{14+x}-4\right)\left(\sqrt{14+x}+4\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{14+x}+4\right)}{\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)\left(\sqrt{14+x}+4\right)}{(x-2)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=-\frac{8}{4}=-2.$$

13.3.3. Невизначеність типу $[\infty-\infty]$. Невизначеності цього виду за допомогою перетворень потрібно привести до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.



Обчислимо границі:

а) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{6};$

б) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)}=$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0.$$

Для цієї ж функції невизначеності немає, якщо $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right) = \left[\infty+\infty\right] = \infty,$$

оскільки сума двох нескінченно великих є нескінченно великою.

13.3.4. Перша чудова границя. Область застосування ***першої чудової границі*** – розкриття невизначеності «нуль на нуль», яка пов'язана з функціями, що містять тригонометричні або обернені тригонометричні функції.

Теорема 13.3. Границя відношення синуса нескінченно малого аргументу до цього ж аргументу дорівнює одиниці:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1. \qquad (13.10)$$

Доведення. Для того щоб довести теорему, розглянемо коло одиничного радіуса з центром у початку координат − точці O (рис. 13.4).

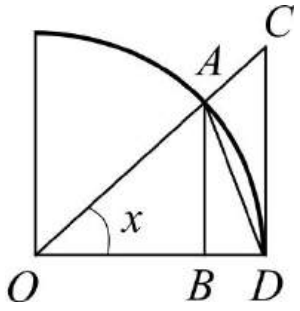


Рис. 13.4

У першій чверті одиничного круга візьмемо кут x, тобто $0 < x < \pi/2$, де $OD = 1$, $\overset{\smile}{AD} = x$, $AB = \sin x$, $CD = tgx$. Порівнюючи площі трикутника OAD, кругового сектора OAD і трикутника OCD, отримуємо співвідношення між площами цих фігур:

$$S_{\Delta OAD} < S_{\text{сек.}OAD} < S_{\Delta OCD},$$

$$\frac{1}{2}OD \cdot AB < \frac{1}{2}OD \cdot \overset{\smile}{AD} < \frac{1}{2}OD \cdot CD$$

або

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Замінюємо члени нерівності оберненими величинами і, з урахуванням умови $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, одержуємо нерівність: $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1.$

Зауважимо, що дані нерівності виконуються і для $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, тому що функції $\cos x$ і $\frac{\sin x}{x}$ – парні, тобто $\cos(-x)=\cos x$ та $\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$.

Переходячи до границі при $x \to 0$, будемо мати:

$$\lim_{x\to 0}\cos x < \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0}1 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1\\ \lim\limits_{x\to 0}1 = 1\end{array}\right| \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Таким чином, для границі справа співвідношення (13.10) доведено.

Для лівосторонньої границі, коли $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, в силу парності функцій $\cos x$ та $\frac{\sin x}{x}$ приходимо до того ж результату.

Формулу (13.10) не слід розуміти буквально у тому сенсі, що змінна x обов'язково повинна прямувати до нуля. Сама змінна x може прямувати до будь-якого x_0, але необхідно, щоб аргумент під знаком синуса був довільною нескінченно малою $\alpha(x)$ при $x \to x_0$. Отже, в узагальненому вигляді першу чудову границю можна записати так:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=1. \qquad (13.11)$$



Для ілюстрації співвідношення (13.11) розглянемо приклади:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x\ \left(x-1\right)\right)}{x^2-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}2x\ \left(x-1\right)=\alpha\\ x\to 0\Rightarrow\alpha\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha/2}=2;$

б) $\lim\limits_{x\to 0{,}5\pi}\frac{\cos x}{(x-0{,}5\pi)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}x-0{,}5\pi=\alpha\\ x\to 0{,}5\pi\Rightarrow\alpha\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{-\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}=-\infty.$

Наслідки. За першою чудовою границею (13.10) отримуємо співвідношення, які зручно застосовувати при розкритті невизначеності:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}.$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a.$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

13.3.5. Друга чудова границя. Область застосування ***другої чудової границі*** – розкриття невизначеності «одиниця у степені нескінченність», яка породжується степенево-показниковими функціями $y=f(x)=u(x)^{v(x)}$.

Теорема 13.4. Границя степенево-показникової функції:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=e. \tag{13.12}$$

Доведення. Розглянемо спочатку ствердження (13.12) для натурального значення аргументу, а саме доведемо, що границя послідовності із загальним членом $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ при $n\to\infty$ дорівнює:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e. \tag{13.13}$$

Проведемо аналіз поведінки послідовності із загальним членом $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ при $n\to\infty$. Доведемо, що послідовність $\{u_n\}$ монотонно зростає. Дійсно, скористаємося формулою бінома Ньютона:

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots\left(n-(n-1)\right)}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n},$$

або

$$u_n=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Якщо n зростає, то зростає кількість додатних доданків (їх у формулі $n+1$), а також величина кожного доданка, тобто, дійсно, $\{u_n\}$ зростає.

Зробимо оцінку загального члена послідовності u_n:

$$u_n < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} < 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отже, починаючи з другого доданка у правій частині нерівності маємо суму перших $n-1$ членів геометричної прогресії. Для цієї прогресії перший член $a = \frac{1}{2}$ та знаменник $q = \frac{1}{2}$. Тому:

$$S_{n-1} = \frac{a\left(q^{n-1} - 1\right)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

або

$$2 < u_n < 2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 2 < u_n < 3.$$

Таким чином, послідовність $\{u_n\}$ монотонно зростає й обмежена, тобто, за ознакою збіжності числової послідовності $\{u_n\}$ має границю. Границя числової послідовності із загальним членом

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

позначається через e. Це ірраціональне число, яке дорівнює $e = 2{,}71828\ldots$ ***Число*** e (***константа Непера***) є ***математичною константою***.

На базі твердження (13.13) можна довести, що функція $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to +\infty$ також має границю, яка дорівнює e.

Спочатку нагадаємо, що цілою частиною $[x]$ дійсного числа x називається найбільше ціле число, яке не перевищує x. Отже,

$$[x] \le x < [x] + 1.$$

Якщо $x \to +\infty$, то

$$[x] = n \ \ \forall x \in [n, n+1), \text{ де } n \in N.$$

При $x \to +\infty$ маємо $n \to +\infty$, де x – неперервна, n – дискретна змінні.

З урахуванням наведеного отримуємо:

$$n \le x < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \Rightarrow 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}.$$

Отримуємо подвійну нерівність:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Здійснимо граничний перехід у нерівності при $x \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

Границі першого і третього членів останньої нерівності дорівнюють числу e, отже, є рівними. Дійсно

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{n+1}{n}} = e.$$

За властивістю функції, що має границю, отримуємо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left[1^{+\infty}\right] = e. \qquad (13.14)$$

Останню рівність можна записати і в такому вигляді:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e, \qquad (13.15)$$

де $\alpha = \frac{1}{x}$, тобто при $x \to +\infty$ маємо, що $\alpha \to 0$.

Стосовно формул (13.14) та (13.15), обидві з яких відповідають другій чудовій границі, можна навести такі самі міркування, як і при аналізі першої чудової границі: у ролі x та α можуть виступати будь-які нескінченно великі чи, відповідно, нескінченно малі, але структура виразу повинна бути такою, як у наведених формулах.

Наслідки. За другою чудовою границею (13.10) отримуємо співвідношення, які зручно застосовувати при розкритті невизначеності:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}.$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+ax\right)^{1/bx}=e^{a/b}.$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{bx}\right)^{x}=e^{a/b}.$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+ax\right)^{b/x}=e^{ab}.$ 6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

Нагадаємо, що логарифм числа за основою e називається натуральним логарифмом і позначається $\ln x$. Наслідки можна доповнити ще однією формулою:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Дійсно, спираючись на властивості логарифмів, перетворимо цю рівність таким чином:

$$\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$



Обчислимо границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{3}{x}\cdot5x}=e^{15};$

б) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-2x\right)^{3/x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\left(1-2x\right)^{-1/2x}\right)^{-\frac{2x\cdot3}{x}\cdot}=e^{-6};$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{2(2x-1)}{x+1}}=e^{4};$

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-1+\cos x\right)^{1/x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\left(1+(\cos x-1)\right)^{1/(\cos x-1)}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{-\lim\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}};$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2)(\ln(2x-1)-\ln(2x+3))=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{(x-2)}=$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{x-2}=\ln\left(e^{-2}\right)=-2.$$



Розглянемо задачу про неперервне нарахування відсотків. Нехай протягом року банк кілька разів (позначимо це число через m) нараховує відсотки, виходячи із $p\,\%$ річних. Початковий внесок у банк складає A_0. Необхідно знайти величину вкладу, яка буде накопичена за n років.

Для розв'язання застосуємо формулу складних відсотків:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}.$$

Якщо відсотки за внеском нараховуються неперервно, то за n років на рахунку вкладника буде накопичена сума:

$$A_n = \lim_{m\to\infty} A_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn} = A_0 \lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}}\right)^{\frac{p}{100m}mn} = A_0 e^{\frac{pn}{100}}.$$

Формула відображає показниковий (експоненціальний) закон зростання (при $p>0$) або спадання (при $p<0$). Її можна використовувати при неперервному нарахуванні відсотків. Ця формула є достатньо ефективною при аналізі складних фінансових проблем, при обґрунтуванні інвестиційних рішень тощо.

13.4. Порівняння нескінченно малих. Застосування еквівалентних нескінченно малих до обчислення границь

Нехай $\alpha=\alpha(x), \beta=\beta(x), \gamma=\gamma(x)$ є нескінченно малими при $x\to x_0$, де x_0 – скінченне число або нескінченність. Хоча всі нескінченно малі мають границею 0, «швидкість» прямування до нього буває різною, тому й виникає потреба в їх порівнянні. ***Порівняти нескінченно малі*** означає обчислити границю їх відношення

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c. \qquad (13.16)$$

Якщо така границя існує, то:

а) при $c \neq 0$ $\alpha = \alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають ***нескінченно малими одного порядку***. Зокрема при $c = 1$ нескінченно малі $\alpha = \alpha(x)$ і $\beta = \beta(x)$ називають ***еквівалентними*** і записують $\alpha \sim \beta$;

б) при $c = 0$ нескінченно мала $\alpha = \alpha(x)$ називається ***нескінченно малою більш високого порядку***, ніж $\beta(x)$;

в) при $c = \infty$ нескінченно мала $\alpha = \alpha(x)$ є ***більш низького порядку*** порівняно з $\beta(x)$ (або $\beta(x)$ – нескінченно мала більш високого порядку, ніж $\alpha(x)$).

Коли виникає потреба у більш точному порівнянні величин $\alpha(x)$ і $\beta(x)$, то обчислюють ***порядок малості*** $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$. Нескінченно мала $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою порядку*** k відносно нескінченно малої $\beta(x)$, якщо

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \neq 0.$$

Порівняємо, наприклад, функції $\alpha = x$ і $\beta = x^{10}$, які є нескінченно малими при $x \to 0$. Оскільки

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{10}}{x} = \lim_{x \to 0} x^9 = 0,$$

то нескінченно мала $\beta(x)$ є більш високого порядку малості, ніж $\alpha(x)$.

При цьому порядок малості нескінченно малої $\beta(x)$ дорівнює $k = 10$, оскільки β і α^{10} – еквівалентні нескінченно малі.

Особливий інтерес викликають еквівалентні нескінченно малі, оскільки під знаком границі їх можна замінювати одна на іншу, завдяки чому значно спрощується визначення границі.

Ряд еквівалентних нескінченно малих отримуємо безпосередньо за означенням першої та другої чудових границь, а також завдяки тотожнім перетворенням виразів, що описують ці границі. Так, якщо $\alpha = \alpha(x)$ є нескінченно малою при $x \to x_0$, то отримуємо таблицю еквівалентних нескінченно малих:

$\sin\alpha \sim \alpha$ $\quad \arcsin\alpha \sim \alpha$ $\quad tg\alpha \sim \alpha$

$arctg\alpha \sim \alpha$ $\quad 1-\cos\alpha \sim 0{,}5\alpha^2$ $\quad tg\alpha-\sin\alpha \sim 0{,}5\alpha^3$

$e^{\alpha}-1 \sim \alpha$ $\quad \ln(1\pm\alpha) \sim \pm\alpha$ $\quad (1\pm\alpha)^{1/n}-1 \sim \pm\frac{1}{n}\alpha$



Наприклад, скористаємося таблицею еквівалентних нескінченно малих для визначення границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{arctg6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\sin 5x\sim 5x\\ arctg6x\sim 6x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{6x}=\frac{5}{6},$$

де при $x\to 0$ у чисельнику отримаємо $\alpha(x)=5x$ – нескінченно мала при $x\to 0$, а у знаменнику маємо $\beta(x)=6x$.



Ключові терміни

Границя послідовності; збіжність, розбіжність; границя функції при необмеженому зростанні аргументу; границя функції в точці; означення границі за Гейне; означення границі за Коші; нескінченна границя; ε-окіл; нескінченно мала функція; нескінченно велика функція; невизначеність; перша чудова границя; друга чудова границя; математичні константи; число e; нескінченно малі однакового порядку; еквівалентні нескінченно малі; нескінченно мала порядку k; односторонні границі; лівостороння границя; правостороння границя.



Запитання для самоперевірки

1. Яке число A називається границею функції $y=f(x)$ у точці x_0?

2. При якому значенні A говорять, що функція має скінченну границю?

3. Яка функція називається нескінченно малою; нескінченно великою при $x\to x_0$?

4. Сформулюйте і доведіть критерій існування скінченної границі «мовою нескінченно малих».

5. Які границі функції називають односторонніми?

6. Сформулюйте і доведіть теореми про єдиність границі та арифметичні властивості збіжних функцій.

7. Які існують типи невизначеностей при обчисленні границь?

8. Які перетворення застосовуються для розкриття невизначеностей, що породжуються відношенням многочленів, дробово-раціональною функцією?

9. Доведіть теореми про першу і другу чудові границі.

10. У чому полягає порівняння нескінченно малих?

11. Які нескінченно малі називаються еквівалентними? Наведіть їхні властивості.

12. Опишіть застосування еквівалентних нескінченно малих до обчислення границь.

13. Які співвідношення щодо еквівалентних нескінченно малих випливають з першої чудової границі?

14. Наведіть еквівалентне формулювання другої чудової границі, яке є основою для побудови таблиці еквівалентних нескінченно малих.

15. Які співвідношення щодо еквівалентних нескінченно малих випливають з другої чудової границі?

Глава 14. Неперервність і розриви функцій

14.1. Означення неперервності функції в точці. Неперервність основних елементарних функцій

Поняття неперервності функції тісно пов'язане з її границею. Воно є характеристикою багатьох процесів, що відбуваються неперервно: неперервність часу, неперервність зміни температури, неперервність зростання доходу та ін.

Нехай функція $y = f(x)$, з областю визначення $D(f)$, визначена в точці x_0, якій відповідає значення функції $y_0 = f(x_0)$, і x – довільна точка з деякого околу точки x_0 (рис. 14.1).

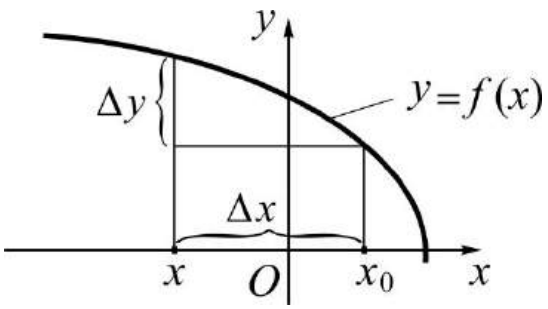


Рис. 14.1

Величина, на яку змінилося значення аргументу при переході від точки x_0 до x, називається ***приростом аргументу*** в точці x_0:

$$\Delta x = x - x_0, \qquad (14.1)$$

а відповідну зміну значення функції називають ***приростом функції*** в точці x_0:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0),$$

або

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \qquad (14.2)$$

Прирости можуть бути як додатними, так і від'ємними; наприклад, на рис. 14.1 $\Delta x < 0$, при цьому $\Delta y > 0$.

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $\boldsymbol{x_0}$, якщо в цій точці вона визначена і нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, а саме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{14.3}$$

Зауважимо, що при означенні неперервності, на відміну від границі, функція в точці x_0 обов'язково повинна бути визначена.



Покажемо, що функція $y = e^x$ неперервна в кожній точці x_0 області визначення $D(f) = (-\infty, +\infty)$. Дійсно, надамо значенню аргументу x_0 приріст Δx, тоді $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}$. Знайдемо границю приросту функції Δy при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \left(e^{\Delta x} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \Delta x = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Оскільки x_0 – довільна точка із $D(f)$, то функція $y = e^x$ неперервна $\forall\, x_0 \in D(f)$.

Аналогічно можна довести неперервність будь-якої з основних елементарних функцій (x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$).

Теорема 14.1 (***про неперервність основних елементарних функцій***). Основні елементарні функції неперервні у кожній точці своєї області визначення.

Доведення здійснюється для кожної функції окремо.

Теорема 14.2 (***критерій неперервності «мовою границі»***). Функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді і лише тоді, коли границя функції в цій точці дорівнює значенню функції у ній:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{14.4}$$

Доведення. Справедливість (14.4) випливає з означення неперервності і властивостей границі функції.

Необхідність. Виходячи з (14.3), маємо:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)).$$

Якщо позначити $x_0+\Delta x=x$, то при $\Delta x\to 0, x\to x_0$.

Звідси $$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)-\lim_{x\to x_0} f\left(x_0\right)=0.$$

Отже, $$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right) \qquad (14.5)$$

Достатність. Нехай функція визначена в точці x_0 і неперервна в ній. Тоді відповідно з означенням (14.4)

$$\lim_{x\to x_0}(f\left(x\right)-f\left(x_0\right))=\lim_{\Delta x\to 0}(f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right))=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Таким чином, маємо два означення неперервності функції в точці відповідно формулам (14.3) та (14.4):

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right) \text{ або } \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Функція називається ***неперервною на множині*** X, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Зауваження. Якщо функція неперервна в точці x_0, то для обчислення границі функції в цій точці достатньо у вираз функції підставити замість аргументу x його граничне значення, тобто здійснити граничний перехід, у результаті отримаємо певне число (а не невизначеність!). Формально це означає, що символ границі і символ функції можна переставляти, а саме:

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\Big(\lim_{x\to x_0} x\Big). \qquad (14.6)$$



Наприклад, обчислимо границю $f(x)=\sqrt[3]{\cos\pi x}$ в точці $x_0=1$:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\cos\pi x}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 1}\cos\pi x}=\sqrt[3]{\cos\Big(\pi\lim_{x\to 1}x\Big)}=\sqrt[3]{\cos\left(\pi\cdot 1\right)}=-1.$$

Теорема 14.3 (***критерій неперервності «мовою односторонніх границь»***). Функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді і лише тоді, коли односторонні границі функції в цій точці рівні між собою і дорівнюють значенню функції в ній:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \tag{14.7}$$

Доведення. Дійсно, співвідношення (14.7) базується безпосередньо на теоремі існування скінченної границі функції «***мовою односторонніх границь***» і означенні неперервності функції в точці (14.4):

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0),$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$



Перевірити в точці $x_0 = 1$ неперервність функції:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Обчислимо односторонні границі цієї функції:

$$f(1-0) = \lim_{x \to 1-0} x^2 = 1;\ f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} (x+1) = 2,$$

тобто границя зліва не дорівнює границі справа, отже, у даній точці границя не існує, і функція в точці $x_0 = 1$ є розривною.

Розглянемо далі дві функції: $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$, неперервні в точці x_0,

Теорема 14.4 (***про арифметичні властивості неперервних функцій***). Якщо функції $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ неперервні у точці x_0, то їх сума (різниця), добуток, частка (якщо знаменник у даній точці не дорівнює нулю) є неперервною функцією у точці x_0.

Доведення теореми здійснюється на основі відповідних властивостей границі функції. Покажемо її справедливість для частки функцій. Згідно з (14.4)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),\ \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Позначимо частку функцій через $u(x)$, тоді за властивістю границі частки

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = u(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = u(x_0).$$

Пропонуємо інші висновки теореми довести самостійно.

Стосовно функцій, утворених з основних елементарних функцій за допомогою суперпозиції, постає питання, якою з точки зору неперервності буде складена функція, якщо її складові є неперервними функціями.

Теорема 14.5 (*про неперервність складеної функції*). Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна при $x = x_0$, а $y = f(u)$ є неперервною в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.

Доведення. Позначимо закон зв'язку змінної y з аргументом x через F, тобто $y = f(\varphi(x)) = F(x)$. Враховуючи неперервність $\varphi(x)$, а саме: $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, знайдемо границю $F(x)$, коли $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \left| x \to x_0 \ \Rightarrow\ u \to u_0 \right| =$$

$$= \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f\left[\varphi(x_0)\right] = F(x_0).$$

Функції неперервні в кожній точці своєї області існування.

Теорема 14.6 (*про неперервність оберненої функції*). Якщо функція $y = f(x)$ є визначеною, зростаючою (або спадною) і неперервною на сегменті $[a, b]$, то і обернена до неї функція $x = \varphi(y)$, або $y = f^{-1}(x)$, є визначеною,

зростаючою (або спадною) і неперервною на відрізку $\left[f\left(a\right), f\left(b\right)\right]$ (або на відрізку $\left[f\left(b\right), f\left(a\right)\right]$, якщо функція спадна) (рис. 14.2):

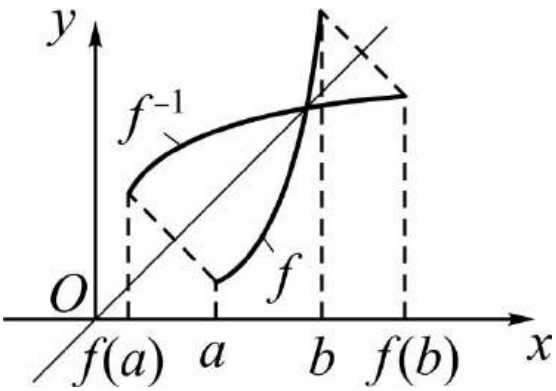


Рис. 14.2

14.2. Розриви функцій та їх класифікація

Якщо функція $y = f\left(x\right)$ не є неперервною в точці x_0, то говорять, що в цій точці вона має ***розрив***, а точка x_0 називається ***точкою розриву***.

Точки розриву і самі розриви класифікуються залежно від того, як порушується критерій неперервності (14.7):

$$f\left(x_0 - 0\right) = f\left(x_0 + 0\right) = f\left(x_0\right).$$

Розрізняють такі випадки:

1. Існують односторонні границі (скінченні), які є рівними між собою $f\left(x_0 - 0\right) = f\left(x_0 + 0\right) = A,$ але $f\left(x_0\right) \neq A$ або не існує, тоді говорять, що x_0 є ***точкою усувного розриву***.

Назва розриву «усувний» пов'язана з тим, що достатньо в тій точці, де досліджується неперервність функції, задати значення функції, яке б дорівнювало значенню односторонніх границь, або змінити значення функції на значення границі в цій точці, тобто покласти $f\left(x_0\right) = \lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right).$



Наприклад, класичний усувний розрив дає функція $y = \dfrac{\sin x}{x}$ в точці $x_0 = 0$ (рис. 14.3). Оскільки $x_0 \notin D\left(f\right)$, а

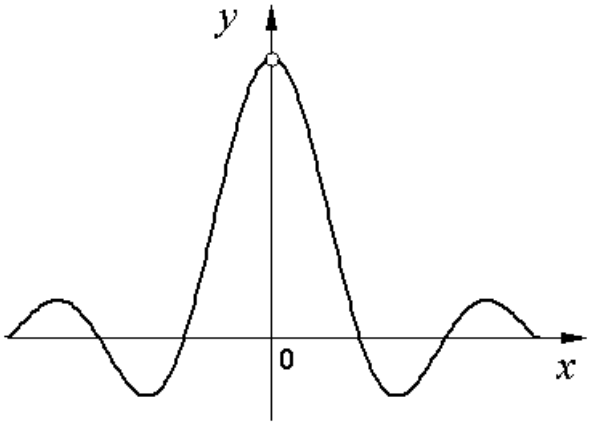


Рис. 14.3

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

тобто

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

то для того щоб функція була неперервною, достатньо довизначити функцію у точці $x_0=0$ таким чином:

$y(x_0=0)=1$.

2. Існують скінченні односторонні границі, але $f\left(x_0-0\right)\neq f\left(x_0+0\right)$, тоді x_0 називають ***точкою розриву I-го роду***.

3. Не існує хоча б однієї з односторонніх границь, або принаймні одна з них нескінченна, тоді точка x_0 є ***точкою розриву II-го роду***.

Прикладом функції, що має розрив II-го роду, є функція $y=\sin\left(1/x\right)$, $x\neq 0$, оскільки вона не має границі в нулі ні зліва, ні справа.

Під ***дослідженням на неперервність*** функції $y=f\left(x\right)$ в деякій точці x_0 розуміють установлення факту неперервності (якщо такий, звичайно, має місце), або типу розриву у протилежному випадку.

Якщо функція елементарна, то дослідженню підлягають тільки точки, в яких функція невизначена. При заданні функції різними аналітичними виразами на різних ділянках області існування досліджуються точки, які є межами відповідних ділянок.



Дослідити на неперервність функцію

$$y=\frac{x-2}{x^2-3x+2}.$$

Областю визначення функції є вся числова вісь, крім $x=1$, $x=2$ (знаменник дорівнює нулю). Отже, на неперервність функцію досліджуємо в точках:

1) $x=1$. Знайдемо односторонні границі

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)}=-\infty.$$

Отже, точка $x=1$ є точкою розриву 2-го роду;

2) при $x=2$, односторонні границі

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-1}=1,\ f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}=1,$$

у точці $x=2$ функція не існує, тобто

$$f(2-0)=f(2+0)\neq f(2).$$

Таким чином точка $x=2$ є точкою усувного розриву (рис. 14.4а).

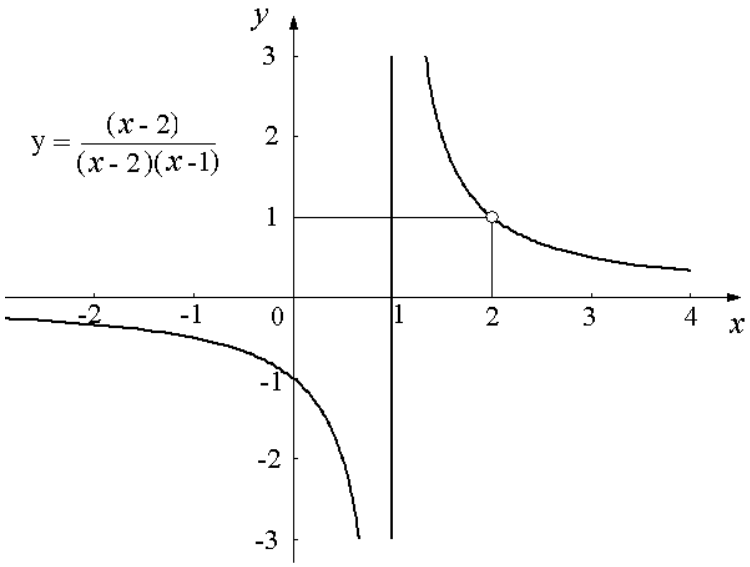


Рис. 14.4а

Дослідимо на неперервність функцію: $y=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x\le 1 \\ x+\dfrac{3}{2}, & x>1 \end{cases}$.

Маємо неелементарну функцію, яку задано трьома формулами. На кожному із вказаних проміжків функція неперервна, як елементарна на області

свого існування. Необхідно розглянути точки стиковки функцій різного вигляду, тобто точки $x=0$ і $x=1$.

1. При $x=0$, односторонні границі

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}(x+1)=1;\ f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\left(x^2+1\right)=1;\ f(0)=1.$$

Таким чином, функція в точці $x_0=0$ неперервна.

2. При $x=1$ $f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right)=2;\ f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(x+2)=3$ $f(1)=2$, отже, $f(1-0)\neq f(1+0)$ і функція в цій точці має розрив першого роду (рис. 14.4б).



Дослідити на неперервність функцію

$$y=e^{\frac{1}{x-2}}.$$

У точці $x=2$ односторонні границі:

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}e^{\frac{1}{x-2}}=0;\quad f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}e^{\frac{1}{x-2}}=\infty.$$

Отже, точка $x=2$ є точкою розриву II-го роду (рис. 14.4в).

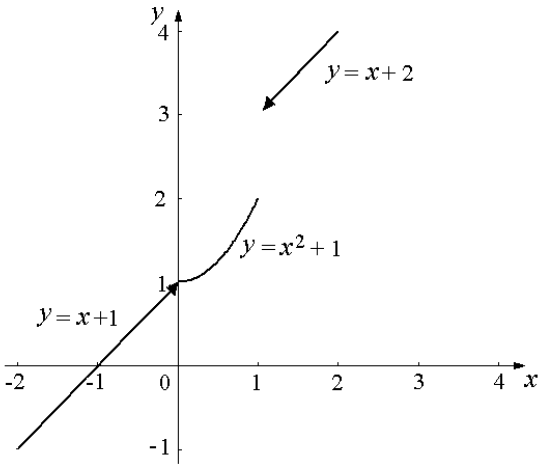


Рис. 14.4б

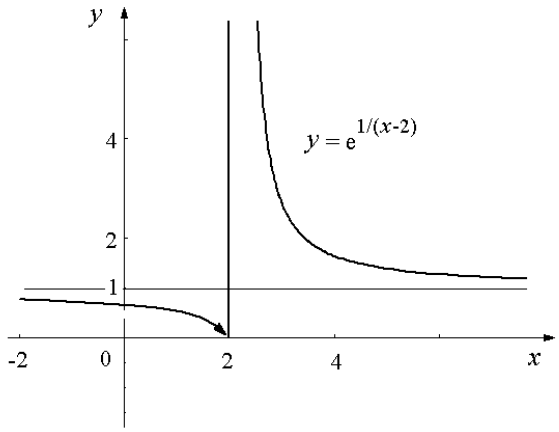


Рис. 14.4в

14.3. Неперервність функції на відрізку. Означення, основні теореми про неперервні функції

У теоретичних дослідженнях і на практиці використовуються теореми, які відображають властивості неперервних функцій не в окремо взятій точці, а на множині точок – проміжку.

Функцію $f(x)$ називають ***неперервною на інтервалі*** (a,b), якщо вона неперервна в кожній точці інтервалу. Функцію $f(x)$ називають ***неперервною на відрізку*** $[a,b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a,b) і, крім цього, неперервна справа в точці a і – зліва в точці b.

Сформульовані нижче теореми приймемо без доведення. Для кращого розуміння їхнього змісту подамо до кожної теореми відповідну геометричну ілюстрацію, що допоможе, сподіваємось, усвідомити справедливість теорем на інтуїтивному рівні.

Якщо функція $f(x)$ визначена на множині X і існує таке значення $x_0 \in X$, що для усіх $x \in X$ виконується умова $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$, то число $f(x_0)$ називається ***найбільшим*** $-M$, (***найменшим*** $-m$) значенням функції $f(x)$ на множині X.

Теорема 14.7 (***про найменше і найбільше значення неперервної функції***). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,\ b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше (рис. 14.5). Тобто для будь-яких $x \in [a,b]$ виконується умова:

$$m \le f(x) \le M .$$

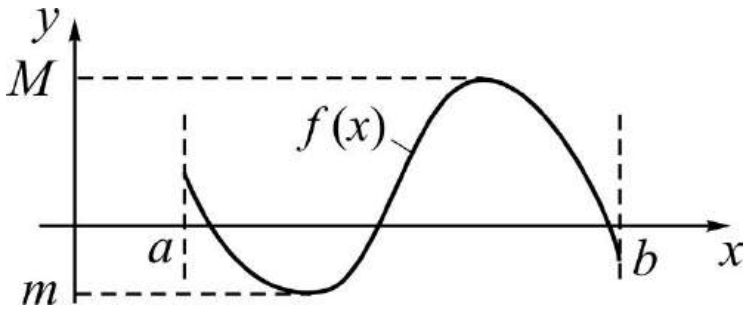


Рис.14.5

Якщо функцію $y=f(x)$ задано на інтервалі $(a;b)$ або $[a;b)$, то вона таким властивостям може і не задовольняти.

Наприклад, функція $y=x$, $x\in(0;1)$ ні найменшого, а ні найбільшого значення не має.

Функція $y=x$ на відрізку $[0;2]$ має найменше значення $m=f(0)=0$; найбільше $M=f(2)=2$, тобто на кінцях відрізку.

Функція $y=\dfrac{1}{x}$ на відрізку $[0,2]$ не має найбільшого значення, тому що в точці $x=0$ вона не визначена.

Функція $y=\sin x$ на відрізку $[0;2\pi]$ досягає найменшого значення $m=0$ в точці $x=\dfrac{3}{2}\pi$, $m=-1$ і найбільшого значення $M=1$ в точці $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Теорема 14.8 (***про нулі неперервної функції***). Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,\ b]$ і її значення на кінцях даного відрізку мають різні знаки, то між a і b існує хоча б одна точка x_0, яка є нулем функції (рис. 14.6):

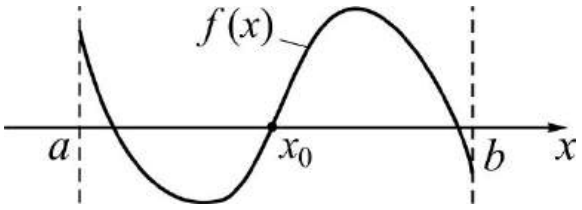


Рис. 14.6

Теорема 14.9 (*про проміжні значення функції).* Якщо функція неперервна на відрізку $[a;b]$ і її найменше і найбільше значення відповідно m і M, а число $C\in(m;M)$, тоді на відрізку $[a;b]$знайдеться хоча б одна точка c така, що $f(c)=C$.

Відзначимо, що всі розглянуті питання щодо «неперервності» функції є по суті застосуванням поняття границь до дослідження функцій і побудови їх графіків.



Ключові терміни

Приріст аргументу; приріст функції; неперервність функції в точці; класифікація розривів функції; усувний розрив; скінченний стрибок (розрив 1-го роду); нескінченний стрибок (розрив 2-го роду); дослідження функції на неперервність; неперервність функції на проміжку.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають приростами аргументу і функції в точці x_0?

2. Яку функцію $y = f(x)$ називають неперервною в точці x_0?

3. Чи всі основні елементарні функції неперервні в кожній точці області визначення?

4. Сформулюйте критерій неперервності «мовою границі», «мовою односторонніх границь».

5. Наведіть арифметичні властивості неперервних функцій.

6. Чи всі елементарні функції неперервні у кожній точці області визначення?

7. Наведіть приклади функцій, які не є елементарними і при цьому є неперервними на всій області визначення.

8. Яка точка x_0 називається точкою розриву функції?

9. Дайте означення усувного розриву і поясніть як саме його можна усунути. Наведіть приклад.

10. За якими ознаками розрізняються точки розриву I-го і II-го родів?

11. Що розуміють під дослідженням функції на неперервність?

12. Які точки можуть бути точками розриву, якщо функція задана однією формулою?

13. Які точки можуть бути точками розриву, якщо функція задана декількома формулами?

14. Дати означення неперервних функцій на проміжку?

15. Які властивості мають функції, які є неперервними на проміжку?

16. Наведіть приклади функцій, для яких порушуються умови теорем про неперервність функції на відрізку.

Приклади та вправи за розділом 3

Приклади застосування математичного аналізу до розв'язання задач економіки.

3.1. Клієнт поклав 10 000 грн у банк за ставкою 7 %. Знайти накопичення через 5 років у разі: а) простих відсотків; б) складних відсотків. Результати порівняти.

Розв'язання. У випадку простих відсотків накопичена сума обчислюється за формулою

$$A_n = A(1+np),\ \text{де}\ A=10\,000,\ n=5,\ p=0{,}07.$$

Отже, $A_5 = 10\,000(1+5\cdot 0{,}07) = 13\,500$ (грн).

Якщо вклад покласти під складні відсотки, то накопичена сума обчислюється за формулою

$$A_n = A(1+p)^n.$$

Тоді $A_5 = 10\,000(1+0{,}07)^5 = 14\,025{,}52$ (грн).

Порівнюючи результати, бачимо, що вигідніше вкладати гроші під складні відсотки.

3.2. 150 000 грн покладено у банк за ставкою 18 % на 5 років. Побудувати числову послідовність для характеристики грошових накопичень із урахуванням складених відсотків.

Розв'язання. Для побудови числової послідовності використовуємо формулу

$$A_n = A(1+p)^n,$$

де $A=150\,000$, $p=0{,}18$, $n=\overline{1,5}$.

Результати обчислень наведено в таблиці:

n, роки	1	2	3	4	5
A_n, грн	177 000	208 860	246 454,8	290 816,7	323 163,7

3.3. Попит на папір у канцелярії університету на місяць складає 20 пачок і щомісяця зростає на 5 %. Через який час попит збільшиться вдвічі, якщо ця тенденція буде зберігатися?

Розв'язання. Враховуючи формулу $A_n = A(1+p)^n$, маємо:

$$2A = A(1+0,05)^n, \text{ або } 2 = 1,05^n.$$

Прологарифмуємо обидві частини:

$$\lg 2 = n \lg 1,05,$$

звідси
$$n = \frac{\lg 2}{\lg 1,05} = 14.$$

Отже, через 14 місяців попит на папір у канцелярії збільшиться вдвічі.

3.4. Підприємець вирішив інвестувати в проект з будівництва нового готелю 10 млн грн, розраховуючи отримати через 3 роки 20 млн грн. Яка повинна бути при цьому відсоткова ставка?

Розв'язання. Застосовуємо формулу складних відсотків

$$A_n = A(1+p)^n.$$

Необхідно знайти p. Підставимо дані задачі:

$$20 = 10(1+p)^3, \text{ або } 2 = (1+p)^3.$$

Далі маємо:

$$\lg 2 = 3\lg(1+p),$$

$$1+p = 1,26,$$

звідки $p = 0,26$.

Отже, щоб через три роки отримати 20 млн грн, відсоткова ставка повинна бути 26 %.

3.5. Універмаг продає за день 150 пар взуття. Після відкриття ще одного відділу було вирішено довести продаж до 750 пар. Скільки для цього буде потрібно часу, якщо щодня збільшення продажу складає 25 %?

Розв'язання. За формулою

$$A_n = A(1+p)^n$$

маємо:

$$750 = 150 \cdot 1,25^n \Rightarrow (1,25)^n = 5.$$

Звідси

$$n = \frac{\lg 5}{\lg 1,25} = 7.$$

Отже, треба буде 7 днів, щоб збільшити щодня продаж взуття до 750 пар.

3.6. Клієнт поклав гроші у банк під складні відсотки за ставкою 8 %. Через п'ять років він одержав 29 386,6 грн. Яку суму було покладено в банк?

Розв'язання. За формулою складних відсотків маємо:

$$29386,6 = A(1+0,08)^5,$$

звідки

$$A = \frac{29386,6}{1,08^5} = 20\,000.$$

Таким чином, було покладено в банк 20 000 грн.

3.7. Чисельність населення України у 2010 році складала 47 млн. Знайти чисельність населення України через 5 років, якщо вона буде зростати щорічно: а) на 0,5 %; б) на 1,5 %.

Розв'язання. Якщо A – чисельність населення на початок розрахунку, тоді через n років чисельність складатиме

$$A_n = Ae^{pn},$$

а саме:

а) $A_5 = 47e^{0,005 \cdot 5} = 48,19$ (млн);

б) $A_5 = 47e^{0,015 \cdot 5} = 50,66$ (млн).

Отже, при зростанні чисельності на 0,5 %, через 5 років вона складатиме 48,19 млн, а при зростанні на 1,5 % – 50,66 млн.

3.8. Студент, що одержав на конкурсі премію 10 000 грн, поклав її на 3 роки до банку за схемою неперервного нарахування відсотків за ставкою 10 %. Побудувати числову послідовність накопичень при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

Розв'язання. Для побудови числової послідовності використовуємо формулу

$$A_n = Ae^{pn},$$

а саме:

$$A_n = 10\,000e^{0{,}1n}.$$

Результати обчислень подамо у вигляді таблиці:

n, роки	1	2	3
A_n, грн	11051,71	12214,03	13498,59



Задачі та вправи для самостійного розв'язання

3.9. Знайти область визначення функцій:

1) $y = \sqrt{2x-5} + \dfrac{1}{3\sqrt{5-x}}$;

2) $y = \sqrt{6+7x-3x^2}$;

3) $y = \sqrt{x^2-x-20} + \sqrt{6-x}$;

4) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{3-x}} - 2\sqrt{4x-x^2} + \dfrac{3}{x-1}$;

5) $y = \arcsin(1-2x)$;

6) $y = \sqrt{3x-x^2} + \lg\left(x^2-1\right)$.

3.10. Побудувати графіки заданих функцій:

1) $y = 2x^2 - 6x + 4$;

2) $y = \sqrt{x}$;

3) $y = \sqrt{2-x}$;

4) $y = \dfrac{x-1}{x-2}$;

5) $y = 3 - \dfrac{2}{x-1}$;

6) $y = \log_2(x-1)$;

7) $y = \sin(2x + \dfrac{\pi}{3})$;

8) $y = \operatorname{tg}(x + \dfrac{\pi}{4})$;

9) $y = \begin{cases} -x^2, & x \le 0, \\ 2x, & 0 < x < 1, \\ x, & x \ge 1; \end{cases}$

10) $y = \begin{cases} \sin x, & x \le 0, \\ 0, & 0 < x < 1, \\ \log_2 x, & x \ge 1. \end{cases}$

3.11. Написати перші п’ять членів послідовності:

1) $\{x_n\} = \dfrac{3n+5}{2n-3}$;

2) $\{x_n\} = 1+(-1)^n \dfrac{1}{n}$;

3) $\{x_n\} = \sin \pi n$;

4) $\{x_n\} = (-1)^n \arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$.

3.12. Вказати формулу загального члена послідовності:

1) 1, 4, 9, 16, 25, …;

2) $\dfrac{1}{2}, \ \dfrac{2}{2^2}, \ \dfrac{3}{2^3}, \ \dfrac{4}{2^4}, \ \dfrac{5}{2^5}, \ \ldots$;

3) $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{6}, \ldots.$

3.13. Згідно з означенням границі послідовності довести, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+1}{7n^2-3} = \dfrac{5}{7}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{5n^2-3} = 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{n+1} = 3$.

Обчислити границі:

3.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+1}{2-7n}$.

3.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n}{n^2-1}$.

3.16 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+1}{2^n-1}$.

3.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt[3]{2n^3-1}}$.

3.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$.

3.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

3.20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

Обчислити границі, використовуючи властивості нескінченно малих і нескінченно великих функцій:

3.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x}{tg^2 3x}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to\infty} x\log_{1,7} x$.

3.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{arctgx}{x^2}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\log_{\frac{1}{2}} x\right)$.

3.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\log_{\frac{1}{5}}|x|}$.

Знайти односторонні границі:

3.27. $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{\log_5(3-x)}{3-x}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to 2+0}\left(\dfrac{x^3-8}{4x-8}\right)^{\frac{1}{2-x}}$.

3.29. $\lim\limits_{x\to -0}\left(2^{\frac{3}{x}}+3\right)$.

3.30. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{\log_2 x}+2\arccos x\right)$.

Знайти границі функцій:

3.31. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$.

3.32. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^4-x}$.

3.33. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

3.34. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$.

3.35. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$.

3.36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{8-x}-2}$.

3.37. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+3x+7}$.

3.38. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^4}{x^2+x+2}-4x^2\right)$.

3.39. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

3.40. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}\right)$.

3.41. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)$.

3.42. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x}\right)$.

3.43. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg6x}{\sin 8x}$.

3.44. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{tg^2 6x}$.

3.45. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+\sin 2x}{4x}$.

3.46. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{2x\sin x}$.

3.47. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{\arcsin(x+2)}$.

3.48. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+tg3x}$.

3.49. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

3.50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$.

3.51. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{tg^2 x}$.

3.52. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

3.53. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\arcsin x-2x}{\sin x+2arctgx}$.

3.54. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

3.55. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)^{2x}$.

3.56. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x-1}\right)^{x+1}$.

3.57. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

3.58. $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

3.59. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{2x}}$.

3.60. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

3.61. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln(x+5)-\ln x\right)$.

3.62. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(3-x)-\ln 3}{5x}$.

3.63. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{4x}$.

3.64. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin 2x}$.

3.65. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 3x}-e^{\sin 2x}}{x}$.

3.66. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x^2}-\cos x}{3x^2}$.

Знайти границі, застосовуючи еквівалентність нескінченно малих:

3.67. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 20x}{\mathrm{tg}15x}$.

3.68. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^3 5x}{x^2 tg5x}$.

3.69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$.

3.70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\sin 5x}{e^{2x^2}-1}$.

3.71. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}$.

3.72. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\ln(1+tg4x)}$.

Дослідити на неперервність дані функції, встановити характер точок розриву та побудувати їх графіки:

3.73. $y=\dfrac{1}{3-x}$.

3.74. $y=\dfrac{x^2+x}{2x}$.

3.75. $y=3^{\frac{1}{x-2}}$.

3.76. $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$.

3.77. $y=\begin{cases}x^2-2x, & x\le 1,\\ 2-x, & 1<x<2,\\ 4-x^2, & x\ge 2.\end{cases}$

3.78. $y=\begin{cases}x-3, & x<0,\\ x+1, & 0\le x\le 4,\\ 3+\sqrt{x}, & x>4.\end{cases}$

3.79. Суму у 100 000 грн. вкладено в комерційний банк під прості відсотки за ставкою 15 % річних. Знайти накопичену суму через 4 роки.

3.80. Нехай вклад складає 50 000 грн. Побудувати числову послідовність накопиченої суми за роками, якщо 50 000 грн було вкладено на 5 років під прості відсотки за ставкою 10 %.

3.81. Підприємець кожен рік виготовляв 15 000 світильників. Після реконструкції він планує кожний рік збільшувати випуск на 4 %. Який буде випуск світильників через 3 роки?

3.82. На реконструкцію доріг міста інвестор вклав 15 млн грн за ставкою 20 % на 2 роки. Яку суму він отримає?

3.83. Сільська пекарня за день випікала 500 буханок хліба. Із прибуттям сезонних робітників через 5 днів випуск хліба було доведено до 650 буханок. На який відсоток щодня відбувалось збільшення випуску хліба?

3.84. В яку суму обернеться вклад в 1 гривню, якщо його покласти в банк на 100 років під складні відсотки за ставкою 8 %?

3.85. До банку покладено 5 000 грн під складні відсотки. Через 7 років ця сума обернулася в 7 035,5 грн. Під які відсотки був зроблений вклад?

3.86. Який вклад треба зробити в банк під складні відсотки за ставкою 4 %, щоб через 15 років утворилася сума в 10000 грн?

3.87. Собівартість виробу зменшилася за перше півріччя на 10 %, а за друге – на 20 %. Визначити початкову собівартість виробу, якщо нова собівартість становить 576 грн.



Відповіді

3.9. 1) $\left[\frac{5}{2};\ 5\right)$; 2) $\left[-\frac{2}{3};\ 3\right]$; 3) $(-\infty;\ -4]\cup[5;\ 6]$;
4) $[0;1)\cup(1;\ 3)$; 5) $[0;\ 1]$; 6) $(1;\ 3]$.

3.11. 1) $-8,\ 11,\ \frac{14}{3},\ \frac{17}{5},\ \frac{20}{7},\ \ldots$; 2) $0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots$;
3) 0, 0, 0, 0, 0, …; 4) $\frac{2\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ \frac{13\pi}{3},\ \frac{14\pi}{3},\ldots$

3.12. 1) $\{x_n\}=n^2$; 2) $\{x_n\}=\frac{n}{2^n}$; 3) $\{x_n\}=\frac{(-1)^n}{n+1}$.

3.14. $-\frac{5}{7}$. **3.15.** 0. **3.16.** 1.

3.17. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$. **3.18.** 0. **3.19.** $\frac{1}{2}$.

3.20. 0. **3.21.** ∞. **3.22.** ∞.

3.23. 0. **3.24.** $+\infty$. **3.25.** 0.

3.26. 0. **3.27.** $-\infty$. **3.28.** 0.

3.29. 3. **3.30.** π. **3.31.** ∞.

3.32. $\frac{4}{3}$. **3.33.** $-\frac{1}{2}$. **3.34.** $-\frac{5}{64}$.

3.35. $\frac{3}{2}$. **3.36.** – 12. **3.37.** 3.

3.38. $-\infty$. **3.39.** 2. **3.40.** 0.

3.41. 5. **3.42.** 0. **3.43.** $\frac{3}{4}$.

3.44. $\frac{1}{2}$. **3.45.** 2. **3.46.** –8.

3.47. – 4. **3.48.** $-\frac{1}{4}$. **3.49.** $\frac{3}{4}$.

3.50. 1. **3.51.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **3.52.** $-\frac{3}{2}$.

3.53. $\frac{1}{3}$. **3.54.** –1. **3.55.** e^{-2}.

3.56. $e^{-\frac{3}{2}}$. **3.57.** e^{-1}. **3.58.** e^{-5}.

3.59. $\sqrt{e}$. **3.60.** 1. **3.61.** 5.

3.62. $-\frac{1}{15}$. **3.63.** $\frac{3}{4}$. **3.64.** 2.

3.65. 1. **3.66.** $\frac{7}{6}$. **3.67.** $\frac{4}{3}$.

3.68. 25. **3.69.** $\frac{9}{4}$. **3.70.** 7,5.

3.71. ∞. **3.72.** $\frac{1}{2}$.

3.73. $x=3$, другого роду. **3.74.** $x=0$, усувний.

3.75. $x=2$, другого роду. **3.76.** $x=0$, першого роду.

3.77. $x=1$, першого роду. **3.78.** $x=0$, першого роду.

3.79. 160 000 грн.

3.80. 55 000; 60 000; 65 000; 70 000; 75 000 грн.

3.81. 16 873 шт. **3.82.** 21,6 мл. **3.83.** 5 %.

3.84. 2 200 грн. **3.85.** 5 %.

3.86. 5 553 грн. **3.87.** 800 грн.

Розділ 4. Диференціальне числення функції однієї змінної

Продовжуючи тему функціональної залежності характеристик економічних процесів, ми переходимо до вивчення диференціального числення як одного з основних методів дослідження швидкості змін цих процесів у часі або під впливом чинників зовнішнього середовища та напряму їх протікання.



Після вивчення даної теми ви зможете:

- розуміти зміст похідної в економіці та її застосування при проведенні граничного аналізу;
- знати методи диференціювання функцій;
- вміти застосовувати інструменти диференціального числення до розв'язання реальних економічних задач;
- вміти застосовувати диференціал функції до наближених обчислень величин в економіці;
- вміти знаходити еластичність функцій в економіці та давати інтерпретацію отриманих результатів;
- набути навички застосування похідних при дослідженні функцій та побудові їх графіків;
- виконувати найпростіші розрахунки для оптимізації виробництва та максимізації прибутку підприємства.

Глава 15. Похідна та її властивості, диференціювання функцій

15.1. Означення похідної, загальний порядок відшукання, зв'язок з неперервністю

Основні поняття цього розділу – похідна та диференціал – склалися як результат подальшого розвитку теорії границь у зв'язку з існуванням широкого класу задач із різних галузей знань, розв'язання яких потребувало обчислення границь спеціального виду. Це, наприклад, задачі про обчислення швидкості руху матеріального об'єкта чи протікання хімічної реакції, зростання чисельності населення, собівартості продукції та ін.

Диференціальне числення – це розділ математичного аналізу, в якому визначаються властивості похідної та диференціала функції, а також їх застосування до дослідження функцій.



Датою народження диференціального числення вважається травень 1684 року, коли німецький філософ, математик, юрист і дипломат фон Лейбніц оприлюднив своє дослідження «Новий метод максимумів і мінімумів», у якому виклав основи нового методу.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у проміжку (a,b). Виходячи з деякого значення аргументу $x = x_0$, надамо йому приріст Δx (додатний або від'ємний), такий, що $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. Тоді функція отримує відповідний приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Розглянемо відношення $\Delta y / \Delta x$.

Похідною функції $y = f(x)$ за незалежною змінною x при даному її значенні (або в даній точці) $x = x_0$ називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу довільним чином прямує до нуля, і пишуть:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (15.1)$$

Процес відшукання похідної від даної функції зветься ***диференціюванням***. Якщо функція має похідну у кожній точці x ізінтервала (a,b), то кажуть, що вона ***диференційовна на інтервалі*** (a,b). Звичайно, коли функція має похідну у точці x_0, то $f'(x_0)$ – певне число; якщо ж функція диференційовна наінтервалі, то її похідна, у свою чергу, є деякою функцією від x, тобто $f'(x)$. Поруч із позначенням $f'(x)$ для похідної вживають і інші: y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, а конкретне значення похідної при $x = x_0$ позначають так:

$$y'\big|_{x=x_0}, \quad y'(x_0), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0},$$

де $\big|_{x=x_0}$ – символ ***підстановки***, який означає, що $x = x_0$.

Аналізуючи означення похідної, одержуємо загальний порядок відшукання похідної від функції $y = f(x)$ у деякій точці $x \in (a,b)$:

1) ***надаємо*** аргументові x приріст Δx і ***знаходимо*** відповідний приріст функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

2) ***ділимо*** приріст функції на приріст аргументу, тобто знаходимо відношення приростів

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

3) ***знаходимо*** границю цього відношення, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто знаходимо похідну

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Виконання останнього кроку вимагає врахування структури конкретного відношення, а тому загальних вказівок щодо відшукання його границі немає.



Знайдемо, наприклад, похідну функції $y = \cos x$ для довільної точки $x \in D(f)$. Дотримуючись щойно наведеної схеми, маємо:

1) $\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$;

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$;

3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -1 \cdot \sin x$.

Таким чином, ми отримали $(\cos x)' = -\sin x$.

При відшуканні похідної, як бачимо, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ породжує невизначеність $\frac{0}{0}$, тобто нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, і це не випадковість.

Теорема 15.1 (***про неперервність диференційовної функції***). Якщо функція $f(x)$ диференційовна у точці x_0, то вона неперервна у цій точці.

Доведення. Нехай функція $f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ (нагадаємо, що $f'(x_0)$ є певним числом), тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

За критерієм існування границі «мовою нескінченно малих» маємо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала при $\Delta x \to 0$.

Отже, $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$. Враховуючи арифметичні властивості границь та нескінченно малих, одержуємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Це і означає, що функція $f(x)$ є неперервною у точці $x = x_0$.

Обернене до теореми 15.1 твердження, взагалі кажучи, не є справедливим, тобто із неперервності функції не випливає її диференційовність. У цьому можна переконатись на прикладі функції $y = |x|$ при $x_0 = 0$.

15.2. Інтерпретація похідної в різних галузях знань

15.2.1. Задача про визначення рівняння дотичної та нормалі до графіка функції у точці $A(x_0, y_0)$ (рис. 15.1).

Дотичною до кривої в точці $A(x_0, y_0)$ називається граничне положення січної, яку проведено через точки A і $A_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ при $\Delta x \to 0$.

Позначимо кут нахилу січної до осі Ox через α, а дотичної – через φ.

Запишемо рівняння дотичної до кривої, що визначається функцією $y = f(x)$, у точці $A(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

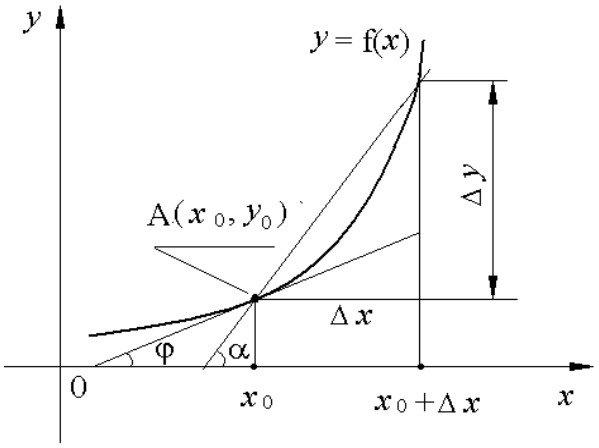


Рис. 15.1

Знаходимо кутовий коефіцієнт дотичної:

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

тобто

$$k = f'(x_0). \qquad (15.2)$$

Наведена задача вважається класичною задачею Лейбніца про знаходження кутового коефіцієнта дотичної в точці.

З цієї задачі випливає ***геометричний зміст*** похідної: похідна функції $y = f(x)$ у деякій точці $x_0 \in (a,b)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $A(x_0, y_0)$. Таким чином, ***рівняння дотичної*** набуває вигляду:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (15.3)$$

З урахуванням властивості кутових коефіцієнтів взаємно перпендикулярних прямих отримаємо ***рівняння нормалі*** (перпендикуляра до дотичної):

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (15.4)$$

15.2.2. Задача про відшукання швидкості прямолінійного руху, якщо відома функція $S = S(t)$, що визначає залежність шляху від часу.

Нехай деяка точка рухається по прямій за законом $S = f(t)$, де t – час, а S – шлях. Якщо на інтервалі $(t,\ t + \Delta t)$ вважати рух точки рівномірним, то швидкість руху визначається як $\upsilon = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. При залежності швидкості руху від часу миттєва швидкість у певній точці визначається як границя цього відношення: $\upsilon(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Звідси випливає, що швидкість руху у довільний момент часу t є похідною від функції, яка виражає залежність шляху від часу:

$$\upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

Ця задача вважається задачею Ньютона про визначення похідної. З неї випливає ***механічне*** тлумачення похідної.

Механічний зміст похідної.

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x – це швидкість зміни функції в даній точці.

Якщо термін «швидкість» розуміти у загальному сенсі, то похідну можна трактувати як швидкість змінювання величини, яку описує функція $y = f(x)$, залежно від зміни x.

15.2.3. Задача про відшукання граничних витрат виробництва. Зупинимося детальніше на економічній інтерпретації похідної. Перш за все, введемо в розгляд деякі економічні поняття. Нехай підприємство виробляє однорідну продукцію. Під ***виробничими витратами*** z розуміють сукупність людських, матеріальних, енергетичних ресурсів тощо, які витрачаються на виготовлення та реалізацію продукції. Якщо ці витрати виражені в грошовій формі, то їх називають ***собівартістю продукції***. Сюди входять: вартість сировини, матеріалів, палива, технічних засобів, загальногосподарчих витрат, заробітна платня тощо. Функцію $z = f(V)$, яка встановлює залежність виробничих витрат z від обсягу виготовленої продукції V, називають ***виробничою функцією.***

Важливим показником ефективності роботи підприємства є ***собівартість одиниці продукції*** S при певному обсязі виробництва V. Нехай обсяг виготовленої продукції V зростає на величину ΔV, тоді витрати змінюються відповідно на величину $\Delta z = f(V + \Delta V) - f(V)$, а середню собівартість одиниці продукції на проміжку $[V, V + \Delta V]$ визначає співвідношення: $S_{сер} = \frac{\Delta z}{\Delta V}$.

Середня собівартість при різних приростах обсягу виробництва ΔV буде, взагалі кажучи, різною. Якщо у співвідношенні $S_{сер} = \frac{\Delta z}{\Delta V}$ перейти до границі:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta V} = z'(V) = S, \qquad (15.5)$$

то одержимо граничні витрати виробництва при даному обсязі виробництва V, і кажуть, що похідна від виробничої функції $z = f(V)$ за обсягом V дає ***граничну собівартість продукції*** S при даному обсязі виробництва V. Це є одна

із ***економічних інтерпретацій*** похідної. Слово «граничний» у даному випадку означає швидкість зміни, що характеризується похідною відповідної функції. Слід підкреслити, що граничні величини характеризують не стан, а швидкість зміни показників економічного процесу залежно від будь-яких факторів.

Так можна визначити граничні економічні показники, якщо функція, що їх характеризує, є диференційовною.

15.3. Таблиця похідних та правила диференціювання

Похідну будь-якої елементарної функції можна знайти, застосувавши загальну схему відшукання похідних. Основні труднощі при цьому полягають у розкритті невизначеностей $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Щоб спростити задачу диференціювання, за загальною схемою встановлюють похідні лише основних елементарних функцій, які наведені в табл. 15.1.

Таблиця 15.1

Таблиця основних похідних

№ п/п	Функція	Похідна	№ п/п	Функція	Похідна
1	$y=c,\ c=const$	$y'=0$	6	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
2	$y=x$	$y'=1$	7	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
3	$y=x^a,\ a\in R$	$y'=ax^{a-1}$	8	$y=\operatorname{tg} x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
	$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$			
	$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	9	$y=\operatorname{ctg} x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
4	$y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$	$y'=a^x\ln a$	10	$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y=e^x$	$y'=e^x$	11	$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5	$y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$	12	$y=\operatorname{arctg} x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$
	$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	13	$y=arc\operatorname{ctg} x$	$y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Розглянемо ***арифметичні властивості*** похідних.

Нехай функції $u=u(x)$, $v=v(x)$ мають похідні у певній точці $x=x_0$. Тоді у тій же точці:

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; (15.6)

2) $(u\cdot v)'=u'v+v'u$, (15.7)

зокрема, $(cu)'=cu', \quad c=const$; (15.8)

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}\ \ \left(v(x)\neq 0\right)$. (15.9)

Доведення проведемо для частки функцій $y=\dfrac{u}{v}$, використовуючи знову ж таки загальну схему відшукання похідних.

Надамо аргументу x приріст Δx, тоді функції u, v та y здобудуть відповідно прирости Δu, Δv та Δy.

Їх нові значення $u+\Delta u$, $v+\Delta v$ та $y+\Delta y$ зв'язані таким самим співвідношенням, а саме: $y+\Delta y=\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$.

Звідси

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)},\quad \text{а}\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{v(v+\Delta v)}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right).$$

Спрямуємо Δx до нуля, тоді згідно з теоремою про неперервність диференційовної функції і $\Delta v\to 0$, а границі при $\Delta x\to 0$ відношень $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ дають відповідно u', v'. Таким чином, вираз $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$ прямує до скінченної границі:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(v+\Delta v)}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

Отже, похідна $y'=\left(\frac{u}{v}\right)'$ існує і визначається формулою (15.9). Аналогічно доводяться співвідношення (15.6) – (15.8). Правило (15.6) поширюється на довільне скінченне число доданків.



Похідну від функції $y=\operatorname{tg} x$ можна знайти за звичайною схемою. Однак знайдемо її як похідну від частки функцій $y=\frac{\sin x}{\cos x}$:

$$y'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже, $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, тобто ми отримали ту саму формулу, що міститься у таблиці похідних основних елементарних функцій (див. табл. 15.1).

15.4. Диференціювання складених функцій і функцій різної форми задання

Відшукання похідних складених функцій $y=f\left(\varphi(x)\right)$, де $y=f(u)$ та $u=\varphi(x)$, займає центральне місце у техніці диференціювання, тобто вмінні знаходити похідну, і тому дуже важливою є наступна теорема.

Теорема 15.2 (*про похідну складеної функції*). Якщо функція $y=f(u)$ при деякому значенні u має похідну $y'_u=f'_u(u)$, а функція $a_2\overline{x^4}+a_1\overline{x^3}+a_0\overline{x^2}=\overline{x^2y}$ $u=\varphi(x)$ диференційовна $\left(u'_x=\varphi'_x(x)\right)$ у точці x, якій відповідає значення u, то похідну складеної функції $y=f\left(\varphi(x)\right)$ можна знайти за формулою:

$$\left(f\left(\varphi(x)\right)\right)_x'=f_u'(u)\cdot\varphi_x'(x)\quad\Leftrightarrow\quad y_x'=y_u'\cdot u_x'. \tag{15.10}$$

Доведення. Припущення про існування похідної y'_u за означенням рівносильне рівності

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u.$$

Звідси, згідно з критерієм існування границі, маємо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha(\Delta u),$$

де $\alpha(\Delta u)$ – нескінченно мала при $\Delta u \to 0$.

Тоді

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ згідно з неперервністю диференційовної функції $u = \varphi(x)$ дістанемо $\Delta u \to 0$, а значить і $\alpha(\Delta u) \to 0$; границя відношення $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ дорівнює u'_x. Таким чином, остання рівність при $\Delta x \to 0$ і дає (15.10).

Згідно з (15.10) одержуємо ***правило*** відшукання похідної від складеної функції. Щоб продиференціювати складену функцію $y = f(\varphi(x))$ за незалежною змінною x, необхідно знайти похідну від функції y за ***проміжним*** аргументом u і помножити її на похідну проміжного аргументу за ***незалежною змінною*** x. Отже, ми отримуємо такий алгоритм:

1) ***знайти похідну зовнішньої*** функції $f(u)$ за аргументом u;

2) ***знайти похідну внутрішньої*** функції $\varphi(x)$ за змінною x;

3) ***записати їхній добуток.***

Основне, крім знання таблиці похідних та правил диференціювання, при знаходженні похідної складеної функції – це вміння визначати зовнішню функцію і проміжний аргумент, тобто внутрішню функцію.



Так, функція $y = \sin^2 x$ є складеною, де зовнішньою є степенева функція $f(u) = u^2$, а внутрішньою – тригонометрична $u = \sin x$, отже,

$$y'_x = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

А от для функції $y = \sin x^2$, де $f(u) = \sin u,\ u = x^2$, маємо:

$$y'_x = \cos x^2 \left(x^2\right)' = 2x\cos x^2.$$

Випадок складеної функції як суперпозиції більше двох функцій вичерпується послідовним застосуванням наведеного правила. Так, для функції $y = f\left(u\left(v\left(x\right)\right)\right)$, що є суперпозицією трьох функцій: $y = f\left(u\right)$, $u = \varphi\left(v\right)$ та $v = \psi\left(x\right)$, маємо

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x .$$



Наприклад, якщо $y = \text{arctg}^4 2x$, то $y = u^4$, $u = arctgv$ та $v = 2x$. Тоді маємо похідну

$$y'_x = 4\,\text{arctg}^3 2x \cdot \left(\text{arctg}\,2x\right)'_x = 4\,\text{arctg}^3 2x \cdot \frac{1}{1+\left(2x\right)^2} \cdot \left(2x\right)' = 4\,\text{arctg}^3 2x \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2 .$$

Отже, $y'_x = \dfrac{8\,\text{arctg}^3 2x}{1+4x^2}$.

Як наслідок зі щойно доведеної теореми випливають твердження про зв'язок похідних прямої та оберненої функцій (1^0), про диференціювання функцій, заданої у неявній (2^0) та параметричній (3^0) формах.

1^0. Похідна оберненої функції. *Нагадаємо*: якщо з рівності $y = f\left(x\right)$ за кожним припустимим значенням величини y можна відновити одне і тільки одне значення величини x, то кажуть, що ця рівність визначає функцію $x = \varphi\left(y\right)$, яка є оберненою до вихідної функції $y = f\left(x\right)$. У свою чергу, $y = f\left(x\right)$ можна розглядати як функцію, обернену до функції $x = \varphi\left(y\right)$, тобто ці функції є взаємно оберненими.

Знайдемо похідну від функції $x = \varphi\left(y\right)$ за змінною y, якщо функція $y = f\left(x\right)$ у точці x має відмінну від нуля похідну. За означенням оберненої функції $x = \varphi\left(y\right)$ її можна розглядати як складену функцію: $x = \varphi\left(f\left(x\right)\right)$.

Візьмемо похідну цієї функції за змінною x: $x'_x = \varphi'_y \cdot f'_x \;\Rightarrow\; 1 = x'_y \cdot y'_x$.

Таким чином,

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad \left(y'_x \neq 0\right). \tag{15.11}$$

 Знайдемо похідну функції $y=\operatorname{arctg} x$, вважаючи, що похідна функції $x=\operatorname{tg} y$ відома. Тоді: $x'_y=\left(\operatorname{tg} y\right)'_y=\dfrac{1}{\cos^2 y}$. За формулою (15.11) знаходимо: $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}=\cos^2 y$. Оскільки $x=\operatorname{tg} y$, перейдемо в останньому виразі від функції $\cos^2 y$ до функції $tg\, y$. Тепер отримуємо:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Остаточно маємо: $\left(\operatorname{arctg} x\right)'_x=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbf{R}$.

2^0. Похідна неявної функції. Нагадаємо, що функцію y від x називають заданою в неявній формі, якщо вона визначається не розв'язаним відносно y рівнянням: $F\left(x,y\right)=0$, де під символом F розуміють вираз, який містить змінні x та y.

Для знаходження похідної від функції y немає потреби розв'язувати рівняння $F\left(x,y\right)=0$ відносно y (це, до речі, не завжди можна зробити), достатньо розглянути тотожність $F(x,y(x))=0$ і, знайшовши похідну лівої частини рівності, як похідну складеної функції, отримати рівняння $(F(x,y(x)))'_x=0$ для відшукання y'_x .

Покажемо це на прикладі.

 Розглянемо рівняння кола радіусом r з центром в $O\left(0,0\right)$: $x^2+y^2=r^2$. Переписавши це рівняння у вигляді $x^2+y^2-r^2=0$, продиференціюємо його за змінною x, одержимо:

$$\left(x^2+y^2-r^2\right)'_x=0 \quad \Rightarrow \quad 2x+2y\cdot y'_x=0.$$

Розв'язавши останнє рівняння відносно y'_x, маємо: $y'_x=-\dfrac{x}{y}$.

Підсумовуючи розглянуте, дістаємо ***правило*** диференціювання неявної функції. Щоб знайти похідну y'_x неявної функції y від x, треба:

1) ***продиференціювати*** за змінною x обидві частини рівності, якою визначається залежність $y(x)$, застосовуючи правило знаходження похідної від складеної функції;

2) ***розв'язати*** одержане рівняння відносно шуканої похідної y'_x.

3^0. Логарифмічне диференціювання. Інколи, щоб спростити задачу диференціювання функції $y=f(x)$, переходять від явного задання функції до неявного. Для цього логарифмують ліву і праву частини рівності $|y|=|f(x)|$, дістаючи $\ln|y|=\ln|f(x)|$. Для спрощення запису модуль можна опускати, бо після взяття похідної від логарифму модуля змінної він (модуль) зникає: $\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}$. Такий підхід до знаходження похідної називають ***логарифмічним диференціюванням.***

Логарифмічне диференціювання застосовують найчастіше до степенево-показникових функцій $y=\left(u(x)\right)^{v(x)}$ або до інших функцій, зручних для логарифмування.

 Наприклад, знайдемо похідну функції $y=(\sin x)^{\cos x}$.

Після логарифмування дістанемо:

$$\ln y=\cos x\cdot\ln\sin x \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{y}\cdot y'_x=-\sin x\cdot\ln\sin x+\cos^2 x\cdot\frac{1}{\sin x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y'_x=y\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\ \left(1+\ln\sin x\right)\right).$$

Остаточно отримуємо $y'_x=(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\left(1+\ln\sin x\right)\right)$.

4^0. Похідна функції, що задана параметрично. Функцію y від x називають заданою ***параметрично,*** якщо вона визначається за допомогою двох функцій від допоміжної змінної (параметра) t:

$$\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t). \end{cases} \tag{15.12}$$

При параметричній формі задання часто роль параметра t відіграє час.

Параметрично задану функцію можна продиференціювати, як і неявну, без подання її в явній формі.

Знайдемо похідну функції y від x, яку подано в параметричній формі

$$\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

за умови, що функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ мають похідні за аргументом t, а функція $x=\varphi(t)$ має обернену: $t=\Phi(x)$.

Виходячи з умови задачі, робимо висновок, що функцію y від x можна розглядати як складену функцію: $y=\psi(\Phi(x))$. Тоді за правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y'_x=\psi'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y'_t}{x'_t},\ \text{оскільки}\ \ t'_x\cdot x'_t=1.$$

Таким чином,

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \qquad (15.13)$$

Нагадаємо, що геометрично функції $y=f(x)$ відповідає деяка лінія, а систему рівнянь (15.12) називають параметричними рівняннями лінії.



Знайдемо тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції, що задана параметрично системою рівнянь:

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$$

де t – кут між радіус-вектором точки, що належить лінії, і додатним напрямом осі Ox $(0\le t\le 2\pi)$. Ця система рівнянь є параметричним завданням еліпса. Справді, виключивши параметр t, маємо:

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t=x/a \\ \sin t=y/b \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Нагадаємо, що тангенсом кута нахилу дотичної до графіка функції є похідна від цієї функції. Отже, для похідної y'_x отримуємо:

$$y'_x = \frac{(b\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t} = -\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$



Ключові терміни

Диференціальне числення; похідна; диференціювання; функція, диференційовна у точці; функція, диференційовна на проміжку; дотична; нормаль; геометричний зміст похідної (механічний, економічний); логарифмічне диференціювання.



Запитання для самоперевірки

1. Що називають похідною функції у даній точці. Який загальний порядок відшукання похідної?
2. Яким терміном називають процес відшукання похідної функції?
3. Чи завжди неперервна у точці функція буде диференційовною?
4. Поясніть, який існує зв’язок між неперервністю функції та її диференційовністю у точці.
5. У яких випадках кажуть, що функція має у точці похідну, не має похідної?
6. У чому полягають геометричний, механічний і економічний зміст похідної?
7. Наведіть таблицю похідних основних елементарних функцій.
8. Назвіть арифметичні властивості похідних (правила диференціювання).
9. Опишіть порядок диференціювання складених функцій.
10. Яким співвідношенням пов’язані похідні взаємно обернених функцій?
11. Які функції називаються неявними і як вони диференціюються?

Глава 16. Похідні вищих порядків. Диференціали функції

16.1. Похідні вищих порядків

Якщо функція $y=f(x)$ має похідну $f'(x)$ на деякій множині X, то цю похідну, взагалі кажучи, також можна розглядати як деяку функцію від x. Похідна від похідної називається ***похідною другого порядку***, або ***другою похідною*** від функції $y=f(x)$. Тобто

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}. \qquad (16.1)$$

Вважаючи, що похідна $f'(x)$ є ***похідною першого порядку***, або ***першою похідною***, називатимемо за означенням другу похідну похідною першого порядку від першої похідної. Друга похідна може позначатися як y'', $f''(x)$ або $\frac{d^2y}{dx^2}$, що читається: «де два ігрек по де ікс двічі».

Похідна першого порядку від другої похідної зветься похідною ***третього порядку*** і позначається через y''', $f'''(x)$ або $\frac{d^3y}{dx^3}$ (читається: «де три ігрек по де ікс тричі»).

Похідною *n*-го порядку (або ***n*-ю похідною**) називають похідну першого порядку від похідної $(n-1)$-го порядку, якщо похідна $(n-1)$-го порядку є диференційовною функцією:

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)',\ n\in\mathbf{N}. \qquad (16.2)$$

Похідну *n*-го порядку позначають $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$ або $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Похідними вищого порядку називають похідні, що мають порядок вище першого. Якщо опановано відшукання першої похідної, то знаходження похідної другого і похідних вищих порядків не вимагає чогось принципово нового. Для того щоб знайти n-ну похідну необхідно послідовно обчислити першу похідну від функції, потім похідну від її першої похідної, потім похідну

від другої похідної, тобто послідовно здійснювати диференціювання попереднього виразу. Відповідно, отримуємо y', y'', …, $y^{(n)}$.

Розглянемо похідні вищих порядків від функції, яка задана параметрично за допомогою двох функцій: $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$. Вважаючи, що функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ двічі диференційовні, зупинимось на відшуканні другої похідної функції $y=f(x)$, а саме $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Для першої похідної функції маємо відому формулу: $y'_x=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, тобто y'_x є складеною функцією аргументу $x=\varphi(t)$. Знайдемо похідну від y'_x за правилом диференціювання складеної функції. Отже, отримуємо:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t\cdot t'_x=\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}.$$



Знайдемо $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$

Спочатку шукаємо $\dfrac{dy}{dx}$, а саме

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=ctg\,\frac{t}{2}.$$

Далі визначаємо похідну другого порядку:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(ctg\,\frac{t}{2}\right)'_t}{a(1-\cos t)}=\frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=$$

$$=-\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Зауважимо, що в деяких випадках можна записати загальний вираз n-ї похідної, який безпосередньо залежить від довільного n.



Наприклад, визначимо похідні n-го порядку від функції:

1) $y=a^x$.

Відповідно $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x (\ln a)^2$, $y''' = a^x (\ln a)^3$, … Тоді отримаємо загальну формулу $y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$, зокрема, $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$;

2) $y = \sin x$.

Тоді: $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, … .

Отже, отримуємо загальну формулу для похідної n-го порядку

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

16.2. Інтерпретація другої похідної в різних галузях знань

Наведемо деякі приклади застосування похідних до розв'язання задач.

16.2.1. Задача про відшукання прискорення прямолінійного руху матеріальної точки. Якщо на інтервалі часу (t, $t + \Delta t$) вважати рух точки рівномірно прискореним, то прискорення визначається як $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Якщо прискорення змінюється у часі, то миттєве прискорення у певній точці визначається як границя цього відношення: $a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Звідси прискорення руху у довільний момент часу t є похідною першого порядку від функції швидкості. Оскільки в свою чергу $v(t) = S'(t)$, то прискорення є похідною другого порядку від функції, яка описує залежність шляху від часу:

$$a = \left(s'_t\right)'_t = s''_{tt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \qquad (16.3)$$

Твердження (16.3) вважається ***механічним*** змістом похідної другого порядку.

16.2.2. Задача про відшукання швидкості зміни економічних показників. Граничний аналіз. Як і похідна першого порядку, що характеризує певні граничні показники виробничих процесів, друга похідна достатньо часто використовується для аналізу змінювання цих показників. Зрозуміло, що друга похідна має певне економічне тлумачення залежно від функції, для якої вона розглядається.

Так, друга похідна від виробничої функції $z = f(V)$ за змінною V є ***швидкістю зміни собівартості*** продукції (зменшення або збільшення) залежно від об'єму виробництва V:

$$T = \left(z'_V\right)'_V = z''_{VV} = \frac{d^2 z}{dV^2}. \tag{16.4}$$

Друга похідна за часом t від обсягу продукції $V = V(t)$ є ***швидкістю зміни продуктивності*** **праці** $p = p(t)$:

$$v_p(t) = p'(t) = V''(t) = \frac{d^2 V}{dt^2}. \tag{16.5}$$

В економіці **похідну від логарифма продуктивності** праці називають ***темпом зміни продуктивності праці,*** тобто

$$T_p(t) = (\ln p(t))' = \frac{1}{p(t)} \cdot p'(t) = \frac{v_p(t)}{p(t)}. \tag{16.6}$$

Ця величина дорівнює відношенню швидкості зміни продуктивності праці до самої продуктивності праці.

16.3. Диференціал функції та його властивості

При введенні поняття похідної першого порядку від функції $y = f(x)$ у деякій точці $x \in D(f)$ оперують приростами аргументу Δx і відповідним йому приростом функції Δy. Якщо похідна існує, то функція $f(x)$ є неперервною у точці x і її приріст можна подати у вигляді:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x), \tag{16.7}$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала при $\Delta x \to 0$.

Якщо у точці x похідна $y' = f'(x)$ скінченна і відмінна від нуля, то обидва доданки у (16.7) є нескінченно малими при $\Delta x \to 0$. Порівняємо нескінченно малий приріст функції Δy з першим доданком формули (16.7). Для цього за виразом (16.7) складемо відношення (ураховуючи, що похідна функції у точці є сталою величиною і $y' \neq 0$) та перейдемо до його границі при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\Delta y}{y'\Delta x}=1+\frac{\alpha(\Delta x)}{y'} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{y'\Delta x}=1+\frac{1}{y'}\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=1+0=1. \quad (16.8)$$

Отже, нескінченно мала, утворена як добуток похідної y' та приросту аргументу Δx, еквівалентна приросту функції Δy, тобто

$$y'\cdot\Delta x \sim \Delta y,\ \Delta x\to 0. \quad (16.9)$$

Це означає, що перший доданок у формулі (16.7) являє собою ***головну частину*** приросту функції Δy, яка лінійно залежить від приросту аргументу Δx, а другий доданок – нескінченно мала більш високого порядку, ніж Δy.

Диференціалом функції $y=f(x)$ у точці x називається головна частина приросту функції Δy, яка є лінійною відносно приросту аргументу Δx, і позначається символом dy або $df(x)$:

$$dy=y'\Delta x \quad \text{або} \quad df(x)=f'(x)\Delta x. \quad (16.10)$$

Зауваження. Формула диференціала залишається правильною й у випадку, коли $f'(x)=0$. Тоді диференціал функції f в точці x дорівнює нулю.

Із означення диференціала випливає, що:

1) диференціал незалежної змінної x дорівнює її приросту,

дійсно, якщо покласти

$$f(x)=x, \text{ то } f'(x)=1, \text{ а } df(x)=dx=\Delta x;$$

2) диференціал функції дорівнює добутку її похідної та диференціала аргументу:

$$dy=f'(x)dx \ \ (dy=y'dx) \ \text{ або } \ df(x)=f'(x)dx; \quad (16.11)$$

3) похідна функції є відношенням диференціала функції до диференціала аргументу: $f'(x)=\frac{dy}{dx}$; отже, символ $\frac{dy}{dx}$, про який раніше вже говорили як про позначення похідної, тепер можна тлумачити як відношення відповідних диференціалів.

Зв’язок між похідною і диференціалом функції з урахуванням геометричного змісту похідної дозволяє надати геометричне тлумачення диференціала функції (рис. 16.1). За рисунком із прямокутного трикутника MQP ($\angle Q = 90^\circ$) маємо:

$$PQ = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x = y'\Delta x = dy.$$

Отже, диференціал функції $y = f(x)$ у точці x є ***приростом ординати дотичної*** до графіка функції у цій точці при переході від неї до точки $x + \Delta x$.

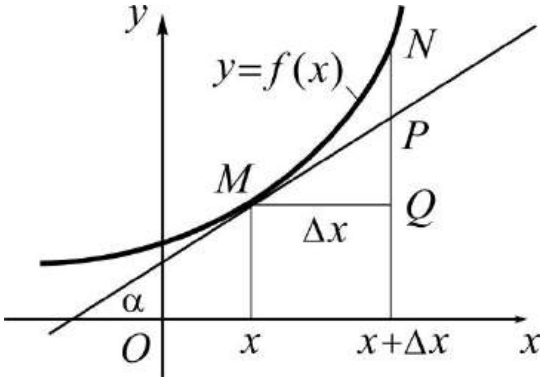


Рис. 16.1

Основні властивості диференціала. Диференціал функції dy відрізняється від похідної $f'(x)$ лише множником dx, тому неважко отримати аналогічні арифметичні властивості диференціала, а саме:

$$\begin{aligned} &dc = 0,\ c - const\,; \\ &d(u\,v) = v\,du + u\,dv\,; \\ &d\left(cu\right) = c\,du\,; \\ &d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}\left(vdu - udv\right). \end{aligned} \qquad (16.12)$$

Правильність кожного із співвідношень (16.12) легко перевірити, помноживши обидві частини рівностей, що описують правила диференціювання, на диференціал аргументу dx, та скориставшись означенням диференціала.

Обчислимо, наприклад, диференціал добутку двох функцій $u = u(x)$ та $v = v(x)$:

$$\left(u\cdot v\right)' = u'v + v'u \Rightarrow \left(u\cdot v\right)' dx = v\left(u'dx\right) + u\left(v'dx\right) \Rightarrow d\left(u\cdot v\right) = vdu + udv\,.$$

Щоб описати словами властивості (16.12), достатньо у твердженнях, сформульованих для похідних, слово «похідна» замінити на слово «диференціал».

Інваріантність (незмінність) **форми першого диференціала**.

Форма (вигляд) першого диференціала функції не залежить від того, чи буде аргумент функції незалежною змінною, чи функцією якоїсь іншої змінної.

Дійсно, якщо x не є незалежною змінною, а лише проміжним аргументом, тобто функцією від незалежної змінної t, а саме $x = \varphi(t)$, то за правилом відшукання похідної складеної функції $y = f\left(\varphi(t)\right)$ отримаємо:

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\cdot\varphi'(t). \qquad (16.13)$$

Звідки $dy = f'(x)\cdot\varphi'(t)\,dt$. Але за означенням диференціала добуток $\varphi'(t)\,dt$ дорівнює dx, тобто: $\varphi'(t)\,dt = dx$.

Таким чином, ми отримали співвідношення: $dy = f'(x)dx$. Отже, й у випадку складеної функції формула визначення диференціала зберігає свій вигляд. Властивість інваріантності диференціала відіграє важливу роль у розділі «інтегральне числення».

16.4. Диференціали вищих порядків

Оскільки приріст аргументу Δx не залежить від значення незалежної змінної x (для будь-якої точки із області визначення функції його можна вибирати довільним чином), то від диференціала функції $dy = f'(x)dx$, який теж можна розглядати як функцію від x, можна утворити диференціал $d\left(dy\right)$.

Диференціалом 2-го порядку, або ***другим диференціалом***, називають диференціал від диференціала функції і позначають символом d^2y:

$$d^2y = d\left(dy\right) = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)'dx.$$

Вважають, що диференціал dy є ***диференціалом першого порядку***.

Зважаючи на загальноприйняту ***домовленість*** писати $dx\cdot dx = dx^2$, ..., $\underbrace{dx\cdot dx\cdot\ldots\cdot dx}_{n} = dx^n$, дістаємо остаточно:

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогічно відшукується третій диференціал і диференціали більш високих порядків.

Диференціалом n-го порядку називають диференціал першого порядку від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n, \quad n = 2, \ 3, \ \ldots. \tag{16.14}$$

За формулою (16.14) отримуємо вираз для похідної будь-якого скінченного порядку через відношення диференціалів n-го порядку: $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

16.5. Застосування диференціала до наближених обчислень

16.5.1. Наближене обчислення значення функції $y = f(x)$ базується на еквівалентності приросту Δy і диференціала dy функції при прямуванні приросту аргументу Δx до нуля, тобто на співвідношенні (16.9), яке можна подати так:

$$\Delta y \sim dy, \text{ якщо } \Delta x \to 0. \tag{16.15}$$

Еквівалентність нескінченно малих Δy і dy означає, що при відносно малому Δx матиме місце наближена рівність:

$$\Delta y \approx dy, \tag{16.16}$$

за якою отримуємо формулу для відповідних розрахунків:

$$\Delta y \approx dy \ \Rightarrow \ f(x+\Delta x) - f(x) \approx dy \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy \ \Rightarrow \ f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{16.17}$$

Правило, за яким можна наближено обчислити значення функції, сформулюємо таким чином. Для того щоб за заданим значенням функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ знайти її наближене значення у точці $x_0 + \Delta x$, треба ***обчислити*** диференціал $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ і скористатися формулою (16.17).

Для оцінки точності наближеного обчислення використовуються такі характеристики, як абсолютна та відносна похибки.

Абсолютна похибка обчислюється за формулою:

$$\Delta = |\Delta y - dy|. \tag{16.18}$$

Вона вимірюється у тих же одиницях, що і функція, для якої вона обчислюється.

Відносна похибка обчислюється за формулою:

$$\delta = \left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| \tag{16.19}$$

і виражається, як правило, у відсотках.

Обґрунтуванням доцільності використання диференціала до наближених обчислень є те, що, як правило, структура приросту функції є значно складнішою, ніж диференціала. Точність наближених обчислень залежить не тільки від величини приросту аргументу (чим меншим є Δx, тим вище точність обчислень), а й від поведінки функції в околі точки x_0 (чим меншими є коливання значень функції поблизу точки x_0, тим точнішими є обчислення).



Обчислимо диференціал та приріст функції $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ при переході від $x = 2$ до $x = 2{,}02$ і порівняємо їх.

Ясно, що приріст аргументу становить: $\Delta x = dx = 0{,}02$.

Знаходимо похідну: $y' = 3x^2 - 4x + 3$, і обчислюємо її значення у точці $x = 2$: $y'|_{x=2} = 7$. Далі у точці $x = 2$ за формулою (16.11) визначаємо диференціал: $dy|_{x=2} = y'|_{x=2} \cdot dx = 0{,}14$.

Тепер підраховуємо приріст функції:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Big((x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 4\Big) -$$

$$-\left(x^3 - 2x^2 + 3x - 4\right) \Rightarrow \Delta y\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0{,}02}} = 0{,}141608.$$

Отже, абсолютна похибка обчислення складає $\Delta = |\Delta y - dy| = 0{,}001608$.

16.5.2. Наближене обчислення приросту функцій, які характеризують економічні процеси. Розглянемо наближене обчислення приросту виробничої функції $z = f(V)$, оскільки саме її приріст у відсотках є одним із важливих показників виробництва. Ця величина позначається $\frac{\Delta z}{z} 100\,\%$ (при $\Delta V = 0{,}01\,V$).

За допомогою тотожних перетворень одержуємо:

$$\frac{\Delta z}{z}100\,\% = \frac{\Delta z}{z}\cdot\frac{\Delta V}{\Delta V}100\,\% = \frac{\Delta z}{z}\cdot\frac{0,01V}{\Delta V}100\,\% = \frac{\Delta z}{\Delta V}\cdot\frac{V}{z}\%.$$

Покладаючи $\Delta z \approx dz$, отримаємо наближене значення приросту виробничої функції

$$\frac{\Delta z}{z}100\,\% = \frac{\Delta z}{\Delta V}\cdot\frac{V}{z}\% \;\approx\; \frac{dz}{dV}\cdot\frac{V}{z}\%.$$

Величина $\frac{dz}{dV}\cdot\frac{V}{z}\%$, яка дорівнює наближеному значенню (у відсотках) приросту виробничої функції при прирості обсягу виробництва на 1%, називається ***еластичністю функції*** $z = f(V)$ за змінною V і позначається символом $E_V(z)$:

$$E_V(z) = \frac{dz}{dV}\cdot\frac{V}{z}\%. \qquad (16.20)$$

Якщо виробнича функція має вигляд степеневої функції $z = aV^{\alpha}$, де $a, \alpha - const$, то еластичність z за V чисельно дорівнює α. Тобто при збільшенні V на 1% величина z зміниться на $\alpha\,\%$.

Поняття ***еластичності*** функції поширюється на довільну (а не тільки на виробничу) функцію:

$$y = f(x):\;\; E_x(y) = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y} = \frac{dy/dx}{y/x} = \frac{y'}{y}\cdot x. \qquad (16.21)$$

Отже, еластичність функції наближено показує, на скільки відсотків змінюється функція $y = f(x)$ при зміні аргументу x на 1 %, а саме:

1) якщо $|E_x(y)| > 1$, то функція $y = f(x)$ еластична;

2) якщо $|E_x(y)| < 1$, то функція нееластична;

3) якщо $|E_x(y)| = 1$, то функція $y = f(x)$ нейтральна.



Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. грн) і обсягом випуску продукції x (млн грн) виражається формулою

$$y = -0,4x + 60.$$

Знайдемо еластичність собівартості при обсязі випуску $x = 70$ млн грн:

$$E_x(y) = \frac{-0.4x}{-0.4x + 60} = \frac{x}{x - 150} = -0,875 \quad \text{при } x = 70 \text{ млн грн.}$$

Оскільки $E_x(y) = -0{,}875$, то при обсязі випуску продукції, що становить 70 млн грн, збільшення його на 1 % призведе до зниження собівартості продукції на 0,875 %. Отже, функцію слід вважати нееластичною.



Ключові терміни

Похідна 2-го порядку; похідна n-го порядку; головна частина приросту функції; диференціал функції; властивості диференціалу; диференціали вищих порядків; наближене обчислення значень функції; абсолютна похибка; відносна похибка; еластичність функції.



Запитання для самоперевірки

1. Що розуміють під похідними 2, 3, ..., n-го порядків?

2. Запишіть похідну n-го порядку для функцій $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

3. У чому полягає механічний і економічний зміст другої похідної?

4. Що таке диференціал функції у даній точці?

5. У чому полягає геометричний зміст диференціала?

6. Які властивості диференціала аналогічні властивостям похідних?

7. Чи залежить форма (вигляд) диференціала функції $y = f(x)$ від того, є аргумент x незалежною чи залежною змінною?

8. Що розуміють під диференціалами 2, 3, ..., n-го порядків?

9. Яким співвідношенням пов'язані приріст і диференціал функції при малих значеннях приросту аргументу?

10. Опишіть, як за допомогою диференціала функції обчислюється наближене значення функції в окремій точці.

11. Як характеризується похибка при наближеному обчисленні значення функції за її диференціалом?

12. Опишіть, як за допомогою диференціала виробничої функції наближено обчислюється її приріст у відсотках.

13. Що таке еластичність виробничої функції? Чому дорівнює еластичність виробничої функції $z = aV^{\alpha}$, де $a, \alpha - const$?

14. Яку величину називають еластичністю функції $y = f(x)$?

15. Які властивості функції характеризує її еластичність?

Глава 17. Застосування похідних до дослідження функцій

17.1. Теореми диференціального числення

Для дослідження функцій фундаментальне значення мають деякі теореми, які є теоретичною базою багатьох прикладних задач.

Розглянемо три основні теореми.

Теорема 17.1 ***(теорема Ферма*)**.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в інтервалі $(a;b)$ і в деякій точці $c\in(a;b)$ набуває найбільшого чи найменшого значення. Якщо у цій точці існує скінченна похідна $f'(c)$, то вона дорівнює нулю.

Доведення. Нехай для визначеності в точці $x=c$ функція досягає найбільшого значення. Це означає, що для довільних значень $x\in(a;b)$ виконується умова $f(x)\le f(c)$. Надамо аргументу x у точці $x=c$ приросту Δx. Тоді функція одержить приріст

$$\Delta y=f(c+\Delta x)-f(c),\quad \text{де}\ \ c+\Delta x\in(a;\ b).$$

Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}.$$

Чисельник цього дробу $\Delta y\le 0$, оскільки за умовою $f(c+\Delta x)\le f(c)$. Отже, якщо $\Delta x<0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$, а якщо $\Delta x>0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$. За умовою теореми існує похідна в точці c, тому існує границя:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c),$$

яка не залежить від того, яким чином Δx прямує до нуля (зліва або справа). Однак, обчисливши границю при $\Delta x\to +0$, дістанемо $f'(c)\le 0$, якщо ж $\Delta x\to -0$, одержимо $f'(c)\ge 0$. Звідси випливає, що $f'(c)=0$.

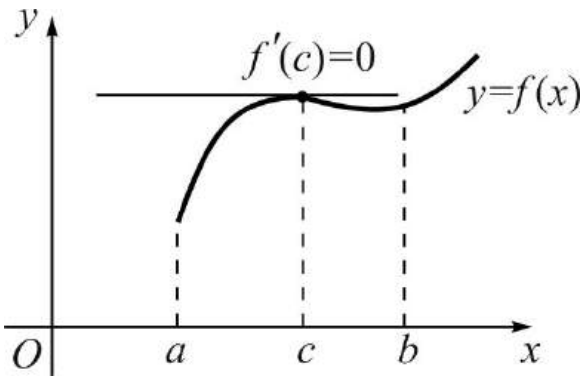


Рис. 17.1

Геометричний зміст теореми Ферма наведено на рис. 17.1. Так, за теоремою $f'(c)=0$, а це означає, що дотична в точці $M(c;f(c))$ паралельна осі Ox.

У випадку, коли функція $f(x)$ досягає в точці $x=c$ найменшого значення, теорема доводиться аналогічно.

Теорема 17.2 (***теорема Ролля***). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$; має скінченну похідну в інтервалі $(a;b)$, а на кінцях відрізка набуває однакових значень, тобто $f(a)=f(b)$, то в інтервалі $(a;b)$ знайдеться принаймні одна точка c, в якій $f'(c)=0$.

Доведення. Неперервна на відрізку функція досягає на цьому відрізку найбільшого значення M та найменшого значення m.

Розглянемо два випадки.

1. Нехай $M=m$. Тоді з умови $m\le f(x)\le M$ дістанемо, що $f(x)=m$ для довільного $x\in[a;b]$, тобто $f(x)=\text{const}$ на відрізку $[a;b]$. Отже, $f'(x)=0$ на цьому сегменті й у якості точки c можна брати довільну точку інтервалу $(a;b)$.

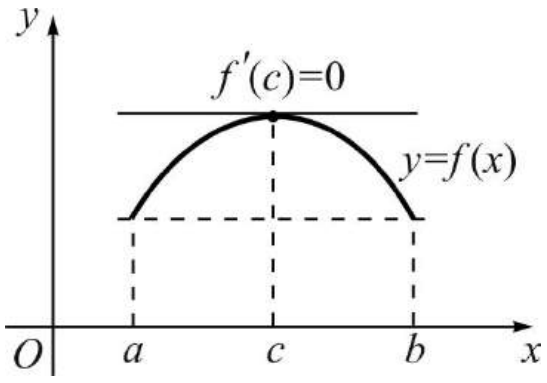


Рис. 17.2

2. Якщо $M>m$, тоді принаймні одне із значень M або m функція набуває у внутрішній точці відрізка $[a;b]$. Отже, за теоремою Ферма у цій точці $f'(c)=0$ (рис. 17.2).

Отже, теорему доведено.

Теорема 17.3 ***(теорема Лагранжа***). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і має скінченну похідну на інтервалі $(a;b)$, то знайдеться принаймні одна точка $x=c$, $a<c<b$, у якій виконується рівність

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \tag{17.1}$$

або

$$f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(c).$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \tag{17.2}$$

Для функції $F(x)$ виконуються умови теореми Ролля. Справді, ця функція неперервна на $[a,b]$ як сума неперервних функцій; у кожній точці інтервалу $(a;b)$ має скінченну похідну;, тому на інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка $x=c$, в якій $F'(c)=0$. Тому

$$0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \Rightarrow \qquad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа наведена на рис. 17.3.

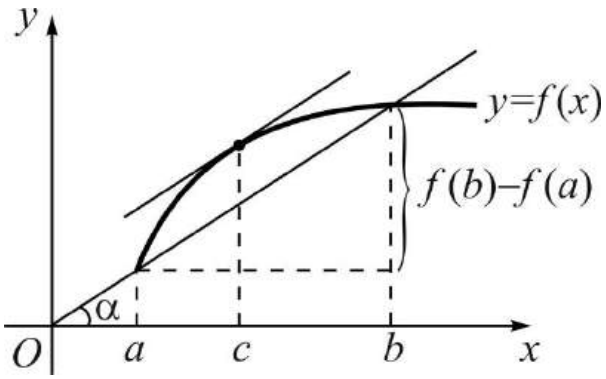


Рис. 17.3

Так, на кривій $y=f(x)$ завжди знайдеться принаймні одна точка, дотична в якій буде паралельною хорді, яка з'єднує кінці дуги графіка функції на проміжку $[a;b]$.

Наслідок. Приріст функції $f(x)$ в точці $x_0\in[a;b]$ дорівнює приростові аргумента, помноженому на похідну цієї функції в деякій точці c, що знаходиться між x_0 та $(x_0+\Delta x)$

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\cdot\Delta x.$$

Справді, якщо в теоремі Лагранжа вважати, що $a = x_0$, а $b = x_0 + \Delta x$, то точка $c \in [x_0; x_0 + \Delta x]$. Введемо параметр $\theta(0 < \theta < 1)$, тоді будь-яку внутрішню точку c відрізка $[x_0; x_0 + \Delta x]$ можна подати у вигляді $c = x_0 + \theta\Delta x$. Звідси:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x. \qquad (17.3)$$

Таким чином, приріст функції Δy виражається «точною» формулою через приріст аргумента Δx і похідну в деякій точці відрізка $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

Формулу (17.3) називають ***формулою скінченних приростів***.

17.2. Обчислення границь функцій (правило Лопіталя)



Нагадаємо, що предметом диференціального числення є встановлення властивостей функцій за допомогою методу границь. Цікаво те, що, в свою чергу, похідні дають змогу розв'язувати загальну задачу відшукання границі функції. Основою розкриття невизначеностей є правило, що назване ім'ям французького математика де Гійома Франсуа Лопіталя.

Теорема 17.4 (***правило Лопіталя***). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні на інтервалі (a,b). Якщо на цьому інтервалі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ і $g'(x) \neq 0$ або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ і $g'(x) \neq 0$ та, якщо існує скінченна або нескінченна границя відношення похідних $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ також існує і виконується рівність:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (17.4)$$

Доведення. Розглянемо окремий випадок теореми Лопіталя, вважаючи, що при $x \to x_0$ маємо невизначеність виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Отже, припустимо, що функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці x_0, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ та $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = 0$. У цьому разі можна записати:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}.$$

Використовуючи теорему Лагранжа для функцій $f(x)$ та $g(x)$ на відрізку $[x,x_0]$, отримаємо:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(c_1)(x-x_0)}{g'(c_2)(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)},$$

де $x<c_1<x_0,\quad x<c_2<x_0$. Внаслідок неперервності похідних $f'(x)$ та $g'(x)$ маємо $f'(c_1)\to f'(x_0),\quad g'(c_2)\to g'(x_0)$ при $x\to x_0$.

Використовуючи теорему про границю частки двох функцій, отримаємо рівність

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорему доведено.

Правило Лопіталя використовується також у випадку, коли $x\to\infty$.

За правилом Лопіталя розкриваються невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, а інші невизначеності $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^∞), (0^0), (∞^0) до них зводяться. Наведемо тотожні перетворення виразів, які дозволяють здійснити це зведення:

1) $(0\cdot\infty)\Rightarrow y=f\cdot g\Rightarrow y=\dfrac{f}{1/g}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ або $y=\dfrac{g}{1/f}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$; (17.5)

2) $(\infty-\infty)\Rightarrow y=f-g\Rightarrow y=\dfrac{1/g-1/f}{(1/g)\cdot(1/f)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$; (17.6)

3) $(1^\infty,0^0,\infty^0)\Rightarrow y=f^g\Rightarrow \ln y=g\ln f=(0\cdot\infty)$. (17.7)

У співвідношенні (17.7) $\ln y$ дає невизначеність уже розглянутого виду $(0\cdot\infty)$. Отже, якщо вдається знайти $\lim\limits_{x\to x_0}\ln y=k$, то $\lim\limits_{x\to x_0}y=e^k$, оскільки $\lim\limits_{x\to x_0}\ln y=\ln\left(\lim\limits_{x\to x_0}y\right)$.

Зауваження:

1) правило Лопіталя залишається в силі і за умови, що x_0 є одним із символів $\infty,+\infty,-\infty$;

2) якщо виявиться, що $f'(x)$ і $g'(x)$ нескінченно малі при $x \to x_0$, то можна повторно застосовувати правило Лопіталя; іноді – кілька разів;

3) якщо скінченна чи нескінченна границя відношення похідних функцій $f = f(x)$ та $g = g(x)$ не існує, це не означає, що не існує і границя відношення самих функцій.

Наведемо кілька прикладів на застосування правила Лопіталя.

 Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$.

При $x \to 0$ маємо невизначеність $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, отже, за правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Застосовуємо правило Лопіталя вдруге:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Зауважимо, що зазвичай на практиці розв'язання прикладів подається у вигляді ланцюжка рівностей, як показано далі на прикладі:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^3} = 0.$$

 Розглянемо приклад, коли границя відношення похідних не існує. Знайдемо границю за правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \cos x}{1}.$$

Остання границя не існує, але це не значить, що не існує і границя відношення функцій, бо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Цей приклад – застереження від неправильного висновку, який можна зробити у випадку, коли дріб $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to x_0$ не має ні скінченної, ні нескінченної границі.

 Знайдемо ще одну границю

$$\lim_{x\to 0} x^x = \left(0^0\right).$$

Покладаючи $y = x^x$, знаходимо $\ln y = x \ln x$. Цей вираз при $x \to 0$ породжує невизначеність $(0 \cdot \infty)$:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1.$$

17.3. Дослідження функцій на монотонність

Розглянемо застосування похідної для аналізу поведінки функції та побудови її графіка. З цією метою зупинимось на деяких теоремах, які мають основне значення для дослідження функції.

Теорема 17.5 (***необхідна умова монотонності***). Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на проміжку (a,b) і зростає $(x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1))$, то її похідна на цьому проміжку $f'(x) \geq 0$. Якщо функція є спадною на проміжку (a,b) $(x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1))$, то її похідна на цьому проміжку $f'(x) \leq 0$. Якщо функція є сталою на проміжку (a,b), то у кожній його точці похідна $f'(x) = 0$.

Доведення. Припустимо, що функція $y = f(x)$ на проміжку (a,b) зростає, тобто для $x_2 > x_1$ маємо $f(x_2) > f(x_1)$. Нехай $x_1 = x$, тоді $x_2 = x + \Delta x$, а також $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. За означенням похідної:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Оскільки за умовою теореми $\Delta y > 0$, якщо $\Delta x > 0$ і $\Delta y < 0$, якщо $\Delta x < 0$, то відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, отже, його границя $f'(x) \geq 0$.

Для спадної функції теорема доводиться аналогічно.

Якщо $f(x) = const$, то $f'(x) \equiv 0$, оскільки $\Delta y = 0$.

Теорема 17.6 (***достатня умова монотонності***). Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на проміжку (a,b). Тоді, якщо похідна $f'(x) > 0$ у кожній точці проміжку, то функція на проміжку зростає, а якщо $f'(x) < 0$, то функція спадає на цьому проміжку.

Доведення. Нехай $f'(x) < 0$. Доведемо, що функція є спадною. Для цього візьмемо будь-які дві точки x_2 і x_1, що належать проміжку (a,b), і застосуємо теорему Лагранжа до функції $f(x)$ на проміжку $[x_1, x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1; x_2).$$

Нехай $x_2 > x_1$, тоді $f(x_2) - f(x_1) < 0$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$, отже, функція спадає. Достатня умова зростання функції доводиться аналогічно. Теорему доведено.

Точки, які відокремлюють інтервали зростання та спадання функції, назвемо ***межами інтервалів монотонності***. Одержимо умови наявності меж монотонності, як висновки з теорем 17.5 і 17.6.

Висновок 1. Якщо точка x_0 є межею монотонності функції $y = f(x)$, то $f'(x) = 0$ або не існує. Справді, якщо точка x_0 відокремлює інтервал зростання функції від інтервалу її спадання, то, проходячи через цю точку, похідна або змінює знак, і тому $f'(x) = 0$, або ж похідна не існує в точці x_0.

Висновок 2. Точка $x = x_0$ є межею монотонності, якщо похідна функції при переході через цю точку змінює знак.

Точки, у яких похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю або не існує, називають ***критичними точками*** функції $f(x)$. Інколи критичні точки, у яких $f'(x) = 0$, називають ***стаціонарними точками*** функції $f(x)$.

На підставі розглянутого вище наведемо загальний порядок дослідження функції на монотонність:

1) ***знаходимо*** область існування функції $D(f)$;

2) ***знаходимо*** критичні точки (за першою похідною);

3) ***установлюємо*** знак похідної у кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають область існування;

4) ***робимо*** відповідний висновок.



Розглянемо декілька прикладів відшукання інтервалів монотонності функцій.

1. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Функція не визначена при $x=\pm 1$. Тобто область визначення функції складається з трьох інтервалів $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ та $(1;+\infty)$.

Знаходимо критичні точки функції

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-2x\cdot x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2},$$

$f'(x)=0$ у точках $x=0;\ x=\pm\sqrt{3}$. При $x=\pm 1$ функція, тобто і похідна не існують. Таким чином, область визначення функції розбивається на шість інтервалів, у яких похідна має постійний знак (рис. 17.4).

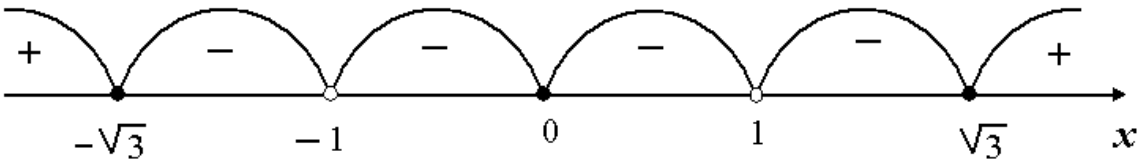


Рис. 17.4

Щоб встановити знак похідної на кожному інтервалі, досить встановити знак похідної в будь-якій точці кожного із них. Як видно, критична точка $x=0$ не є межею монотонності, бо для неї не виконується достатня умова. Отже, дана функція зростає на інтервалах: $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ і $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$; спадає на інтервалах: $\left(-\sqrt{3};-1\right)$, $(-1;1)$ і $\left(1;\sqrt{3}\right)$ (рис. 17.4).

2. $y=\ln\left(x^2+2x-3\right)$.

Область визначення функції: $x^2+2x-3>0$, тобто $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. Знайдемо похідну та критичні точки:

$$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x-3};\ \ f'(x)=0\Rightarrow 2x+2=0\Rightarrow\ x=-1.$$

Але точка $x=-1$ не належить області визначення функції. Отже, критичних точок функція на області існування не має. Визначимо знак похідної на інтервалах $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. На інтервалі $(-\infty;-3)$ похідна $f'(x)<0$, і функція спадає, а на інтервалі $(1;+\infty)$ похідна $f'(x)>0$, і функція зростає (рис. 17.5).

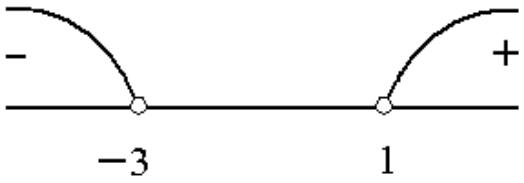


Рис. 17.5

17.4. Екстремум функції. Необхідна та достатні умови екстремуму

Нехай функція $y=f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі (a,b). Точка $x_0\in(a;b)$ називається точкою ***максимуму* (*мінімуму*)** функції $f(x)$, якщо існує такий її окіл $(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$, що для всіх x із цього околу виконується відповідна нерівність

$$f(x)\le f(x_0)\ \ (f(x)\ge f(x_0)).\qquad (17.8)$$

Якщо покласти $x-x_0=\Delta x$, то співвідношення (17.8) можна записати відповідно у вигляді:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0\ \ (f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\ge 0)$$

або

$$\Delta y\le 0\ (\Delta y\ge 0)\ \text{при}\ \ x\in(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon).\qquad (17.9)$$

Отже, іншими словами, x_0 – ***точка максимуму*** (***мінімуму***), якщо приріст функції у цій точці при переході від x_0 до $x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ є від'ємним (додатним). Точки максимуму $(x_{\max})$ і мінімуму $(x_{\min})$ називають ***точками екстремуму функції***, а відповідні їм значення функції – ***екстремумами функції*** (***максимумами*** $f_{\max}$ та ***мінімумами*** $f_{\min}$).

Теорема 17.7 ***(необхідна умова екстремуму)***. Якщо функція $f(x)$ в точці $x_0 \in (a,b)$ досягає екстремуму і в цій точці існує скінченна похідна, то $f'(x_0) = 0.$

Доведення. За умовою теореми функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум або мінімум, тобто в околі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ досягає найбільшого (найменшого) значення, а за теоремою Ферма, якщо в цій точці функція $f(x)$ має скінченну похідну, то $f'(x) = 0.$ Теорему доведено.

Зауважимо, що функція може не досягати екстремуму, навіть якщо необхідна умова виконується. Це значить, що точка x_0 є тільки критичною.

Теорема 17.8 (*перша достатня умова екстремуму*). Нехай точка x_0 є критичною точкою для неперервної функції $f(x)$ і у деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, існує скінченна похідна. Якщо похідна функції $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак, то x_0 – точка екстремуму функції $f(x)$. Якщо ж при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знак, то x_0 не є точкою екстремуму функції $f(x)$.

Доведення. Розглянемо два можливі випадки:

1. Нехай $f'(x) > 0$, якщо $x < x_0$ і $f'(x) < 0$, якщо $x > x_0$, тоді зліва від точки x_0 функція зростає, а справа – спадає. Отже, у точці x_0 функція має максимум (рис. 17.6a).

2. Нехай $f'(x) < 0$, якщо $x < x_0$ і $f'(x) > 0$, якщо $x > x_0$, тоді зліва від точки x_0 функція спадає, а справа – зростає. Отже, у точці x_0 функція має мінімум (рис. 17.6b).

Нехай тепер при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знак. Наприклад, нехай $f'(x) > 0$, як зліва від точки x_0, так і справа від неї. Тоді функція весь час зростає. Тому як завгодно близько до точки x_0 зліва знайдуться точки x, в яких значення функції менші за значення функції в точці

x_0, а справа знайдуться точки x, в яких значення функції більші за значення функції в точці x_0. Отже, у точці x_0 ніякого екстремуму немає. Доведення для випадку від'ємної похідної аналогічне.

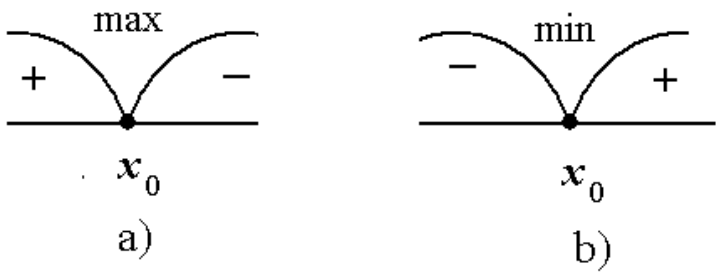


Рис. 17.6

Таким чином, для відшукання екстремуму функції треба:

1) ***знайти*** область визначення функції;

2) ***знайти*** критичні точки ($f'(x)=0$, $f'(x)=\infty$, або не існує);

3) ***дослідити*** на екстремум кожну критичну точку.

Зауваження. Означення точки максимуму (мінімуму) вимагає існування такого її околу, що приріст функції у ній при переході до будь-якої точки саме цього околу має один і той же знак. Тому:

1) розглянуті екстремуми називають ще ***локальними***, бо може бути таке, що значення локального максимуму функції в одній точці менше за значення локального мінімуму функції в іншій точці;

2) екстремуми можливі тільки у внутрішніх точках відрізка $[a,b]$, тобто на інтервалі (a,b); саме для таких проміжків і доводились відповідні теореми.

 Дослідимо на екстремум деякі функції.

1. $y=(x+2)^2(x-1)^3$.

Функція визначена на інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Знайдемо похідну і критичні точки:

$$y'=2(x+2)(x-1)^3+3(x-1)^2(x+2)^2=(x-1)^2(x+2)(5x+4).$$

Отже, критичні точки: $x_1=-2; x_2=-\frac{4}{5}; x_3=1$. Дослідимо знак похідної в околі кожної із цих точок (рис. 17.7). На кожному проміжку вибираємо

довільну точку: $f'(-3)=176>0;\ \ f'(-1)=-4<0;\ \ f'(0)=8>0;\ \ f'(2)=56>0.$ Отже, робимо висновки: точка $x_1=-2$ є точкою максимуму, $f_{\max}(-2)=0;$ точка $x_2=-\frac{4}{5}$ є точкою мінімуму, $f_{\min}\left(-\frac{4}{5}\right)\approx -8,4;$ у точці $x_3=1$ функція екстремуму не має.

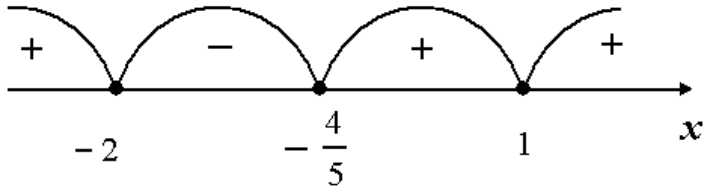


Рис. 17.7

2. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}.$

При дослідженні цієї функції на монотонність (рис. 17.4) було доведено, що точки $x=\pm\sqrt{3},\ x=\pm 1,\ x=0$ є критичними точками для неї. При цьому похідна змінює знак тільки проходячи через точки $x=\pm\sqrt{3}$. Отже, функція має екстремум тільки в цих точках, а саме $f_{\max}\left(-\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}/2,$ $f_{\min}\left(\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}/2$. Підкреслимо, що знайдені мінімум і максимум функції – локальні.

Теорема 17.9 (***друга достатня умова екстремуму***). Нехай точка x_0 є критичною точкою функції $f(x)$, тобто $f'(x_0)=0$, а друга похідна $f''(x_0)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і $f''(x_0)\neq 0,$ тоді:

а) якщо $f''(x_0)>0,$ то в точці x_0 функція має локальний мінімум;

б) якщо $f''(x_0)<0,$ то функція в точці x_0 має локальний максимум.

Доведення.

1. Нехай $f''(x_0)>0,$ тоді $f'(x)$ в деякому околі точки x_0 є зростаючою функцією, тобто при $x<x_0$ маємо $f'(x)<0,$ а при $x>x_0$ маємо $f'(x)>0.$ Отже, у точці $x=x_0$ функція має мінімум (за першою достатньою умовою екстремуму).

2. Нехай $f''(x_0)<0,$ тоді $f'(x)$ в деякому околі точки x_0 є спадною функцією, тобто при $x<x_0$ маємо $f'(x)>0,$ а при $x>x_0$ маємо $f'(x)<0.$

Отже, у точці $x = x_0$ функція має максимум (за першою достатньою умовою екстремуму).

Зауважимо, що у випадку $f''(x_0) = 0$ другу достатню умову екстремуму використовувати не можна і дослідження треба проводити за першою.



Щоб продемонструвати використання другої достатньої умови екстремуму, скористаємось прикладом, розглянутим вище.

$$y = (x+2)^2(x-1)^3;\ y' = (x-1)^2(x+2)(5x+4);$$
$$y'' = 2(x-1)(10x^2+16x+1).$$

Отже, у точці $x = -2$ маємо $y'' < 0$, тому функція має максимум; у точці $x = -\frac{4}{5}$ маємо $y'' > 0$, тому функція має мінімум; у точці $x = 1$ маємо $y'' = 0$, отже, за другим правилом провести дослідження на екстремум не можна.

Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і існує таке значення $x_0 \in [a,b]$, що для $\forall x \in [a,b]$ виконується умова $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$, тоді число $f(x_0)$ називають найбільшим (найменшим) значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Відповідні значення функції позначають:

$$\sup_{[a;b]} f(x_0) = M \text{ (найбільше значення } f(x)),$$
$$\inf_{[a;b]} f(x_0) = m \text{ (найменше значення } f(x)).$$

Для знаходження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку $[a,b]$ потрібно виконати такі дії:

1) ***знайти*** похідну $f'(x)$ і всі критичні точки, які належать відрізку $[a,b]$. Тобто точки, у яких $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0) = \infty$, або $f'(x)$ не існує;

2) ***обчислити*** значення функції $f(x)$ у критичних точках і на кінцях відрізка $[a,b]$;

3) ***порівняти*** одержані числа і вибрати серед них найбільше та найменше.

 Знайдемо найбільше та найменше значення функції $y=(x+2)^2(x-1)^3$ на проміжку $[-1;2]$.

Спочатку знайдемо критичні точки цієї функції:

$$y'=(x-1)^2(x+2)(5x+4)\Rightarrow\ y'=0 \text{ при } x_1=-2;\ x_2=-\frac{4}{5};\ x_3=1.$$

Одержуємо значення функції у критичних точках, що належать відрізку $[-1;2]$, тобто у точках $x_2=-\frac{4}{5}$ і $x_3=1$, а також на кінцях проміжку, а саме при $x=-1$ і $x=2$: $f(-1)=-8;\ f\left(-\frac{4}{5}\right)\approx -8,4;\ f(1)=0;\ f(2)=16.$

Таким чином, порівнявши одержані значення, будемо мати:

$$M=\sup_{[-1;2]} f(2)=16 \text{ – найбільше значення функції;}$$

$$m=\inf_{[-1;2]} f\left(-\frac{4}{5}\right)\approx -8,4 \text{ – найменше значення функції.}$$

Зазначимо, що за допомогою наведених вище методів відшукання максимальних та мінімальних значень функції можна розв'язувати задачі з геометрії, механіки, економіки та інших наук. Розглянемо одну з таких задач.

 На сторінці книги друкований текст повинен займати площу S см.^{2} Поля зверху і знизу мають бути по a см, а справа і зліва – по b см. Знайти найекономніші розміри аркуша.

Позначимо через F площу аркуша, а через x, y – розміри аркуша; тоді його площа $F=x\cdot y$.

Найекономніші розміри аркуша повинні забезпечити мінімальну його площу. Враховуючи умову задачі, маємо:

$$S=(x-2b)(y-2a)\ \Rightarrow\ y=\frac{S}{x-2b}+2a.$$

Знайдемо площу сторінки як функцію змінної x, де $x>2b$ за змістом задачі, і дослідимо одержану функцію на екстремум за допомогою похідної, розв'язавши рівняння $F'(x)=0$. Дістанемо:

$$F = x\left(\frac{s}{x-2b}+2a\right),\ F' = 2a - \frac{2bs}{(x-2b)^2} = 0 \ \Rightarrow\ x = \sqrt{\frac{bs}{a}} + 2b.$$

Тепер знаходимо другу похідну та її знак у критичній точці. Оскільки друга похідна

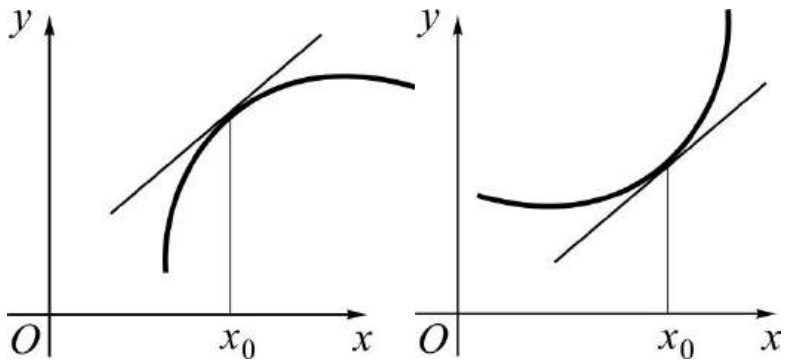
$$F'' = \frac{4bs}{(x-2b)^3} > 0,$$

то за теоремою 17.9 маємо в одержаній точці мінімум. Отже, розміри аркуша, що забезпечують його найекономніше використання, такі:

$$x = \sqrt{bs/a} + 2b,\ y = \sqrt{as/b} + 2a.$$

17.5. Опуклість, угнутість та точки перегину кривої

Функція $y = f(x)$ називається ***опуклою (угнутою)*** в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки крива, яка є графіком функції, лежить нижче (вище) дотичної до кривої у цій точці (рис. 17.8: а) крива опукла; б) угнута).



а) б)

Рис. 17.8

Крива називається ***опуклою*** (***угнутою***) на проміжку (a,b), якщо вона опукла (угнута) в усіх точках цього проміжку.

Теорема 17.10 (*необхідна та достатня умова опуклості (угнутості)*).

Нехай функція $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ неперервна і двічі диференційовна, причому $f''(x) \neq 0$ на цьому інтервалі. Для того щоб крива

$y = f(x)$ була опуклою чи угнутою на інтервалі, необхідно і достатньо, щоб друга похідна функції $f''(x)$ зберігала знак: якщо $f''(x) < 0$ у всіх точках інтервала, то крива опукла, якщо $f''(x) > 0$ у всіх точках інтервала, то крива угнута.

Доведення.

На інтервалі (a,b) візьмемо довільну точку x_0. Запишемо рівняння дотичної до графіка функції в точці $(x_0, f(x_0))$: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Оскільки на кривій виконується рівність $y = f(x)$, то потрібно оцінити різницю між виразами $f(x)$ та $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Для цього двічі перетворимо їхню різницю за теоремою Лагранжа. Отже,

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$= (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0) = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0).$$

За теоремою Лагранжа точка c знаходиться між x_0 і x, а точка c_1 – між x_0 і c, тому добуток $(c - x_0)(x - x_0)$ додатний, незалежно від порядку, у якому розміщені точки x_0, x та c на числовій прямій. Отже, знак $f''(x)$ збігається зі знаком виразу $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, а тому з нерівності $f''(x) < 0$ випливає, що $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (опуклість графіка), а з нерівності $f''(x) > 0$ випливає, що $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (угнутість графіка). Саме це й потрібно було довести.

Точки, у яких функція визначена і які відокремлюють інтервали опуклості та угнутості кривої, називаються ***межами*** відповідних інтервалів, або точками ***перегину*** кривої.

Теорема 17.11 (***необхідні умови точок перегину***). Проміжки опуклості та угнутості кривої відокремлюються точками, у яких похідна $f''(x) = 0$ або не існує.

Доведення виконаємо для випадку, коли друга похідна $f''(x)$ неперервна.

Справді, якщо точка $x = x_0 \in (a;b)$ є межею інтервалів опуклості та угнутості $(a;x_0)$, $(x_0;b)$, то $f''(x_0) = 0$, бо перехід від "додатності" до "від'ємності" та навпаки для неперервної функції здійснюється через нуль.

Точки, у яких друга похідна функції $f''(x)=0$ або не існує, називають ***критичними точками*** другого роду.

Теорема 17.12 (***достатні умови точок перегину***). Якщо при переході через критичну точку другого роду x_0 з області існування функції друга похідна змінює знак, то ця точка є точкою перегину функції $f(x)$.

Доведення випливає з теореми 17.10 і означення точок перегину.

Отже, на основі теорем 17.10 – 17.12 для дослідження функції на опуклість (угнутість) треба виконати такі дії:

1) ***знайти*** область визначення функції $f(x)$;

2) ***знайти*** похідну $f''(x)$ і критичні точки другого роду;

3) ***встановити*** знак другої похідної в кожному із інтервалів, на які критичні точки розбивають область визначення функції;

4) ***зробити*** відповідні висновки.



Дослідимо на опуклість (угнутість) функцію:

$$y=\frac{x^3}{x^2-1}.$$

Область існування функції: $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$. Знаходимо $f'(x)$ та $f''(x)$:

$$f'(x)=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2};\ f''(x)=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3};$$

$f''(x)=0$ при $x=0$; $f''(x)$ не існує при $x=\pm1$.

Таким чином, функція має три критичні точки другого роду: $x_1=-1$; $x_2=0$; $x_3=1$. Цими точками область існування функції розбивається на інтервали:

$$(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1,+\infty).$$

Встановлюємо знак другої похідної на кожному інтервалі.

Отже, на проміжках $(-\infty;-1)$ та $(0;1)$ графік функції опуклий; на проміжках $(-1;0)$ та $(1;+\infty)$– угнутий. Усі критичні точки, у яких функція

визначена, є точками перегину функції. Такою є тільки одна із трьох точок – точка $x_2 = 0$ (рис. 17.9).

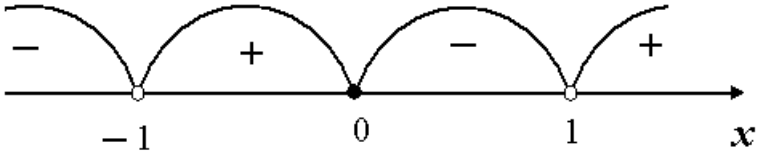


Рис. 17.9

17.6. Асимптоти кривої. Загальна схема дослідження функції та побудова графіка

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називається пряма, відстань до якої від точки кривої прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки по кривій від початку координат.

Можливі три типи асимптот (рис. 17.10):

1) ***вертикальна*** асимптота має рівняння $x = a$;

2) ***похила*** асимптота має рівняння $y = kx + b$;

3) ***горизонтальна*** асимптота має рівняння $y = b$ (частковий випадок похилої асимптоти при $k = 0$).

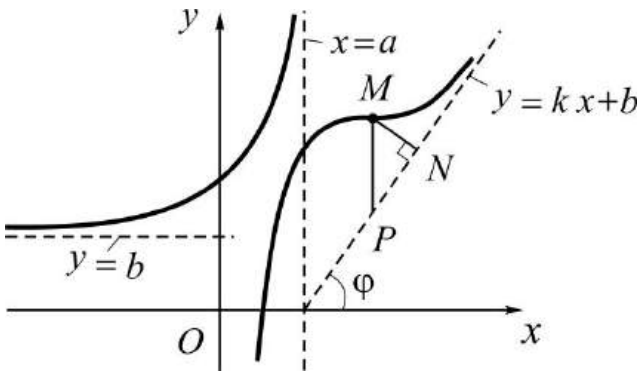


Рис. 17.10

Із означення асимптот випливає, що вертикальні асимптоти визначаються точками $x = a$, для яких $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Такими точками, як правило, є точки розриву другого роду (точки нескінченних розривів); вони легко

встановлюються при відшуканні області існування функції, при цьому обчислюють $f(a-0)$ і $f(a+0)$.

Параметри k і b у рівнянні похилої асимптоти $y = kx+b$ знаходять із умови (див. рис. 17.10): $MP = \left|f(x)-(kx+b)\right| \to 0$ коли $x \to \infty$, яка тягне за собою умову $MN = MP\cos\varphi \to 0$, де MP – модуль різниці ординат точок кривої та асимптоти при деякому x; MN – відстань від точки кривої до асимптоти. Отже, за таких обставин $f(x)-(kx+b)=\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to \infty$, тоді:

$$\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}=\frac{\alpha(x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k=0 \Rightarrow k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0 \Rightarrow b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Отже, параметри k і b у рівнянні похилої асимптоти $y=kx+b$ знаходяться обчисленням границь

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}; \quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right). \qquad (17.10)$$

Оскільки пряма може бути асимптотою при прямуванні x до нескінченності в одному напрямі ($x \to +\infty$ або $x \to -\infty$), то границі для визначення k та b знаходять і при $x \to +\infty$, і при $x \to -\infty$; при $k=0$ отримаємо горизонтальну асимптоту: $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Якщо хоч одна із границь (для k або b) не існує або нескінченна, то крива похилих (горизонтальних) асимптот не має.



Знайдемо асимптоти графіка функції:

1. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Для відшукання вертикальних асимптот розглянемо точки, в яких хоча б одна з границь функції нескінченна. Отже,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty; \quad \lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty;\quad \lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty.$$

Таким чином, прямі $x=-1$ і $x=1$ – вертикальні асимптоти.

Рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$ одержимо, якщо обчислимо границі:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0.$$

Рівняння похилої асимптоти графіка функції: $y=x$.

2. $y=x\cdot e^x$.

Вертикальних асимптот функція не має $(x\in R)$. Похилі асимптоти визначимо, розглядаючи два випадки:

а) $x\to+\infty$; $k=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$, тому асимптоти графік функції не має;

б) $x\to-\infty$; $k=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$; $b=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$.

Отже, при $x\to-\infty$ крива має горизонтальну асимптоту $y=0$.

За результатами дослідження функції згідно з пунктами 17.3 – 17.6, з урахуванням деяких інших відомостей про неї, можна схематично побудувати графік функції.

Для зображення графіка функції рекомендується ***загальна схема***, згідно з якою треба виконати такі дії:

1) ***знайти*** область визначення функції;

2) ***перевірити*** функцію на парність, непарність, періодичність;

3) ***дослідити*** функцію на монотонність та екстремуми;

4) ***встановити*** інтервали опуклості, угнутості та точки перегину;

5) ***визначити*** асимптоти графіка функції;

6) ***знайти*** точки перетину графіка функції з осями координат (не обов'язково).



Побудувати графік функції $y=\frac{x^3}{x^2-1}$.

У пунктах 17.4 – 17.6 ця функція була досліджена на екстремум, опуклість (угнутість) та наявність асимптот. Отже, схематично зображений графік має наступний вигляд (рис. 17.11).

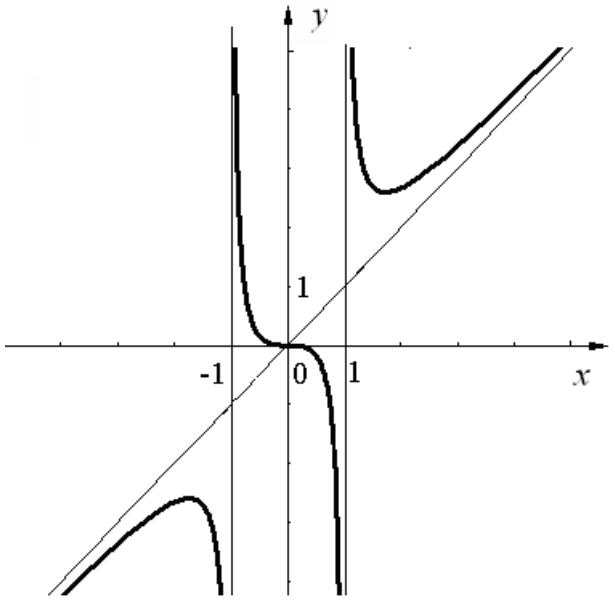


Рис. 17.11



Дослідити функцію $y=\operatorname{arctg} x-x$ та побудувати її графік.

1. Область визначення функції: $x\in R$.

2. Функція непарна $f(-x)=-f(x)$ (графік симетричний відносно початку координат).

3. Знайдемо критичні точки за першою похідною і визначимо інтервали монотонності та екстремуми:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{-x^2}{1+x^2};$$

$f'(x)=0$ при $x=0$; $f'(x)<0$ $\forall x\in R$, тому функція всюди спадає і екстремуму не має.

4. Установимо інтервали опуклості (угнутості):

$$f''(x)=-\frac{2\,x}{(1+x^2)^2},$$

$f''(x)=0$ при $x=0$. Отже, на інтервалі $(-\infty;0)$ крива угнута $(f''(x)>0)$; на інтервалі $(0;+\infty)$ крива опукла $(f''(x)<0)$.

5. Вертикальних асимптот крива не має $(x\in R)$.

Похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-1\right)=0-1=-1,\ b=\lim_{x\to\pm\infty}(\operatorname{arctg}x-x+x)=\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}x=\pm\frac{\pi}{2}.$$

Отже, крива має похилу асимптоту $y=-x+\frac{\pi}{2}$ при $x\to+\infty$ і похилу асимптоту $y=-x-\frac{\pi}{2}$ при $x\to-\infty$.

6. Графік перетинає осі координат у точці $(0,0)$.

Результати дослідження відображені на рис. 17.12.

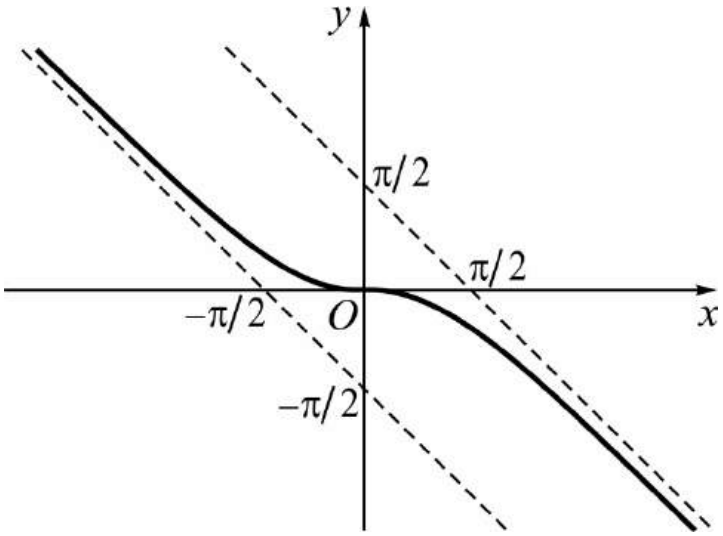


Рис. 17.12

17.7. Застосування похідної в економічній теорії

Розглянемо економічну інтерпретацію теореми Ферма.

Один із базових законів теорії виробництва звучить так: ***оптимальний для виробника рівень випуску товару визначається рівністю граничних витрат і граничного доходу.***

Тобто рівень випуску x_0 є оптимальним для виробника, якщо $MC(x_0)=MR(x_0)$, де MC – граничні витрати, а MR – граничний дохід.

Позначимо функцію прибутку $Z(x)$. Тоді $Z(x) = TR(x) - TC(x)$, де $TR(x)$ – дохід від виробництва x одиниць продукції, а $TC(x)$ – відповідні витрати. Очевидно, що оптимальним рівнем виробництва є такий, при якому прибуток максимальний, тобто таке значення випуску x_0, при якому функція $Z(x)$ має екстремум (максимум). За теоремою Ферма в цій точці $Z'(x) = 0$. Але $Z'(x) = TR'(x) - TC'(x)$, тому $TR'(x_0) = TC'(x_0)$, тобто $MC(x_0) = MR(x_0)$.

Друге важливе поняття теорії виробництва – це рівень найбільш економічного виробництва, при якому середні витрати на виробництво товару мінімальні. Відповідний економічний закон говорить: ***рівень найбільш економічного виробництва визначається рівністю середніх та граничних витрат.***

Отримаємо цю умову як наслідок теореми Ферма. Середні витрати $AC(x)$ визначаються як $\frac{TC(x)}{x}$, тобто витрати на виробництво товару, поділені на вироблену його кількість. Мінімум цієї величини досягається в критичній точці функції $y = AC(x)$, тобто при умові $AC'(x) = \frac{TC' \cdot x - TC}{x^2} = 0$, звідки $TC' \cdot x - TC = 0$ або $TC' = \frac{TC}{x}$, тобто $MC(x) = AC(x)$.

Поняття опуклості функції також знаходить свою інтерпретацію в економічній теорії.

Один з найбільш відомих економічних законів – ***закон спадної дохідності*** – звучить таким чином: зі збільшенням виробництва додаткова продукція, отримана на кожну нову одиницю ресурсу (трудового, технологічного і т. д.), з деякого моменту спадає.

Іншими словами, величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, де Δx - приріст ресурсу, а Δy – приріст випуску продукції, зменшується при збільшенні x. Таким чином, закон спадної дохідності формулюється так: функція $y = f(x)$, що виражає залежність випуску продукції від вкладеного ресурсу, є функцією опуклою.

Іншим базисним поняттям економічної теорії є функція корисності $U = U(x)$, де x – товар, а U – корисність. Ця величина дуже суб'єктивна для кожного окремого споживача, але досить об'єктивна для суспільства у цілому. ***Закон спадної корисності*** звучить так: із зростанням кількості товару додаткова корисність від кожної нової його одиниці з деякого моменту спадає. Очевидно, що цей закон можна подати так: ***функція корисності є функцією,***

опуклою. У такій постановці закон спадної граничної корисності є початковим пунктом для математичного дослідження теорії попиту та пропозиції.

 Підприємство виробляє x одиниць продукції за ціною $P(x) = 50 - \frac{1}{10}x$, а витрати виробництва задаються функцією

$$TC(x) = \frac{1}{50}x^2 + 14x + 800.$$

Знайти оптимальний для підприємства обсяг випуску продукції та відповідний йому максимальний випуск.

Нехай $TR(x)$ – валовий дохід, $Z(x)$ – прибуток від реалізації x одиниць продукції за ціною $P(x)$. Тоді

$$TR(x) = x \cdot P(x);$$

$$Z(x) = TR(x) - TC(x),$$

де $P(x)$, $TC(x)$ – задані функції.

Для розв'язання задачі слід дослідити функцію $Z(x)$ на екстремум. При цьому прибуток буде максимальним для такого обсягу x випуску продукції, для якого $Z'(x) = 0,\ Z''(x) < 0.$

Проведемо це дослідження.

1. Формуємо $Z(x)$, знаходимо $Z'(x)$ і, розв'язавши рівняння $Z'(x) = 0,$ знаходимо критичну точку. Врахуємо, що

$$TR(x) = 50x - \frac{1}{10}x^2, \quad TC(x) = \frac{1}{50}x^2 + 14x + 800;$$

$$Z(x) = TR(x) - TC(x);$$

$$Z'(x) = TR'(x) - TC'(x) = 0; \quad TR'(x) = TC'(x);$$

$$50 - \frac{1}{5}x = \frac{1}{25}x + 14; \quad \frac{6}{25}x = 36; \quad x = 150 \text{ – критична точка.}$$

2. Знаходимо $Z''(x)$ і визначаємо її знак при x = 150:

$$Z''(x) = TR''(x) - TC''(x) = -\frac{1}{5} - \frac{1}{25} = -\frac{6}{25} < 0.$$

Отже, x = 150 – точка максимуму функції $Z(x)$, тобто оптимальний обсяг виробництва складає 150 одиниць продукції.

3. Знаходимо максимальний прибуток виробництва, тобто $Z_{\max} = Z(150)$.

При x = 150 ціна $P = 50 - \frac{1}{10} \cdot 150 = 35;$ валовий дохід $TR = 35 \cdot 150 = 5250.$

Витрати виробництва

$$TC = \frac{1}{50} \cdot 150^2 + 14 \cdot 150 + 800 = \ 450 + 2100 + 800 = 3350;$$

максимальний прибуток від продажу $Z_{\max} = 5250 - 3350 = 1900.$



Ключові терміни

Правило Лопіталя; інтервали монотонності функції; критичні точки; стаціонарні точки; точки мінімуму та максимуму функції; локальний екстремум; найбільше та найменше значення функції на відрізку; інтервали опуклості та угнутості функції; критичні точки функції за другою похідною; асимптоти графіка функції.



Запитання для самоперевірки

1. Наведіть три основні теореми диференціального числення і надайте їх геометричну інтерпретацію.

2. Які види невизначеностей при обчисленні границь функцій можна розкрити за правилом Лопіталя?

3. Які функції називаються монотонними: зростаючими, спадними?

4. У чому полягають необхідна та достатня умови монотонності функцій, сталості функції на деякому проміжку?

5. Які точки називаються точками екстремуму функції?

6. Що таке локальний екстремум функції?

7. У чому полягають необхідна та достатня умови екстремуму (максимуму і мінімуму) функції за першою похідною?

8. Наведіть загальний порядок дослідження функцій на екстремум.

9. Які точки називаються точками перегину графіка функції?

10. Які функції називаються опуклими (угнутими) у даній точці, на заданому інтервалі?

11. У чому полягають необхідна та достатня умови опуклості (угнутості) функції?

12. Наведіть схему дослідження функцій на опуклість (угнутість).

13. У чому полягають необхідна nf достатня умови наявності точок перегину функції?

14. Що таке асимптота графіка функції?

15. Які існують типи асимптот графіка функції?

16. Наведіть загальну схему дослідження функцій засобами диференціального числення.



Приклади та вправи за розділом 4

Приклади застосування диференціального числення до розв'язання задач економіки.

4.1. Функція випуску має вигляд:

$$y = 15 + 12x - x^2.$$

Знайти граничну продуктивність ресурсу (швидкість зміни випуску), якщо витрати ресурсу складають 2 ум. од.

Розв'язання. Швидкість зміни випуску знайдемо за похідною:

$$y' = 12 - 2x \quad \Rightarrow \quad y'(2) = 12 - 2 \cdot 2 = 8.$$

Отже, якщо витрати складають 2 ум. од., то швидкість зміни випуску складає 8 ум. од.

4.2. Обсяг продукції, що вироблена бригадою робітників протягом однієї робочої зміни, визначається рівнянням:

$$y = -\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 + 50x, \quad 0 \le x \le 8,$$

де x – робочий час (у годинах). Знайти продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) через годину після початку роботи; б) за годину до її закінчення.

Розв'язання. Продуктивність праці в будь-який момент часу – це похідна від обсягу продукції, отже:

$$P(x) = y' = -2x^2 + 12x + 50.$$

Швидкість – це похідна від продуктивності праці, тобто похідна другого порядку від обсягу продукції:

$$P'(x) = y'' = -4x + 12.$$

Темп зміни продуктивності праці є похідна від логарифма продуктивності або відношення швидкості до продуктивності:

$$\mathrm{T}(x) = (\ln P(x))',$$

$$\mathrm{T}(x) = \left(\ln\left(-2x^2 + 12x + 50\right)\right)' = \frac{1}{-2x^2 + 12x + 50} \cdot (-4x + 12).$$

При $x = 1$ маємо:

$P(1) = 60$; $P'(1) = 8$; $\mathrm{T}(1) = 0{,}13$.

$P(7) = 36$; $P'(7) = -16$; $\mathrm{T}(7) = -0{,}44$.

Отже, продуктивність праці наприкінці робочого дня зменшується.

4.3. Обчислити еластичність функції витрат y від обсягу продукції x, якщо відомо, що ця функція має вигляд:

$$y = 200x - 2x^3,$$

а також визначити середні і граничні витрати за обсягом продукції, який становить 5 одиниць.

Розв'язання. Для обчислення еластичності функції застосовуємо формулу:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Знаходимо y':

$$y' = 200 - 6x^2.$$

Тоді

$$E_x(y) = \frac{x}{200x - 2x^3} \cdot \left(200 - 6x^2\right) = \frac{100 - 3x^2}{100 - x^2}.$$

$$E_5(y) = \frac{100 - 3 \cdot 5^2}{100 - 5^2} = 0{,}33\,\%.$$

Отже, у разі випуску продукції 5 одиниць збільшення його на 1 % призведе до збільшення витрат на 0,33 %.

Функція середніх витрат визначається як відношення функції витрат y до обсягу продукції x:

$$S(x)=\frac{y}{x}=200-2x^2.$$

Якщо обсяг продукції становить 5 одиниць, то

$$S(5)=200-2\cdot 5^2=150.$$

Для знаходження граничних витрат знаходимо похідну від функції витрат:

$$y'=200-6x^2$$

і обчислюємо її при $x=5$, одержуємо $y'(5)=50$.

Отже, у разі випуску 5 одиниць продукції середні та граничні витрати складають відповідно 150 од. і 50 од.

4.4. Дослідним шляхом було встановлено функцію попиту

$$q=\frac{p+8}{p+3}$$

та функцію пропозиції $S=0{,}5p+1$, де p – ціна товару, q і S – кількість товару, що купується і пропонується відповідно в одиницю часу. Знайти: 1) рівновагову ціну; 2) еластичності попиту і пропозиції для цієї ціни.

Розв'язання.

1. Рівновагова ціна визначається за умови

$q=S$, а саме:

$$\frac{p+8}{p+3}=0{,}5p+1,$$

або $$p^2+3p-10=0,$$

звідки $$p_1=2 \ (p_2=-5 \text{ – не підходить}).$$

Отже, ціна рівноваги дорівнює 2 (гр. од.).

2. Знайдемо еластичності попиту та пропозиції за формулою $E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'$:

$$E_p(q)=\frac{p(p+3)}{p+8}\cdot\frac{p+3-p-8}{(p+3)^2}=\frac{-5p}{(p+8)(p+3)};$$

$$E_p(S)=\frac{p}{0{,}5p+1}\cdot 0{,}5=\frac{p}{p+2}.$$

Якщо ціна рівноваги $p=2$, то

$$E_2(q)=-0,2; \qquad E_2(S)=0,5.$$

Отже, попит і пропозиція даного товару при ціні рівноваги $p=2$ нееластичні відносно ціни, бо значення еластичності за абсолютною величиною менші за одиницю. Це означає, що зміна ціни не призведе до різкої зміни попиту і пропозиції, а саме: якщо ціна p збільшиться на 1 %, попит зменшиться на 0,2 %, а пропозиція збільшиться на 0,5 %.

4.5. Підприємство виготовляє x одиниць продукції щотижня і реалізує її за ціною

$$S=15-\frac{x}{20}.$$

Сумарні витрати виробництва складають

$$C=\frac{1}{10}x^2+3x+100.$$

При якому обсязі виробництва прибуток підприємства буде найбільшим?

Розв'язання. Прибуток

$$Z=Sx-C,$$

$$Z=\left(15-\frac{1}{20}x\right)x-\frac{1}{10}x^2-3x-100=-\frac{3}{20}x^2+12x-100.$$

Досліджуємо цю функцію на екстремум. Знаходимо її похідну:

$$Z'=-\frac{3}{10}x+12.$$

Далі $Z'=0\Rightarrow\ -\frac{3}{10}x+12=0\Rightarrow\ x=40.$

Отже, прибуток підприємства буде максимальним, бо $Z''=-\frac{3}{10}<0$, при обсязі виробництва $x=40$ одиниць і складатиме $Z(40)=140$ (гр. од.).

4.6. Нехай функція витрат має вигляд:

$$y=x+2\ln(x+2).$$

Обчислити граничні витрати виробництва, якщо випуск виробництва складає $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. При яких значеннях x функція витрат зростає (спадає) повільніше (швидше)?

Розв'язання. Для обчислення граничних витрат знаходимо похідну від функції витрат:

$$y' = 1 + \frac{2}{x+2}$$

і обчислюємо її у відповідних точках: $y'(4) = \frac{4}{3}$ та $y'(8) = \frac{6}{5}$.

Отже, якщо обсяг виробництва зростає, граничні витрати спадають.

Область визначення функції: $x \in (-2, \infty)$. Враховуючи, що x – обсяг виробництва, маємо: $x \in (0, \infty)$. На цьому інтервалі $y' > 0$.

Знайдемо похідну другого порядку:

$$y'' = -\frac{2}{(x+2)^2} < 0 \qquad \forall x \in (0, \infty).$$

Отже, функція витрат зростає повільніше, бо $y' > 0$, а $y'' < 0$ для $x \in (0, \infty)$.

4.7. Фірма планує випускати пластикові вікна. Дослідним шляхом установлена залежність попиту q від ціни p за вікно: $q = 2500 - 100p$, де q – кількість вікон. Витрати фірми на випуск q вікон складають

$$C = 100 + 13q + 0{,}002q^2.$$

Визначити максимальний прибуток.

Розв'язання. Валовий прибуток дорівнює $p \cdot q$. Прибуток від реалізації q вікон

$$Z = p \cdot q - C.$$

З рівняння $q = 2500 - 100p$ отримуємо $p = 25 - 0{,}01q$.

Тоді

$$Z = (25 - 0{,}01q)q - 100 - 13q - 0{,}002q^2,$$

або

$$Z = -0{,}012q^2 + 12q - 100.$$

Знаходимо похідні

$$Z' = -0,024q + 12, \quad Z'' = -0,024.$$

За необхідною умовою екстремуму:

$$-0,024q + 12 = 0,$$

звідки $q = 500$ і $Z'' < 0$, тобто при $q = 500$ функція досягає максимуму.

Обчислюємо: $Z(500) = -0,012 \cdot 500^2 + 12 \cdot 500 - 100 = 2900$.

4.8. Функція попиту на товар має вигляд:

$$q = -p^2 + 5p + 50,$$

де p – ціна на товар. Знайти граничний попит. За якою ціною попит:

1) буде найбільшим; 2) зникне? Знайти темп зміни попиту.

Розв'язання. Граничний попит – це похідна від функції попиту, а саме:

$$q' = -2p + 5.$$

1. За необхідною умовою екстремуму маємо:

$$-2p + 5 = 0,$$

звідки $p = 2,5$.

Отже, за ціною $p = 2,5$ попит буде найбільшим $(q'' = -2 < 0)$ і дорівнюватиме:

$$q(2,5) = -(2,5)^2 + 5 \cdot 2,5 + 50 = 56,25.$$

2. Попит дорівнює 0, якщо

$$-p^2 + 5p + 50 = 0,$$

звідки $p_1 = 10$, $p_2 = -5$ (не підходить, бо p – ціна товару).

Темп зміни попиту знаходимо за похідною другого порядку від функції попиту, а саме:

$$q'' = -2.$$

Якщо ціна зростає до 2,5, то попит теж зростає і становиться максимальним, а саме 56,25 при ціні 2,5.

Далі при зростанні ціни від 2,5 до 10 попит спадає і зникає, якщо ціна $p \geq 10$.

Якщо $p \in (0; 2{,}5)$, то зростання попиту повільніше $(q' > 0, q'' < 0)$. Якщо $p \in (2{,}5; 10)$ попит спадає повільніше $(q' < 0, q'' < 0)$.

Отже, граничний попит $q' = -2p + 5$. Максимальний попит $q_{\max} = 56{,}25$ досягається за ціною товару $p = 2{,}5$. Попит зникає, якщо ціна $p \geq 10$.

4.9. Залежність витрат виробництва від обсягу продукції задана функцією

$$y = -0{,}025x^3 + 18750x + 115.$$

При якому обсязі продукції витрати виробництва почнуть спадати?

Розв'язання. Знайдемо похідну:

$$y' = -0{,}075x^2 + 18750.$$

Витрати спадають, коли

$$-0{,}075x^2 + 18750 < 0, \quad \text{або} \quad x^2 > 250000,$$

звідки

$$x < -500 \quad \text{або} \quad x > 500.$$

Враховуючи, що $x > 0$, залишається:

$$x > 500.$$

Отже, витрати почнуть спадати, якщо обсяг виробництва $x > 500$.

4.10. Нехай функція $C = 8q - \dfrac{q^2}{10}$ встановлює залежність витрат фірми від кількості виготовленої продукції, а $q = 40 - 2p$ – залежність попиту від ціни. Знайти максимальний обсяг виробництва. Порівняти оптимальну ціну з граничними витратами.

Розв'язання. Прибуток фірми складає:

$$Z = pq - C,$$

де p – ціна одиниці продукції; q – кількість виготовленої продукції;

C – відповідні витрати.

З рівняння $q = 40 - 2p$ отримуємо, що $p = 20 - 0{,}5q$.

Тоді $$Z = (20 - 0{,}5q)q - 8q + \frac{q^2}{10},$$

або

$$Z = -0{,}4q^2 + 12q.$$

Отже, треба дослідити цю функцію на екстремум.

За необхідною умовою екстремуму: $Z' = 0$. Знайдемо: $Z' = -0{,}8q + 12$.

Тоді $-0{,}8q + 12 = 0$, звідки $q = 15$ – це максимальний обсяг виробництва, оскільки $Q'' = -0{,}8 < 0$.

Відповідна ціна $p = 20 - 0{,}5 \cdot 15 = 12{,}5$. Граничні витрати при цьому становлять:

$$C'(15) = \left(8 - \frac{q}{5}\right)\Big|_{q=15} = 5.$$

Порівнюємо оптимальну ціну з граничними витратами: $\frac{12{,}5}{5} = 2{,}5$.

Отже, максимальний обсяг продукції фірми складає 15 одиниць, відповідна ціна – 12,5 грн, найбільш вигідна ціна для фірми у 2,5 раза більша за граничні витрати.



Задачі та вправи для самостійного розв'язання

4.11. Користуючись загальним порядком відшукання похідної, обчислити похідну функції $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ у точці $x_0 = 1$.

Знайти похідні функцій, користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних:

4.12. $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 + \frac{x}{3} + \sqrt{2}$.

4.13. $y = \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{11x^4}$.

4.14. $y = \frac{6x^5 - 7x^3 + x^2 - 5x + 3}{2x^4}$.

4.15. $y = 4\sqrt[4]{x} + 9x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 3x\sqrt[5]{x^2} + \frac{7}{x^2}$.

4.16. $y=\dfrac{x^2+1}{3\left(x^2-1\right)}+\left(x^2-1\right)\left(1-x\right)$.

4.17. $y=\left(\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{4}{x}+6\right)^6$.

4.18. $y=\dfrac{4}{\left(2x^2+x-1\right)^2}$.

4.19. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\dfrac{5}{\sqrt[4]{\left(x^2+2\right)^3}}$.

4.20. $y=2\sqrt{x}\sin x-\dfrac{\cos x}{x}$.

4.21. $y=\sqrt[5]{x^4}ctg\quad x-\dfrac{tg\quad x}{x}$.

4.22. $y=3\sin^4 x-\sin^2 x$.

4.23. $y=\sin\dfrac{1}{x}+\cos\sqrt{x}$.

4.24. $y=\sin\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\sin 2x}$.

4.25. $y=tg^2x-ctg\left(x^2\right)$.

4.26. $y=\left(1+\sin^2 x\right)^3$.

4.27. $y=\sqrt{2-tg\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}$.

4.28. $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$.

4.29. $y=arctgx^2$.

4.30. $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

4.31. $y=2\sqrt[4]{\arcsin^3 x}$.

4.32. $y=\sqrt{1-\arccos^2 x}$.

4.33. $y=10x\arccos\sqrt{1-5x}$.

4.34. $y=arctg\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$.

4.35. $y=\sqrt[4]{\arcsin\sqrt{x^2+2x}}$.

4.36. $y=\ln\left(x^2-3x\right)$.

4.37. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

4.38. $y=10^{1-\sin^4 3x}$.

4.39. $y=e^x\left(\sin 3x-3\cos 3x\right)$.

Знайти похідну другого порядку:

4.40. $y=x^4-4x^2+5x-3$.

4.41. $y=\sin^2 3x$.

4.42. $y=\left(1+x^2\right)arctg\quad x$.

4.43. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

4.44. Показати, що функція $y=x^2\ln\sqrt{x}+2x^2-3x+1$ задовольняє рівняння $y'''\cdot x=1$.

Знайти похідні y' від функцій, які задані неявно:

4.45. $y^3 - x^3 + x^2 y^2 = 0$.

4.46. $x\cos y = y\sin x$.

4.47. $2y\ln y = x$.

4.48. $arctg(x+y) = x$.

Знайти похідні y'' неявної функції:

4.49. $y = x + arctg\ y$.

4.50. $x^3 + y^3 - 3yx = 0$.

Знайти похідні другого порядку від функцій, заданих параметрично:

4.51. $x = \ln t,\ y = t^2$.

4.52. $x = arctg\ t,\ y = \ln(1+t^2)$.

4.53. $x = a\cos 2t,\ y = a\sin^2 t$.

4.54. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

Застосовуючи метод логарифмічного диференціювання, знайти похідні y' для заданих функцій:

4.55. $y = (3x-4)^4(2x+7)^5(x-1)^6$.

4.56. $y = x^{\sin 2x}$.

4.57. $y = \left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{x}}$.

4.58. $y = (\cos 2x)^{\sin x}$.

4.59. $y = \dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x-1}\cdot\sin 2x}$.

4.60. $y = \dfrac{(x-2)^3\sqrt{5x+1}}{(x+1)^4}$.

Геометричне застосування похідної:

4.61. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ у точці (1; 2).

4.62. В якій точці дотична до параболи $y = x^2 - 7x + 3$ паралельна прямій $5x + y - 3 = 0$?

4.63. До кривої $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ написати рівняння дотичної та нормалі у точці $(-2; 5)$.

4.64. Скласти рівняння дотичної до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ у точці $(1; -1)$.

4.65. Скласти рівняння дотичної до кривої $x^3 + y^2 + 4x - 17 = 0$ в точці з ординатою $y_0 = 1$.

4.66. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x = \sin t,\ y = \cos 2t$ при $t = \dfrac{\pi}{6}$.

Знайти диференціали функцій:

4.67. $y = \cos^3 2x$.

4.68. $y = 5^{x^2} \arccos\frac{1}{x}$.

4.69. $y = \sqrt[3]{(2+\cos x)^2}$.

4.70. $y = x\ln\left(x^2 - 2x\right)$.

4.71. $\ln\sqrt{x^2+y^2} = arctg\,\frac{y}{x}$.

4.72. $y = arctg^{\,3}\left(e^{3x}\right)$.

4.73. Знайти наближено $f(1{,}05)$, якщо $f(x) = e^{0{,}1x(1-x)}$.

4.74. Обчислити наближено $\sqrt[3]{27{,}36}$.

4.75. Обчислити наближено $\arcsin 0{,}4983$.

4.76. Обчислити наближено $\ln 1{,}01$.

Знайти границі за правилом Лопіталя:

4.77. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x} - e^{-2x} - 1}{\sin 2x}$.

4.78. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\ln\left(e^{x^2}+1\right)}$.

4.79. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x+2) - \ln 3}{\sqrt{1+2x} - 3^{x-\frac{1}{2}}}$.

4.80. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\ln\left(x^2-3\right)}{\ln(x-2)}$.

4.81. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln^3 x$.

4.82. $\lim\limits_{x\to 0} ctg\,x\ln\left(x+e^x\right)$.

4.83. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$.

4.84. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x}$.

4.85. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

4.86. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

4.87. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

4.88. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x}}$.

Дослідити на монотонність та екстремум задані функції:

4.89. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

4.90. $y = (x+2)^2(x-3)^3$.

4.91. $y = x\ln x$.

4.92. $y = \left(x^2 - 8\right)e^x$.

4.93. $y = (7-x)\sqrt[3]{x+5}$.

4.94. $y = \left(x^2 - 2x\right)\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$.

Знайти найбільше та найменше значення функцій на вказаних проміжках:

4.95. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2, \quad [-1;1]$.

4.96. $y = \dfrac{2x-1}{2+x^2}, \quad [-2;0]$.

4.97. $y = \sin 2x - x, \quad .\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

4.98. $y = \ln x - 2arctg\, x, \quad [1;+\infty)$.

Розв'язати задачі:

4.99. Різниця двох чисел дорівнює 13. Знайти ці числа, якщо відомо, що їх добуток найбільший.

4.100. Бак з квадратним дном може вміщувати 27 л. Які повинні бути його розміри, щоб повна поверхня була найбільшою?

4.101. У шар радіусом R вписати циліндр з найбільшою бічною поверхнею. Визначити висоту цього циліндра.

4.102. Визначити розміри басейну з квадратним дном об'ємом 32 $м^3$, якщо на облицювання його стін і дна була витрачена найменша кількість матеріалу.

4.103. Треба виготовити відкритий бак циліндричної форми місткістю 3л. Які повинні бути розміри бака, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

Знайти проміжки опуклості, угнутості та точки перегину заданих функцій:

4.104. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.

4.105. $y = (x-1)^4 - 24x^2 + x$.

4.106. $y = x^2 \cdot e^{\frac{2}{x}}$

4.107. $y = x - \ln x$.

Знайти асимптоти графіків функцій:

4.108. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x+2}$.

4.109. $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

4.110. $y = \dfrac{x}{x-1} + x$.

4.111. $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

4.112. $y = \dfrac{x}{e^x} - 2$.

Дослідити функції та побудувати їх графіки:

4.113. $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$.

4.114. $y = (x+4)^2(x-5)$.

4.115. $y = \dfrac{x^2}{x-3}$.

4.116. $y = \ln(x^2 + 4)$.

4.117. $y = x \cdot e^{-x}$.

4.118. $y = x^2 \ln x$.

4.119. $y = x - 2arctg\, x$.

4.120. $y = (x+4)\sqrt[3]{x}$.

Розв'язати задачі:

4.121. Крива повних витрат виробництва має вигляд:

$$y = 5\ln(1 + 2x).$$

Визначити криву граничних витрат.

4.122. Крива повних витрат виробництва має вигляд:

$$y = 2x^3 - 16x^2 + 15x.$$

Знайти обсяг виробництва, при якому середні витрати будуть мінімальними.

4.123. Обсяг виробництва продукції x і виручка y, яку одержали від реалізації продукції, пов'язані залежністю

$$y = 24x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3.$$

Знайти середню і граничну виручки при обсязі виробництва $x = 10$.

4.124. Залежність попиту на товар від його ціни задана співвідношенням:

$$q = 100 + \frac{p-1}{p^2 + 2}.$$

Обчислити граничний попит за ціною: а) 2 грн.; б) 5 грн. Порівняти відповіді.

4.125. Залежність собівартості одиниці продукції y (грн) від обсягу випуску продукції x (од.) визначається функцією:

$y = -0{,}4x + 50$.

Знайти еластичність собівартості, якщо випуск продукції дорівнює 40 млрд од.

4.126. Залежність попиту q від ціни p виражається функцією

$$q = -3p^2 + 2p + 9.$$

Знайти еластичність попиту q відносно ціни p і значення показника еластичності при $p=1$. Зробити висновок.

4.127. Функції попиту q і пропозиції S від ціни p задаються відповідно рівняннями:

$$q=8-p \text{ і } S=p+2.$$

Знайти: а) ціну рівноваги; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни.

4.128. Попит q і пропозиція S змінюються за формулами

$$q=\frac{50}{3p+2}, \quad S=\frac{2p^2}{3p+2}.$$

Знайти ціну рівноваги. Обчислити еластичність попиту та пропозиції при цій ціні.

4.129. Виробник реалізує свою продукцію за ціною 18 грн за одиницю, а витрати при цьому задаються залежністю:

$$S=2x+\frac{1}{12}x^3.$$

Знайти максимальний обсяг випуску продукції і відповідний йому прибуток.

4.130. Витрати виробництва залежать від обсягу продукції за формулою

$$y=x^3-12x+11.$$

При яких значеннях обсягу продукції витрати спадають, а при яких – зростають?

4.131. Підприємство виготовляє x одиниць продукції щотижня і реалізує її за ціною:

$$p=25-\frac{1}{30}x.$$

Загальні витрати виробництва складають:

$$S=\frac{1}{15}x^2+5x+300.$$

При якому обсязі виробництва прибуток буде максимальним?

4.132. Функція попиту пов’язана з ціною p співвідношенням:

$$q=-p^2+16p+80.$$

Яка ціна відповідає максимальному попиту? При якій ціні попит зникає? Знайти ціну, коли граничний попит дорівнює 2. Визначити темп зміни попиту.

4.133. Витрати на виробництво x одиниць продукції дорівнюють $d(x)$, ціна продукції $p(x)$. Визначити, яку кількість продукції треба виробити, щоб одержати максимальний прибуток, якщо

1) $d(x)=5x^2+300x+5000$, $p(x)=580-2x$;

2) $d(x)=10x^2+200x+6000$, $p(x)=1000-10x$.

4.134. Витрати на виробництво x одиниць товару складають $d(x)=25x+200$, ціна товару $p(x)=100-\frac{x}{50}$.

1. Скільки товару треба виробити, щоб прибуток був максимальним?

2. Скільки товару треба виробити, щоб прибуток був максимальним, якщо з кожної одиниці товару береться податок, який дорівнює 10?



Відповіді

4.11. 1.

4.12. $4x^3-4x^2+6x+\frac{1}{3}$.

4.13. $-\frac{5}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{15}{x^4}+\frac{24}{11x^5}$.

4.14. $3+\frac{7}{2x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{15}{2x^4}-\frac{6}{x^5}$.

4.15. $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+21x\sqrt[3]{x}+\frac{21}{5}\sqrt[5]{x^2}-\frac{14}{x^3}$.

4.16. $-\frac{4x}{3\left(x^2-1\right)^2}+1+2x-3x^2$.

4.17. $6\left(\frac{x^3}{9}-\frac{4}{x}+6\right)^5\left(\frac{x^2}{3}+\frac{4}{x^2}\right)$.

4.18. $\frac{-8(4x+1)}{\left(2x^2+x-1\right)^3}$.

4.19. $\frac{-2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}}-\frac{15x}{2\sqrt[4]{\left(x^2+3\right)^7}}$.

4.20. $\frac{\sin x+2x\cos x}{\sqrt{x}}+\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$.

4.21. $\frac{2\sin 2x-5x}{5\sqrt[5]{x}\sin^2 x}-\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$.

4.22. $12\sin^3 x\cos x-\sin 2x$.

4.23. $-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

4.24. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2}+\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$.

4.25. $\frac{2tg\,x}{\cos^2 x}+\frac{2x}{\sin^2 x^2}$.

4.26. $3\left(1+\sin^2 x\right)^2\sin 2x$.

4.27. $\dfrac{-\left(x^2+1\right)}{2x^2\cos^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\sqrt{2-tg\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}}$.

4.28. $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. **4.29.** $\dfrac{2x}{1+x^4}$. **4.30.** $\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}}$.

4.31. $\dfrac{3}{2\sqrt[4]{\arcsin x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **4.32.** $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-\arccos^2 x}}$.

4.33. $10\arccos\sqrt{1-5x}+\dfrac{25x}{\sqrt{5x}\cdot\sqrt{1-5x}}$. **4.34.** $\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)}$.

4.35. $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{\arcsin^3\sqrt{x^2+2x}}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-2x}}\cdot\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$. **4.36.** $\dfrac{2x-3}{x^2-3x}$.

4.37. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **4.38.** $-12\ln 10\cdot 10^{1-\sin^4 3x}\cdot\sin^3 3x\cdot\cos 3x$.

4.39. $10e^x\sin 3x$. **4.40.** $y''=12x^2-8$. **4.41.** $y''=18\cos 6x$.

4.42. $y''=\dfrac{2x}{1+x^2}+2arctg\,x$. **4.43.** $y''=\dfrac{-x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

4.45. $y'=\dfrac{3x^2-2xy^2}{2x^2y+3y^2}$. **4.46.** $y'=\dfrac{\cos y-y\cos x}{\sin x+x\sin y}$.

4.47. $y'=\dfrac{1}{2(1+\ln y)}$. **4.48.** $y'=(x+y)^2$. **4.49.** $y''=\dfrac{-2-2y^2}{y^5}$.

4.50. $y''=\dfrac{2xy}{\left(x-y^2\right)^3}$. **4.51.** $y''=4t^2$. **4.52.** $y''=2\left(t^2+1\right)$.

4.53. $y''=0$. **4.54.** $y''=\dfrac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t}$.

4.55. $y'=y\left(\dfrac{12}{3x-4}+\dfrac{10}{2x+7}+\dfrac{6}{x-1}\right)$.

4.56. $y'=y\left(2\cos 2x\cdot\ln x+\dfrac{\sin 2x}{x}\right)$.

4.57. $y'=y\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x^2}\right)$.

4.58. $y'=y(\cos x\cdot\ln\cos 2x-2\sin x\cdot\mathrm{tg}\,2x)$.

4.59. $y' = y\left(\frac{2}{x\ln x} - \frac{1}{2(x-1)} - 2ctg\,2x\right)$.

4.60. $y' = y\left(\frac{3}{x-2} + \frac{2{,}5}{5x+1} - \frac{4}{x+1}\right)$.

4.61. $-\frac{1}{11}$.

4.62. $(1;-3)$.

4.63. $y-5=0$, $x+2=0$.

4.64. $x-4y-5=0$.

4.65. $y+8x-17=0$.

4.66. $4x+2y-3=0$, $4y-2x-1=0$.

4.67. $dy = -6\cos^2 2x \cdot \sin 2x\,dx$.

4.68. $dy = \left(2x\cdot 5^{x^2}\cdot \ln 5 \arccos\frac{1}{x} + \frac{5^{x^2}}{x\sqrt{x^2-1}}\right)dx$.

4.69. $dy = \frac{-2\sin x}{3\sqrt[3]{2+\cos x}}\,dx$.

4.70. $dy = \left(\ln\left(x^2-2x\right) + \frac{2x-2}{x-2}\right)dx$.

4.71. $dy = \frac{x+y}{x-y}\,dx$.

4.72. $dy = \frac{9e^{3x}}{1+e^{6x}}\,arctg^2\left(e^{3x}\right)dx$.

4.73. $\approx 0{,}995$.

4.74. $\approx 3{,}013$.

4.75. $\approx 0{,}5216$.

4.76. $\approx 0{,}01$.

4.77. 2,5.

4.78. 1

4.79. $\frac{\sqrt{3}}{3-9\ln 3}$.

4.80. 1.

4.81. 0.

4.82. 2.

4.83. 0.

4.84. 1.

4.85. 1.

4.86. 1.

4.87. 1.

4.88. 1.

4.89. Зростає на $(-\infty;-2)$ і $(1;\infty)$, спадає на $(-2;1)$,

$y_{\max}(-2)=25$, $y_{\min}(1)=-2$.

4.90. Зростає на $(-\infty;-2)$ і $(0;\infty)$, спадає на $(-2;0)$,

$y_{\max}(-2)=0$, $y_{\min}(0)=-108$.

4.91. Спадає на $\left(0;\frac{1}{e}\right)$, зростає на $\left(\frac{1}{e};\infty\right)$, $y_{\min}\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

4.92. Зростає на $(-\infty;-4)$ і $(2;\infty)$, спадає на $(-4;2)$,

$y_{\max}(-4)=8e^{-4}$, $y_{\min}(2)=-4e^2$.

4.93. Зростає на $(-\infty;-2)$, спадає на $(-2;\infty)$, $y_{\max}(-2)=9\sqrt[3]{3}$.

4.94. Зростає на $(0;1)$ і $(e;\infty)$, спадає на $(1;e)$,

$$y_{\max}(1)=\frac{5}{2},\ y_{\min}(e)=\frac{4e-e^2}{2}.$$

4.95. $y_{найб}(-1)=2;\ y_{\text{найм}}(1)=-12.$ **4.96.** $y_{\text{найм}}(-1)=-1,\ y_{\text{найб}}(0)=-\frac{1}{2}.$

4.97. $y_{\text{найм}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2};\ y_{\text{найб}}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$ **4.98.** $y_{\text{найм}}(1)=-\frac{\pi}{2}$, найб. немає.

4.99. 6,5 і (-6,5). **4.100.** $3\times3\times3$. **4.101.** $R\sqrt{2}$.

4.102. $4\times4\times2$. **4.103.** $h=R=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ (дм).

4.104. Опуклий на $(-\infty;-3)$ і $(2;\infty)$; – угнутий на $(-3;2);(-3;294)$ і $(2;114)$ – точки перегину.

4.105. $(-\infty;-1)$ і $(3;\infty)$ – угнутий, $(-1;3)$ – опуклий;

$(-1;-9)$ і $(3;-197)$ – точки перегину.

4.106. $(-\infty;0)$ і $(0;\infty)$ – угнутий, точок перегину немає.

4.107. $(0;\infty)$ – угнутий, точок перегину немає.

4.108. $x=-2,\ y=x-4.$ **4.109.** $x=3,\ y=2.$

4.110. $x=1,\ y=x+1.$ **4.111.** $x=0,\ y=x+1.$

4.112. $y=-2.$

4.113. На $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$ і $(3;\infty)$ зростає, на $\left(-\frac{1}{3};3\right)$ спадає;

при $x=-\frac{1}{3}$ – максимум, при $x=3$ – мінімум; асимптот немає.

4.114. Зростає на $(-\infty;-4)$ і $(2;\infty)$, спадає на $(-4;2)$;

при $x=-4$ – максимум, при $x=2$ – мінімум; асимптот немає.

4.115. Зростає на $(-\infty;0)$ і $(6;\infty)$, спадає на $(0;3)$ і $(3;6)$;

при $x=0$ максимум, при $x=6$ – мінімум,

опукла на $(-\infty;3)$, угнута на $(3;\infty)$; асимптоти: $x=3$ і $y=x+3$.

4.116. Спадає на $(-\infty;0)$, зростає на $(0;\infty)$,

при $x=0$ – мінімум, опукла на $(-\infty;-2)$ і на $(2;\infty)$,

угнута на $(-2;2)$; асимптот немає.

4.117. Зростає на $(-\infty;1)$, спадає на $(1;\infty)$, при $x=1$ – максимум, опукла на $(-\infty;2)$, угнута на $(2;\infty)$; асимптота $y=0$.

4.118. Спадає на $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, зростає на $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};\infty\right)$, опукла на $\left(0;\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$, угнута на $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}};\infty\right)$, при $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ – мінімум; асимптот немає.

4.119. Зростає на $(-\infty;-1)$ і $(1;\infty)$, спадає на $(-1;1)$, при $x=-1$ – максимум, при $x=1$ – мінімум; опукла на $(-\infty;0)$, угнута на $(0;\infty)$; асимптоти: $y=x+\pi$ і $y=x-\pi$.

4.120. Спадає на $(-\infty;-1)$, зростає на $(-1;\infty)$, при $x=-1$ – мінімум, угнута на $(-\infty;0)$ і $(2;\infty)$, опукла на $(0;2)$; асимптот немає.

4.121. $y'=\frac{10}{1+2x}$.

4.122. $x=4$.

4.123. $y_{\text{г}}=\frac{122}{3}$; $y_{\text{г}}=49$.

4.124. $q_1=\frac{1}{18}$; $q_2=-\frac{13}{729}$.

4.125. $E_{40}(y)=-0{,}47$.

4.126. $E_1(q)=-0{,}5$.

4.127. $E_3(q)=-0{,}6$; $E_3(s)=0{,}6$.

4.128. $E_5(q)=-0{,}88$; $E_5(S)=1{,}12$.

4.129. $x=8$ (ум. од.), $Z_{\max}=\frac{256}{3}$ (гр. од.).

4.130. При $x\in(0;2)$ – витрати спадають, при $x>2$ – витрати зростають.

4.131. $x=100$.

4.132. $q_{\max}(8)=144$; $q=0$, при $p\geq 20$; $q=2$ при $p=7$; $q''=-2$.

4.133. 1) 20; 2) 20.

4.134. 1) 1875; 2) 1625.

Розділ 5. Функції багатьох змінних

На розвиток економічних процесів та явищ, як правило, впливає велика кількість факторів, частина з яких пов'язана між собою певними співвідношеннями, а інші є незалежними один від одного. Отже, для побудови математичної моделі цих процесів виникає потреба у використанні поряд з функціями однієї змінної функцій, що залежать від кількох змінних.



Після вивчення даної теми ви зможете:

- використовувати функції кількох змінних для формалізації економічних процесів;
- розуміти економічний сенс частинних похідних функції кількох змінних;
- знати методи диференціювання функцій кількох змінних;
- використовувати диференціал функції кількох змінних для наближених обчислень економічних показників;
- вміти обчислювати похідну за напрямом і градієнт функції та застосовувати їх в економічних моделях;
- вміти обчислювати екстремум функції кількох змінних;
- знати поняття емпіричних формул та методу найменших квадратів;
- вміти застосовувати інструменти диференціального числення функції кількох змінних до розв'язання реальних економічних задач;
- вміти знаходити еластичність функцій кількох змінних і проводити дослідження економічних процесів з її застосуванням та інтерпретувати отримані результати.

Глава 18. Функція багатьох змінних

18.1. Основні поняття. Область визначення функції

Функцією кількох змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ називається змінна z, якщо кожному набору значень $(x_1, x_2, ..., x_n)$ із множини X за певним правилом або законом ставиться у відповідність одне цілком певне значення величини z із множини Z. Змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ називають ***незалежними змінними,*** або

аргументами, функції, z – ***залежною змінно***, або ***функцією***. Кількість незалежних змінних може бути довільною. Для простоти викладення матеріалу обмежимося розглядом основних понять та положень щодо функції кількох змінних на прикладі функцій двох змінних: $z = f(x, y)$.

Як і функція однієї змінної, функція двох незалежних змінних може бути задана кількома способами: табличним (за допомогою таблиці значень аргументів та функції), аналітичним (за допомогою однієї або кількох формул) або графічним способом. У табл. 18.1 наведено табличний спосіб задання функції двох змінних.

Таблиця 18.1

Табличний спосіб задання функції двох змінних

x \ y	y_1	y_2	…	y_n
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	…	$f(x_1, y_n)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	…	$f(x_2, y_n)$
…	…	…	…	…
x_m	$f(x_m, y_1)$	$f(x_m, y_2)$	…	$f(x_m, y_n)$

Функція не обов'язково мусить існувати для довільних значень аргументів x та y. Сукупність пар $(x; y)$, для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називається ***областю визначення функції***, або її ***областю існування***. Ця область і є множиною X, яка позначається $D(f)$, у загальному випадку $D \subset R^2$.

Якщо для функції однієї змінної $y = f(x)$ областю визначення найчастіше є інтервал числової осі (скінченний або нескінченний), то у випадку двох змінних сукупність пар $(x; y)$, які утворюють область визначення функції, визначає множину точок площини. Тобто областю визначення функції двох змінних може бути деяка обмежена або необмежена частина площини. У першому випадку лінію, що обмежує область, називають ***границею області***. Точки області існування функції, які не належать границі, називають внутрішніми **то*чками області***. У випадку, коли границя належить області визначення, маємо

замкнену область, якщо не вся границя належить області, останню вважають ***незамкненою***. Область, яка містить тільки внутрішні точки, називається ***відкритою.***

У випадку, коли функція задана формулою, областю визначення вважається область існування відповідного математичного виразу.



Знайдемо область визначення деяких функцій. Так, для функції $z = 4x - y$ областю визначення є вся площина xOy, оскільки вираз має сенс для довільних x та y.

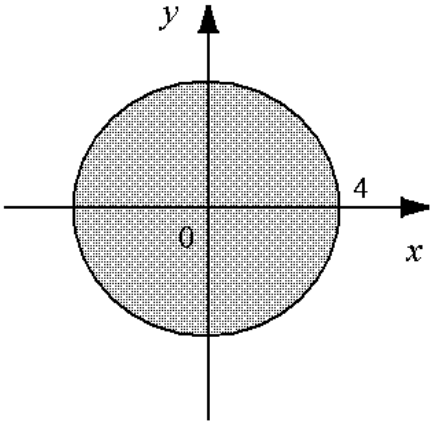


Рис. 18.1

Для функції

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

математичний вираз має зміст за умови $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 16$. Нерівність задовольняють усі точки, які знаходяться в середині кола радіусом 4, центр якого міститься у початку координат. Точки кола також належать області визначення, тобто область є замкненою (рис. 18.1).

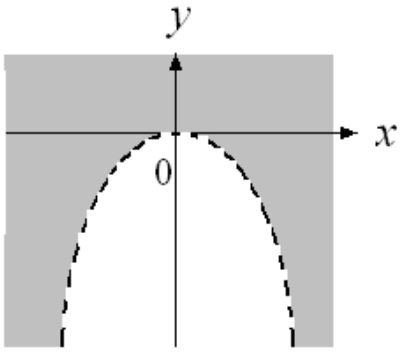


Рис. 18.2

Аналітичний вираз, що визначає функцію $z = \ln\left(x^2 + y\right)$, має сенс, коли $x^2 + y > 0 \;\Rightarrow\; y > -x^2$. Остання нерівність визначає частину площини, розташовану над параболою $y = -x^2$, а точки самої параболи до області визначення не належать. Це приклад незамкненої області визначення (рис. 18.2).

Алгоритм відшукання області визначення функції передбачає такі етапи:

1) ***записують*** нерівність або систему нерівностей, що відповідає області визначення елементарних функцій, які утворюють аналітичний вираз функції $z = f\left(x, y\right)$;

2) за допомогою графічного або аналітичного розв'язання отриманої нерівності або системи ***знаходять*** область визначення.

Кожна пара значень $(x; y)$ із множини X визначає точку $M(x, y)$ на площині xOy, а значення функції z є аплікатою точки $P(x, y, z)$ у просторі.

Графіком функції двох змінних $z = f(x, y)$ називають множину точок тривимірного простору $(x; y; z)$, апліката яких пов'язана з абсцисою x та ординатою y функціональним співвідношенням $z = f(x, y)$. Отже, графіком фун-кції двох змінних є деяка поверхня у тривимірному просторі.

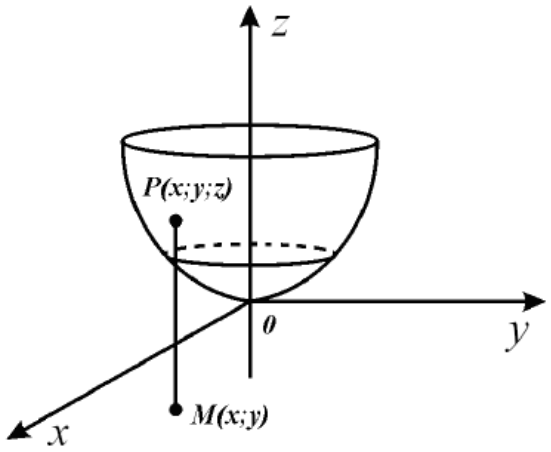


Рис. 18.3



Наприклад, областю визначення функції $z = x^2 + y^2$ є уся множина точок площини xOy, а її графіком, як відомо з аналітичної геометрії, є параболоїд обертання. Його зображено на рис. 18.3.

Як правило, побудова графіка функції двох змінних є складною задачею. Тому для визначення характеру поведінки функції дуже часто користуються поняттям ***лінії рівня*** функції.

Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$ називають таку множину точок на площині xOy, що в усіх точках цієї лінії значення функції однакове і дорівнює деякій сталій величині C ($z = const = C$). Число C в цьому випадку називається ***рівнем функції*** (рис. 18.4).

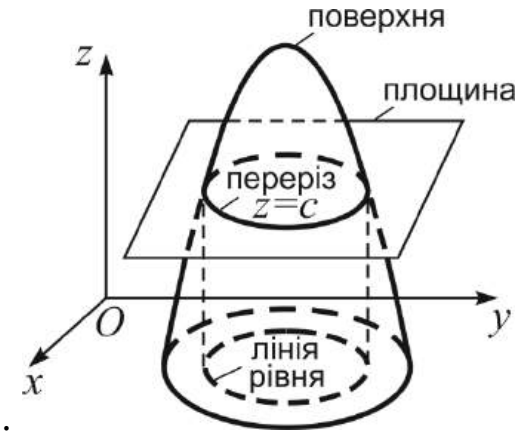


Рис. 18.4

Прикладом застосування функцій кількох змінних в економіці є ***виробнича функція*** $z = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$, яка встановлює залежність величини створеного суспільного продукту z від різних факторів: витрати (живої) праці (x_1), об'єм виробничих фондів (x_2), енергоємність виробництва (x_3) тощо; параметри α_i задовольняють умову: $0 < a_i < 1,\ i = \overline{0, n}$. Прикладом виробничої функції є ***функція Кобба – Дугласа,*** яка встановлює функціональну залежність між обсягом основних фондів K, витратами праці L і обсягом продукції $F(K,L) = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, де $a > 0$ – параметр продуктивності обраної технології, $0 < \alpha < 1$ – частка капіталу у прибутку.

У задачах ***споживчого вибору*** використовується так звана ***функція корисності,*** яка описує кількісну характеристику z доцільності придбання того чи іншого набору n різних товарів (благ) $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, де x_i – кількість i-го блага в натуральних одиницях. Прикладами таких функцій є:

логарифмічна функція

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i),\ \text{де}\ a_i,\ c_i\ -\ \text{параметри}\ (a_i > 0,\quad x_i > c_i \geq 0);$$

функція сталої еластичності

$$z = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i}\left(x_i - c_i\right)^{1-b_i},\ \text{де}\ b_i\ -\ \text{сталі}\ (a_i > 0,\ 0 < b_i < 1,\ x_i > c_i \geq 0).$$

Звичайно, в основу моделі поведінки споживачів покладають гіпотезу: кожен з них, здійснюючи вибір наборів благ при заданих цінах і наявному доході, прагне максимізувати рівень задоволення своїх потреб.

18.2. Границя та неперервність функції двох змінних

Розглянемо поняття δ**-околу** точки $M_0(x_0, y_0)$, під яким будемо розуміти сукупність усіх точок $(x; y)$, які знаходяться всередині круга радіусом δ $(\delta > 0)$ з центром у точці $M_0(x_0; y_0)$, тобто це множина точок, координати яких задовільняють нерівність

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 .$$

Поняття границі функції двох змінних складніше, ніж для функції однієї змінної. Це пояснюється тим, що при визначенні границі функції однієї змінної напрямів, якими може наближатися аргумент до обраного значення, тільки два: вздовж осі Ox зліва або справа від заданої точки. При визначенні границі функції двох змінних існує безліч напрямів, якими може здійснюватися наближення точки $(x; y)$ до точки $(x_0; y_0)$.

Загальноприйнятою є вимога, що значення границі функції $f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ буде дорівнювати A тільки тоді, коли величина A не буде залежати від шляху, яким відбувається наближення точки $M(x; y)$ до точки $M_0(x_0; y_0)$. Сформулюємо наступне означення границі.

Стала величина A називається ***границею функції*** $f(x, y)$ ***у точці*** $M_0(x_0; y_0)$ (при наближенні точки $M(x; y)$ до точки $M_0(x_0; y_0)$), якщо будь-якому наперед заданому додатному числу ε $(\varepsilon > 0)$ можна поставити у відповідність таке число δ, яке залежить від ε $(\delta = \delta(\varepsilon))$, що для всіх точок $M(x; y)$ з δ-околу точки M_0 виконується нерівність

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon .$$

Це означення границі за Коші.

Границю функції двох змінних позначають так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A . \qquad (18.1)$$

Основні теореми про границі функцій однієї змінної поширюються і на випадок функцій двох змінних. А саме:

1. Границя сталої величини дорівнює самій сталій:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} A = A. \qquad (18.2)$$

2. Границя алгебраїчної суми скінченної кількості функцій дорівнює алгебраїчній сумі границь цих функцій, якщо існують ці границі:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \big(f(x,y)\pm g(x,y)\big) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \pm \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y). \qquad (18.3)$$

3. Границя добутку скінченної кількості функцій, границі яких існують, дорівнює добутку границь цих функцій:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \cdot \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y). \qquad (18.4)$$

4. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо існують границі цих функцій і границя знаменника не дорівнює нулю:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)}. \qquad (18.5)$$



Встановимо існування границі функції $z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ при $x\to 0,\ y\to 0$.

Нехай точка $M(x;y)$ наближається до точки $O(0;0)$ вздовж прямої $y = kx$, де k – довільний коефіцієнт. Тоді

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Таким чином, ми отримали, що границя залежить від кутового коефіцієнта k, тобто від шляху, яким наближається точка $M(x,y)$ до точки $O(0;0)$. Це означає, що границя функції у точці $O(0;0)$ не існує.

Функція $f(x,y)$ є ***неперервною у точці*** $M_0(x_0,y_0)$, якщо виконуються такі умови:

1) функція визначена у цій точці;

2) існує скінченна границя при $x \to x_0$ та $y \to y_0$;

3) ця границя дорівнює значенню функції у точці $(x_0; y_0)$.

Якщо в якійсь точці $M_0(x_0; y_0)$ принаймні одна із зазначених вище умов не виконується, ця точка є ***точкою розриву***.

Наведені вище означення описують неперервність функції $z = f(x, y)$ за сукупністю змінних. Якщо зафіксувати одну із змінних, наприклад, $y = y_0$, то отримаємо функцію від однієї змінної x: $\phi(x) = f(x, y_0)$. Якщо ця функція $\varphi(x)$ є неперервною у точці $x = x_0$, то говорять, що функція $f(x, y)$ є ***неперервною у точці*** $(x_0; y_0)$ ***за змінною*** x. Аналогічно вводиться означення неперервності функції $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$ ***за змінною*** y.

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в кожній внутрішній точці області та на її границі, то така функція є ***неперервною в замкненій області.***

Для функцій кількох змінних виконуються теореми про неперервність суми, добутку та частки, встановлені раніше для функції однієї змінної. Справедливі також властивості функції, неперервної у замкненій області. Наведемо одну із цих властивостей про ***найбільше та найменше значення функції***
в замкненій області, яке буде використане у наступних главах.

Якщо функція $f(x, y)$ визначена і неперервна у замкненій області X, то усередині цієї області знайдеться принаймні одна така точка $(x_1; y_1)$, що для всіх інших точок області виконується нерівність

$$f(x, y) \le f(x_1, y_1),$$

і принаймні одна така точка (x_2, y_2), що для всіх інших точок виконується нерівність

$$f(x_2, y_2) \le f(x, y).$$

Значення $f(x_1, y_1) = M$ є ***найбільшим значенням функції*** $f(x, y)$ в області X, а значення $f(x_2, y_2) = m$ – її ***найменшим значенням*** у цій області. Доведення виходить за межі даного підручника.

18.3. Прирости функції двох змінних

Нехай задана функція $z = f(x, y)$. Виберемо довільну точку $M_0(x_0; y_0)$ із області її існування.

Зафіксуємо значення однієї з незалежних змінних, наприклад, змінної $y = y_0$, та надамо іншій незалежній змінній x приріст Δx. Тоді функція z отримає приріст, який називають ***частинним приростом*** z ***по*** x ***у точці*** $M_0(x_0, y_0)$ і позначають $\Delta_x z$. Іншими словами, частинний приріст – це різниця між значеннями функції в точці $M(x_0 + \Delta x; y_0)$ та у вихідній точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \qquad (18.6)$$

Аналогічно, зафіксувавши значення змінної x ($x = x_0$) і надавши приріст незалежній змінній y, тобто, якщо з точки $M_0(x_0; y_0)$ перейти у точку $M(x_0; y_0 + \Delta y)$, отримаємо ***частинний приріст*** z ***по*** y, який дорівнює:

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \qquad (18.7)$$

Якщо незалежній змінній x надати приріст Δx та одночасно незалежній змінній y надати приріст Δy, розглянувши різницю між значеннями функції у точці $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ та у точці $M_0(x_0; y_0)$, то отримаємо ***повний приріст функції*** у точці M_0:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \qquad (18.8)$$



Проілюструємо сказане на прикладі функції $z = xy$.

Знайдемо частинні прирости та повний приріст цієї функції:

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x; \qquad \Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y;$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

Звідси видно, що $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

18.4. Частинні похідні

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ **за змінною** x називається границя відношення частинного приросту функції за відповідною змінною $\Delta_x z$ до приросту самої незалежної змінної Δx за умови, що приріст аргументу прямує до нуля ($\Delta x \to 0$) довільним чином. Частинна похідна за змінною x від функції $z = f(x, y)$ має ряд позначень: z'_x; $f'_x(x, y)$; $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial x}$. Таким чином, згідно з означенням можна записати:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \qquad (18.9)$$

Аналогічно визначається частинна похідна за змінною y від функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \qquad (18.10)$$

Ці похідні є аналогами похідних функцій однієї змінної, але істотно відрізняються від них тим, що як сама функція, так і її похідні залежать від двох змінних. З того, що частинні прирости були отримані у припущенні сталості однієї із незалежних змінних, випливає, що правила відшукання частинних похідних не відрізняються від правил диференціювання функцій однієї змінної.



Зауважимо, *що при відшуканні частинних похідних функції двох змінних одна незалежна змінна вважається сталою величиною і диференціювання відбувається з використанням таблиці похідних основних елементарних функцій та правил диференціювання.*

Наприклад, знайдемо частинні похідні функції $z = \ln(x^2 + xy)$.

Диференціюємо задану функцію спочатку по x, вважаючи при цьому змінну y сталою, за правилом диференціювання складеної функції. Отримаємо результат:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x^2 + xy)\right) = \frac{1}{x^2 + xy} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + xy\right) = \frac{2x + y}{x^2 + xy}.$$

Тепер продиференціюємо задану функцію по y, вважаючи сталою змінну x:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(x^2+xy)\right)=\frac{1}{x^2+xy}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+xy\right)=\frac{x}{x^2+xy}.$$

Геометричний зміст частинних похідних. Нагадаємо, що графіком функції $z=f(x,y)$ є поверхня S у тривимірному просторі. Виберемо на площині xOy точку $M_0(x_0;y_0)$ та проведемо через цю точку площину, яка описується рівнянням $y=y_0$, де $y_0=const$ (рис. 18.5).

При фіксованому y частинна похідна z'_x дорівнює тангенсу кута α, який утворює дотична, що проходить через точку $N(x_0,y_0,z_0)$, до лінії перетину графіка функції і площини з додатним напрямом осі Ox.

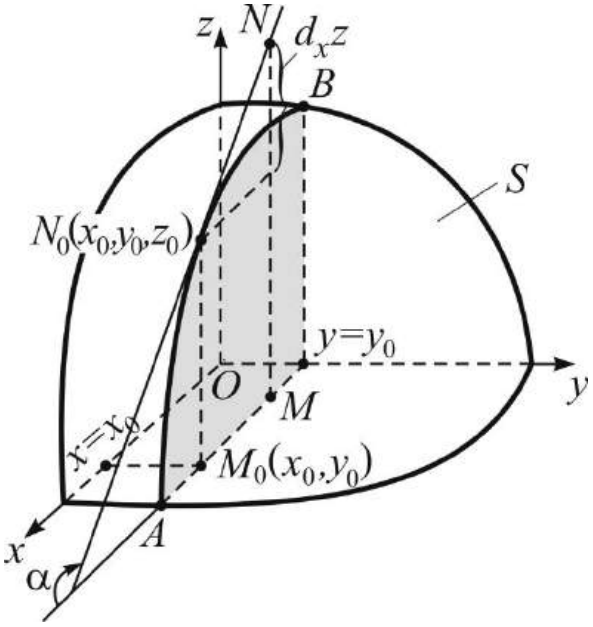


Рис. 18.5

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Аналогічно $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\operatorname{tg}\beta,$

де β – кут між віссю Oy і дотичною до лінії перетину поверхні з площиною $x=x_0$.

Оскільки частинні похідні від функції $z=f(x,y)$ є функціями незалежних змінних x та y, то їх, у свою чергу, можна диференціювати. Як відомо, другою похідною функції є перша похідна від першої похідної цієї функції.

Тому як результат диференціювання частинних похідних першого порядку від функції кількох змінних отримаємо ***частинні похідні другого порядку функції*** $z=f(x,y)$. Якщо диференціювання перший і другий раз здійснюється за змінною x, то ми отримуємо частинну похідну другого порядку по x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x=z''_{xx}.$$

Аналогічно отримуємо частинну похідну другого порядку за змінною y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_y = z''_{yy},$$

а також ***мішані похідні***:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = z''_{xy}$$

та

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x = z''_{yx}.$$

Для мішаних похідних справедлива теорема, яку надаємо без доведення.

Теорема 18.1. Якщо функція $z = f(x, y)$ та її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ визначені та неперервні в деякій області, то мішані похідні не залежать від порядку диференціювання, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \tag{18.11}$$

Таким чином, функція двох змінних $z = f(x, y)$, яка має певні властивості неперервності, має тільки три різних частинних похідних другого порядку.



Знайдемо частинні похідні другого порядку функції $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$.

Зазначимо, що функція z визначена і неперервна для будь-яких пар $(x, y) \in R^2$, оскільки утворена додаванням та множенням неперервних функцій.

Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 y^2.$$

Вони також є визначеними та неперервними на R^2. Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x + 6x^2 y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y^2 e^x + 2xy^3 \right)'_y = 2ye^x + 6xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(2ye^x + 3x^2 y^2 \right)'_x = 2ye^x + 6xy^2.$$

Отже, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

18.5. Частинні диференціали та повний диференціал. Використання в наближених обчисленнях

Знайшовши повний приріст $\Delta z = \Delta f\left(x_0, y_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$ функції $z = f\left(x, y\right)$ при переході від точки $\left(x_0; y_0\right)$ до точки $\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right)$, зупинимось на аналізі його структури.

Якщо приріст Δz можна подати у вигляді суми лінійної (відносно Δx та Δy) частини та доданків вищого порядку мализни, дістанемо

$$\Delta f\left(x_0, y_0\right) = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \tag{18.12}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – нескінчено малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$; A, B – деякі сталі, то функція називається ***диференційовною в точці***. Вираз $A\Delta x + B\Delta y$, який є головною лінійною частиною приросту функції, називається ***повним диференціалом функції*** і позначається df або dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Теорема 18.2. Якщо функція $z = f\left(x, y\right)$ є диференційовною у точці $M_0\left(x_0, y_0\right)$, то вона неперервна у цій точці.

Доведення. Якщо у співвідношенні (18.12) перейти до границі при $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$, отримаємо

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$$

тому функція $z = f(x, y)$ є неперервною у точці $M_0(x_0, y_0)$, що й потрібно довести.

Теорема 18.3. Якщо функція $z = f(x, y)$ є диференційовною у точці $M_0(x_0, y_0)$, тобто виконується умова (18.12), то в цій точці існують обидві її частинні похідні, причому

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = A, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = B.$$

Доведення. За умовою теореми функція $z = f(x, y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0, y_0)$, тобто в цій точці виконується співвідношення (18.12). Припустимо, що $\Delta y = 0$. Тоді $\Delta_x z = A \cdot \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$. Поділивши останній вираз на Δx, перейдемо до границі за умови $\Delta x \to 0$. Отримаємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \varepsilon_1) = A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

Отже,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = A.$$

Аналогічно можна довести, що

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = B.$$



Необхідна умова диференційовності не є достатньою.

Теорема 18.4. Якщо функція $z = f(x, y)$ в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ має неперервні частинні похідні z'_x та z'_y, то вона є диференційовною в цій точці (без доведення).

Повернемось до формули (18.12). За теоремою 18.3 коефіцієнт A дорівнює значенню частинної похідної першого порядку від функції $z = f(x, y)$ за аргументом x для точки (x_0, y_0), а коефіцієнт B – значенню частинної

похідної першого порядку від функції $z = f(x, y)$ за аргументом y для точки (x_0, y_0). Отже, повний приріст функції $z = f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) має вигляд

$$\Delta z = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – нескінченні малі при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Тому вираз $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$, який утворює головну лінійну частину повного приросту функції, і є повним диференціалом функції $z = f(x, y)$. Оскільки для незалежних змінних їх прирости і диференціали збігаються, тобто $\Delta x = dx, \Delta y = dy$, то формула для повного диференціала набуде вигляду

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \qquad (18.13)$$

Основною властивістю диференціала є ***інваріантність*** (незмінність) ***форми першого диференціала***, тобто рівність (18.13) виконується незалежно від того, чи є змінні x та y незалежними, чи вони є функціями інших аргументів.

Кожний з доданків формули (18.13) є головною частиною приросту функції, що лінійно залежить від приросту даного аргументу за умови, що інші аргументи є сталими. Отже, кожний з цих доданків є ***частинним диференціалом*** за відповідним аргументом: $dz = d_x z + d_y z$, де $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx$ – частинний дифе-ренціал функції z за аргументом x; $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$ – частинний диференціал функції z за аргументом y.

Зауважимо, що диференціал dz (18.13) називають диференціалом першого порядку. Якщо вважати функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ диференційовними в точці $M_0(x_0, y_0)$, можна ввести поняття диференціала другого порядку як диференціала від диференціала першого порядку $d^2 z = d(dz)$. Отже, згідно з формулою (18.13) отримаємо:

$$d^2 z = d(dz) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)'_y dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx^2) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy^2). \qquad (18.14)$$

Аналогічно можна відшукати диференціали третього порядку та найбільш високих порядків.

Оскільки диференціал першого порядку dz є головною лінійною частиною приросту функції, то за його допомогою можна здійснювати наближене обчислення функції, відкидаючи доданки, що є нескінченно малими більшого порядку. Для цього перетворимо формулу для повного приросту функції з урахуванням співвідношення (18.12) таким чином:

$$f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) = f\left(x_0, y_0\right) + \Delta f\left(x_0, y_0\right) =$$
$$= f\left(x_0, y_0\right) + A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Різниця між повним приростом функції $z = f\left(x, y\right)$ та її повним диференціалом у точці $M_0\left(x_0; y_0\right)$ є величиною нескінченно малою при $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$. Звідси випливає, що для достатньо малих Δx та Δy значення функції у точці $\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right)$ наближено дорівнює значенню функції в точці $\left(x_0; y_0\right)$, до якого додано вираз $A\Delta x + B\Delta y$, тобто диференціал функції у точці $\left(x_0; y_0\right)$. Отже, маємо формулу для наближених обчислень значень функції:

$$f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right) + A\Delta x + B\Delta y = f\left(x_0, y_0\right) + df\big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}. \qquad (18.15)$$

Таким чином, отримуємо значення функції

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 dy$$

або наближено

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y. \qquad (18.16)$$

Формулу (18.16) зручно використовувати для наближеного обчислення значення функції в точці. Для цього необхідно знайти точку $\left(x_0, y_0\right)$, координати якої достатньо близькі до координат даної точки $\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right)$, а значення функції $z = f\left(x, y\right)$ в точці $\left(x_0, y_0\right)$ легко обчислюється, відшукати

частинні похідні першого порядку в точці (x_0, y_0) і скористатись формулою (18.16).

 Обчислити наближено вираз $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$.

Розглянемо функцію $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Нехай $x_0 = 4, y_0 = 3, \quad f(x_0, y_0) = \sqrt{16+9} = 5$. Тоді, вважаючи, що $x_0 + \Delta x = 4{,}05$, а $y_0 + \Delta y = 2{,}93$, дістанемо $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}07$.

Визначимо диференціал функції z у точці (x_0, y_0). Для цього знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

та обчислимо повний диференціал:

$$dz\big|_{\substack{x=4\\y=3}} = \frac{4}{\sqrt{16+9}} \cdot 0{,}05 - \frac{3}{\sqrt{16+9}} \cdot 0{,}07 = -0{,}002.$$

Звідки $z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2} \approx 5 - 0{,}002 = 4{,}998$.

Обчислення на калькуляторі дає результат: 4,9987398. Як видно, похибка складає 0,0007398.

Для ілюстрації точності обчислення за допомогою диференціала наведемо ще один приклад. Відомо, що загальний прибуток від реалізації певної продукції описується співвідношенням: $z = x \cdot y$, де x – прибуток від реалізації одиниці продукції, y – кількість реалізованої продукції. Нехай у певний момент часу прибуток від реалізації становить $z = x_0 \cdot y_0$. Визначимо, як зміниться загальний прибуток, якщо прибуток від реалізації одиниці продукції зросте на величину Δx, а кількість реалізованої продукції – на Δy.

Приріст функції, яка описує прибуток від реалізації, визначається формулою:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

У даному випадку

$$\Delta z = (x_0 + \Delta x)\cdot(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 =$$
$$= x_0 y_0 + x_0 \cdot \Delta y + y_0 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y - x_0 y_0 =$$
$$= \underbrace{x_0 \cdot \Delta y + y_0 \cdot \Delta x}_{dz} + \Delta x \cdot \Delta y = dz + \Delta x \cdot \Delta y,$$

оскільки

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = y_0 \quad \text{та} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = x_0 .$$

Чисельно функція $z = x \cdot y$ дорівнює площі прямокутника зі сторонами x та y. Тоді приріст функції Δz можна розглядати як приріст площі прямокутника за умов, що сторона, яка мала довжину x_0, отримає приріст Δx, а сторона довжиною y_0 – приріст Δy (рис. 18.6).

Так, площа вихідного прямокутника дорівнює $z = x_0 \cdot y_0$ (на рис. 18.6 цей прямокутник не має штриховки).

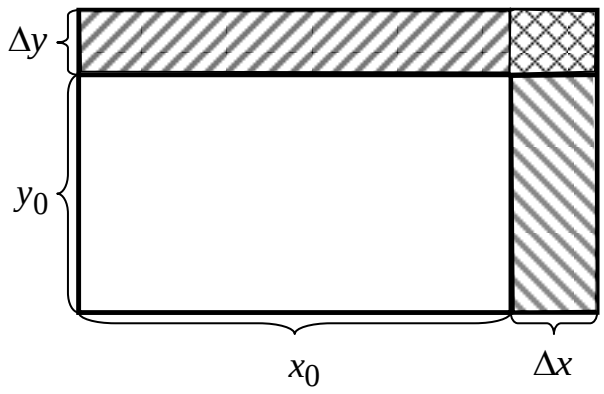


Рис. 18.6

Якщо надати приріст лише одній зі сторін прямокутника, а довжину іншою залишити сталою, то площа вихідного прямокутника збільшиться на величину, що відповідає частинному диференціалу функції $z = x \cdot y$ за цією змінною (ця частка приросту функції на рис. 18.6 відповідає одному з прямокутників, що мають штриховку під одним нахилом), а сума площ цих обох прямокутників – повному диференціалу функції. Тоді повний приріст функції (уся заштрихована площа) відрізняється від її повного диференціала на величину $\Delta x \cdot \Delta y$ (на рис. 18.6 це площа маленького прямокутника, що має подвійну штриховку). Оскільки за умовою задачі $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$, то величина $\Delta x \cdot \Delta y$ є нескінченно малою більш високого порядку порівняно з нескінченно малими Δx і Δy. У даному прикладі величина $\Delta x \cdot \Delta y$ і є абсолютною похибкою при заміні повного приросту функції її диференціалом. Оскільки відносна похибка

дорівнює відношенню абсолютної похибки до значення функції, то в розглянутому прикладі відносна похибка дорівнює

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{x_0 \cdot y_0}.$$



Ключові терміни

Функція кількох змінних; область визначення; внутрішні точки області визначення; замкнена та відкрита області визначення; лінія рівня; границя функції двох змінних; неперервність функції в точці; неперервність функції в замкненій області; найбільше та найменше значення функції в області; частинний приріст функції в точці; повний приріст функції в точці; частинні похідні; геометричний зміст частинних похідних; похідні другого порядку; мішані похідні; повний диференціал; частинні диференціали; інваріантність форми першого диференціала; наближене обчислення функції в точці.



Запитання для самоперевірки

1. Що називається функцією кількох змінних?
2. Що розуміють під областю визначення функції двох змінних, який її геометричний зміст?
3. Який графік у функції двох змінних?
4. Що таке лінія рівня? Як за допомогою ліній рівня отримати уявлення про графік функції двох змінних?
5. Надайте означення границі функції двох змінних.
6. Що таке частинний приріст функції за змінною x? Надайте його геометричне тлумачення.
7. Що таке частинний приріст функції за змінною y?
8. Як знайти частинну похідну за змінною x? Який її геометричний зміст?
9. Як знайти частинну похідну за змінною y?

10. Що називається повним диференціалом? Як розуміти інваріантність форми першого диференціала?

11. Яка функція вважається диференційовною?

12. Назвіть необхідні, а також достатню умови диференційовності функції в точці.

13. Що називається частинними похідними другого порядку від функції з двома невідомими?

14. Що називається першим dz та другим d^2z диференціалами функції?

15. Запишіть формулу, яка застосовується в наближених обчисленнях.

Глава 19. Похідна за напрямом. Градієнт функції. Локальний і умовний екстремуми

19.1. Похідна за напрямом

Нехай функція $z = f(x, y)$ задана у певному околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Розглянемо напрям (рис. 19.1), заданий одиничним вектором $\overline{S} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, де $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

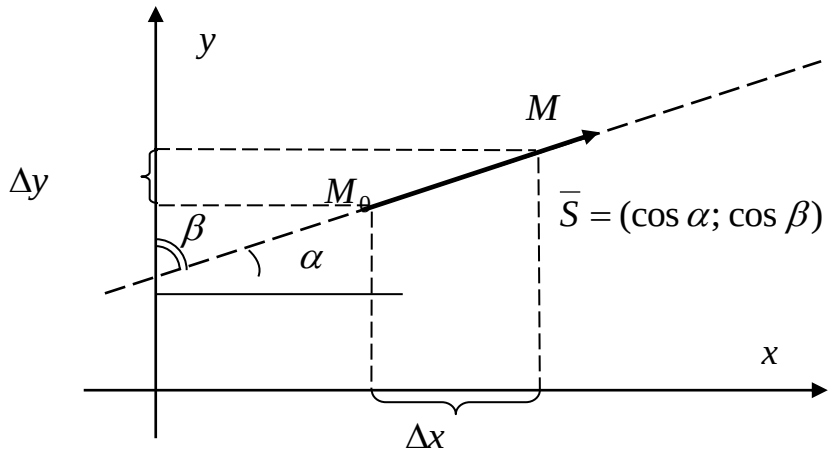


Рис. 19.1

Перейдемо вздовж напряму цього вектора з точки $M_0(x_0, y_0)$ у точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Функція отримає приріст

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Вектор $\overline{\Delta S}$, координатами якого є прирости аргументів, назвемо ***вектором приростів***: $\overline{\Delta S} = (\Delta x; \Delta y)$. Знайдемо його довжину, яка дорівнює $\overline{\Delta S} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, і позначимо через ΔS проекцію вектора приростів на напрям $\overline{S}$, яка дорівнює

$$\Delta S = \begin{cases} \left|\Delta \overline{S}\right|, & \text{якщо } \Delta \overline{S} \uparrow\uparrow \overline{S}; \\ -\left|\Delta \overline{S}\right|, & \text{якщо } \Delta \overline{S} \uparrow\downarrow \overline{S}. \end{cases}$$

Похідною функції $z = f(x, y)$ **за напрямом** $\overline{S}$ називається границя відношення $\dfrac{\Delta z}{\Delta S}$ за умови, що $\Delta S \to 0$, та позначається символом $\dfrac{\partial z}{\partial S}$.

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S}.$$

Теорема 19.1. Якщо функція $z = f(x, y)$ визначена в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ і має в ній неперервні частинні похідні, то в цій точці існує похідна за напрямом довільного вектора $\overline{S}$, яку можна знайти за формулою

$$\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \qquad (19.1)$$

де $\vec{S} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, $\cos\alpha$ та $\cos\beta$ – напрямні косинуси.

Доведення. Візьмемо на промені, що виходить з точки $M_0(x_0, y_0)$ у напрямі вектора $\overline{S} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Оскільки функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в точці $M_0(x_0, y_0)$, то її повний приріст, що відповідає приростам її аргументів Δx та Δy, можна записати у вигляді:

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Запишемо вектор приростів: $\Delta\overline{S} = \overline{M_0 M} = (\Delta x, \Delta y)$. З рис. 19.1 видно, що $\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha$; $\frac{\Delta y}{\Delta S} = \sin\alpha = \cos\beta$. Тоді:

$$\frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta S} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta S} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta S} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta S} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos\beta + \varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta.$$

Якщо точка M_0 прямує до точки M вздовж заданого променя і при цьому $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$, то $\left|\overline{\Delta S}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

За цих умов перейдемо в останньому виразі до границі. Отримаємо:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_1 \cos\alpha = 0 \text{ та } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_2 \cos\beta = 0.$$

Звідси:

$$\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\beta,$$

що й потрібно було довести.

19.2. Градієнт функції та лінії рівня

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, яка визначена в області D і є диференційовною в точці $M(x, y) \in D$.

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називається вектор, координатами якого є частинні похідні першого порядку функції z у цій точці. Градієнт позначається символом $\operatorname{grad} z$. Отже, при розкладі за одиничним базисом градієнт можна записати у векторній формі:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}, \tag{19.2}$$

або у координатній формі: $\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Виберемо в точці $M(x, y)$ довільний напрям, який визначається одиничним вектором $\vec{S} = (\cos\alpha, \cos\beta)$. Знайдемо скалярний добуток градієнта функції в даній точці та напрямного вектора $\vec{S}$:

$$\operatorname{grad} z \cdot \vec{S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

З урахуванням (19.1) маємо

$$\operatorname{grad} z \cdot \vec{S} = \frac{\partial z}{\partial S}.$$

Звідси за означенням скалярного добутку дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial S} = |\operatorname{grad} z| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\varphi, \tag{19.3}$$

де φ – кут між векторами $\operatorname{grad} z$ та $\vec{S}$.

Відзначимо дві основні властивості $\operatorname{grad} z$, які випливають з одержаної формули (19.3):

1) похідна за напрямом у даній точці досягає найбільшого значення, якщо напрям вектора $\vec{S}$ збігається з напрямом $\operatorname{grad} z$ ($\cos\varphi = 1, \varphi = 0$), тобто напрям градієнта функції збігається з напрямом, у якому функція змінюється з максимальною швидкістю;

2) градієнт у обраній точці утворює прямий кут з дотичною до лінії рівня функції, що проходить через цю точку ($\cos\varphi = 0, \varphi = \pi/2$).

 Розглянемо приклад. Нехай задано функцію $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$.

Визначимо її градієнт у точці $M_0(1;\ 2)$ та доведемо, що градієнт є перпендикулярним до лінії рівня, яка проходить через цю точку. Для цього спочатку визначимо частинні похідні першого порядку від функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 6$$

та обчислимо їх у точці $M_0(1;\ 2)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1,\\ y=2}} = 2\cdot 1 - 4 = -2; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1,\\ y=2}} = 2\cdot 2 + 6 = 10.$$

Отже, можемо записати, що $\operatorname{grad} z = -2\vec{i} + 10\vec{j}$.

Тепер знайдемо рівняння лінії рівня, яка проходить через точку $M_0(1;2)$. Значення функції z_0 (її рівень), що відповідає цій лінії рівня, дорівнює $z_0 = 1^2 + 2^2 - 4\cdot 1 + 6\cdot 2 = 13$. Отже, рівнянням лінії рівня при $z_0 = 13$ буде $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 13$. Зведемо його до канонічного вигляду:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 4 - 9 = 13 \quad \text{або} \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 26.$$

Отже, дістали коло з центром у точці з координатами $(2;-3)$, радіус якого дорівнює $R = \sqrt{26}$. Щоб пересвідчитися, що градієнт функції перпендикулярний до лінії рівня, знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до лінії рівня
в точці M_0.

Рівняння лінії рівня визначається функцією, що задана неявно. За формулою похідної від такої функції маємо:

$$2x+2yy'-4+6y'=0 \quad \Rightarrow \quad y'=\left.\frac{2-x}{y+3}\right|_{x=1,y=2}=0{,}2\,.$$

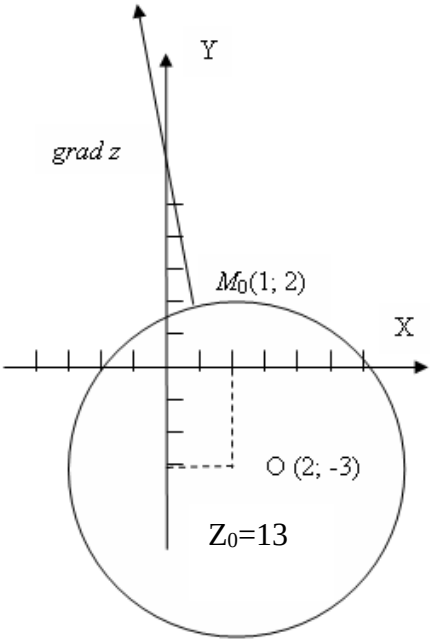


Рис. 19.2

Отже, у точці $M_0(1;2)$ кутовий коефіцієнт дотичної до лінії рівня функції z дорівнює 0,2.

Градієнт $\operatorname{grad} z=(-2;10)$ утворює з віссю Ox кут, тангенс якого дорівнює (-5). Тоді добуток кутових коефіцієнтів дотичної та градієнта дорівнює (-1). Отже, градієнт функції в точці M_0 є перпендикуляром до дотичної лінії рівня функції в обраній точці.

На рис. 19.2 зображено лінію рівня функції $z=x^2+y^2-4x+6y$ при рівні $z_0=13$, а також градієнт цієї функції в точці $M_0(1;2)$.

19.3. Локальний екстремум функції двох змінних

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена на множині $D\subset D(f)\subset R^2$ та точка $M_0(x_0;y_0)$ належить цій множині. Кажуть, що функція $z=f(x,y)$ у точці M_0 має ***локальний максимум (мінімум),*** якщо навколо цієї точки існує такий δ-окіл, що для всіх точок цього околу виконується нерівність:

$$f(x,y)\le(\ge)\,f(x_0,y_0)\,.$$

Теорема 19.2 (***необхідна умова екстремуму***). Якщо функція двох змінних $z=f(x,y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0;y_0)$ і має в цій точці екстремум, то обидві частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} = 0. \end{cases} \tag{19.4}$$

Точки, в яких виконується ця умова, називаються ***стаціонарними.*** Як і для функції однієї змінної, виконання умови (19.4) є необхідною умовою екстремуму, однак не є достатньою. Розв'язавши систему цих рівнянь, визначимо координати точок, у яких функція може мати екстремум.

Для того щоб отримати достатню умову екстремуму, розглянемо визначник, елементами якого є похідні другого порядку функції $z = f(x, y)$. Він позначається символом Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}. \tag{19.5}$$

Матриця, елементами якої є частинні похідні другого порядку функції кількох змінних, називається ***матрицею Гессе***, а її визначник – ***гессіаном***. Для функції двох змінних гессіан є визначником другого порядку.

Теорема 19.3 (***достатня умова екстремуму***). Якщо функція $z = f(x, y)$ у стаціонарній точці $M_0(x_0; y_0)$ та деякому її околі має усі частинні похідні другого порядку та визначник Δ у цій точці додатний, то функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум. При цьому, якщо в цій точці $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, то у стаціонарній точці функція має локальний мінімум, якщо $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, то $-$локальний максимум. Отже, достатню умову екстремуму для функції двох змінних можна записати у вигляді:

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0. \tag{19.6}$$

У випадку, коли у стаціонарній точці визначник (19.5) від'ємний, то функція локального екстремуму в цій точці не має. Якщо у стаціонарній точці гессіан дорівнює нулю, то наведена вище теорема не відповідає на питання про існування екстремуму, і потрібні додаткові дослідження.



Проведемо дослідження функції $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$ на локальний екстремум. За необхідною умовою екстремуму перевіримо, чи має функція стаціонарні точки. Для цього знайдемо її похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 6.$$

Поклавши ці похідні рівними нулю, отримаємо систему рівнянь для обчислення координат стаціонарної точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 2y + 6 = 0. \end{cases}$$

Звідси дістанемо, що стаціонарна точка $M_0(x_0; y_0)$ має координати:

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = -3. \end{cases}$$

За достатньою умовою перевіримо, чи є ця стаціонарна точка точкою локального екстремуму. Для цього знайдемо всі похідні другого порядку й обчислимо їх значення у стаціонарній точці:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 2; \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 2; \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{M_0} = 0.$$

Тепер складемо матрицю Гессе й обчислимо її визначник. Отримуємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Оскільки гессіан є додатним, то функція у стаціонарній точці має екстремум. Тепер визначаємо характер екстремуму. Маємо $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 2 > 0$, звідси випливає, що стаціонарна точка є точкою локального мінімуму. Обчислимо значення функції в точці $M_0(2,-3)$:

$$z_{\min} = 2^2 + (-3)^2 - 4\cdot 2 + 6\cdot(-3) = -13.$$



Проведемо дослідження на локальний екстремум функції $z = x^2 - -4y^2 - 4x + 8y$. Спочатку визначимо перші похідні функції і за системою рівнянь, яку отримуємо відповідно до вимог необхідної умови екстремуму, обчислимо координати стаціонарної точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -8y + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ -8y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}.$$

За достатньою умовою екстремуму:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 2;\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = -8;\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{M_0} = 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -16 < 0.$$

Оскільки визначник від'ємний, то функція не має екстремуму.

19.4. Умовний екстремум

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в області D, і на координати точок області накладене співвідношення $\varphi(x,y) = 0$, яке називається рівнянням зв'язку. Це означає, що на області визначення функції розглядаються тільки точки, для яких виконується рівність $\varphi(x,y) = 0$. Множину всіх таких точок позначатимемо через X і точка $M_0(x_0;y_0) \in X$, тобто $\varphi(x_0,y_0) = 0$.

Можна також вважати, що у цьому випадку аргументи функції $z = f(x, y)$ не є незалежними, а пов'язані між собою співвідношенням $\varphi(x, y) = 0$. Розглянемо задачу про відшукання екстремуму такої функції. У цьому випадку застосовують термін ***умовний екстремум***.

Точка $M_0(x_0; y_0) \in X$ називається точкою умовного максимуму (мінімуму) функції $f(x, y)$, якщо існує такий δ-окіл цієї точки, що для всіх точок (x, y) перетину цього околу з множиною X виконується нерівність:

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \qquad (f(x, y) \ge f(x_0, y_0)). \tag{19.7}$$

Для розв'язання задачі на умовний екстремум застосовуються метод зведення до екстремуму функції однієї змінної або метод множників Лагранжа.

1. Метод зведення до екстремуму функції однієї змінної. Якщо рівняння $\varphi(x, y) = 0$ можна розв'язати відносно однієї із змінних, тобто виразити в явному вигляді цю змінну як функцію іншої змінної, то підставивши її у функцію $z = f(x, y)$, отримаємо нову функцію, яка залежить тільки від однієї змінної. Локальний екстремум цієї нової функції і буде умовним локальним екстремумом вихідної функції $z = f(x, y)$. Тобто задачу пошуку умовного екстремуму можна звести до розв'язання задачі про відшукання локального екстремуму функції однієї змінної.



Знайдемо умовний екстремум функції $z = x\,y$, якщо $x + y = 1$.

У даному випадку можна з рівняння зв'язку одну зі змінних виразити через іншу й підставити у функцію, а потім дослідити отриману функцію однієї змінної на локальний екстремум. Отже, підставляємо $y = 1 - x$ у вихідну функцію і дістаємо $z = x(1 - x)$. Далі будемо досліджувати отриману функцію від однієї змінної.

Знаходимо її першу похідну $\dfrac{dz}{dx} = 1 - 2x$. За необхідною умовою екстремуму отримуємо абсцису стаціонарної точки $x = \dfrac{1}{2}$. Ця точка є точкою максимуму, оскільки при переході через цю точку зліва направо похідна змінює знак з «+» на «–» (достатня умова екстремуму). Тепер для $x = \dfrac{1}{2}$ з рівняння зв'язку визначаємо ординату точки максимуму: $y = \dfrac{1}{2}$.

Знаходимо значення функції:

$$z_{\max} = z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

2. Метод множників Лагранжа. Якщо рівняння зв'язку не можна розв'язати відносно однієї змінної, то для відшукання умовного екстремуму функції $z = f(x,y)$ при наявності співвідношення $\varphi(x,y) = 0$ застосовують метод невизначених множників Лагранжа. Суть методу полягає в тому, щоб перейти від задачі пошуку умовного екстремуму функції двох змінних до задачі пошуку безумовного екстремуму функції трьох змінних.

Згідно з цим методом складають ***функцію Лагранжа***

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y), \tag{19.8}$$

де λ – невизначена стала, яка називається ***множником Лагранжа***.

Множник λ є ще однією змінною, що поряд зі змінними x та y є аргументом функції Лагранжа, і саме функція Лагранжа, яка у цьому випадку є фун-кцією трьох змінних, досліджується на екстремум.

Теорема 19.4 (***необхідна умова екстремуму***). Нехай функції $f(x, y)$ та $\varphi(x, y)$ неперервні, мають неперервні частинні похідні першого порядку за змінними x та y, а точка (x_0, y_0) є точкою умовного локального екстремуму функції $z = f(x,y)$ за наявності рівняння зв'язку $\varphi(x,y) = 0$ і нехай $grad\varphi(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді існує таке єдине число λ_0, що координати точки (x_0, y_0, λ_0) задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{19.9}$$

Система рівностей (19.9) є необхідною умовою локального екстремуму функції трьох змінних, отже, якщо точка (x_0, y_0) є точкою умовного локального екстремуму функції $z = f(x,y)$ за наявності умови $\varphi(x,y) = 0$, то точка (x_0, y_0, λ_0) є стаціонарною точкою функції Лагранжа.

Оскільки $grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, а $grad\ \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$, то два останніх рівняння умови (19.9) можна записати у векторній формі:

$$grad\ f + \lambda \cdot grad\ \varphi = 0.$$

Тобто для стаціонарної точки функції Лагранжа маємо:

$$grad\ f(x_0, y_0) = -\lambda_0 \cdot grad\ \varphi(x_0, y_0). \qquad (19.10)$$

Це означає, що в точці $M_0(x_0, y_0)$, яка є точкою умовного екстремуму, градієнти функцій $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ належать одній прямій.

Геометричний зміст умовного екстремуму подамо на рис. 19.3. Функції $f(x, y)$ відповідає декілька ліній рівня, серед яких виділена саме та, на якій функція досягає екстремального значення $z = f(x_0, y_0)$, а для функції $\varphi(x, y)$ – лише одна лінія рівня, для якої виконується умова $\varphi(x, y) = 0$. Отже, лінії рівня функцій $z = f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ в точці екстремуму (x_0, y_0) дотикаються.

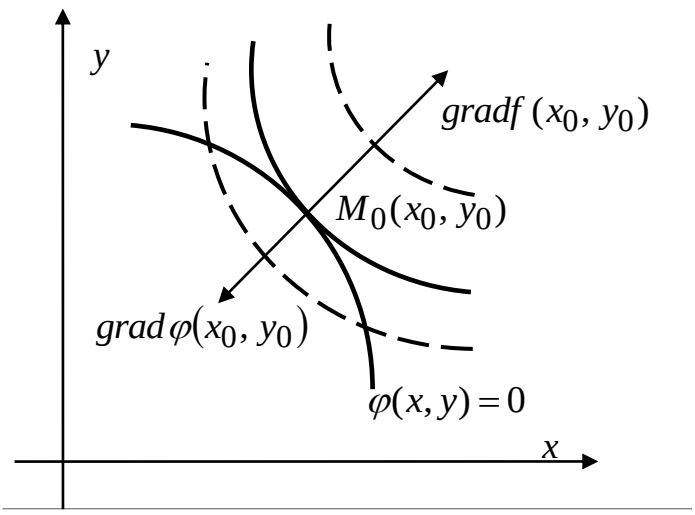


Рис. 19.3

Фрагмент ***карти ліній рівня***, зображеної на рис. 19.3, є типовим для задач економічного змісту. Наприклад, такий вигляд мають лінії сталого значення виробничих функцій – ***ізокванти***. Якщо виробнича функція є функцією двох аргументів (найчастіше, це витрати і капітал), то ізокванти відображають можливі комбінації факторів виробництва для досягнення певного рівня виробництва.

Отже, ізокванта визначає можливість заміщення одного фактора виробництва іншим.

Якщо приросту Δx відповідає таке значення Δy, що перехід від одних умов виробництва до інших здійснюється за ізоквантою, то диференціал виробничої функції (на ізокванті) дорівнює нулю.

Повернемось до питання про умовний екстремум функції. Отже, із системи (19.9) знаходимо координати стаціонарної точки $(x_0,\ y_0,\ \lambda_0)$. Однак співвідношення (19.9) є необхідною, але не є достатньою умовою умовного екстремуму.

Теорема 19.5 (*достатня умова екстремуму*). Нехай для функції $L = L(\lambda, x, y)$ точка $M_0(x_0, y_{0,}\lambda_0)$ є стаціонарною. Тоді, якщо функція в цій точці має похідні другого порядку та другий диференціал при фіксованому λ:

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2, \qquad (19.11)$$

то при $d^2L > 0$ у стаціонарній точці функція досягає мінімуму, а при $d^2L < 0$ – максимуму (доведення достатньої умови виходить за межі програми).

Схема дослідження на екстремум функції Лагранжа:

1) ***скласти*** функцію Лагранжа (19.8);

2) ***записати*** систему рівнянь (19.9), тобто необхідні умови екстремуму;

3) ***знайти*** стаціонарні точки функції, для чого розв’язати систему (19.9);

4) ***перевірити*** достатню умову екстремуму в кожній стаціонарній точці;

5) ***зробити*** висновки.

Розв'язання задачі на екстремум функції Лагранжа еквівалентно розв'язанню задачі на умовний екстремум (19.7), а саме: якщо точка $M_0(x_0, y_{0,}\lambda_0)$ є точкою екстремуму функції Лагранжа, то точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$. Обгрунтування цього факту в даному підручнику не розглядається.



Наприклад, знайдемо екстремум функції $z = x + y$ за умови, що на її змінні накладено обмеження: $9x^2 + 4y^2 = 13$.

Перепишемо рівняння зв’язку у вигляді: $9x^2 + 4y^2 - 13 = 0$. Звідси $\varphi(x,\ y) = 9x^2 + 4y^2 - 13$. Складемо функцію Лагранжа:

$$L(\lambda, x, y) = x + y + \lambda \cdot (9x^2 + 4y^2 - 13)$$

і знайдемо її частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 9x^2 + 4y^2 - 13; \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 18\lambda x; \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 8\lambda y.$$

Відповідно необхідній умові екстремуму функції Лагранжа (19.9) одержуємо систему рівнянь для визначення координат стаціонарних точок:

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 - 13 = 0; \\ 1 + 18\lambda x = 0; \\ 1 + 8\lambda y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{324\lambda^2} + \dfrac{4}{64\lambda^2} - 13 = 0; \\ x = \dfrac{-1}{18\lambda}; \\ y = \dfrac{-1}{8\lambda}. \end{cases}$$

Розв'язавши перше рівняння системи, знайдемо, що $\lambda = \pm\dfrac{1}{12}$. Отже, для функції $L(\lambda, x, y)$ маємо стаціонарні точки $M\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{12}\right)$ та $N\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{12}\right)$. Відповідно для вихідної функції точки $M_1\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{2}\right)$ та $M_2\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}\right)$ є стаціонарними точками умовного екстремуму.

Для перевірки виконання достатньої умови екстремуму для функції Лагранжа треба визначити знак другого диференціала d^2L у точках M та N.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 18\lambda; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 8\lambda; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0.$$

Отже, другий диференціал функції Лагранжа (19.11) має вигляд: $d^2L = 18\lambda dx^2 + 8\lambda dy^2 = 2\lambda(9dx^2 + 4dy^2)$.

Як бачимо, знак d^2L збігається зі знаком множника Лагранжа λ.

Таким чином, у точці M диференціал $d^2L > 0$ і функция Лагранжа в цій точці досягає мінімуму. Отже, функція $z = f(x, y)$ у точці $M_1\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{2}\right)$ досягає умовного мінімуму, $z_{\min} = -13/6$. У точці N диференціал $d^2L < 0$ і функція Лагранжа досягає максимуму, а функція $z = f(x, y)$ у відповідній точці $M_2\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}\right)$ досягає умовного максимуму, $z_{\max} = \dfrac{13}{6}$.

Цей приклад можна проілюструвати геометрично (рис. 19.4). На графіку наведено лінії рівня функцій $z = x + y$ та $\varphi(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 13$, що проходять через точку максимуму $M_2\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ функції Лагранжа. Графік не просто ілюструє наведений приклад, але дозволяє запропонувати достатньо простий спосіб його розв'язання.

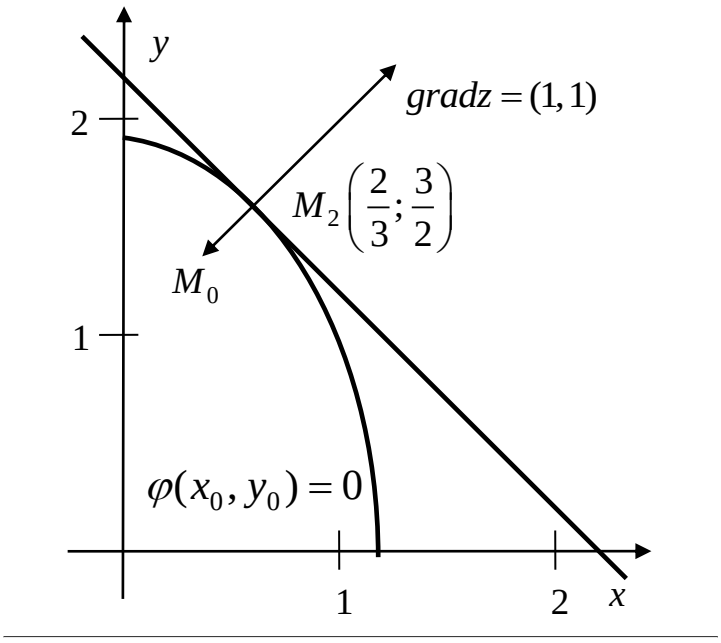


Рис. 19.4

Визначимо проекції градієнта функції $z = x + y$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

З урахуванням співвідношення (19.10) для точки M відносно проекцій градієнта функції $\varphi(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 13$ можна записати:

$$-18\lambda x_0 = 1; \; -18\lambda y_0 = 1.$$

Підставивши ці співвідношення до умови обмеження, отримаємо рівняння відносно λ. Зрозуміло, що в точці M_2 функція $z = x + y$ досягає умовного максимуму. Оскільки функція $\varphi(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 13$ описує еліпс з центром

симетрії у початку координат, то в точці $M_1\left(-\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$ для функції $z=x+y$ буде спостерігатись умовний мінімум.

19.5. Найменше та найбільше значення функції в замкненій області

При відшуканні екстремуму функції кількох змінних, яка неперервна в певній замкненій множині, виникає питання про обчислення найбільшого та найменшого значень, які буде набувати функція на цій множині. У загальному вигляді питання про глобальний мінімум та глобальний максимум є досить складним, оскільки функція може досягати цих значень на границі області, що ускладнює дослідження. Існують спеціальні прийоми, які застосовуються для розв'язання таких задач. Розглянемо їх на прикладі функції двох змінних.

При відшуканні ***найбільшого та найменшого значень функції на замкненій області*** $D\subset D(f)\subset R^2$ можна дотримуватися такої схеми:

1) ***знайти*** стаціонарні точки функції і перевірити, чи належать вони замкненій області, для якої проводиться дослідження;

2) ***знайти*** стаціонарні точки функції на кривій, що описує границю області (дослідити функцію на умовний екстремум);

3) ***обчислити*** значення функції у знайдених стаціонарних точках на замкненій області та її границі;

4) ***порівняти*** знайдені значення функції і вибрати з них найменше та найбільше.



Наприклад, на області $x^2+y^2\le 1$ знайдемо найбільше та найменше значення функції $z=x^2-y^2$. Вихідній нерівності відповідає круг, радіус якого дорівнює одиниці, а центр знаходиться в точці $O(0;0)$.

Спочатку перевіримо, чи має функція стаціонарні точки, які належать області, що визначена нерівністю $x^2+y^2\le 1$. Отже, знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Стаціонарна точка $O(0;0)$ є внутрішньою точкою області визначення і є центром круга. Значення функції $z(0;0) = 0$. Тепер треба дослідити поведінку функції на границі області визначення. По суті це дослідження на умовний екстремум, де рівнянням зв'язку є рівняння границі області визначення функції z. У даному прикладі немає необхідності застосовувати метод множників Лагранжа, оскільки рівняння зв'язку можна розв'язати відносно будь-якої зі змінних. З рівняння $x^2 + y^2 = 1$ дістаємо $y^2 = 1 - x^2$. Підставляючи цей вираз у вихідну функцію, отримаємо функцію однієї змінної $z(x) = x^2 - \left(1 - x^2\right) = 2x^2 - 1,$ де $-1 \le x \le 1$. Знайдемо її стаціонарні точки, використавши необхідну умову екстремуму для функції однієї змінної:

$$\frac{dz}{dx} = 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Знаходимо значення функції в цій точці $z(0) = -1$ та значення на кінцях проміжку $[-1;1]$:

$$z(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 1, \; z(1) = 2(1^2) - 1 = 1.$$

Таким чином, стаціонарними точками функції z будуть точки: $(0;0)$; $(0;1); (0;-1); (1;0); (-1;0)$. Відповідні значення функції в цих точках дорівнюють: $0; -1; -1; 1; 1$. Порівняємо отримані значення за величиною. Звідси випливає, що найменше значення функція набуває у точках (0; –1) та (0; 1) і дорівнює воно числу -1, а найбільше – у точках (–1; 0) та (1; 0) і дорівнює числу 1. Отже,

$$z_{найм.} = z(0;-1) = z(0;1) = -1, \quad z_{найб.} = z(-1;0) = z(1;0) = 1.$$



Ключові терміни

Вектор приростів; похідна за напрямом; градієнт функції; локальний екстремум; необхідна умова екстремуму; стаціонарна точка; матриця Гессе;

достатня умова екстремуму; умовний екстремум; метод невизначених множників Лагранжа; карта ліній рівня; ізокванти; функція Лагранжа; найбільше та найменше значення функції в замкненій області.



Запитання для самоперевірки

1. Що називається похідною за напрямом?
2. Як обчислюється похідна за напрямом?
3. Що називається градієнтом функції?
4. Які властивості має градієнт?
5. Як визначається екстремум функції кількох змінних?
6. Які необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних?
7. Які достатні умови існування екстремуму функції двох змінних?
8. Що називається умовним екстремумом функції двох змінних?
9. Які методи дослідження на умовний екстремум, що застосовуються для функції двох змінних?
10. Що являє собою функція Лагранжа?
11. Як знайти найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області?

Глава 20. Приклади застосування функцій кількох змінних у дослідженнях економічних процесів

Функції кількох змінних широко застосовуються в різних галузях знань, у тому числі і в економіці для опису досліджуваних процесів і явищ. Можна звернути увагу на те, що методи відшукання локальних чи глобальних екстремумів функції кількох змінних покладені в основу методів побудови економічних моделей та визначення стратегії керування економічними процесами з метою оптимізації роботи економічних систем. Зупинимось на деяких важливих прикладах.

20.1. Поняття про емпіричні формули і метод найменших квадратів

Нехай при дослідженні якогось явища або процесу (наприклад, економічного) ведеться спостереження за двома змінними величинами: x і y,

у результаті якого отримано n пар значень $(x;y)$, які зазвичай подаються у вигляді таблиці (табл. 20.1).

Таблиця 20.1

Результати спостережень

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

Необхідно за даними експерименту знайти функціональну залежність y від x, яка б найкращим чином описувала результати спостережень.

Емпіричними формулами називаються функціональні залежності, які побудовані за результатами експерименту. Оскільки значення залежної змінної (функції) y, які обчислюються за емпіричними формулами $\tilde{y} = f(x)$, можуть відрізнятись від результатів вимірювань y_i для відповідного значення x_i, то значення, що обчислені за емпіричними формулами, позначаються $\tilde{y}_i$.

Побудова емпіричної формули здійснюється у два етапи.

Перший етап передбачає визначення множини можливих функцій, до яких може, згідно з теоретичним припущенням, належати шукана залежність. Вибір функції, яку доцільно використовувати для наближеного опису (***апроксимації***) результатів досліджень, здійснюється на основі теоретичних припущень щодо природи явища, яке досліджується, або за результатами візуального аналізу розташування точок на площині.

Кожний клас функцій характеризується кількома числовими параметрами $a_0,\ a_1,...,a_m$, кількість яких залежить від типу функції. Наприклад, лінійна залежність $y = kx + b$ містить два параметри: k – кутовий коефіцієнт, b – величина відрізка, який пряма відтинає на осі ординат; квадратична залежність $y = ax^2 + bx + c$ описується формулою, що залежить від трьох числових параметрів a, b, c тощо. Відповідно, значення функції, якого вона набуватиме за емпіричною формулою, залежить не тільки від значення аргументу, але і від цих параметрів, тому параметри теж вносять у символічний запис емпіричної формули: $\tilde{y} = f(x,\ a_0,\ a_1,...,a_m)$.

На другому етапі обчислюють значення числових параметрів, що визначають кожну з обраних функцій $\tilde{y} = f(x,\ a_0,\ a_1,...,a_m)$. Вони повинні бути такими, щоб функція найкраще описувала явище, що вивчається. Слід зазначити, що побудова емпіричних формул є однією з задач, які досліджує математична статистика за допомогою регресійного аналізу.

Одним із найпоширеніших методів, що застосовуються для відшукання параметрів емпіричних формул, є ***метод найменших квадратів (МНК)***. Його базовий принцип полягає в тому, що функція вважається найкращою для апроксимації емпіричних даних, якщо сума квадратів різниць між емпіричними значеннями залежної змінної y_i і значеннями, обчисленими за допомогою функції $\tilde{y}$ при одному і тому самому значенні аргументу x_i, є мінімальною.

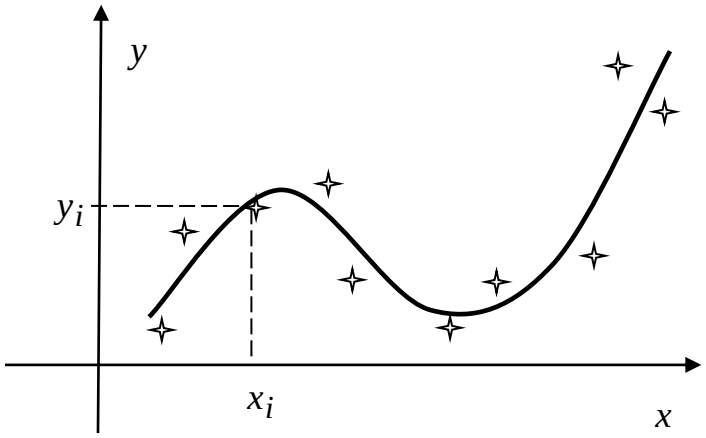


Рис. 20.1

Різниця між значеннями y_i ($i=\overline{1,n}$), які отримані як результат досліджень, і обчисленими за емпіричною формулою

$$\tilde{y}_i = f(x_i,\ a_0,\ a_1,...,a_m),$$

тобто відхилення емпіричних значень функціональної змінної від теоретичних, є ***похибками моделі***. Ці похибки позначають через ε_i.

Отже,

$$y_i - f(x_i,\ a_0,\ a_1,...,\ a_m) = \varepsilon_i,\ i=\overline{1,n}.$$

Згідно з принципом МНК невідомі параметри функції, за допомогою якої здійснюється апроксимація, вибирають так, щоб сума квадратів похибок була мінімальною:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i,\ a_0,\ a_1,...,a_m)\right)^2 \to \min. \qquad (20.1)$$

Функція (20.1) називається ***функцією похибок***. Ясно, що вона залежить від параметрів моделі a_j ($j=\overline{0,m}$), тобто $S = S(a_0, a_1,..., a_m)$. Отже, згідно з методом МНК, ми маємо функцію $m+1$ змінної, для якої потрібно знайти мінімум і вказати значення $a_0,\ a_1,...,a_m$, при яких він досягається. Відшукання параметрів емпіричних формул здійснюється за таким алгоритмом:

1) ***утворюють*** суму квадратів відхилень емпіричних значень залежної змінної від її теоретичних значень, тобто за формулою (20.1) утворюють функцію похибок S;

2) ***записують*** необхідну умову локального екстремуму функції S у вигляді системи рівнянь вигляду $\dfrac{\partial S}{\partial a_j} = 0,\ j=\overline{0,m}$;

3) ***розв'язують*** систему і знаходять числа a_j, $j=\overline{0,m}$, які забезпечують мінімальне значення S.

Доведено, що відповідна стаціонарна точка є точкою мінімуму функції $S=S(a_0,\ a_1,...,a_m)$.

Одним із принципів, які покладені в основу побудови емпіричних формул, є припущення, що зв'язок між факторами, які розглядаються, є найпростішим. Тому детальніше розглянемо побудову емпіричної формули у випадку, коли апроксимуючою є лінійна функція $\tilde{y}(x,\ a_0,\ a_1)=a_0+a_1x$. Функція похибок у даному випадку має вигляд:

$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_0-a_1x_i)^2\ .$$

За необхідною умовою екстремуму знаходимо її частинні похідні першого порядку і прирівнюємо їх до нуля. Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} S'_{a_0}=\sum\limits_{i=1}^{n}2(y_i-a_0-a_1x_i)\cdot(-1)=0; \\ S'_{a_1}=\sum\limits_{i=1}^{n}2(y_i-a_0-a_1x_i)\cdot(-x_i)=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0\sum\limits_{i=1}^{n}1+a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i; \\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i. \end{cases}$$

Для всіх сум, що присутні у цій системі, існують спеціальні позначення, які прийняті в математичній статистиці:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x},\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\overline{x^2},\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\overline{y},\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\overline{xy}.$$

З використанням цих позначень необхідну умову екстремуму можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} a_0+a_1\overline{x}=\overline{y}; \\ a_0\overline{x}+a_1\overline{x^2}=\overline{xy}, \end{cases} \tag{20.2}$$

або у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{x} \\ \overline{x} & \overline{x^2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{xy} \end{pmatrix}.$$

Ця система називається ***системою нормальних рівнянь*** для відшукання параметрів емпіричної формули. Звідси визначаємо, що

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}; \qquad a_0 = \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot (\overline{xy})}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}. \tag{20.3}$$

Розв'язок системи (20.2) дає найкращі значення шуканих параметрів, при яких для обраного виду функції сума квадратів похибок буде найменшою.

У випадку, коли залежність між змінними y та x слід апроксимувати функцією, яка не є лінійною, застосування методу найменших квадратів потребує попередньої ***лінеаризації*** моделі, тобто введення нових змінних таким чином, щоб залежність між цими новими змінними була лінійною. Наприклад, якщо залежність змінної y від змінної x описується гіперболічною функцією, тобто $f(x,\ a_0,\ a_1) = a_0 + a_1 x^{-1}$, то вводять змінну $X = x^{-1}$, і систему нормальних рівнянь (20.2) записують відносно цієї змінної.

Якщо залежність є степеневою, тобто $f(x, a_0, a_1) = a_0 x^{a_1}$, функцію спочатку треба прологарифмувати за будь-якою основою (наприклад, за десятковою):

$$\lg y = \lg a_0 + a_1 \cdot \lg x.$$

Введемо нові змінні: $Y = \lg y$, $X = \lg x$. За їх допомогою укладаємо систему нормальних рівнянь (20.2), і за цією системою визначаємо параметри моделі $A_0 = \lg a_0$ та a_1. Після їх обчислення необхідно повернутися до вихідних змінних.

Нехай наближенням функції є квадратний тричлен, тобто маємо:

$$f(x,\ a_0,\ a_1,\ a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Записуючи функцію похибок, яку потрібно мінімізувати

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2,$$

визначимо її частинні похідні за невідомими a_0, a_1 та a_2. Оскільки за необхідною умовою екстремуму вони дорівнюють нулю, маємо:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)\cdot x_i = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)\cdot x_i^2 = 0. \end{cases}$$

Перетворимо систему, розв'язавши її відносно невідомих:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i; \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases} \qquad (20.4)$$

Поділивши обидві частини кожного рівняння на n (кількість вимірювань), отримаємо нову систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_2 \overline{x^2} + a_1 \bar{x} + a_0 = \bar{y}; \\ a_2 \overline{x^3} + a_1 \overline{x^2} + a_0 \bar{x} = \overline{xy}; \\ a_2 \overline{x^4} + a_1 \overline{x^3} + a_0 \overline{x^2} = \overline{x^2 y}. \end{cases}$$



Слід зазначити, що значення параметрів певної функції, обчислення яких проводилось за методом найменших квадратів, забезпечують найменшу суму квадратів похибок порівняно з іншими параметрами цієї функції, однак застосування для апроксимації іншої функції може дати менше значення суми квадратів похибок.

Покажемо це на прикладі. У табл. 20.2 наведені дані щодо чисельності населення Харківської області за останні 10 років.

Визначимо функцію, за якою доцільно здійснювати апроксимацію емпіричних даних з метою подальшого складання короткострокового прогнозу. Для цього за вихідними даними побудуємо графік (рис. 20.2), що дозволить візуально оцінити вид апроксимуючої функції.

Таблиця 20.2

Чисельність населення Харківської області

№	Рік	Кількість населення, млн осіб
1	2001	2,94
2	2002	2,91
3	2003	2,89
4	2004	2,87
5	2005	2,85
6	2006	2,83
7	2007	2,81
8	2008	2,80
9	2009	2,78
10	2010	2,77

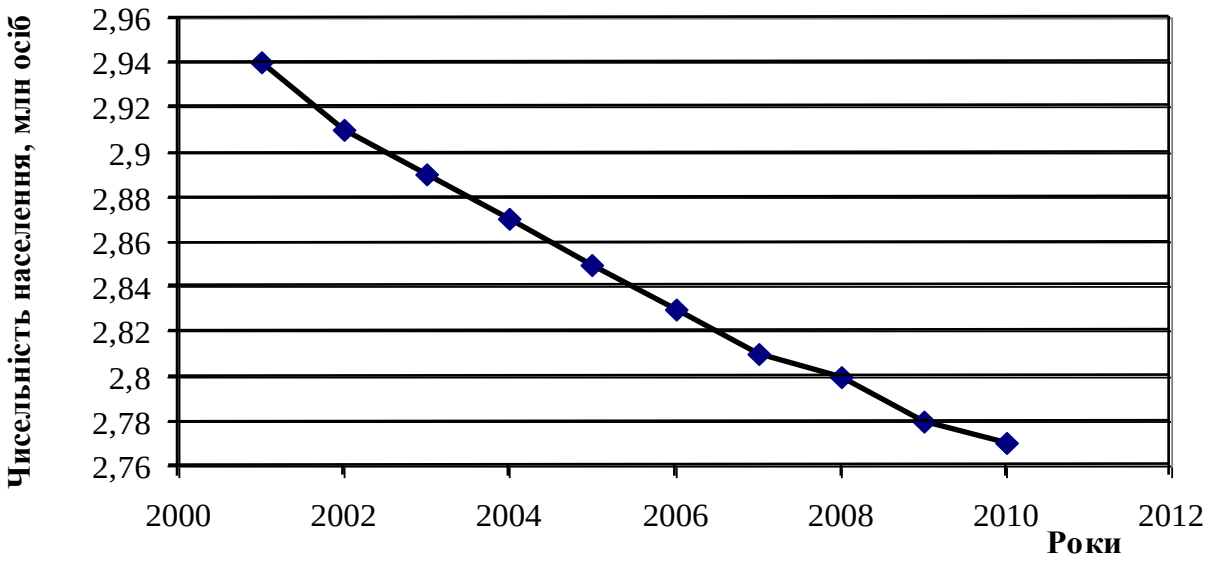


Рис. 20.2

Розглянемо спочатку найпростішу ***лінійну модель.*** Тобто за виглядом графіка припустимо, що кількість населення з роками зменшується за лінійною функцією. Для спрощення обчислень замість року в моделі будемо використовувати його номер. Отже, будемо шукати параметри емпіричної формули:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x,$$

де x – номер року. Наведемо обчислення у вигляді таблиці (табл. 20.3).

Таблиця 20.3

Розрахунок параметрів лінійної моделі

Рік	x	y	x^2	xy	$\tilde{y}$	$(y-\tilde{y})^2$
2001	1	2,94	1	2,94	2,9293	0,0001145
2002	2	2,91	4	5,82	2,9106	0,0000004
2003	3	2,89	9	8,67	2,8919	0,0000036
2004	4	2,87	16	11,48	2,8732	0,0000102
2005	5	2,85	25	14,25	2,8545	0,0000202
2006	6	2,83	36	16,98	2,8358	0,0000336
2007	7	2,81	49	19,67	2,8171	0,0000504
2008	8	2,80	64	22,40	2,7984	0,0000026
2009	9	2,78	81	25,02	2,7797	0,0000001
2010	10	2,77	100	27,70	2,7610	0,0000810
Сума	55	28,45	385	154,93		0,0003166
Середнє	5,5	2,845	38,5	15,493		

Підставляючи середні з останнього рядка табл. 20.3 у формули (20.3), отримуємо параметри лінійної моделі:

$$a_1 = \frac{15.493 - 5.5 \cdot 2,845}{38,5 - 5,5^2} = -0,0187;$$

$$a_0 = 2,845 + 0,0187 \cdot 5,5 = 2,948.$$

Отже, апроксимуюча функція знайдена у вигляді:

$$\tilde{y} = 2,948 - 0,0187 \cdot x.$$

Обчислимо за цим наближенням теоретичні значення функції та визначимо суму квадратів похибок (останні два рядки табл. 20.3). Виявилось, що сума квадратів похибок у цьому разі дорівнює 0,00032. Це найменша величина порівняно з тим, яку б ми отримали за допомогою інших лінійних функцій. Якщо цю формулу використовувати для прогнозу, то у 2012 році можна очікувати, що кількість населення становитиме:

$$\tilde{y} = 2,948 - 0,0187 \cdot 12 = 2,724 \text{ (млн осіб).}$$

Розглянемо апроксимацію за допомогою квадратного тричлена, що теж можна припустити, виходячи з вигляду графіка:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 .$$

Визначивши всі коефіцієнти системи нормальних рівнянь (20.4) і розв'язавши цю систему (пропонуємо зробити це самостійно), отримали такі значення параметрів моделі:

$$\tilde{y} = 3122,2 - 35,425 \cdot x + 0,7945 \cdot x^2 .$$

Застосувавши цю модель, також обчислимо значення $\tilde{y}$, які відповідають емпіричним даним, і визначимо суму квадратів відхилень між емпіричними і теоретичними даними (пропонуємо теж зробити це самостійно). Як наслідок, ми отримали, що сума квадратів відхилень при застосуванні квадратичної функції становить 0,0001, що менше, ніж при застосуванні лінійної апроксимації. Отже, для прогнозування доцільно використовувати останню модель. Так, якщо прийняти модель, що базується на квадратичній залежності, то у 2012 році слід очікувати таку кількість населення:

$$\tilde{y} = 3122,2 - 35,425 \cdot 16 + 0,7945 \cdot 16^2 = 2758,79 \text{ (тис. осіб).}$$

Припустимо, що кількість населення залежно від року визначається ***гіперболою***, тобто

$$\tilde{y} = a_0 + \frac{a_1}{x} .$$

Тоді матимемо таку формулу для визначення $\tilde{y}$:

$$\tilde{y} = 2,79 + \frac{0,176}{x} .$$

Відповідно сума квадратів відхилень при застосуванні цієї функції дорівнює 0,0078, тобто у 20 разів більше, ніж при застосуванні лінійної моделі.

Отже, найкращою моделлю даної задачі можна вважати квадратичну модель (сума квадратів відхилень емпіричних даних від торетичної лінії – найменша).

20.2. Загальні поняття про задачі математичного програмування

Однією з галузей застосування функцій кількох змінних є розв'язання задач оптимізації. Математична дисципліна, яка розглядає теорію побудови математичних моделей задач оптимізації та методи їх розв'язання, називається ***математичним програмуванням***.

Прикладом задач математичного програмування є задачі про оптимальне використання сировини, про оптимальний склад суміші, транспортна задача, яка передбачає оптимізацію перевезень, матрична гра, згідно з якою здійснюється оптимізація ймовірностей застосування тієї чи іншої стратегії, тощо. Хоча всі ці задачі є задачами на умовний екстремум і для їх розв'язання можна застосовувати метод Лагранжа, який розглядався раніше, у межах математичного програмування розробляються спеціальні методи, які призначені для розв'язання саме цих класів задач.

Однією із класичних задач математичного програмування є задача оптимального використання сировини при складанні плану роботи підприємства з метою одержання максимального прибутку від реалізації продукції.

Задача про використання сировини. Нехай підприємство випускає продукцію n найменувань, для виробництва якої використовуються m видів сировини. Потреби у сировині певного виду для виготовлення одиниці продукції, кількість сировини та прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду наведені в табл. 20.4. Скільки одиниць продукції кожного виду треба виробити, щоб отримати максимальний прибуток?

Таблиця 20.4

Задача про використання сировини

Вид сировини	Продукція				Кількість сировини
	1	2	…	n	
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибуток	C_1	C_2		C_n	

Складемо математичну модель задачі. Нехай x_1, x_2, ..., x_n – кількість продукції відповідного найменування, що виробляє підприємство. Тоді за даними табл. 20.4 математична модель задачі у загальному випадку буде:

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \quad (\max),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{20.5}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Таким чином, розв'язок задачі про використання сировини зведено до розв'язку системи m лінійних нерівностей з n невідомими. Зрозуміло, що система (20.5) має безліч розв'язків і серед них потрібно знайти такий, на якому функція Z досягає максимального значення. У загальній постановці маємо задачу на умовний екстремум функції n змінних, в якій на невідомі x_j накладаються обмеження у вигляді системи нерівностей.

Для розв'язання задачі використовуються методи математичного програмування, але для геометричного тлумачення задачі розглянемо її на площині, тобто обмежимось випадком двох змінних. Тоді задача розв'язується на базі відомого зі шкільного курсу методу розв'язання системи нерівностей і деяких властивостей функції двох змінних.

Випадок двох змінних не має особливого практичного значення, але його розгляд дає геометричну наочність, способи розв'язання та шляхи їх практичної реалізації.

Нехай розглядається задача, що є моделлю задачі про використання сировини (20.5), складена тільки відносно двох змінних, а саме:

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \tag{20.6}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Дамо ***геометричне тлумачення*** цієї задачі.

Кожна нерівність (20.6) визначає на площині x_1Ox_2 деяку півплощину, що обмежена граничною прямою (рис. 20.3). Перетином цих площин, якщо система (20.6) сумісна, є многокутник, який і є множиною розв'язків системи обмежень задачі (20.6). Отже, на многокутнику припустимих ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) розв'язків системи обмежень необхідно знайти точку, в якій функція Z досягає максимального значення. Для знаходження цієї точки через початок координат проведемо лінію рівня функції $Z = 0$, тобто побудуємо пряму, яка має рівняння: $C_1x_1 + C_2x_2 = 0.$ Напрям зростання функції Z визначається напрямом вектора $gradZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_2}\right)$, а саме $gradZ = (C_1, C_2)$. За властивістю градієнта цей вектор перпендикулярний до лінії рівня. Лінію рівня функції $Z = 0$ пересуваємо в напрямі градієнта так, щоб вона дотикалася множини припустимих розв'язків системи обмежень у її крайній точці. Координати $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ цієї точки знаходимо розв'язанням відповідної системи рівнянь. Тоді значення функції у цій точці: $Z^* = C_1x_1^* + C_2x_2^*$ (max).

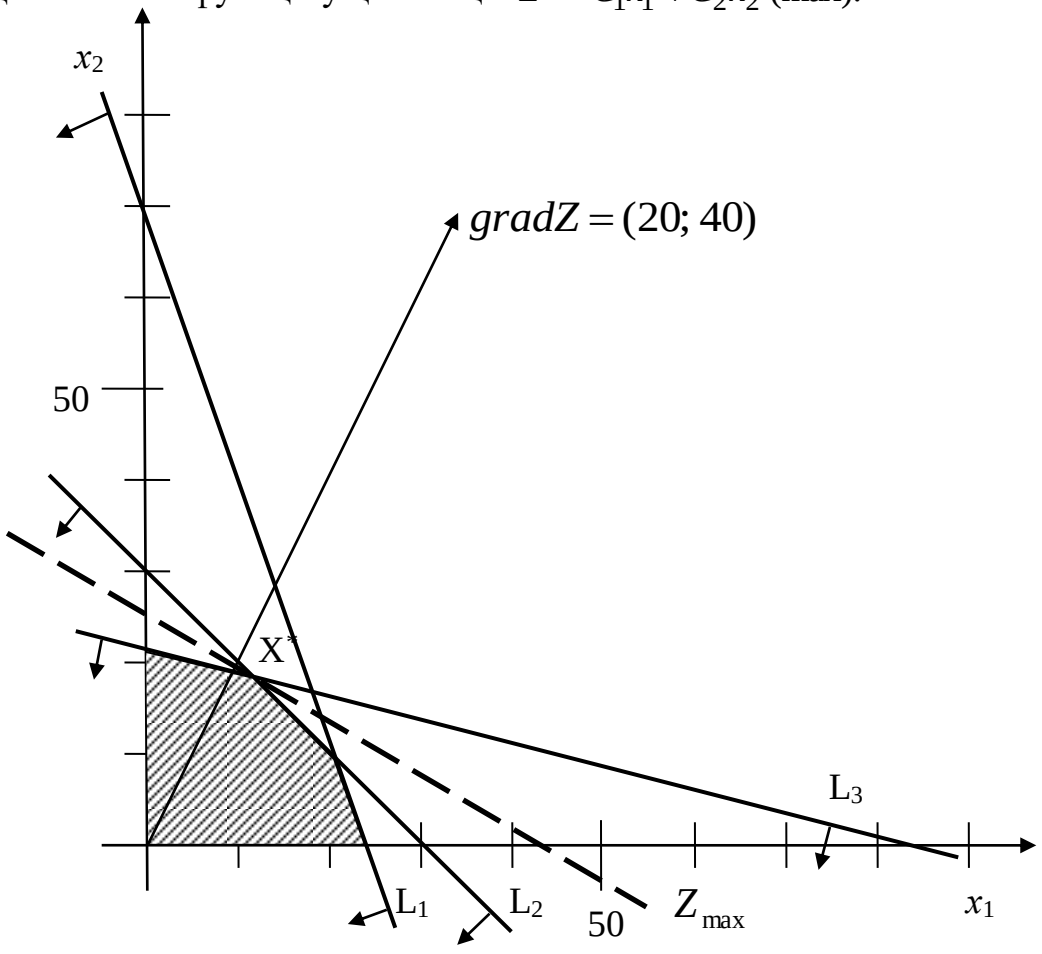


Рис. 20.3

Розглянемо алгоритм графічного розв'язку задачі на прикладі.

Цех має можливість виробляти продукцію двох видів *A* та *B*. При цьому він використовує три види сировини, запаси якої обмежені. Витрати сировини на виробництво одиниці продукції кожного виду, запаси сировини та прибуток від реалізації одиниці продукції задаються таблицею (табл. 20.5).

Таблиця 20.5

Витрати сировини на одиницю продукції та її запас

Вид сировини	Продукція		Кількість сировини
	A	B	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	**3**	12	252
Прибуток	20	40	

Необхідно визначити такий план виробництва, за яким підприємство отримає максимальний прибуток.

Розв'язання. Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо через x_1 кількість одиниць виробу виду *A*, через x_2 – виробу виду *B*, тоді прибуток від реалізації готової продукції є функцією двох змінних: $Z = 20x_1 + 40x_2$.

Оскільки кількість сировини, що витрачається на виготовлення продукції, не може перевищувати її запасів, то обмеження за кожним видом сировини можна записати у вигляді нерівностей, які утворюють основну систему обмежень:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252. \end{cases}$$

Крім того, кількість продукції не може бути від'ємною, тобто існує обмеження на знаки: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Отже, математична модель задачі має вигляд:

$$Z = 20x_1 + 40x_2 \quad (\max),$$
$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Застосуємо до розв'язання задачі графічний метод (див. рис. 20.3). Для побудови многокутника розв'язків системи обмежень у першій чверті координатної площини побудуємо прямі за рівняннями:

$$L_1: \quad 12x_1 + 4x_2 = 300 \Rightarrow \frac{x_1}{25} + \frac{x_2}{75} = 1;$$

$$L_2: \quad 4x_1 + 4x_2 = 120 \Rightarrow \frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{30} = 1;$$

$$L_3: \quad 3x_1 + 12x_2 = 252 \Rightarrow \frac{x_1}{84} + \frac{x_2}{21} = 1.$$

Півплощини, які є розв'язком кожної із нерівностей системи обмежень, перетиняються в межах многутника області допустимих розв'язків.

Побудуємо лінію рівня функції $Z = 0$ та перпендикулярний до неї вектор $grad \; z = (20;\ 40)$. Пересуваючи лінію рівня в напрямі градієнта, визначимо, що лінія рівня дотикається многокутника в точці перетину прямих L_2 та L_3. Саме їй відповідає оптимальний розв'язок, на якому цільова функція досягає максимального значення.

Для знаходження координат цієї вершини, розв'язуємо систему рівнянь, що відповідають лініям L_2 та L_3:

$$\begin{cases} 4x_1^* + 4x_2^* = 120; \\ 3x_1^* + 12x_2^* = 252. \end{cases}$$

Для визначення розв'язку скористаємося формулами Крамера:

$$x_1^* = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2^* = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 12 = 36$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 120 & 4 \\ 252 & 12 \end{vmatrix} = 1440 - 1008 = 432$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 120 \\ 3 & 252 \end{vmatrix} = 1008 - 360 = 648$.

Звідси маємо: $x_1^* = \frac{432}{36} = 12$; $x_2^* = \frac{648}{36} = 18$.

Отже, оптимальний план виробництва $\mathbf{X}^* = (12;18)$. За цим планом цільова функція набуває найбільшого з можливих значень: $Z(\mathbf{X}^*) = 960$. Найбільший прибуток, який дорівнює 960 ум. од., цех отримає, якщо з наявної сировини випускатиме 12 од. продукції *A* та 18 од. продукції *B*.

20.3. Еластичність функції кількох змінних

Чуттєвість ринку до зміни будь-якого з показників находить відображення у такій його властивості, як ***еластичність***, характеристикою якої є коефіцієнт еластичності за цим показником, тобто частинний коефіцієнт еластичності.

Частинним коефіцієнтом еластичності функції $z = f(x,\ y)$ **у точці** $M_0(x_0,\ y_0)$ за її аргументом називається границя відношення частинного приросту функції за цим аргументом до приросту аргументу, якщо приріст аргу-менту прямує до нуля, при цьому значення всіх інших аргументів функції залишаються сталими. Відповідно до сказаного вище, ***еластичність*** E_x ***функції*** $z = f(x,y)$ **за *аргументом*** x визначається співвідношенням

$$E_x(x_0,\ y_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z}. \qquad (20.7)$$

Для визначення еластичності функції $z = f(x, y)$ за аргументом y застосовується аналогічне співвідношення

$$E_y(x_0,\ y_0) = \lim_{y \to y_0} \left(\frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta y}{y} \right) = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z}. \qquad (20.8)$$

Отже, еластичність функції за деяким фактором наближено визначає відношення темпів приросту функції до темпів приросту цього фактора при

незмінному значенні всіх інших факторів, тобто еластичність показує, на скільки відсотків зміниться випуск продукції, якщо витрати якогось ресурсу збільшаться на 1 % при незмінному обсязі іншого ресурсу.

Зауважимо, що коефіцієнт еластичності не має вимірності, він є безрозмірним числом.

За значенням коефіцієнта еластичності для певного аргументу функції поділяють на еластичні в точці, якщо модуль частинного коефіцієнта еластичності більший за одиницю; нееластичні, якщо він за модулем менший за одиницю; нейтральні, якщо він дорівнює одиниці.

Розглянемо приклади застосування еластичності функції в економічних дослідженнях. Однією з поширених областей застосування функції кількох змінних у дослідженнях економічних процесів є побудова виробничих функцій. Під ***виробничою функцією*** мають на увазі функціональну залежність, яка описує кількість продукції, що виробляється, відповідно до факторів виробництва. Найбільш відомою виробничою функцією є ***функція Кобба – Дугласа***, аргументами якої є витрати праці L та капіталу K.



У 1928 році Чарльз Кобб та Пол Дуглас при аналізі факторів виробництва у переробній промисловості США запропонували описувати вплив витрат праці та капіталу на виробництво продукції за допомогою виробничої функції, яка в подальшому отримала їх ім'я. Функція була побудована за емпіричними даними і не мала теоретичного обґрунтування. До речі, при визначенні її параметрів автори застосували метод найменших квадратів.

Традиційно функція Кобба – Дугласа записується у вигляді:

$$Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}, \tag{20.9}$$

де A – технологічний коефіцієнт, $A > 0$;

α та β – параметри моделі, де $0 < \alpha < 1$ та $0 < \beta < 1$, причому у більшості випадків $\alpha + \beta = 1$.

Функція Кобба – Дугласа визначає можливість взаємної заміни таких факторів виробництва, як праця і капітал.

Визначимо, який зміст мають параметри виробничою функції. Для цього знайдемо її коефіцієнти еластичності за кожним аргументом. Так, за фактором праці маємо:

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{A \cdot K^{\beta} \cdot \alpha \cdot L^{\alpha-1} \cdot L}{A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}} = \alpha,$$

тобто показник степеня при аргументі L функції Кобба – Дугласа є частинним коефіцієнтом еластичності за аргументом L.

Аналогічно,

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{A \cdot L^{\alpha} \cdot \beta \cdot K^{\beta-1} \cdot K}{A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}} = \beta,$$

тобто показник степеня при аргументі K функції Кобба – Дугласа є частинним коефіцієнтом еластичності за аргументом K.

Якщо $\alpha + \beta = 1$, то формулу (20.9) можна перетворити:

$$\frac{Q}{L} = A\frac{L^{\alpha} K^{1-\alpha}}{L} = A\frac{L^{\alpha-1}}{K^{\alpha-1}} = A\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha-1}. \qquad (20.10)$$

Відношення $\frac{Q}{L}$ є середньою продуктивністю праці, а $\frac{L}{K}$ – середньою капіталоозброєністю праці. Відношення $\frac{Q}{K}$ називається середньою капіталовіддачею. Обернений дріб $\frac{K}{Q}$ визначає середню капіталоємність продукції, а $\frac{L}{Q}$ – її середню трудоємність.

За виробничою функцією Кобба – Дугласа гранична продуктивність праці визначається формулою:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}\right) = \alpha \cdot A \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^{\beta} = \alpha \frac{Q}{L}.$$

Отже, величина ефекту від кожної додаткової одиниці праці, що витрачається на виробництво продукції, пропорційна середній продуктивності праці, але менша за неї, оскільки $\alpha < 1$.



Розглянемо приклад. Нехай певне виробництво можна описати за допомогою функції Кобба – Дугласа. Відомо, що кожний робітник щомісячно виробляє продукції на 100 000 грн. Загальна чисельність робітників становить

1 000 осіб. Основні фонди оцінюються у 64 млн грн. Відомо, що для збільшення продукції на 3 % треба збільшити або вартість фондів на 6 %, або чисельність робітників на 9 %. Визначимо для даного підприємства функцію Кобба – Дугласа за допомогою її коефіцієнтів еластичності.

За умовою $L = 1000$ осіб, $K = 64 \cdot 10^6$ грн. Відповідно обсяг продукції у вартісному вигляді становить:

$$Q = L \cdot 100\ \ 000 = 1\ \ 000 \cdot 100\ \ 000 = 10^8 \text{ (грн)}.$$

Запишемо функцію Кобба – Дугласа у відносних приростах:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \approx \alpha \frac{\Delta L}{L} + \beta \frac{\Delta K}{K}.$$

Знайдемо частинні коефіцієнти еластичності.

Оскільки для збільшення випуску продукції на 3 % необхідно збільшити вартість фондів на 6 % (при незмінній кількості робітників), то

$$0,03 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0,06 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 1/2.$$

Відповідно, для збільшення випуску продукції на 3 % необхідно збільшити кількість робітників на 9 % (при незмінній вартості фондів),

$$0,03 = \alpha \cdot 0,09 + \beta \cdot 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 1/3.$$

Тепер знайдемо технологічний коефіцієнт:

$$A = \frac{Q}{L^{1/3} \cdot K^{1/2}} = \frac{10^8}{\sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt{64 \cdot 10^6}} = 1250.$$

Отже, виробнича функція Кобба – Дугласа для даного підприємства має вигляд:

$$Q = 1250 \cdot L^{1/3} \cdot K^{1/2}.$$



Ключові терміни

Емпіричні формули; апроксимація; метод найменших квадратів (МНК); похибки моделі; функція похибок; система нормальних рівнянь; лінеаризація моделі; математичне програмування; задача оптимізації; оптимальний план;

еластичність; частинний коефіцієнт еластичності функції в точці; виробнича функція; функція Кобба – Дугласа.



Запитання для самоперевірки

1. Що таке емпіричні формули і з якою метою вони застосовуються?
2. У чому полягає принцип методу найменших квадратів?
3. Що описує система нормальних рівнянь?
4. Наведіть приклади задач, що належать до класу оптимізаційних.
5. Які значення аргументів цільової функції утворюють многокутник планів у задачах лінійного програмування?
6. Які лінії є лініями рівня функції Z?
7. Який вектор показує напрям зростання функції Z?
8. Як знайти на многокутнику розв'язків задачі точку, що відповідає максимальному значенню функції Z?
9. Наведіть схему графічного розв’язку задачі про оптимальне використання сировини.
10. Що таке еластичність функції?
11. Як визначаються частинні коефіцієнти еластичності в точці?
12. Які функції називаються виробничими?
13. Запишіть виробничу функцію Кобба – Дугласа і наведіть зміст її параметрів.



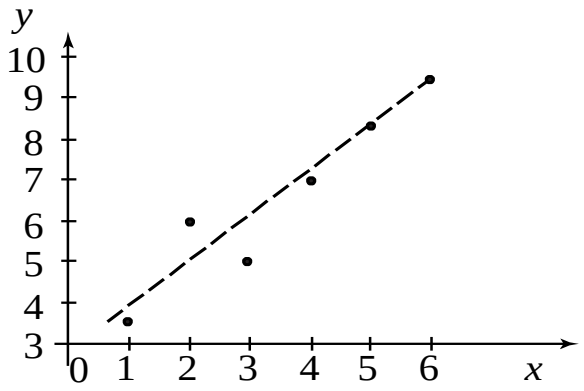
Приклади та вправи за розділом 5

Приклади застосування функцій багатьох змінних до розв’язання задач економіки.

5.1. Знайти емпіричну формулу, що описує залежність між вартістю основних коштів і виробітком на одного робітника, які задані таблицею:

Вартість основних коштів (млн грн)	1	2	3	4	5	6
Виробіток продукції на одного робітника (тис. грн)	3,5	6	5	7	8,5	9,5

Розв'язання. За x беремо вартість основних коштів, а за y – виробіток продукції на одного робітника. Перенесемо дані таблиці на графік:



З графіка видно, що точки розміщуються вдовж прямої: $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$. Отже, параметри a_0 і a_1 знайдемо із системи нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Щоб записати цю систему, треба знайти $\sum x, \sum y, \sum x^2, \sum xy$.

Розрахунки розміщуємо в таблиці:

№,	x	y	x^2	xy	%
1	1	3,5	1	3,5	3,76
2	2	6	4	12	4,89
3	3	5	9	15	6,02
4	4	7	16	28	7,15
5	5	8,5	25	42,5	8,28
6	6	9,5	36	57	9,41
Сума	21	39,5	91	158	39,51

Використовуючи суми (останній рядок таблиці), записуємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} 6a_0 + 21a_1 = 39,5, \\ 21a_0 + 91a_1 = 158. \end{cases}$$

Обидві частини першого рівняння розділимо на 6, а другого – на 21, отримуємо систему:

$$\begin{cases} a_0 + 3,5a_1 = 6,583, \\ a_0 + 4,333a_1 = 7,524. \end{cases}$$

Розв’язавши систему рівнянь, одержимо: $a_0 = 2,63, \quad a_1 = 1,13$.

Отже, отримуємо емпіричну формулу:

$$\tilde{y} = 1{,}13x + 2{,}63.$$

Порівняємо значення y_i та $\tilde{y}_i$. Для цього проведемо розрахунки, підставляючи в отримане рівняння значення x_i. Розрахунки записуємо у 6-й стовпець таблиці. Тепер бачимо, що y_i і $\tilde{y}_i$ не дуже відрізняються один від одного.

Зазначимо, що суми, які одержали за рівнянням, і емпіричні (3-й стовпець) з точністю до десятих збіглися (39,5).

На графіку наведена лінія, рівнянням якої є $\tilde{y} = 1{,}13x + 2{,}63$. Видно, що емпіричні точки розміщені поблизу побудованої прямої, тобто емпірична формула відображає розглянуту залежність.

До речі, з цього рівняння випливає, що виробіток продукції на одного робітника збільшиться на 1,13 тис. грн, якщо вартість основних коштів збільшиться на 1 млн грн.

5.2. Залежність між вартістю основних коштів і собівартістю одиниці продукції наведені в таблиці:

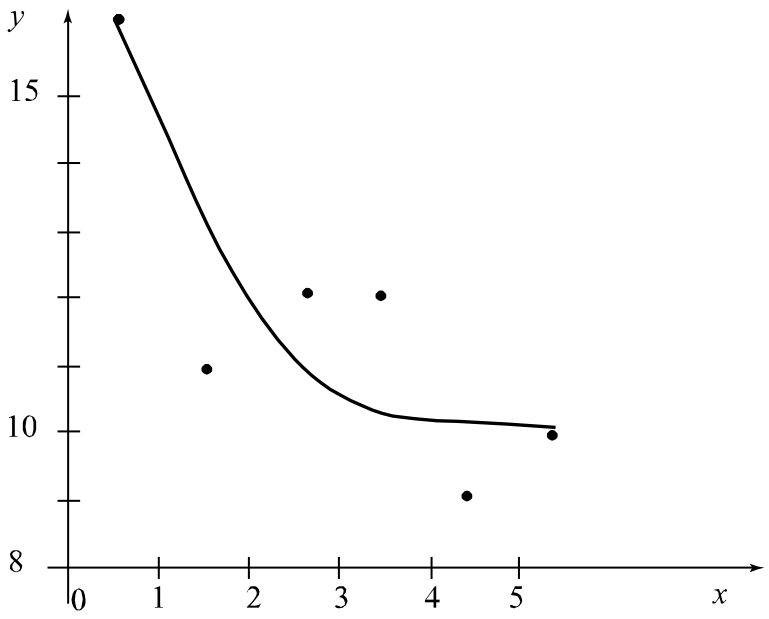
Вартість основних коштів (ум. од.)	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
Собівартість одиниці продукції (ум. од.)	16	11	12	12	9	10

Знайти емпіричну формулу, що описує залежність між вартістю основних коштів і собівартістю одиниці продукції.

Розв'язання. За x беремо вартість основних коштів, а за y – собівартість одиниці виробу. Для того щоб підібрати емпіричну формулу, перенесемо дані таблиці на графік.

За змістом задачі і виглядом графіка можна зробити висновок, що «найкращою» лінією для визначення залежності є гіпербола. Тому емпіричну формулу будемо шукати у такому вигляді:

$$\tilde{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}.$$



Спочатку лінеаризуємо цю залежність.

Позначимо $\frac{1}{x} = x'$, тоді відносно нової змінної маємо лінійний зв'язок:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x'.$$

Параметри a_0 і a_1 цієї залежності знайдемо за методом найменших квадратів із системи нормальних рівнянь.

Допоміжні розрахунки для визначення коефіцієнтів системи нормальних рівнянь проведемо у вигляді таблиці:

№	x	y	$\frac{1}{x}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\tilde{y}$
1	0,5	16	2	32	4	15,95
2	1,5	11	0,667	7,333	0,445	11,79
3	2,5	12	0,400	4,800	0,160	10,96
4	3,5	12	0,286	3,429	0,082	10,60
5	4,5	9	0,222	2,000	0,049	10,40
6	5,5	10	0,182	1,818	0,033	10,28
Сума	18,0	70	3,757	51,380	4,769	69,98

Використовуючи суми останнього рядка таблиці, маємо:

$$\begin{cases} 6a_0 + 3,757a_1 = 70, \\ 3,757a_0 + 4,769a_1 = 51,380. \end{cases}$$

З цієї системи знайдемо: $a_0 = 9,71$, $a_1 = 3,12$.

Отже, емпірична формула відносно змінної x' має вигляд:

$$\tilde{y} = 9,71 + 3,12x'.$$

Тепер повернемося до вихідної змінної:

$$\tilde{y} = 9,71 + \frac{3,12}{x}.$$

Для оцінки адекватності емпіричної формули обчислимо $\%$ для кожного значення x_i і порівняємо з y_i. Розрахунки записуємо в 7-му стовпці таблиці. За одержаною формулою побудуємо графік функції. Емпіричні точки розташовані досить близько до побудованої кривої.

5.3. Залежність між вартістю основних коштів і місячним випуском продукції задана таблицею:

Вартість основних коштів (ум. од.)	1	2	3	4	5
Місячний випуск продукції (ум. од.)	2	5	9	10	11

Знайти емпіричну формулу, що описує залежність між вартістю основних коштів (x) і щомісячним випуском продукції (y) у припущенні, що ця залежність є параболічною.

Розв'язання. Емпіричну формулу шукаємо в такому вигляді:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Застосовуючи метод найменших квадратів, параметри a_0, a_1, a_2 обчислюються із системи нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_o + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 = \sum y, \\ a_o \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 = \sum yx, \\ a_o \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 = \sum yx^2. \end{cases}$$

Для того щоб записати систему нормальних рівнянь, необхідно обчислити $\sum x, \sum x^2, \sum x^3, \sum x^4, \sum y, \sum yx, \sum yx^2$. Усі допоміжні обчислення проведемо в таблиці:

№	x	y	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4	$\tilde{y}$
1	1	2	2	1	2	1	1	1,8
2	2	5	10	4	20	8	16	5,6
3	3	9	27	9	81	27	81	8,4
4	4	10	40	16	160	64	256	10,2
5	5	11	55	25	275	125	625	11
Сума	15	37	134	55	538	225	979	37

Система нормальних рівнянь набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} 5a_o + 15a_1 + 55a_2 = 37, \\ 15a_o + 55a_1 + 225a_2 = 134, \\ 55a_o + 225a_1 + 979a_2 = 538. \end{cases}$$

Цю систему лінійних рівнянь можна розв'язати, наприклад, за методом Жордана – Гаусса. Для цього зручно проводити перетворення не з самими рівняннями, а з матрицею їх коефіцієнтів, а саме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 15 & 55 & 37 \\ 15 & 55 & 225 & 134 \\ 55 & 225 & 979 & 538 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 7,4 \\ 15 & 55 & 225 & 134 \\ 55 & 225 & 979 & 538 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 7,4 \\ 0 & 10 & 60 & 23 \\ 0 & 60 & 374 & 131 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 7,4 \\ 0 & 1 & 6 & 2,3 \\ 0 & 60 & 374 & 131 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0,5 \\ 0 & 1 & 6 & 2,3 \\ 0 & 0 & 14 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0,5 \\ 0 & 1 & 6 & 2,3 \\ 0 & 0 & 1 & -0,5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5,3 \\ 0 & 0 & 1 & -0,5 \end{array}\right).$$

Отже, розв'язком системи є $a_0 = -3, a_1 = 5,3, a_2 = -0,5,$ а емпірична формула має вигляд:

$$\tilde{y} = -3 + 5,3x - 0,5x^2.$$

Обчислимо значення $\tilde{y}$ для всіх x_i і занесемо в останній стовпець таблиці. Порівнюючи $\tilde{y}$ та y бачимо, що відхилення невеликі, що свідчить про адекватність емпіричної формули.

5.4. Нехай випуск деякого товару характеризується виробничою функцією: $z(x, y) = 3x^2 - 2xy + 4y^2 + 10x + 20y$, де x та y – чинники виробництва. Знайти закон зміни виробничої функції щодо кожного чинника. Обчислити еластичність $E_x(z)$ і $E_y(z)$ при $x = y = 1$.

Розв'язання. Швидкість будь-якого процесу характеризує похідна функції. Щоб визначити зміну виробничої функції щодо чинника x, необхідно взяти від функції $z(x, y)$ частинну похідну за змінною x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 2y + 10.$$

Для визначення зміни виробничої функції щодо чинника y необхідно знайти від функції $z(x, y)$ частинну похідну за змінною y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 8y + 20.$$

Обчислюємо еластичності $E_x(z)$ і $E_y(z)$:

$$E_x(z) = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},\ E_y(z) = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Тоді

$$E_x(z) = \frac{x}{3x^2 - 2xy + 4y^2 + 10x + 20y} \cdot (6x - 2y + 10);$$

$$E_y(z) = \frac{y}{3x^2 - 2xy + 4y^2 + 10x + 20y} \cdot (-2x + 8y + 20).$$

При $x = 1$, $y = 1$ маємо: $E_x(z)$=0,4; $E_y(z)$=0,74.

Відповідь: із зростанням чинника x на 1 % (за умови, що y не змінюється) функція збільшується на 0,4 %. Із зростанням чинника y на 1 % (за умови що x не змінюється) виробнича функція збільшується на 0,74 %.

5.5. Фірма виробляє два види продукції, які продає за цінами 500 та 600 грн за одиницю. Обсяги випуску продукції становлять x_1 і x_2 відповідно. Функція витрат має вигляд: $K(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$.

Знайти такий план випуску продукції, за яким отриманий прибуток буде максимальним. Обчислити цей прибуток.

Розв'язання. Прибуток від продажу продукції обох видів складатиме $C = 500x_1 + 600x_2$. З урахуванням функції витрат фірма отримає такий прибуток:

$$P = C - K = 500x_1 + 600x_2 - x_1{}^2 - 2x_2{}^2 - 2x_1x_2.$$

Далі необхідно дослідити цю функцію на екстремум. Знаходимо стаціонарні точки, для чого визначаємо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 500 - 2x_1 - 2x_2,$$
$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 600 - 4x_2 - 2x_1.$$

За необхідною умовою існування екстремуму: $\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$, тобто:

$$\begin{cases} 500 - 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ 600 - 2x_1 - 4x_2 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 250, \\ x_1 + 2x_2 = 300, \end{cases}$$

звідки $x_1 = 200$, $x_2 = 50$.

Перевіримо, що при такому обсязі продукції прибуток буде максимальним. Для цього побудуємо матрицю Гессе (матрицю похідних другого порядку) і обчислимо її визначник у точці $(200;50)$.

$$A = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1{}^2} = -2;\ C = \frac{\partial^2 P}{\partial x_2{}^2} = -4;\ B = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} = -2.$$

Тоді $AC - B^2 = 8 - 4 > 0$, а $A < 0$, тому при $x_1 = 200$, $x_2 = 50$ фірма отримує максимальний прибуток, який становить:

$$P_{\max} = 500 \cdot 200 + 600 \cdot 50 - 200^2 - 2 \cdot 50^2 - 2 \cdot 200 \cdot 50 = 65000 \text{ (грн)}.$$

Відповідь: прибуток у розмірі 65000 грн фірма отримає, якщо буде виробляти 200 од. продукції за ціною 500 грн і 50 од. продукції за ціною 600 грн.

5.6. Фірма реалізує частину товару на внутрішньому ринку, де ціна одиниці товару становить p одиниць, і пов'язана з кількістю товару x_1 залежністю $p + 2x_1 = 400$, а іншу частину товару поставляє на експорт, де ціна товару p і його кількість x_2 пов'язані залежністю $3p + 2x_2 = 540$. Сумарні витрати мають вигляд $Q = 10000 + 40x_1 + 20x_2$.

Визначити, яку кількість товару необхідно реалізувати на внутрішньому ринку, а яку поставити на експорт, щоб фірма отримувала максимальний прибуток.

Розв'язання. За рівнянням $p + 2x_1 = 400$ знаходимо, що ціна реалізації одиниці товару на внутрішньому ринку становить $p = 400 - 2x_1$.

З рівняння $3p + 2x_2 = 540$ знаходимо, що ціна реалізації одиниці товару, який поставляється на експорт, становить $p = \frac{1}{3}(540 - 2x_2)$.

Прибуток від реалізації товарів складає:

$$C = (400 - 2x_1)x_1 + \frac{1}{3}(540 - 2x_2)x_2.$$

З урахуванням витрат фірма має прибуток:

$$\Pi = (400 - 2x_1)x_1 + \frac{1}{3}(540 - 2x_2)x_2 - 10000 - 40x_1 - 20x_2,$$

або

$$\Pi = -2x_1^2 - \frac{2}{3}x_2^2 + 360x_1 + 160x_2 - 10000.$$

Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = -4x_1 + 360; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -\frac{4}{3}x_2 + 160.$$

За необхідною умовою існування екстремуму маємо:

$$\begin{cases} -4x_1 + 360 = 0, \\ -\frac{4}{3}x_2 + 160 = 0, \end{cases}$$

звідси $x_1 = 90$ од., $x_2 = 120$ од.

За достатньою умовою екстремуму перевіримо, що при $x_1 = 90$, $x_2 = 120$ фірма матиме максимальний прибуток. Знайдемо другі похідні функції в точці $(90;120)$:

$$A = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^{\,2}} = -4; \quad C = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^{\,2}} = -\frac{4}{3}; \quad B = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Визначимо знак $AC - B^2 = -4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} > 0$, тобто у стаціонарній точці $(90;120)$ має місце екстремум. Крім того, $A = -4 < 0$, а це свідчить про те, що функція має максимум.

Відповідь: фірма матиме максимальний прибуток, якщо на внутрішньому ринку буде реалізовувати 90 од., а на зовнішньому – 120 од. товару, при цьому $\Pi_{max} = 15800$ (гр. од.).

5.7. Вартість будівництва 1 м^2 фасаду дорівнює a гр. од., інших стін – b гр. од., даху – c гр. од. Визначити, за яких розмірів будинку вартість його будівництва (з урахуванням верхнього покриття) буде найменшою при заданій кубатурі, якщо вартість будівництва описується формулою:

$$S = a\frac{v}{y} + b\frac{v}{y} + 2b\frac{v}{x} + cxy,$$

де x – довжина фасаду (м); y – ширина будинку (м); z – висота будинку (м); v – об'єм будинку.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку від функції вартості будівництва і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{2bv}{x^2} + cy, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{av}{y^2} - \frac{bv}{y^2} + cx.$$

Отримуємо систему рівнянь відносно координат стаціонарної точки:

$$\begin{cases} -\dfrac{2bv}{x^2} + cy = 0; \\ -\dfrac{av}{y^2} - \dfrac{bv}{y^2} + cx = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2bv}{x^2} = cy; \\ \dfrac{v(a+b)}{y^2} = cx. \end{cases}$$

З другого рівняння знайдемо x і підставимо у перше:

$$\begin{cases} \dfrac{2bv\cdot y^4c^2}{v^2(a+b)^2}=cy; \\ x=\dfrac{v(a+b)}{cy^2}. \end{cases}$$

Тепер з першого рівняння останньої системи маємо:

$$y=\sqrt[3]{\frac{v(a+b)^2}{2bc}}.$$

Тоді

$$x=\frac{v(a+b)}{c}\sqrt[3]{\left(\frac{2bc}{v(a+b)^2}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{4vb^2}{c(a+b)}},$$

$$z=\frac{v}{xy}=\frac{v}{\sqrt[3]{\dfrac{4vb^2}{c(a+b)}\dfrac{v(a+b)^2}{2bc}}}=\sqrt[3]{\frac{c^2v}{2b(a+b)}}.$$

Перевіримо, що при цих значеннях x, y і z функція S має мінімум.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2S}{\partial x^2}=\frac{4bv}{x^3},\quad \frac{\partial^2S}{\partial y^2}=\frac{2av}{y^3}+\frac{2bv}{y^3},\quad \frac{\partial^2S}{\partial x\partial y}=c.$$

Для перевірки достатньої умови обчислюємо $AC-B^2$, де

$$A=\frac{4bvc(a+b)}{4vb^2}=\frac{c(a+b)}{b},\ \ \mathrm{C}=\frac{2v(a+b)2bc}{v(a+b)^2}=\frac{4bc}{a+b},\ \ \mathrm{B}=\mathrm{c}.$$

Маємо: $AC-B^2=\dfrac{c(a+b)}{b}\dfrac{4bc}{a+b}-c^2=4c^2-c^2=3c^2>0$, отже, екстремум є. Оскільки $A>0$, то функція S у стаціонарній точці має мінімум.

Відповідь: вартість будівництва будинку буде мінімальною за таких розмірів будинку:

$$x=\sqrt[3]{\frac{4vb^2}{c(a+b)}}\ (\text{м});\quad y=\sqrt[3]{\frac{v(a+b)^2}{2bc}}\ (\text{м});\quad z=\sqrt[3]{\frac{c^2v}{2b(a+b)}}\ (\text{м}).$$

5.8. На підприємстві використовують два види ресурсів у кількостях x_1 і x_2 одиниць. Вартість одиниці кожного з ресурсів дорівнює 1 і 2 грн. Для придбання ресурсів виділено 10 000 грн. Визначити оптимальний розподіл ресурсів, який забезпечує підприємству максимальний прибуток, якщо відомо, що сумарний прибуток z залежно від витрат ресурсів описується такою функцією:

$$z=2x_1+10x_2-x_2{}^2.$$

Розв'язання. Треба знайти такі значення x_1 і x_2, які задовольняють умову $x_1+2x_2=10000$ і за яких функція $z=2x_1+10x_2-x_2{}^2$ має максимум.

З рівняння $x_1+2x_2=10000$ знайдемо x_1 і підставимо у функцію z. Отже, $x_1=10000-2x_2$, тоді:

$$z(x_2)=20000+6x_2-x_2{}^2.$$

Ми одержали функцію однієї змінної. Тепер знаходимо її похідну:

$$z'(x_2\ )=6-2x_2.$$

За необхідною умовою екстремуму:

$$6-2x_2=0,$$

звідки $x_2=3$, тоді $x_1=9994$.

Перевіряємо, що ця стаціонарна точка відповідає максимуму функції. Для цього визначаємо знак другої похідної: $z''(x_2)=-2<0$. Отже, дійсно, у стаціонарній точці функція має максимальне значення.

Відповідь: на виділені кошти необхідно придбати першого ресурсу в кількості 9994, а другого – 3 од. Прибуток при цьому дорівнює $z_{\max}(9994;3)=20009\,(\text{грн}).$

5.9. Функція загальних витрат підприємства має вигляд:

$$Q=0,4x^2+0,5xy+0,6y^2+500x+400y+1000,$$

де x і y – кількості товарів видів A і B відповідно.

Загальна кількість виготовленої продукції повинна бути 1000 од. Визначити кількість одиниць товару A і B, яку необхідно виготовити, щоб витрати на їх виготовлення були мінімальними.

Розв'язання. Треба знайти такі значення x і y, за яких функція

$$Q = 0,4x^2 + 0,5xy + 0,6y^2 + 500x + 400y + 1000 \,(\min)$$

за умови $\varphi(x, y) = x + y - 1000 = 0$.

Для дослідження цієї функції на умовний екстремум складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 0,4x^2 + 0,5xy + 0,6y^2 + 500x + 400y + 1000 + \lambda(x + y - 1000).$$

Знаходимо її частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0,8x + 0,5y + 500 + \lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0,5x + 1,2y + 400 + \lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1000.$$

За необхідною умовою екстремуму маємо:

$$\begin{cases} 0,8x + 0,5y + 500 + \lambda = 0; \\ 0,5x + 1,2y + 400 + \lambda = 0; \\ x + y - 1000 = 0. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 0,3x - 0,7y + 100 = 0; \\ x + y - 1000 = 0; \\ 0,5x + 1,2y + 400 + \lambda = 0. \end{cases}$$

Звідси: $x = 600,\ y = 400,\ \lambda = -1180.$

Отже, знайшли стаціонарну точку функції Лагранжа.

Для перевірки достатньої умови екстремуму визначаємо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0,8; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 1,2; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0,5.$$

Складаємо другий диференціал функції Лагранжа при фіксованому λ:

$$d^2L = 0,8dx^2 + 0,5dxdy + 1,2dy^2.$$

З урахуванням умови $\varphi(x, y) = x + y - 1000 = 0$ маємо: $dy = -dx$.

Отже, $$d^2L = 1,5dx^2 > 0.$$

Оскільки $d^2L > 0$, то маємо умовний мінімум $Q_{\min}(600;400) = 821000$ (ум. од.).

Відповідь: мінімальні витрати у розмірі 821 000 (ум. од.) підприємство матиме за умови виготовлення продукції A у кількості 600 од. і продукції B у кількості 400 од.

5.10. Річні витрати підприємства (амортизація, ремонт, вклади на відновлення тощо) залежно від обсягу двох видів продукції x_1 і x_2 описуються функцією:

$$z = a + b(x_1 + x_2) + \frac{c}{x_1 + x_2} + \frac{c_1}{x_1} + \frac{c_2}{x_2},$$

де a, b, c, c_1, c_2 – додатні сталі.

Визначити умови господарювання підприємства.

Розв'язання. Досліджуємо на екстремум функцію $z = f(x_1, x_2)$.

Спочатку знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = b - \frac{c}{(x_1 + x_2)^2} - \frac{c_1}{x_1^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = b - \frac{c}{(x_1 + x_2)^2} - \frac{c_2}{x_2^2}.$$

За необхідною умовою екстремуму складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} b - \dfrac{c}{(x_1 + x_2)^2} - \dfrac{c_1}{x_1^2} = 0; \\ b - \dfrac{c}{(x_1 + x_2)^2} - \dfrac{c_2}{x_2^2} = 0. \end{cases}$$

Віднімаємо з першого рівняння друге і отримуємо:

$$\frac{c_1}{x_1^2} = \frac{c_2}{x_2^2},$$

звідки $x_1 = \sqrt{\dfrac{c_1}{c_2}}x_2$. Підставляємо x_1 у перше рівняння системи, отримуємо:

$$b-\frac{c}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}x_2+x_2\right)^2}-\frac{c_1}{\frac{c_1}{c_2}x_2{}^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b-\frac{c}{x_2^2\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}+1\right)^2}-\frac{c_2}{x_2{}^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{b\left(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}\right)^2x_2{}^2-cc_2-c_2\left(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}\right)^2}{x_2{}^2\left(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}\right)^2}=0.$$

Звідси, обсяг продукції другого виду дорівнює:

$$x_2=\sqrt{\frac{c_2}{b}\left(1+\frac{c}{\left(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}\right)^2}\right)}.$$

Тепер у співвідношення $x_1=\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}x_2$ підставляємо знайдене x_2 і отримуємо обсяг продукції першого виду:

$$x_1=\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\sqrt{\frac{c_2}{b}\left(1+\frac{c}{\left(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}\right)^2}\right)}=\sqrt{\frac{c_1}{b}\left(1+\frac{c}{\left(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}\right)^2}\right)}.$$

Перевіримо, що при цих значеннях x_1 і x_2 функція має мінімум.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}=\frac{2c}{\left(x_1+x_2\right)^3}+\frac{2c_1}{x_1{}^3};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}=\frac{2c}{\left(x_1+x_2\right)^3}+\frac{2c_2}{x_2{}^3};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{2c}{\left(x_1+x_2\right)^3}.$$

Визначаємо знак $AC-B^2$, де A – значення $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}$ у критичній точці; C – значення $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}$ у критичній точці; B – значення $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}$ у критичній точці:

$$AC-B^2=\left(\frac{2c}{\left(x_1+x_2\right)^3}+\frac{2c_1}{{x_1}^3}\right)\left(\frac{2c}{\left(x_1+x_2\right)^3}+\frac{2c_2}{{x_2}^3}\right)-\frac{4c^2}{\left(x_1+x_2\right)^6}=$$

$$=\frac{4c^2}{\left(x_1+x_2\right)^6}+\frac{4cc_2}{{x_2}^3\left(x_1+x_2\right)^3}+\frac{4cc_1}{{x_1}^3\left(x_1+x_2\right)^3}+\frac{4c_1c_2}{{x_1}^3{x_2}^3}-\frac{4c^2}{\left(x_1+x_2\right)^6}=$$

$$=\frac{4cc_2}{{x_2}^3\left(x_1+x_2\right)^3}+\frac{4cc_1}{{x_1}^3\left(x_1+x_2\right)^3}+\frac{4c_1c_2}{{x_1}^3{x_2}^3}.$$

Кожний доданок є додатним, тому $AC-B^2>0$, а це означає, що екстремум є. Оскільки $A>0$, то функція $f\left(x_1,x_2\right)$ у стаціонарній точці має мінімум.

Відповідь: витрати підприємства будуть мінімальними, якщо воно вироблятиме продукцію у таких обсягах:

$$x_1=\sqrt{\frac{c_1}{b}\left(1+\frac{c}{\left(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}\right)^2}\right)},\ x_2=\sqrt{\frac{c_2}{b}\left(1+\frac{c}{\left(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}\right)^2}\right)}.$$



Задачі та вправи для самостійного розв'язання

Знайти області визначення функцій:

5.11. $z=\sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1}.$

5.12. $z=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{4-y^2}.$

5.13. $z=\log_{\sqrt{3}}\left(y^2-2x+6\right).$

5.14. $z=\arcsin\left(x+y-1\right).$

5.15. $z=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\log_2\left(y+x\right)}.$

5.16. $z=\sqrt{x\sin y}$.

Знайти частинні похідні заданих функцій:

5.17. $z=x^2y+3y^2+5x-\sqrt{2}$.

5.18. $z=e^{5x+3x^3y^2}$.

5.19. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right).$

5.20. $z=x^{\sin y}$.

5.21. $z=\left(x^2+2x\right)^{2y-3}$. **5.22.** $z=\ln tg\dfrac{y}{x}$.

5.23. $z=\dfrac{\cos\left(2y^3-3\right)}{x}$. **5.24.** $z=3x^2ye^{-xy}$.

5.25. Довести, що функція $z=arctg\dfrac{y}{x}$ задовольняє умову:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

5.26. Довести, що функція $z=\sqrt{x}\cos\dfrac{x}{y}$ задовольняє умову:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}.$$

Знайти повні диференціали функцій у заданих точках:

5.27. $z=x^y+y^x$, $\mathrm{M}(1;1)$. **5.28.** $z=\ln\left(x^3+y^3-3xy\right)$, $\mathrm{M}(2;2)$.

Знайти наближене значення функції за допомогою її диференціала.

5.29. Обчислити наближено значення $1{,}03^2\cdot 0{,}98^4$, застосовуючи значення функції $z=x^2y^4$ при $x=1,\ y=1$.

5.30. Знайти наближено значення $\sqrt[3]{1,02^2+0,05^2}$, застосовуючи значення функції $z=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ при $x=1,\ y=0$.

5.31. Знайти наближено значення $\sqrt{1{,}04^{1{,}09}+\ln 1{,}2}$, застосовуючи значення функції $u=\sqrt{x^y+\ln z}$ при $x=1,\ \mathrm{y}=2,\ \mathrm{z}=1$.

Знайти частинні похідні другого порядку для заданих функцій:

5.32. $z=\dfrac{x}{y^2}$. **5.33.** $z=\ln\left(x+y^2\right)$.

5.34. Для функції $z=e^{xy^2}$ знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$.

5.35. Довести, що функція $z=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ за будь-яких значень аргументів задовольняє умову $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

5.36. Знайти похідну функції $z = x^2y^2 + 2x - 2y$ у точці $M(2;2)$ за напрямом вектора, що утворює з осями координат кути $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

5.37. Знайти похідну функції $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$ у точці $M(0;0)$ за напрямом вектора $\bar{S} = \bar{i} + \bar{j}$.

5.38. Знайти похідну функції $f = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ у точці $M(1;2;1)$ за напрямом вектора $\bar{S} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$.

5.39. Знайти градієнт функції $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ у точці $M(3;4)$.

5.40. Знайти похідну функції $z = \ln\left(2x^2 + 3y^2\right)$ у точці $M(1;-1)$ за напрямом градієнта функції z.

5.41. Знайти градієнт функції $f = tgx - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + ctgz$ у точці $M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Знайти екстремуми функцій:

5.42. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$. **5.43.** $z = x^3 + y^3 - 9xy$.

5.44. $z = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 5x - y + 2$. **5.45.** $z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

5.46. $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

5.47. Знайти екстремум функції $z = xy^2$ за умови $x + 2y - 1 = 0$.

5.48. Знайти екстремум функції $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ за умови $x + y = 2$.

5.49. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy(4 - x - y)$ в замкненій області, обмеженій лініями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 8$.

5.50. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ на області, яка визначається нерівностями: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 3 - x$.

5.51. Знайти найбільше й найменше значення функції $z = x^2 + 4y^2$ в області, де $x^2 + y^2 \leq 1$.

5.52. Нехай $z(x, y)$ – виробнича функція, де x – витрати живої праці, y – витрати уречевленої праці. Знайти закон зміни виробничої функції щодо

кожного чинника. Обчислити еластичність функції за кожним чинником при $x = 1,\ y = 1$. Зробити висновок.

а) $z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3$; б) $z = e^{x^2y}$; в) $z = \ln\left(2x^3 + 3y^2\right)$.

5.53. Задана виробнича функція, що залежить від чотирьох чинників: $z = 0,76x_1^{\,0,25}x_2^{\,0,37}x_3^{\,0,45}x_4^{\,-0,15}$. Провести аналіз впливу відносних приростів чинників на темпи зміни виробничої функції.

5.54. Для розширення виробництва підприємець виділяє 150 000 гр. од. Відомо, що коли на придбання обладнання витратити x тис. гр. од., а на зарплату нових робітників – y тис. гр. од., то приріст обсягу продукції складатиме $Q = 0,001x^{0,6}y^{0,4}$. Як треба розподілити виділені кошти, щоб приріст обсягу продукції був максимальним?

5.55. Підприємство виготовляє два види виробів у кількостях x_1 і x_2. Функція витрат має вигляд: $C = 5x_1 + 2x_1x_2$. Зв'язок ціни одиниці товару і попиту: $P_1 = 20 - x_1 + 2x_2$; $P_2 = 10 + x_1 - 2x_2$. За умови, що загальна кількість виробництва товарів складає 15 одиниць, знайти максимальний прибуток підприємства.

Знайти емпіричну формулу для аналітичного опису залежності між двома величинами за відомими табличними даними. Для обчислення параметрів застосувати метод найменших квадратів.

5.56.

а)

X	1	1,5	2	2,5	3
Y	2,15	2,3	2,6	2,8	2,5

б)

X	2	4	6	8	10
Y	4,5	7,0	8,0	7,5	9,0

5.57.

X	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Y	45,2	49,9	54,8	59,8	65,1	70,2

5.58.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	157,0	168,2	181,5	190,9	201.1	212,3	221,8	231,9	245,1

5.59.

Обсяг продукції (ум. од.)	1	2	3	4	5	6
Собівартість одиниці продукції (ум. од.)	7,7	7,1	6,9	6,8	6,74	6,7

5.60.

X	10	20	30	40	50
Y	14	12	11,3	11	10,8



Відповіді

5.11. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1\geq 0.$ **5.12.** $\begin{cases} x^2-1\geq 0, \\ 4-y^2\geq 0. \end{cases}$ **5.13.** $y^2-2x+6>0.$

5.14. $0\leq x+y-1\leq 2.$ **5.15.** $\begin{cases} 1-x^2-y^2\geq 0, \\ y+x>0, \\ y+x\neq 1. \end{cases}$ **5.16.** $x\sin y\geq 0.$

5.17. $z'_x=2xy+5;\ \ \mathrm{z}'_{\mathrm{y}}=x^2+6y.$

5.18. $z'_x=e^{5x+3x^3y^2}\left(5+9x^2y^2\right);\qquad \mathrm{z}'_{\mathrm{y}}=e^{5x+3x^2y^2}\,6x^3y.$

5.19. $z'_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \ \mathrm{z}'_{\mathrm{y}}=\frac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}.$

5.20. $z'_x=(\sin y)x^{\sin y-1};\ \ z'_y=x^{\sin y}(\ln x)\cos y.$

5.21.
$$z'_x=(2y-3)\left(x^2+2x\right)^{2y-4}(2x+2);$$
$$z'_y=2\left(x^2+2x\right)^{2y-3}\ln\left(x^2+2x\right).$$

5.22. $z'_x=\frac{-2y}{x^2\sin\frac{2y}{x}};\ \ \mathrm{z}'_{\mathrm{y}}=\frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}.$

5.23. $z'_x=\frac{-\cos\left(2y^3-3\right)}{x^2};\ \ z'_y=\frac{-6y^2\sin\left(2y^3-3\right)}{x}.$

5.24. $z'_x = \left(6xy - 3x^2y^2\right)e^{-xy}$; $z'_y = \left(3x^2 - 3x^3y\right)e^{-xy}$.

5.27. $dz = dx + dy$. **5.28.** $dz = \frac{3}{2}(dx + dy)$. **5.29.** 0,979.

5.30. 1,014. **5.31.** 1, 107. **5.32.** $z''_{xx} = 0$; $z''_{xy} = -\frac{2}{y^3}$; $z''_{yy} = \frac{6x}{y^4}$.

5.33. $z''_{xx} = \frac{-1}{\left(x+y^2\right)^2}$; $z''_{xy} = \frac{-2y}{\left(x+y^2\right)^2}$; $z''_{yy} = \frac{2\left(x-y^2\right)}{\left(x+y^2\right)^2}$.

5.34. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2y^3\left(2 + xy^2\right)\cdot e^{xy^2}$. **5.36.** $9 + 7\sqrt{3}$. **5.37.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5.38. $\frac{7}{9}$. **5.39.** $gradz = 2\bar{i} - \frac{9}{4}\bar{j}$. **5.40.** $\frac{2\sqrt{13}}{5}$.

5.41. $gradf = \bar{i} - \frac{1}{3}\bar{k}$. **5.42.** $z_{\min}(1;2) = -7$.

5.43 . $z_{\min}(3;3) = -27$. **5.44.** *Åêñò ð. í åì à°*.

5.45. $z_{\min}(0;0) = 4$. **5.46.** $z_{\min}(-2;0) = -2/e$.

5.47. $z_{\min}(1;0) = 0$, $z_{\max}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$.

5.48. $z_{min}(1;1) = 2$. **5.49.** $z_{найм.} = -64$; $z_{найб.} = \frac{64}{27}$.

5.50. $z_{найм.} = -10$; $z_{найб.} = -1$. **5.51.** $z_{найм.} = 4$; $z_{найб.} = 0$.

5.52. а) $E_x(z) = 1,67$; $E_y(z) = 1,33$.

б) $E_x(z) = 2$; $E_y(z) = 1$.

в) $E_x(z) = 0,75$; $E_y(z) = 0,75$.

5.54. $x = 90$ тис. гр. од.; $y = 60$ тис. гр. од.

5.55. $\Pi(5;5) = 50$ (ум. од.).

5.56. а) $\tilde{y} = 0,24x + 1,99$; б) $\tilde{y} = 0,475x + 4,35$.

5.57. $\tilde{y} = 10,02x + 39,9$.

5.58. $\tilde{x} = 10,76t + 147,30$. **5.59.** $\tilde{y} = \frac{1,23}{x} + 6,49$.

5.60. $\tilde{y} = \frac{40,91}{x} + 9,95$.

Розділ 6. Інтегральне числення функцій однієї та кількох змінних

Однією з основних задач диференціального числення є відшукання похідної даної функції. Дослідження у багатьох галузях науки, у тому числі й економічної, приводять до оберненої задачі, а саме виникає необхідність за даною функцією знайти таку функцію, похідна від якої дорівнювала б початковій
функції. Відновлення функції за її похідною є однією з основних задач інтегрального числення. В економіці це означає, що за граничними характеристиками (швидкостями) процесів необхідно відтворити їх загальні властивості (загальні витрати, загальний прибуток тощо).



Після вивчення даної теми ви зможете:

- розуміти зміст інтегралів в економіці;
- знати методи інтегрування різних функцій;
- знати типи задач в економіці, для розв'язання яких доцільно застосовувати інтеграли;
- вміти застосовувати інструменти інтегрального числення для відшукання вихідних величин за відомими функціями факторів, що впливають на них;
- вміти досліджувати економічну динаміку процесів із застосуванням інтегралів.

Глава 21. Первісна функція. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування

21.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для $f(x)$ на множині X , якщо для будь-якого значення $x \in X$ функція $F(x)$ диференційовна і:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x), \\ dF(x) = f(x)dx. \end{cases} \tag{21.1}$$

Так, первісною для $f(x) = \cos x$ на множині $\mathbf{R}$ є функція $F(x) = \sin x$. Перевірити це твердження можна, якщо здиференціювати функцію $F(x)$. Оскільки $(\sin x)' = \cos x$, то $F(x) = \sin x$ дійсно є первісною для $f(x) = \cos x$.

Відшукання для $f(x)$ усіх її первісних називають ***інтегруванням*** функції $f(x)$, а відповідний розділ математики, в якому розв'язується задача відшукання функції за її похідною або диференціалом, називається ***інтегральним численням***. До речі, у перекладі з латині *integratio* означає відновлення.

Теорема 21.1 ***(про множину первісних)***. Якщо для функції $f(x)$, яка визначена на множині X, існують первісні, то:

1) їх нескінченно багато;

2) всі вони відрізняються одна від одної лише сталою величиною.

Доведення. 1. Нехай функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на множині X, тоді за означенням $F'(x) = f(x)$. Оскільки похідна сталої величини дорівнює нулю, то функція $F(x) + C \quad \forall C \in \mathbf{R}$ також є первісною для $f(x)$ за означенням: $\left(F(x) + C\right)' = f(x)$. Отже, якщо існує одна первісна, то буде існувати також незліченна множина інших первісних, що відрізняються на довільну сталу C.

2. Нехай $F_1(x)$ і $F_2(x)$ є деякими первісними для функції $f(x)$, тобто за означенням: $F_1'(x) = f(x)$ і $F_2'(x) = f(x)$. Побудуємо допоміжну функцію $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Для будь-якого $x \in X$ маємо:

$$\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0. \tag{21.2}$$

Оскільки для будь-якого $x \in X$ маємо $\varphi' \equiv 0$, то звідси $\varphi(x) = C$, тобто $F_1(x) - F_2(x) = C$. Отже, з даної теореми випливає: якщо $F(x)$ – одна з первісних для $f(x)$, то множина всіх первісних має вигляд $F(x) + C$.

Наприклад, для функції $f(x)=\sin 2x$ на множині $x\in\mathbf{R}$ первісними є і функція $F_1(x)=\sin^2 x$, і функція $F_2(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$ (*переконайтеся!*). Хоча за виглядом вони різні, проте відрізняються лише сталим доданком:

$$F_1(x)-F_2(x)=\sin^2 x+\frac{1}{2}\cos 2x=\sin^2 x+\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 x\right)=\frac{1}{2}.$$

Отже, для відшукання первісних заданої функції достатньо знати тільки одну, а кожна інша є сумою знайденої первісної та довільної дійсної сталої.

21.2. Невизначений інтеграл. Означення, властивості, таблиця основних інтегралів

Множина всіх первісних для $f(x)$ на області її визначення X називається ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ і позначається:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C, \tag{21.3}$$

де $\int$ – символ (знак) невизначеного інтеграла;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

dx – диференціал ***змінної інтегрування*** x;

$f(x)\,dx$ – підінтегральний вираз.

Сучасне позначення невизначеного інтеграла знаком $\int$ було запропоноване Лейбніцем, який трансформував літеру S, що є першою літерою у слові summa (сума).

З геометричної точки зору будь-яка первісна – це лінія $y=F(x)$, а невизначений інтеграл – сім'я ліній $y=F(x)+C$, яку одержуємо зсувом однієї з них паралельно самій собі вздовж осі Oy (рис. 21.1).

За геометричним змістом похідної маємо, що $F'(x)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до кривої $y=F(x)$ у точці з абсцисою x. Тоді знайти первісну для $f(x)$ означає знайти таку криву $y=F(x)$, кутовий коефіцієнт

дотичної до якої в довільній точці x дорівнював би значенню функції $f(x)$ у цій точці.

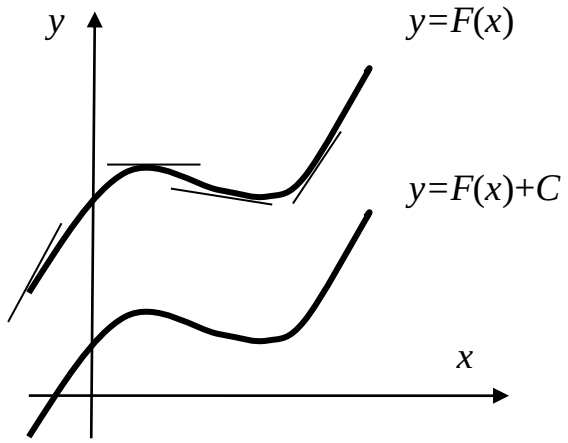


Рис. 21.1

Теорема 21.2 (***теорема існування невизначеного інтеграла***). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на області її визначення X, то для неї існує невизначений інтеграл як множина функцій, похідна кожної з яких дорівнює $f(x)$. Теорему приймаємо без доведення.

Основні властивості невизначеного інтеграла випливають з означення первісної, співвідношення (21.3) із залученням властивостей похідної.

1^0. Похідна від невизначеного інтеграла за змінною інтегрування дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \tag{21.4}$$

Дійсно, згідно з (21.3) та (21.2) маємо:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x).$$

2^0. Диференціал від невизначеного інтеграла за змінною інтегрування дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \tag{21.5}$$

тому що диференціал функції – це добуток похідної функції і диференціала аргументу.

3^0. Невизначений інтеграл від диференціала будь-якої функції, що має похідну, є однопараметричною сім'єю цієї функції:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{21.6}$$

Обґрунтування таке ж саме, як і для властивості (21.5).

4^0. Невизначений інтеграл від похідної будь-якої диференційовної функції є однопараметричною сім'єю цієї функції:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C. \tag{21.7}$$

Нижче наведені властивості, які називають також ***правилами інтегрування***, доводяться за допомогою порівняння множин, які відповідають лівій і правій частинам рівностей, або диференціюванням лівої та правої частин рівностей, які треба довести.

5^0. Сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int a f(x)dx = a\int f(x)dx,\ a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \tag{21.8}$$

Знайдемо похідні від обох частин рівності. Від лівої частини за властивістю (21.4) маємо: $\left(\int a f(x)dx\right)' = a\, f(x)$. За тією ж властивістю від правої частини маємо: $a \cdot \left(\int f(x)dx\right)' = a \cdot f(x)$. Отже, похідні від обох частин наведеного вище співвідношення рівні між собою, тобто описують одну й ту ж саму множину первісних (*обміркуйте* випадок $a = 0$).

6^0. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від доданків цієї суми:

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx. \tag{21.9}$$

Знову знайдемо похідні від обох частин цієї рівності. Так, від лівої частини маємо:

$$\left(\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx \right)' = f_1(x) \pm f_2(x).$$

Від правої частини маємо:

$$\left(\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \right)' = \left(\int f_1(x)dx \right)' \pm \left(\int f_2(x)dx \right)' = f_1(x) \pm f_2(x). \tag{21.10}$$

Як бачимо, похідні від обох частин рівностей, збіглися, отже правильна й сама рівність.

Властивість 6^0 узагальнюється на будь-яке скінченне число доданків.

7^0. Якщо невизначений інтеграл від функції $f(x)$ є відомим, то невизначений інтеграл від цієї функції з аргументом $kx+b$, де $k, b - const$, породжується тією ж первісною, але від аргументу $kx+b$, і з коефіцієнтом $1/k$:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C. \qquad (21.11)$$

Для доведення властивості 7^0 знайдемо похідні від обох частин рівності (21.11), одержимо:

$$\left(\frac{1}{k}F(\underset{t}{kx+b})+C \right)'_x = \frac{1}{k}\cdot F'_t(t)\cdot t'_x = \frac{1}{k}\cdot f(kx+b)\cdot k = f(kx+b),$$

де t – проміжний аргумент.

Наприклад, безпосереднє застосування формули (21.11) дає:

$$\int \cos(3x-5)dx = \frac{1}{3}\sin(3x-5)+C, \text{ бо } \int \cos x dx = \sin x + C.$$

8^0 (***про інваріантність форми невизначеного інтеграла***). Вигляд формули інтегрування не залежить від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною чи функцією від неї:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \;\Rightarrow\; t=\varphi(x):\ \int f(t)dt = F(t)+C. \qquad (21.12)$$

До таблиці основних інтегралів відносять, як правило, ті інтеграли, які можна отримати безпосередньо за таблицею похідних, якщо прочитати її справа наліво. У табл. 21.1 до таких інтегралів ще додані формули (7), (8), (15) та (16). Повний перелік інтегралів від елементарних функцій можна знайти у до-віднику з вищої математики.

Справедливість кожної формули таблиці, як і загалом результату інтегрування, перевіряється диференціюванням згідно зі властивістю 1^0 (про похідну невизначеного інтеграла).



Наприклад, перевіримо справедливість формули (16). Для цього знайдемо похідну від правої частини цієї рівності:

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C\right)'=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}.$$

Дійсно, ми отримали підінтегральну функцію, що треба було довести.

Таблиця 21.1

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq-1$	9. $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$
2. $\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$	10. $\int e^{x}dx=e^{x}+C$
3. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$	11. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
4. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$	12. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
5. $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x+C$	13. $\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x+C$
6. $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg}x+C$	14. $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$
7. $\int\operatorname{tg}x\,dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	15. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
8. $\int\operatorname{ctg}x\,dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$	16. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$

Інтегрування функцій як операція, що є оберненою до диференціювання, є більш складною, ніж відшукання похідної. Для визначення похідних від добутку або частки функцій існують певні співвідношення, а для інтегрування таких співвідношень немає. Яким би не був складним вираз, для якого треба відшукати похідну, це завжди можна зробити, чого неможна стверджувати відносно інтегрування. Тому відшукання невизначеного інтеграла потребує більшої гнучкості у пошуках методів їх відшукання, ніж техніка диференціювання. Оволодіння відповідною технікою потребує, перш за все, знання невизначених інтегралів основних елементарних функцій, які наведені в табл. 21.1.

21.3. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднім інтегруванням називається відшукання невизначених інтегралів за допомогою таблиці основних інтегралів та основних властивостей невизначеного інтеграла із залученням тотожних перетвореннь підінтегральної функції. Цей підхід, як правило, не викликає труднощів, але охоплює лише вузький клас функцій.

Загальний порядок безпосереднього інтегрування такий:

1) ***аналізуємо*** підінтегральний вираз з метою встановлення того, які властивості невизначених інтегралів і алгебраїчні перетворення слід здійснити, щоб дійти до взяття табличного інтеграла;

2) ***виконуємо*** належні дії;

3) ***застосовуємо*** відповідні табличні формули.

Процес відшукання невизначеного інтеграла записується ланцюжком, можливо, з наведенням довідкових відомостей.

Наведемо декілька прикладів безпосереднього інтегрування.



Наприклад, знайдемо інтеграл:

$$I=\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\left|1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\right|=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=\operatorname{tg}x+C_1-\left(x+C_2\right)=\operatorname{tg}x-x+C.$$

Різницю двох параметрів C_1 і C_2 ми замінили одним – C, оскільки різниця двох довільних сталих із $\mathbf{R}$ теж є довільною сталою із $\mathbf{R}$.

Перевіряємо правильність інтегрування за допомогою диференціювання отриманої первісної:

$$F'(x)=\left(\operatorname{tg}x-x\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\left|\begin{array}{c}\sin^2 x+\cos^2 x=1\\ \operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}\end{array}\right|=\operatorname{tg}^2 x=f(x).$$

Оскільки отримано підінтегральну функцію, то інтегрування виконано вірно.



$$I=\int\left(2\sin x-4+3\sqrt{x}+\frac{5}{x^2+4}-\frac{1}{x}\right)dx=2\int\sin x dx-4\int dx+3\int\sqrt{x}dx+$$

$$+5\int\frac{dx}{x^2+4}-\int\frac{dx}{x}=-2\cos x-4x+3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\ln|x|+C=$$

$$=-2\cos x-4x+2x\sqrt{x}+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\ln|x|+C.$$

У даному прикладі при знаходженні невизначеного інтеграла були використані властивості (21.6), (21.8) та (21.9), а потім були застосовані відповідні формули таблиці інтегралів. *Пропонуємо* самостійно перевірити, чи є отриманий результат правильним.



$$I=\int\frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx-\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C\,.$$

При перетворенні підінтегральної функції було використане співвідношення $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, та формули (6) і (5) таблиці інтегралів.

21.4. Метод інтегрування заміною змінної

Якщо невизначений інтеграл не є табличним, то в багатьох випадках до мети приведе метод інтегрування заміною змінної, що є основним методом обчислення інтегралів. Відшукання невизначеного інтеграла за допомогою переходу від змінної інтегрування x до нової змінної t, що дозволяє звести вихідний інтеграл до простішого або навіть табличного, називають ***методом заміни змінної***, або ***методом підстановки***.

Основою цього методу є властивість про інваріантність форми невизначеного інтеграла (див. (21.12)).

Зв'язок між змінними інтегрування – вихідною x і новою t – залежно від вигляду підінтегральної функції описується співвідношенням, яке розв'язане або відносно t, або відносно x. Тому треба розрізняти два типи підстановок: $t=\varphi(x)$ або $x=\psi(t)$.

1. **Підстановка** $t=\varphi(x)$ виконується у випадках, коли підінтегральна функція є добутком складеної функції $f(\varphi(x))$ та похідної проміжного аргументу $\varphi(x)$ або виразом, що відрізняється від похідної сталим множником:

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)\,dx=\left|\begin{array}{l} t=\varphi(x) \\ dt=\varphi'(x)\,dx \end{array}\right|=\int f(t)\,dt\,. \qquad (21.13)$$

Після відшукання інтеграла за змінною t повертаються до вихідної змінної:

$$\int f(t)\,dt=F(t)+C=\left|\,t=\varphi(x)\,\right|=F\left(\varphi(x)\right)+C\,. \qquad (21.14)$$

На базі співвідношень (21.13) та (21.14) отримуємо:

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx=F(\varphi(x))+C\,. \qquad (21.15)$$



Знайдемо невизначений інтеграл*:*

$$I=\int x^2\cdot\sin x^3\,dx\,.$$

Підінтегральна функція містить складену функцію $\sin x^3$ і множник x^2, який відрізняється від похідної $(x^3)'=3x^2$ сталим множником 3. Отже, доцільно застосувати підстановку $t=x^3$:

$$I=\int\sin x^3\cdot x^2dx=\left|\begin{array}{c} t=x^3 \\ dt=3x^2dx \end{array}\right|=\frac{1}{3}\int\sin t\;\;dt=\frac{1}{3}\left(-\cos t\right)+C=-\;\;\frac{1}{3}\cos x^3+C\,.$$

Зауважимо, що без попередніх тотожних перетворень підінтегральної функції не завжди відразу вдається здійснити вибір зручної підстановки:



$$I=\int\sqrt{\frac{\arccos 2x}{1-4x^2}}dx=\int\frac{(\arccos 2x)^{1/2}}{\sqrt{1-(2x)^2}}dx=\int(\arccos 2x)^{1/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=\arccos 2x,\;\; dt=-\dfrac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} \end{array}\right|=\int t^{1/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}dt\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2}+C=$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\arccos 2x\right)^{3/2} + C.$$

2. **Підстановка** $x = \psi(t)$ виконується переважно для здійснення переходу від одного класу функцій до іншого, наприклад, від ірраціональних функцій до раціональних, або від степеневих до тригонометричних, або від показникових до степеневих тощо. При цьому для повернення до початкової змінної функція $x = \psi(t)$ повинна мати обернену функцію $t = \psi^{-1}(x)$:

$$I = \int f(x)\,dx = \left| \begin{array}{c} x = \psi(t) \\ dx = \psi'(t)\,dt \end{array} \right| = \int f\left(\psi(t)\right) \cdot \psi'(t)\,dt = F(t) + C =$$

$$= \left| \; t = \psi^{-1}(x) \; \right| = F\left(\psi^{-1}(x)\right) + C. \qquad (21.16)$$



Знайдемо невизначений інтеграл:

$$I = \int \sqrt{25 - x^2}\,dx.$$

Щоб позбутись ірраціональності, виконуємо підстановку $x = 5\sin t$, $t = \arcsin\dfrac{x}{5}$, $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$. Тоді маємо: $\sqrt{25 - x^2} = 5\cos t$, $dx = 5\cos t \;\; dt$. Отже,

$$I = \int \sqrt{25 - x^2}\,dx = 25\int \cos^2 t\,dt = \frac{25}{2}\int (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{25}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{25}{2}\left(\arcsin\frac{x}{5} + \frac{x}{5}\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \right) + C. \qquad (21.17)$$

Підстановка, яка допомагає спростити підінтегральну функцію і звести інтеграл до табличного, може бути і не єдиною.

Як узагальнення того, що розглядалось вище, наведемо ***алгоритм інтегрування методом підстановки***:

1) ***вибираємо*** тип заміни змінної $\left(t = \varphi(x)\right.$ або $\left. x = \psi(t)\right)$ і знаходимо зв'язок між диференціалами нової і вихідної змінних $\left(dt = \varphi'(x)\;dx,\; dx = \psi'_t dt\right)$;

2) ***переходимо*** у підінтегральному виразі до нової змінної t;

3) ***знаходимо*** невизначений інтеграл за новою змінною інтегрування;

4) ***повертаємось*** до початкової змінної $x\left(t = \varphi(x),\;\; t = \psi^{-1}(x)\right)$.

Наведемо ілюстративний приклад.

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \left| \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C. \qquad (21.18)$$

До речі, співвідношення (21.18) часто використовується як готова формула. Отже, якщо підінтегральною функцією є дріб, чисельник якого є похідною знаменника, то одна з первісних – це натуральний логарифм модуля знаменника.

21.5. Метод інтегрування частинами

Теорема 21.3 (***формула інтегрування частинами***). Якщо у невизначеному інтегралі $I = \int f(x)dx$ підінтегральний вираз подано у вигляді добутку udv, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – диференційовні на деякій множині X функції, то справедливим є співвідношення:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (21.19)$$

Доведення. Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ – диференційовні функції аргументу x. Тоді, за формулою диференціала добутку: $d(uv) = vdu + udv$, звідки $udv = d(uv) - vdu$. Інтегруючи цю останю рівність, одержуємо:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv + C - \int vdu.$$

У формулі (21.19) довільну сталу C не пишуть, бо вона «поглинається» інтегралом, який присутній у формулі. Так:

$$C = \int 0du \;\Rightarrow\; C - \int vdu = -\int (v - 0)du = -\int vdu. \qquad (21.20)$$

Відшукання невизначеного інтеграла $I = \int f(x)dx$ за допомогою формули (21.19) називають ***методом інтегрування частинами***.

Цілком зрозуміло, що подання підінтегрального виразу $f(x)dx$ у вигляді $u \cdot dv$, яке називають ***розбиттям*** його **на *частини***, необхідно здійснювати таким чином, щоб невизначений інтеграл у правій частині формули був більш простим, ніж вихідний.

Алгоритм інтегрування частинами:

1) ***розбиваємо*** підінтегральний вираз на частини u та dv, тобто якийсь фрагмент підінтегральної функції приймаємо за u, а те, що залишилось у підінтегральному виразі, – за dv;

2) ***знаходимо*** диференціал функції $u = u(x)$, а за диференціалом $dv(x)$ інтегруванням відновлюємо одну із первісних $v(x)$;

3) ***застосовуємо*** формулу інтегрування частинами (21.19);

4) ***беремо*** невизначений інтеграл $\int v\,du$ і записуємо остаточну відповідь.



Розглянемо приклади інтегрування частинами та оформлення символічних записів:

$$1)\ I = \int (2x-1)e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x-1, \quad du = u'dx = 2dx; \\ dv = e^x dx, \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x. \end{array} \right| =$$

$$= (2x-1)e^x - \int e^x \cdot 2dx = (2x-1)e^x - 2e^x + C = (2x-3)e^x + C;$$

$$2)\ I = \int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = u'dx = \dfrac{1}{x}dx; \\ \\ dv = xdx, \quad v = \int dv = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Формула інтегрування частинами має більш обмежену область застосування, ніж метод підстановки. Проте існують такі типи підінтегральних функцій, інтеграли від яких можна знайти лише інтегруванням частинами. У табл. 21.2 наведені три типи стандартних інтегралів, до яких застосовується метод інтегрування частинами з особливостями розбиття підінтегрального виразу на u і dv.

Таблиця 21.2

Типи інтегралів, для відшукання яких застосовується метод інтегрування частинами

Покладають $u = P_n(x)$	Покладають $dv = P_n(x)dx$	Покладають $u = e^{\alpha x}$ $(dv = e^{\alpha x}dx)$

1. $\int P_n(x)\,a^{\alpha x}dx$	4. $\int P_n(x)\left(\ln x\right)^m dx$	7. $\int e^{\alpha x}\begin{bmatrix}\sin(\beta x)\,dx\\ \cos(\beta x)dx\end{bmatrix}$
2. $\int P_n(x)\sin mx\,dx$	5. $\int P_n(x)\begin{bmatrix}\arcsin x\,dx\\ \arccos x\,dx\end{bmatrix}$	8. $\int \sin(\ln \beta x)\,dx$
3. $\int P_n(x)\cos mx\,dx$	6. $\int P_n(x)\begin{bmatrix}\operatorname{arctg} x\,dx\\ arc\operatorname{ctg} x\,dx\end{bmatrix}$	9. $\int \cos(\ln \beta x)\,dx$

До ***першого типу*** відносять невизначені інтеграли, підінтегральні функції яких є добутком многочлена n-го степеня $P_n(x)$ і показникової функції $e^{\alpha x}$ або тригонометричних функцій $\sin mx$ та $\cos mx$, де m – довільна стала, $m \in \mathbf{R}$. Для таких функцій покладають $u = P_n(x)$, а dv міститиме другий множник (випадки 1, 2, 3 у табл. 21.2). Так само діють, якщо аргументом другого множника є лінійна функція: e^{kx+b}, $\sin(kx+b)$, $\cos(kx+b)$ де k, b – сталі із $\mathbf{R}$.

Другий тип охоплює невизначені інтеграли, підінтегральні функції яких являють собою добуток многочлена $P_n(x)$ і логарифмічної функції або обернених тригонометричних функцій (випадки 4, 5, 6 у табл. 21.2). У такому випадку покладають $dv = P_n(x)dx$, а інший співмножник позначають функцією u. Принципових змін не буде, якщо в якості аргументу x виступатиме лінійна функція від нього.

До ***третього типу*** належать невизначені інтеграли від добутків показникової функції $e^{\alpha x}$ і таких тригонометричних функцій, як $\sin\beta x$ та $\cos\beta x$, де $\alpha, \beta - const$ (випадок 7 у табл. 21.2), а також інтеграли, які зводяться до невизначених інтегралів типу 7 за допомогою підстановки $t = \ln\beta x$. Крім того, замість αx, βx можуть бути лінійні функції вигляду $kx + b$.



Наведемо приклади відшукання невизначених інтегралів кожного типу.

$$I_1 = \int \left(1 - 3x + x^2\right)\cdot \cos 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = 1 - 3x + x^2\ ,\ du = \left(2x - 3\right)dx; \\ dv = \cos 2x dx\ \ ,\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-3x+x^2\right)\sin 2x - \frac{1}{2}\underbrace{\int (2x-3)\sin 2x\,dx}_{I_0} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(1-3x+x^2\right)\sin 2x - I_0\right).$$

Для I_0 теж застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$I_0 = \left| \begin{array}{l} u = 2x-3\,,\ du = 2dx; \\ dv = \sin 2x dx\,,\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x. \end{array} \right| = -\frac{1}{2}(2x-3)\cos 2x +$$

$$+\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}\left((2x-3)\cos 2x - \sin 2x)\right) + C.$$

Отже, отримуємо:

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\left(x^2-3x+0{,}5\right)\sin 2x + (x-1{,}5)\cos 2x\right) + C\,.$$

Отже, невизначений інтеграл першого типу потребує n-кратного застосування формули інтегрування частинами, тобто стільки разів, який степінь має многочлен $P_n(x)$.

$$I_2 = \int (x-1)\cdot \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{1}{1+x^2}dx; \\ dv = (x-1)dx,\ v = \int (x-1)dx = \frac{(x-1)^2}{2}. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x-1)^2}{1+x^2}dx = \frac{(x-1)^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-2x+1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Отже, остаточна відповідь:

$$I_2 = \frac{(x-1)^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

$$I_3 = \int \sin(\ln x)dx = \left| \begin{array}{c} u = \sin(\ln x),\, dv = dx; \\ du = \cos x(\ln x)\frac{dx}{x},\, v = \int dx = x. \end{array} \right| =$$

$$= x\sin(\ln x)dx - \int x\cos(\ln x)\frac{dx}{x} = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx.$$

До останнього інтеграла теж застосовуємо формулу інтегруванні частинами, одержимо:

$$\int \cos(\ln x)dx = \left| \begin{array}{c} u = \cos(\ln x),\ dv = dx; \\ du = -\sin(\ln x)\dfrac{dx}{x},\ v = \int dx = x. \end{array} \right| =$$

$$= x\cos(\ln x) - \int x\frac{-\sin(\ln x)}{x}dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx.$$

Таким чином, для вихідного інтеграла маємо

$$\int \sin(\ln x)dx = = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx.$$

Розв'язуємо рівняння відносно вихідного інтеграла. Для цього інтеграл, що знаходиться справа, переносимо вліво. Отже,

$$2\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x).$$

Таким чином,

$$I_3 = \frac{1}{2}\left(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)\right) + C.$$



Ключові терміни

Первісна; інтегрування; невизначений інтеграл; властивості невизначеного інтеграла; правила інтегрування; безпосереднє інтегрування; інтегрування підстановкою; заміна змінної; інтегрування частинами.



Запитання для самоперевірки

1. Яка функція називається первісною для даної функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом?
3. Сформулюйте властивості невизначеного інтеграла.
4. Що таке безпосереднє інтегрування?
5. У чому полягає метод інтегрування заміною змінної? Які типи заміни змінної у невизначених інтегралах ви знаєте?
6. Наведіть приклади інтегралів, які беруться за допомогою заміни змінної.
7. Чим відрізняються два типи заміни змінної?

8. Запишіть формулу інтегрування частинами.

9. Для яких типів інтегралів застосовується метод інтегрування частинами?

10. Чи можна при відшуканні невизначеного інтеграла застосовувати метод інтегрування частинами і здійснювати заміну змінної?

11. Наведіть приклади інтегралів, до яких можна застосувати як метод заміни змінної, так і метод інтегрування частинами.

12. Порівняйте методи інтегрування частинами і метод інтегрування заміною змінної до інтегралів, які можна знайти двома вказаними методами.

13. Які типи інтегралів знаходяться тільки методом інтегрування частинами?

14. Яка, на ваш погляд, дія складніша: відшукання похідної (диференціювання) або відшукання первісних (інтегрування)?

Глава 22. Інтегрування деяких класів елементарних функцій: раціональних, ірраціональних, тригонометричних

22.1. Інтегрування елементарних раціональних алгебраїчних дробів

Найпростішими раціональними алгебраїчними дробами називаються дроби чотирьох типів, а саме:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}. \quad \text{II. } \frac{B}{(x-b)^k}. \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}. \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

де k, n – більші за одиницю натуральні числа; квадратні тричлени не мають дійсних коренів, тобто $p^2-4q<0$. Ці дроби ще називають ***елементарними***.

Розглянемо спочатку інтегрування елементарних дробів.

При відшуканні невизначених інтегралів від дробів першого і другого типів не виникає труднощів, вони легко беруться методом безпосереднього інтегрування:

$$\text{I.} \quad \int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C. \tag{22.1}$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{B\,dx}{(x-b)^n} = B\int (x-b)^{-n}d(x-b) = -\frac{B}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-b)^{n-1}}+C. \tag{22.2}$$

На практиці такі невизначені інтеграли, як правило, беруться усно: умова – відповідь.



Наприклад:

$$\int \frac{5}{x-3}dx = 5\ln|x-3|+C, \qquad \int \frac{10\,dx}{(x+7)^6} = -\frac{2}{(x+7)^5}+C.$$

Аналогічно діють, коли знаменники дробів є лінійними функціями від x загального вигляду: $kx+b$, де k і b – сталі:

$$\int \frac{A}{kx+b}dx = \frac{A}{k}\ln|kx+b|+C. \tag{22.3}$$

$$\int \frac{B\,dx}{(kx+b)^n} = -\frac{B}{k(n-1)}\cdot\frac{1}{(kx+b)^{n-1}}+C. \tag{22.4}$$

При інтегруванні найпростішого дробу третього типу спочатку у знаменнику виділяємо повний квадрат, а потім вводимо нову змінну.

III. $I = \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx$ інтегруємо методом підстановки.

Виділяємо у знаменнику повний квадрат:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Виконуємо заміну змінної $x + \frac{p}{2} = t$ і подаємо вихідний інтеграл I у вигляді суми двох невизначених інтегралів:

$$I = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t, \\ x = t - \frac{p}{2}, \\ dx = dt. \end{array} \right| = \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} dt = \int \frac{At}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} dt + \int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} dt. \quad (22.5)$$

Оскільки $q - \frac{p^2}{4} > 0$ (многочлен, що стоїть у знаменнику, не має дійсних коренів), то цю сталу можна позначити як a^2. Тоді перший із інтегралів обчислюємо за формулою (21.18), а другий – це табличний інтеграл. Отже:

$$I = \frac{A}{2}\ln|x^2 + px + q| + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C.$$

Після тотожних перетворень отримуємо:

$$I = \frac{A}{2}\ln|x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{2a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{2a} + C, \quad \text{де } a = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

III Наведемо приклад взяття невизначеного інтеграла від дробу III типу.

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 - 4x + 8} dx = \int \frac{3x - 1}{(x - 2)^2 + 4} dx = \left| \begin{array}{l} x - 2 = t, \\ x = t + 2, \\ dx = dt. \end{array} \right| = \int \frac{3(t + 2) - 1}{t^2 + 4} dt =$$

$$= 3\int \frac{t}{t^2+4}dt + 5\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{3}{2}\ln(t^2+4) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C.$$



Розглянутий підхід до інтегрування найпростіших дробів третього типу без принципових змін можна розповсюдити на деякі неелементарні дроби, знаменник яких є квадратним тричленом, а саме:

1) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ – невизначений інтеграл, у якому дискримінант тричлена $p^2-4q>0$, тобто з урахуванням заміни змінної $t = x + \frac{p}{2}$ знаменник у виразі (22.5) набуває вигляду $t^2 - a^2$. Тоді другий доданок (22.5) є табличним інтегралом, який знаходиться за формулою (15) табл. 21.1;

2) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ – невизначений інтеграл, у якому знаменником є квадратний тричлен загального вигляду, і тоді спочатку у ньому виносять за дужки коефіцієнт a (а за знак інтеграла $\frac{1}{a}$), а потім діють так само, як і при знаходженні невизначеного інтеграла III типу;

3) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ – невизначений інтеграл, у якого квадратний тричлен стоїть під знаком квадратного кореня, діють, як і у попередньому випадку.

IV. $I_n = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$.

Інтегрування дробу IV типу взагалі дуже громіздке: шляхом n-кратного інтегрування частинами його зводять до інтеграла від дробу III типу. Рекурентна формула для випадку

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$ має вигляд:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2an^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n. \qquad (22.6)$$

За відомим $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ можна знайти інтеграл I_n для будь-якого натурального показника n.

22.2. Інтегрування раціональних алгебраїчних дробів

Раціональним алгебраїчним дробом $R(x)$ називається відношення двох многочленів відносно змінної x:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}, \tag{22.7}$$

де n, m – натуральні числа ($n\geq 0, m\neq 0$), а $a_i\,(b_j)$ для всіх $i\,(j)$ від нуля до $n\,(m)$ є дійсними числами – коефіцієнтами при степенях x.

Якщо всі коефіцієнти при степенях x, нижчих за степінь старшого члена, дорівнюють нулю, то многочлен перетворюється на одночлен.

Правильним раціональним дробом називається дріб, степінь чисельника $P_n(x)$ якого менше за степінь знаменника $Q_m(x)$, тобто $n<m$; у протилежному випадку при $n\geq m$ дріб називається ***неправильним***.

Якщо дріб неправильний, то його завжди можна подати у вигляді суми многочлена $T_{n-m}(x)$ і правильного дробу:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=T_{n-m}(x)+\frac{P_{n_1}(x)}{Q_m(x)}, \tag{22.8}$$

де $T_{n-m}(x)$ називають ***цілою частиною дробу*** $R(x)$; $0\leq n_1\leq m-1$.

Подання дробу у вигляді (22.8) називається ***виділенням цілої частини.***

Для цього треба виконати ділення «сходинками» чисельника дробу на його знаменник. Розглянемо це на прикладі.



Знайдемо цілу частину неправильного дробу

$$R(x)=\frac{2x^3+1}{x^2-x+2}.$$

Ділення «сходинками» дає:

$$\begin{array}{l} _2x^3+1 \qquad\qquad \left|\underline{x^2-x+2}\right. \\ \underline{2x^3-2x^2+4x} \qquad \left|2x+2\right. \\ \quad _2x^2-4x+1 \\ \quad \underline{2x^2-2x+4} \\ \qquad -2x-3 \end{array}$$

Отже,

$$R(x)=\frac{2x^3+1}{x^2-x+2}=2x+2+\frac{-2x-3}{x^2-x+2}.$$

Оскільки інтегрування многочлена як суми степеневих функцій не викликає труднощів, то для інтегрування будь-яких – правильних і неправильних – раціональних дробів треба вміти інтегрувати правильні дроби.

Приймемо без доведення теорему вищої алгебри, яка дозволяє звести інтегрування будь-якого дробу до інтегрування розглянутих вище найпростіших дробів.

Теорема 22.1. Будь-який правильний раціональний алгебраїчний дріб можна подати як суму елементарних дробів – ***розкласти*** на суму елементарних дробів.

Розклад $R(x)$ на суму елементарних дробів (надалі – просто ***розклад*** $R(x)$) здійснюється за таким алгоритмом:

1) ***розкладаємо*** знаменник дробу – многочлен $Q_m(x)$ – на прості множники, тобто подаємо його у вигляді добутку лінійних і квадратичних множників з від'ємними дискримінантами:

$$Q_m(x)=(x-a)^k\cdot\ldots\cdot(x-b)^l\cdot(x^2+px+q)^s\cdot\ldots\cdot(x^2+cx+d)^r,$$

де однотипні множники можуть повторюватись (наприклад, множник $(x-b)$ повторюється l разів, а множник (x^2+cx+d) повторюється r разів);

2) ***ставимо*** у відповідність кожному множнику найпростіший раціональний дріб або їх суму (табл. 22.1);

3) ***записуємо*** $R(x)$ як суму всіх отриманих дробів.

Таблиця 22.1

Відповідність між множниками знаменника і найпростішими дробами

Множник знаменника	Відповідні елементарні раціональні алгебраїчні дроби
1	2
$x-a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x-b)^l$	$\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\mathrm{K}+\frac{B_l}{(x-b)^l}$

Закінчення табл. 22.1

1	2
x^2+px+q	$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$
$(x^2+cx+d)^r$	$\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+cx+d}+\dfrac{A_2x+B_2}{(x^2+cx+d)^2}+\text{K}+\dfrac{A_rx+B_r}{(x^2+cx+d)^r}$

Отже, отримуємо:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}&=\frac{P_n(x)}{=(x-a)^k\cdot\ldots\cdot(x-b)^l\cdot(x^2+px+q)^s\cdot\ldots\cdot(x^2+cx+d)^r}\\&=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+\\&+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\\&+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2}+\\&+\ldots+\frac{C_rx+D_r}{(x^2+cx+d)^r},\end{aligned}\qquad(22.9)$$

де $A_1,\ldots,B_1,\ldots,M_1,\ldots,N_1,\ldots,C_1,\ldots,D_1,\ldots$ – деякі сталі, які називаються ***коефіцієнтами розкладу***.

Треба зауважити, що в цьому розкладі буде стільки дробів, скільки коренів має многочлен $Q_m(x)$, включаючи їх кратність (k,l,s,K,r);

4) ***визначаємо*** числові параметри розкладу, тобто його коефіцієнти.

Реалізацію цього кроку здійснюють за допомогою так званого ***методу невизначених коефіцієнтів***, згідно з яким відшукання коефіцієнтів розкладу зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь. В основі методу лежать властивості:

а) рівність не порушиться, якщо обидві її частини помножити на один і той самий вираз, визначений на множині дійсних чисел;

б) у рівних многочленів коефіцієнти при однакових степенях змінної рівні між собою.



Знайдемо інтеграли від раціональних дробів

1. $\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}dx.$

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом. Розкладемо цей дріб на найпростіші дроби:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}.$$

Помножаємо обидві частини рівності на знаменник $(x-1)(x-2)^2$, одержимо:

$$x+1=A(x-2)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-1).$$

Знаходимо коефіцієнти $A,\ B,\ C$. Спочатку в обидві частини підставляємо корені знаменника: $x_1=1,\ x_2=2$:

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 1+1=A, \quad A=2, \\ x=2 & 2+1=C, \quad C=3. \end{array}$$

Залишилося знайти B. Його можна знайти, якщо прирівняти коефіцієнти, наприклад при x^2 в обох частинах.

$$x^2 \mid 0=A+B \Rightarrow B=-2.$$

Отже,

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}dx=\int \frac{2}{x-1}dx-\int \frac{2}{x-2}dx+\int \frac{3dx}{(x-2)^2}=2\int \frac{dx}{x-1}-2\int \frac{dx}{x-2}+$$

$$+3\int \frac{dx}{(x-2)^2}=2\ln|x-1|-2\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+C.$$

2. $\int \frac{x-1}{x\left(x^2+4\right)}dx.$

Під знаком інтеграла знаменник правильного дробу має лише один дійсний корінь $x=0$, а рівняння $x^2+4=0$ не має дійсних коренів, тоді розклад на елементарні дроби матиме вигляд:

$$\frac{x-1}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Знову помножаємо обидві частини рівності на знаменник $x(x^2+4)$:

$$x-1=A\left(x^2+4\right)+\left(Bx+C\right)x=Ax^2+4A+Bx^2+Cx=\left(A+B\right)x^2+Cx+4A.$$

Визначаємо сталі A, B, C:

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 0-1=4A,\ A=-1/4, \\ x^2 & 0=A+B,\ B=-A,\ B=1/4, \\ x & 1=C,\ C=1. \end{array}$$

Отже, вихідний інтеграл запишеться у вигляді суми двох інтегралів від простих дробів, які легко інтегруються:

$$\int\frac{x-1}{x\left(x^2+4\right)}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\int\frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2+4}dx=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{1}{8}\int\frac{2xdx}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

22.3. Інтегрування деяких видів ірраціональних функцій

Ірраціональним називається такий алгебраїчний вираз, який містить операцію добування кореня.

I. Інтегрування найпростіших ірраціональностей. Так називають відшукання невизначеного інтеграла від функцій, що залежать від дробових степенів змінної x, лінійної та дробово-лінійної функцій від x.

1. Невизначений інтеграл функції, що раціонально залежить від *дробових степенів змінної* x має вигляд:

$$I=\int R(x,\ x^{m_1/n_1},...,x^{m_s/n_s})\,dx,\ \text{де}\ m_i,\ n_i\ -\ \text{цілі числа}\quad i=\overline{1,s}. \qquad (22.10)$$

Такий інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно нової змінної t – ***раціоналізується*** – за допомогою підстановки $x=t^k$, де k – найменше спільне кратне знаменників дробових показників. Дійсно, при заміні вихідної змінної x на t^k усі показники степеня нової змінної у підінтегральній функції стають цілими числами, оскільки число k ділиться без остачі на всі числа n_i, $i=\overline{1,s}$.

Виконаємо в інтегралі (22.10) підстановку:

$$I=\left|\begin{matrix} x=t^k,\ t=\sqrt[k]{x} \\ d\,x=kt^{k-1}dt \end{matrix}\right|=\int R(t^k,t^{km_1/n_1},...,t^{km_s/n_s})\,t^{k-1}\,dt=\int r(t)dt,$$

де $r(t)$ – раціональна функція від t, тобто многочлен або раціональний алгебраїчний дріб.



Розглянемо інтеграл: $I=\int\frac{dx}{x^{2/3}-x^{1/2}}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$.

Аналіз степенів змінної x із дробовими показниками дає: $n_1=3,\ n_2=2$, тому $k=6$. Застосуємо підстановку $x=t^6$:

$$I=\left|\begin{matrix} x=t^6,\ t=\sqrt[6]{x} \\ dx=6t^5dt \end{matrix}\right|=6\int\frac{t^5dt}{t^4-t^3}=6\int\frac{t^2dt}{t-1}=6\int\frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt=$$

$$=6\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=6\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C=$$

$$=3(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+2\ln|\sqrt[6]{x}-1|)+C.$$

Зверніть увагу, що виділення цілої частини неправильного дробу в даному прикладі здійснювалося не діленням «сходинками», а шляхом тотожніх перетворень.

2. Невизначений інтеграл від функції, що раціонально залежить ***від дробових степенів лінійної функції*** змінної x:

$$I=\int R(x,(ax+b)^{m_1/n_1},...,(ax+b)^{m_s/n_s})\,dx. \qquad (22.11)$$

Такий невизначений інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $ax+b=t^k$, де, як і вище, $k-$ найменше спільне кратне знаменників дробових показників.

$$I=\left|\begin{matrix} ax+b=t^k,\ t=\sqrt[k]{ax+b} \\ x=(t^k-b)/a,\ dx=(k/a)\,t^{k-1}dt \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{k}{a}\int R\left(\frac{t^k-b}{a},t^{km_1/n_1},...,t^{km_s/n_s}\right)t^{k-1}\,dt.$$

Відшукання невизначеного інтеграла (22.11) нічим принципово не відрізняється від інтегрування за формулою (22.10), але відповідні виклади – символічні записи – більш громіздкі, особливо при поверненні до вихідної змінної.



Нехай у попередньому прикладі замість x виступатиме лінійна функція від x, наприклад, $5x-1$, то матимемо:

$$I=\left|\begin{array}{l} 5x-1=t^6,\ t=\sqrt[6]{5x-1} \\ x=(t^6+1)/5,\ dx=(6/5)t^5dt \end{array}\right|=\frac{6}{5}\int\frac{t^2dt}{t-1},$$

і первісна під знаком радикала міститиме не просто x, а вираз $5x-1$.

3. Невизначений інтеграл від функції, що раціонально залежить ***від дробових степенів дробово-лінійної функції*** від змінної x:

$$I=\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_s/n_s}\right)dx,\quad \text{де } \frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}, \qquad (22.12)$$

раціоналізується підстановкою: $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де $k-$найменше спільне кратне знаменників показників степені, як і у пунктах, що розглянуті вище.

Заміна змінної здійснюється з урахуванням перетворень:

$$I=\left|\begin{array}{l} \dfrac{ax+b}{cx+d}=t^k,\quad t=\sqrt[k]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} \\ x=\dfrac{d\cdot t^k-b}{a-c\cdot t^k},\quad dx=\dfrac{ad-bc}{(a-ct^k)^2}kt^{k-1}dt \end{array}\right|=\int r(t)dt, \qquad (22.13)$$

де $r(t)$ – раціональна функція від змінної t.



Знайдемо невизначений інтеграл: $I=\int x\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}dx$. Здійснюємо підстановку:

$$I=\int x\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx=\left|\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{x}=t^2\ \Rightarrow\ t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}, \\ x+1=xt^2\Rightarrow x=\dfrac{1}{t^2-1}\Rightarrow dx=-\dfrac{2tdt}{(t^2-1)^2} \end{array}\right|=$$

$$= \int \frac{1}{t^2-1} \cdot t \cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\, dt = -2\int \frac{t^2}{(t^2-1)^3} dt.$$

Отже, ми отримали підінтегральну функцію, яка є правильним раціональним алгебраїчним дробом.

Зауваження. Замість трьох окремих невизначених інтегралів від найпростіших ірраціональностей можна було б розглядати тільки (22.12), оскільки всі інші є його окремими випадками.

Невизначені інтеграли, первісні яких не виражаються через скінченне число елементарних функцій, називають ***інтегралами, що не беруться у скінченному вигляді.*** До таких інтегралів, наприклад, належать:

$$\int e^{-x^2} dx,\ \int \sin x^2 dx,\ \int \cos x^2 dx,\ \int \frac{\sin x}{x} dx,\ \int \frac{\cos x}{x} dx,\ \int \frac{dx}{\ln x}. \qquad (22.14)$$

22.4. Інтегрування функцій, раціонально залежних від тригонометричних функцій

I. Інтегрування довільних раціональних функцій від $\sin x$**,** $\cos x$.

Розглянемо способи, за допомогою яких беруться інтеграли виду

$$I = \int R(\sin x, \cos x) dx, \qquad (22.15)$$

де R є інтегровною раціональною функцією від $\cos x$ та $\sin x$.

Загальний підхід до інтегрування таких функцій полягає у застосуванні підстановки $t = \operatorname{tg}(x/2)$, яку називають ***універсальною тригонометричною підстановкою***. За її допомогою підінтегральна функція стає раціональним алгебраїчним дробом $r(t)$.

Дійсно:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \ \Rightarrow \left(x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right),$$

як бачимо, dx є раціональною функцією від змінної t.

Залучимо тригонометричні формули подання функцій $\sin x$, $\cos x$ через тангенс половинного кута, тоді:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Заданий інтеграл набуває вигляду:

$$I=\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int r(t)dt,$$

оскільки результатами арифметичних операцій над дробами є дроби.

Застосуємо цю підстановку до інтегралів виду:

$$\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}\qquad\text{та}\quad\int\frac{1}{\sin^n x}dx;\quad\int\frac{1}{\cos^n x}dx,\quad n\in N.$$



Знайдемо $\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}$.

Зробимо підстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2};\ dx=\frac{2dt}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$.

Тоді одержимо:

$$\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{4\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)}+3\frac{2t}{\left(1+t^2\right)}+5\right)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2+6t+9}=2\int\frac{dt}{\left(t+3\right)^2}=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}+C.$$



Знайдемо $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$.

Використовуючи універсальну підстановку $t=\operatorname{tg}(x/2)$ та підставляючи в інтеграл $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, одержимо:

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}=\frac{1}{4}\int\frac{(1+t^2)^2dt}{t^3}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(1+2t^2+t^4)dt}{t^3}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+t\right)dt=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2t^2}+2\ln|t|+\frac{t^2}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2}\right)+C.$$

 Знайдемо $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

Треба зазначити, що інтеграли, які містять у знаменнику степені $\sin x$ при використанні універсальної тригонометричної підстановки, зводяться до більш простих раціональних дробів, тому зробимо заміну:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),\ z = \frac{\pi}{2} + x, dz = dx \text{ та } t = \operatorname{tg}\frac{z}{2},$$

одержимо

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{dz}{\sin^3 z} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}} + 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right| + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} + 2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right) + C.$$

 Знайдемо $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$.

Зробимо підстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, звідки:

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Тоді:

$$\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx = \int \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{1+t^2-2t+1-t^2}{1+t^2+2t-1+t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2-2t}{2t^2+2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{1-t}{t^2+t} \cdot \frac{dt}{1+t^2}.$$

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом. Розкладаємо його на суму найпростіших:

$$\frac{1-t}{\left(t^2+t\right)\left(1+t^2\right)} = \frac{1-t}{t\left(t+1\right)\left(1+t^2\right)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

Після множення обох частин рівності на $t(t+1)\left(1+t^2\right)$ маємо:

$$1-t=A(t+1)\left(t^2+1\right)+Bt\left(t^2+1\right)+(Ct+D)t(t+1).$$

Якщо $t=0$, тоді $A=1$; а при $t=-1$ одержуємо $-2B=2$, або $B=-1$. Для відшукання C і D складаємо систему двох рівнянь, для чого прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t в лівій і правій частинах рівності:

$$\begin{array}{l|l} t^3 & A+B+C=0 \\ t & A+B+D=-1 \end{array}.$$

Підставляємо в систему $A=1$, $B=-1$. Тоді $C=0$, $D=-1$.

Отже,

$$\int\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=2\left(\ln|t|-\ln|t+1|-\operatorname{arctg}t\right)+C=2\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|-2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=2\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|-2\operatorname{arctg}\left(tg\frac{x}{2}\right)+C=2\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|-x+C.$$

Універсальна тригонометрична підстановка часто призводить до складних, громіздких виразів, тому доцільно розглянути окремі випадки інтегралів типу $I=\int R(\sin x,\cos x)dx$.

II. Інтегрування функцій, непарних (парних) відносно синуса або (і) косинуса. Функція $R(\sin x,\cos x)$ називається **непарною** відносно функції $\sin x$ $(\cos x)$, якщо виконується умова:

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$
$$\left(R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)\right),$$

тобто знак функції змінюється на протилежний, якщо в ній замінити або $\sin x$ на $(-\sin x)$, або $\cos x$ на $(-\cos x)$.

Функція $R(\sin x,\cos x)$ називається **парною** відносно функцій $\sin x$ і $\cos x$, якщо виконується умова:

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x),$$

тобто функція не змінюється, якщо в ній одночасно замінити $\sin x$ і $\cos x$ на $(-\sin x)$ і $(-\cos x)$ відповідно.

Правило введення нової змінної.

Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$:

1) **непарна** відносно функції $\sin x$ $(\cos x)$, то виконується підстановка $t = \cos x$ $(t = \sin x)$ і застосовується тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) **парна** відносно функцій $\sin x$ і $\cos x$, то виконується підстановка $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$ і застосовуються тотожності:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}; \tag{22.16}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}. \tag{22.17}$$

 Знайдемо невизначений інтеграл $I_1 = \int \dfrac{dx}{\cos x(1+\sin^2 x)}$.

Оскільки підінтегральна функція непарна відносно функції $\cos x$, тому виконуємо підстановку $t = \sin x$:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\cos x(1+\sin^2 x)} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x,\ dt = \cos x dx \\ 1+\sin^2 x = 1+t^2 \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{(t^2-1)(t^2+1)} =$$

$$= -\int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1} \right) dt.$$

Пропонуємо самостійно знайти одержані інтеграли.

 Якщо в підінтегральній функції I_1 показник степеня косинуса збільшити на одиницю, то вона стане парною відносно $\cos x$ і $\sin x$, і тоді покладаємо $t = \operatorname{tg} x$:

$$I_2 = \int \frac{dx}{\cos^2 x(1+\sin^2 x)} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x,\ dt = dx/\cos^2 x \\ 1+\sin^2 x = (2t^2+1)/(t^2+1) \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{2t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{1}{\left(\sqrt{2}\,t\right)^2+1}\right) dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,t)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)\right) + C\,.$$

III. **Інтегрування добутку цілих степенів синуса і косинуса**:

$$I = \int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx,\ m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\,. \tag{22.18}$$

Такі невизначені інтеграли є окремим випадком розглянутих вище (див. **II**), тому якщо:

1) m – непарне, покладаємо $t = \cos x$;

2) n – непарне, покладаємо $t = \sin x$;

3) m і n – парні, покладаємо $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$.

У третьому випадку часто замість запропонованих підстановок використовують формули зниження степеня (тригонометричних функцій):

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right),\ \ \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right), \tag{22.19}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ \ \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x). \tag{22.20}$$

Вони дозволяють у ряді випадків уникнути введення нової змінної.



Знайдемо інтеграл:

$$I = \int \sin^{-4} x \cos^5 x\,dx\,.$$

Оскільки підінтегральна функція містить $\cos x$ у непарному степені, то вводимо змінну $t = \sin x$, а $\cos^5 x$ представляємо як $\cos x \cdot \cos^4 x$ і застосовуємо тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$I = \int \sin^{-4} x \cos^5 x\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x,\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\cos^4 x \cos x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{(1-t^2)^2}{t^4}\,dt = \int \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t^4}\,dt =$$

$$= \int (t^{-4} - 2t^{-2} + 1)\, dt = \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{2t^{-1}}{-1} + t + C = \frac{-1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C.$$

Невизначені інтеграли, для відшукання яких використовуються формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, виділяють в окремий вид.

IV. Інтегрування добутку перших степенів синусів і косинусів, що мають різні аргументи.

Так називають взяття невизначених інтегралів виду:

$$\int \sin mx \cdot \cos nx\, dx,\ \int \cos mx \cdot \cos nx\, dx,\ \int \sin mx \cdot \sin nx\, dx, \qquad (22.21)$$

де m і n – дійсні числа.

Відшукання невизначених інтегралів (22.21) зводиться до безпосереднього інтегрування завдяки застосуванню таких тригонометричних формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = 1/2 \cdot \big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big),$$
$$\cos\alpha\cos\beta = 1/2 \cdot \big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big),$$
$$\sin\alpha\sin\beta = 1/2 \cdot \big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big).$$



Знайдемо невизначений інтеграл:

$$I_1 = \int \sin 5x\, \sin 8x\, dx = \big|\, \alpha = 5x,\ \beta = 8x \,\big| = \frac{1}{2}\int (\cos 3x - \cos 13x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\int (\cos 3x dx - \int \cos 13x dx\Big) = \frac{1}{78}(13\sin 3x - 3\sin 13x) + C.$$

V. Інтегрування натуральних степенів тангенса і котангенса:

$$\int \mathrm{tg}^n x\, dx,\ \int \mathrm{ctg}^n x dx, \text{ де } 2 \le n \in \mathbf{N}. \qquad (22.22)$$

Відшукання таких інтегралів можна здійснювати *введенням нової змінної* $t = \mathrm{tg}\, x,\ t = \mathrm{ctg}\, x$ відповідно:

$$\int \mathrm{ctg}^n x dx = \left| \begin{matrix} t = \mathrm{ctg}\, x, \quad x = arc\,\mathrm{ctg}\, t \\ dx = -1/(1+t^2)\, dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{t^n}{t^2+1} dt = -\int r(t)\, dt. \qquad (22.23)$$

Підінтегральна функція $r(t)$ буде неправильним дробом, її інтегрування потребує виділення цілої частини цього дробу.



Обчислимо для прикладу такий інтеграл*:*

$$\int \operatorname{ctg}^6 x dx .$$

Вводимо нову змінну $t = \operatorname{ctg} x$, отримаємо:

$$\int \operatorname{ctg}^6 x\, dx = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{ctg} x,\ x = arc\operatorname{ctg} t \\ dx = -dt/(1+t^2) \end{matrix} \right| = -\int \frac{t^6}{t^2+1} dt = -\int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t + arc\operatorname{ctg} t \right) + C = -\left(\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x + x \right) + C .$$

Зауваження. До відшукання розглянутих інтегралів зводяться невизначені інтеграли виду:

$$I = \int \frac{1}{\sin^{2n} x} dx,\ \ I = \int \frac{1}{\cos^{2n} x} dx, \quad \text{де } 2 \le n \in \mathbf{N} . \tag{22.24}$$

Дійсно, якщо використати співвідношення (22.16) та (22.17), отримаємо:

$$I = \int \frac{1}{\sin^{2n} x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)^n dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^n dx;$$

$$I = \int \frac{1}{\cos^{2n} x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^n dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^n dx.$$

Розкривши дужки, одержимо інтеграл від суми степенів $\operatorname{ctg} x$ чи $\operatorname{tg} x$.

VI. Інтегрування квадратичних ірраціональностей (тригонометричні підстановки).

Загальний підхід до раціоналізації відповідних інтегралів

$$I = \int R(x, \sqrt{\pm a^2 \pm x^2})\, dx , \tag{22.25}$$

де розглядаються всі пари знаків, крім $(-, -)$, полягає у застосуванні підстановок виду $x = \psi(t)$, за допомогою яких підінтегральна функція стає раціонально залежною від тригонометричних функцій. Нижче наведені (табл. 22.2) відпо-відні заміни змінної.

Таблиця 22.2

Тригонометричні підстановки для раціоналізації невизначених інтегралів

№	Вид невизначеного інтеграла	Відповідні підстановки	
		перша	друга
1	$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx$	$x=a\cdot\sin t\ ,\ dx=a\cdot\cos t\,dt\,,$ $\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cdot\cos t$	$x=a\cdot\cos t$
2	$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx$	$x=a\cdot\operatorname{tg} t,\ dx=(a/\cos^2 t)\cdot dt\,,$ $\sqrt{a^2+x^2}=a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}=a/\cos t$	$x=a\cdot\operatorname{ctg} t$
3	$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx$	$x=\dfrac{a}{\sin t}\ ,\ dx=-\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}\cdot dt\,,$ $\sqrt{x^2-a^2}=a\sqrt{1/\sin^2 t-1}=a\cdot\operatorname{ctg} t$	$x=\dfrac{a}{\cos t}$

Аналізуючи підінтегральні вирази, переконуємось, що завдяки тригонометричним підстановкам $x,\ dx$ квадратні корені з двочленів стають раціонально залежними від функцій $\sin x,\ \cos x$. Наприклад:

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx=\int R(a\sin t,a\cos t)\,a\cos t\,dt=\int r(\sin t,\cos t)\,dt.$$

Для того щоб позбутись радикала в інтегралах 1, 2, 3 (табл. 22.2), використовують відповідно такі тригонометричні формули:

1. $\begin{bmatrix}1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha,\\ 1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.\end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix}1+\operatorname{tg}^2\alpha=1/\cos^2\alpha,\\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1/\sin^2\alpha.\end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix}1/\sin^2\alpha-1=\operatorname{ctg}^2\alpha,\\ 1/\cos^2\alpha-1=\operatorname{tg}^2\alpha.\end{bmatrix}$



Знайдемо невизначений інтеграл:

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}.$$

Під знаком радикала маємо вираз x^2+a^2. Отже, покладаємо $x=3\operatorname{tg} t$:

$$\left| \begin{array}{l} x = 3\operatorname{tg} t, \;\; dx = (3/\cos^2 t)\cdot dt, \\ \sqrt{9+x^2} = 3\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = 3/\cos t \end{array} \right| \Rightarrow I = \int \frac{1}{3\operatorname{tg} t}\cdot\frac{\cos t}{3}\cdot\frac{3}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sin t}dt = \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \left| t = \operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right| = \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}(x/3)}{2}\right| + C.$$

Відповідь значно спрощується, якщо задіяти формулу тангенса половинного кута і деякі інші співвідношення:

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} - \operatorname{ctg} t = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t} - \operatorname{ctg} t =$$

$$= \left| \operatorname{tg} t = \frac{x}{3}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{3}{x}\right| = \sqrt{1+\frac{9}{x^2}} - \frac{3}{x} = \frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x}.$$

Таким чином,

$$I = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x}\right| + C.$$



Ключові терміни

Елементарні раціональні алгебраїчні дроби; правильний (неправильний) дріб; ціла частина дробу; ділення «сходинками»; розкладання дробів на суму елементарних; метод невизначених коефіцієнтів; універсальна тригонометрична підстановка; раціоналізація підінтегральної функції.



Запитання для самоперевірки

1. Яка функція називається раціональною?
2. Який раціональний дріб називається правильним?
3. Опишіть спосіб виділення цілої частини неправильного дробу.
4. Як розкласти правильний раціональний алгебраїчний дріб на суму найпростіших дробів?
5. Як знайти невизначені коефіцієнти при розкладі дробу?
6. Як знайти інтеграли виду $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., x^{\frac{m_s}{n_s}}\right)dx$?

8. Які інтеграли від ірраціональних функцій беруться тригонометричними підстановками?

9. Як знайти інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$?

10. Які випадки заміни змінної в таких інтегралах ви знаєте?

11. Яку заміну змінної треба зробити в інтегралі $\int \sin^{2n+1} x dx$?

12. Як знайти інтеграли виду $\int \sin^{2k} x dx$?

13. Як знайти інтеграли виду $\int tg^m x dx$?

14. Як знайти інтеграли виду $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$?

15. Як знаходяться інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$?

Глава 23. Визначений інтеграл. Теорема Ньютона – Лейбніца. Методи інтегрування

23.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Нехай невід'ємна функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, де a і b – скінченні числа.

1. Задача про відшукання площі криволінійної трапеції. Нехай плоска фігура обмежена графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox, прямими $x = a, x = b$ (рис. 23.1). Ця геометрична фігура називається ***криволінійною трапецією***.

Необхідно визначити її площу.

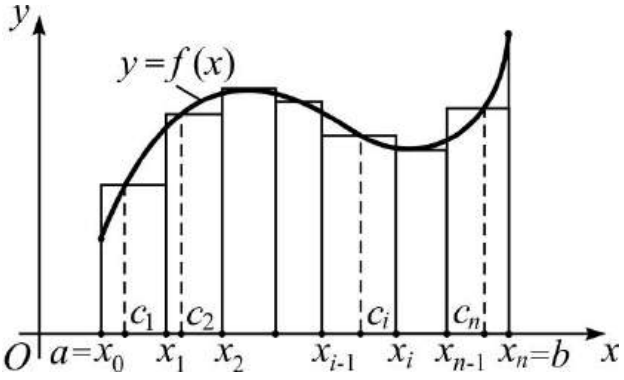


Рис. 23.1

Для розв'язання задачі виконаємо такі дії:

1) ***розіб'ємо*** відрізок $[a;b]$ довільно на n частин точками:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$;

2) ***виберемо*** на кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, довільну точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$.

Позначимо через Δx_i, різницю $x_i - x_{i-1}$, яку будемо називати довжиною частинного відрізка $[x_{i-1}; x_i]$;

3) ***обчислимо*** значення функції $f(x)$ у точках c_i і складемо таку суму:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_i)\Delta x_i + ... f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \; ; \quad (23.1)$$

геометричний зміст цієї суми очевидний – це сума площ прямокутників з основами $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ та висотами $f(c_1), f(c_2), ..., f(c_n)$. Сума S_n називається ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$;

4) ***знайдемо*** границю S_n за умови, що $n \to \infty$ та найбільша (максимальна) довжина частинних відрізків $\max \Delta x_i$ прямує до нуля. Тоді площа S криволінійної трапеції, що зображена на рис. 23.1, і є границею, якщо вона існує, цієї суми, тобто:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0, \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \quad (23.2)$$

2. Задача про визначення пройденого шляху матеріальної точки за проміжок часу від T_1 до T_2. Нехай швидкість руху матеріальної точки задана як функція часу $v(t) = f(t)$. Знайти шлях, який пройде точка за проміжок часу від T_1 до T_2.

Якщо швидкість не змінюється протягом часу, тобто $f(t)$ – стала величина, то шлях ΔS, пройдений точкою за проміжок часу $[t; t + \Delta t]$, обчислюється за формулою $\Delta S = f(t)\Delta t$.

Виконаємо такі дії:

1) ***розіб'ємо*** відрізок $[T_1; T_2]$ на проміжки часу:

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T_2;$$

2) ***виберемо*** на кожному з відрізків часу $[t_{i-1}; t_i]$ довільну точку $c_i \in [t_{i-1}; t_i]$, $i = \overline{1, n}$;

3) ***обчислимо*** значення швидкості $f(t)$ у точці $c_i \in [t_{i-1}; t_i]$, тобто $f(c_i)$, $i = \overline{1, n}$, на кожному відрізку часу $[t_{i-1}; t_i]$ та визначимо довжину шляху ΔS_i, пройденого точкою за проміжок часу $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, як добуток $\Delta S_i = f(c_i)\Delta t_i$;

тоді повна довжина шляху S_n наближено визначається як інтегральна сума для функції $v(t) = f\left(t\right)$ на відрізку

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta t_i; \tag{23.3}$$

4) ***знайдемо*** границю S_n при $n \to \infty$ та при $\max \Delta t_i \to 0$, яка і є довжиною шляху, який пройшла точка за проміжок часу від T_1 до T_2:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta t_i \to 0, \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta t_i. \tag{23.4}$$

3. Задача про відшукання обсягу продукції. Нехай функція $z = f\left(t\right)$ описує залежність продуктивності праці z деякого виробництва від часу t.

Необхідно знайти обсяг продукції U, виробленої за проміжок часу $[O,T]$.

Якщо продуктивність не змінюється протягом часу, тобто $f\left(t\right)$ – стала величина, то обсяг продукції ΔU, що вироблена за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$, обчислюється за формулою $\Delta U = f\left(t\right)\Delta t.$ Використовуючи наближену рівність $\Delta U = f\left(c\right)\Delta t$, де $c \in \left[t, t+\Delta t\right]$, яка буде тим більш точною, чим меншим буде Δt, виконаємо такі дії:

1) ***розіб'ємо*** відрізок $[O,T]$ на проміжки часу

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T;$$

2) ***виберемо*** на кожному з відрізків $[t_{i-1}; t_i]$, $i = \overline{1,n}$ довільну точку $c_i \in [t_{i-1}; t_i]$;

3) ***обчислимо*** продуктивність праці у кожній точці $c_i \in [t_{i-1}; t_i]$, тобто $f\left(c_i\right)$, для кожного проміжку часу; визначимо обсяг продукції Δu_i, що вироблено за час $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, як добуток $\Delta U_i = f\left(c_i\right)\Delta t_i$, якщо на кожному проміжку часу Δt_i вважати продуктивність праці сталою величиною; тоді повний обсяг продукції U_n наближено визначається як інтегральна сума для функції $z = f\left(t\right)$ на відрізку $[O,T]$

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i; \tag{23.5}$$

4) ***знайдемо*** границю U_n, якщо $\max \Delta t_i$ прямує до нуля та $n \to \infty$, і одержимо обсяг продукції, виробленої за проміжок часу $[O,T]$

$$U = \lim_{\substack{\max \Delta t_i \to 0, \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \Delta t_i. \tag{23.6}$$

Слід зазначити, що при розв'язанні цих трьох різних задач, були виконані одні і ті ж самі дії, і ми прийшли до одного і того ж підсумку – виникає необхідність визначити границю інтегральної суми.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n для функції $f\left(x\right)$, знайдена за умови, що $\max \Delta x_i \to 0$ при необмеженому зростанні числа точок розбиття $(n \to \infty)$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка на частини, ні від вибору точок $c_1, c_2, ..., c_n$, то ця границя називається ***визначеним інтегралом*** функції $f\left(x\right)$ на відрізку $[a, b]$, і позначається

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0, \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \Delta x_i\,, \tag{23.7}$$

де a, b – границі інтегрування (a – нижня, b – верхня);

$f\left(x\right)$ – підінтегральна функція;

dx – диференціал ***змінної інтегрування;***

$f\left(x\right)dx$ – підінтегральний вираз.

Теорема 23.1 (*теорема про існування визначеного інтеграла*). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ або обмежена на ньому і має скінченне число точок розриву першого роду, то існує скінченна границя інтегральної суми, і вона не залежить ні від способу розбиття відрізку на частини, ні від вибору точок всередині них для складання інтегральної суми, тобто існує визначений інтеграл від функції $y = f(x)$.

Теорему існування визначеного інтеграла приймемо без доведення.

Відповідно, функція $y = f(x)$, для якої на відрізку $[a, b]$ існує визначений інтеграл, називається ***інтегровною*** на цьому відрізку.

Повернемось до задач, що розглядались на початку, і наведемо ***геометричний зміст визначеного інтеграла***: якщо функція $f(x)$ невід'ємна на скінченому відрізку $[a; b]$, де $a < b$, то визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0, \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \Delta x_i$$

чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$, відрізком $[a, b]$ і прямими $x = a$ та $x = b$.

23.2. Основні властивості визначеного інтеграла

Оскільки за означенням визначений інтеграл є границею інтегральної суми, то доведення його властивостей базується на властивостях границь із залученням, для наочності і кращого розуміння, геометричного змісту визначеного інтеграла.

1^0 (***про інтеграл з рівними межами інтегрування***). Для будь-якої інтегровної функції $f(x)$ визначений інтеграл з рівними межами інтегрування до-рівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{23.8}$$

адже криволінійна трапеція вироджується у вертикальний відрізок.

2^0 (***про зміну знака***). Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a,b]$, то має місце формула

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \tag{23.9}$$

тобто, якщо поміняти місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл змінить свій знак на протилежний:

Дійсно, в інтегральній сумі прирости $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$, змінюють знак на протилежний.

3^0 (***про сталий множник***). Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a,b]$, то сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx, \text{ де } k = const, \tag{23.10}$$

оскільки k як спільний множник доданків інтегральної суми можна винести за символ суми і, відповідно, за знак границі.

4^0 (***про визначений інтеграл від суми функцій***). . Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтегровані на $[a,b]$, то інтеграл від їх суми і різниці дорівнює відповідно сумі чи різниці інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \big(f(x) \pm \varphi(x) \big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b \varphi(x)\, dx . \qquad (23.11)$$

Справедливість (23.11) випливає з того, що інтегральну суму лівої частини рівності можна подати у вигляді алгебраїчної суми двох інтегральних сум:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) \pm \varphi(x_i) \big) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot \Delta x_i ,$$

а за властивістю границі суми функцій і отримуємо (23.11).

Властивість поширюється на будь-яке скінченне число доданків.

5^0 (***про адитивність***). Якщо відрізок інтегрування розбито на дві частини, то визначений інтеграл на $[a, b]$ дорівнює сумі інтегралів на цих частинах:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx , \quad a < c < b , \qquad (23.12)$$

оскільки за геометричним змістом такому розбиттю відповідають дві трапеції, сума площ яких дорівнює площі вихідної трапеції (властивість поширюється на будь-яке скінченне число частин розбиття).

6^0 (***про перехід до визначеного інтеграла у нерівностях***). Якщо на відрізку інтегрування $[a, b]$ значення функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ пов'язані нерівністю $f(x) \le (\ge)\, \varphi(x)$, то такою ж, за знаком, нерівністю пов'язані визначені інтеграли від цих функцій:

$$f(x) \le (\ge)\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx \le (\ge) \int_a^b \varphi(x)dx . \qquad (23.13)$$

Дійсно, при одному і тому ж розбитті відрізка $[a, b]$ на частини доданки інтегральної суми для $f(x)$ і $\varphi(x)$ будуть пов'язані тим же знаком нерівності, що і самі функції, а граничний перехід не змінить знака нерівності.

7^0 (***про межі значень визначеного інтеграла***). Якщо M і m – найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на $[a, b]$, тобто $m \le f(x) \le M$ і $a < b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\, dx \le M(b-a). \qquad (23.14)$$

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, то серед її значень на цьому відрізку існують найменше і найбільше, тобто $m \le f(x) \le M$ (рис. 23.2). Тоді (23.14) можна розглядати як наслідок властивості (23.13), а саме

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x) dx \le \int_a^b M dx,$$

при цьому

$$\int_a^b m dx = m(b-a), \quad \text{а} \int_a^b M dx = M(b-a),$$

тоді

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x) dx \le \int_a^b M dx,$$

і властивість доведено.

Якщо доводити цю властивість за геометричним змістом визначеного інтеграла (рис. 23.2), то площа криволінійної трапеції, яка відповідає визначеному інтегралу, не може бути менше (більше) за площу прямокутника з основою $(b-a)$, висота якого є, відповідно, найменшим m (найбільшим M) значенням функції на $[a, b]$.

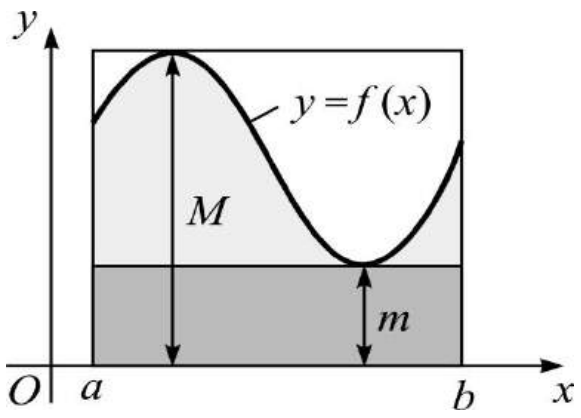


Рис. 23.2

8^0 (***теорема про середнє***). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то на ньому знайдеться така точка $\xi \in [a; b]$, що:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a). \qquad (23.15)$$

Відношення визначеного інтеграла від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ до довжини відрізка інтегрування називається **середнім значенням** функції:

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (23.16)$$

За геометричним змістом теореми про середнє (рис. 23.3) видно, що площа під кривою $y=f(x)$ на відрізку інтегрування $[a,b]$ дорівнює площі прямокутника з висотою $f(\xi)$ та основою $[a,b]$.

Таких точок на проміжку $[a,b]$ може бути декілька.

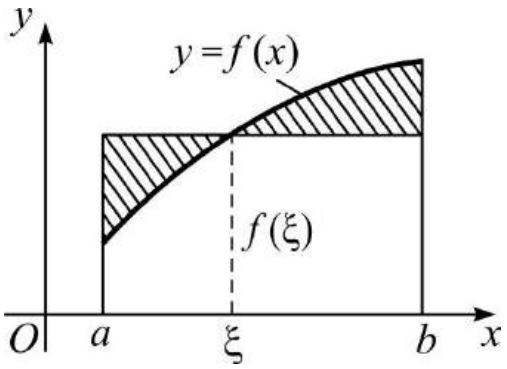


Рис. 23.3

23.3. Зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами

Якщо функція $y=f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, то вона також буде інтегровною на відрізку $[a;x]$, де $x\in[a;b]$. Інтеграл від такої функції також є функцією від x. Позначимо цей інтеграл таким чином:

$$F(x)=\int_a^x f(u)du. \qquad (23.17)$$

У цьому інтегралі нижня межа a є фіксованим числом, а верхня межа x – змінною. У виразі (23.17) використовується змінна інтегрування u, щоб відрізнити її від верхньої межі інтегрування. Чисельно функція $F(x)$ дорівнює площі криволінійної трапеції, основою якої є проміжок $[a;x]$.

Теорема 23.2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то в кожній точці $x\in[a,b]$ похідна від функції $F(x)$ за змінною верхньою межею дорівнює підінтегральній функції, тобто:

$$F'(x)=\left(\int_a^x f(u)du\right)'_x=f(x). \qquad (23.18)$$

Доведення. Для доведення теореми застосуємо визначення похідної. За умовою функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, тобто вона неперервна і на будь-якому відрізку $[a,x]$, $x\in[a,b]$. Надамо аргументу x деякий приріст Δx, тоді і функція $F(x)$ також отримає приріст $\Delta F(x)$. Розглянемо:

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(u)du-\int_a^x f(u)du=$$

$$=\int_a^x f(u)du+\int_x^{x+\Delta x} f(u)du-\int_a^x f(u)du=\int_x^{x+\Delta x} f(u)du.$$

Останній інтеграл було одержано за допомогою властивості 5^0 визначеного інтеграла. Оскільки

$$\Delta F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(u)du,$$

то застосовуючи теорему про середнє 8^0, здобудемо:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(u)du=\frac{f(c)(x+\Delta x-x)}{\Delta x}=\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=f(c),$$

де $c\in[x;x+\Delta x]$.

Переходячи до границі при $\Delta x\to 0$, а також зважаючи на те, що при цьому $c\to x$ і $\lim\limits_{x\to c} f(c)=f(x)$, одержимо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=F'(x)=f(x).$$

З теореми 23.2 випливає, що для функції $f(x)$, яка є неперервною на відрізку $[a;b]$, існують первісні на цьому відрізку, в якості яких можна взяти інтеграл зі змінною верхньою межею. Отже, рівність $F'(x)=f(x)$ означає, що функція $F(x)$ є однією з первісних для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тому згідно з означенням невизначеного інтеграла як сім'ї первісних маємо:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \quad\Rightarrow\quad \int f(x)\,dx=\int_a^x f(u)\,du+C. \qquad (23.19)$$

Формула (23.19) описує зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами.

23.4. Формула Ньютона – Лейбніца

Теорема 23.3 (*основна формула інтегрального числення*). Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то визначений інтеграл від $f(x)$ на $[a, b]$ є різницею значень будь-якої з її первісних функцій $F(x)$ у точках b і a:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (23.20)$$

Формула (23.20) для обчислення визначеного інтеграла називається ***формулою Ньютона – Лейбніца.***

Доведення ґрунтується на співвідношенні (23.19), яке дозволяє будь-яку первісну функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ записати як: $F(x) = \int_a^x f(u)\,du + C_1$. Остання рівність буде справедливою при відповідному виборі сталої C_1 для всіх значень $x \in [a, b]$.

Підставляючи замість x по черзі a і b, отримуємо (23.20):

$$\begin{cases} x = a:\ F(a) = C_1, \\ x = b:\ F(b) = \int_a^b f(u)du + C_1 \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(u)du = F(b) - F(a).$$

Отже, теорему доведено.

Відзначимо, що оскільки всі первісні відрізняються одна від одної лише константою, то різниця $F(b) - F(a)$ не залежить від вибору $F(x)$.

Для позначення приросту первісної $F(x)$ на відрізку $[a,b]$ вводять ***символ подвійної підстановки,*** який зручно використовувати при розв'язанні прикладів, а саме:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (23.21)$$

Зауважимо, що саме формула Ньютона – Лейбніца відображує тісний зв'язок між невизначеним і визначеним інтегралами. За цією формулою обчислення визначеного інтеграла зводиться до двох кроків:

1) ***відшукання*** однієї з первісних $F(x)$ для $f(x)$ на $[a, b]$ (по суті це відшукання невизначеного інтеграла);

2) ***обчислення*** значень первісної в точках, що відповідають межам інтегрування, і визначення різниці між значеннями на верхній і нижній межах.



Обчислимо визначений інтеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx.$$

Зазвичай кроки 1), 2) здійснюють одним ланцюжком:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

23.5. Методи обчислення визначеного інтеграла

23.5.1. Безпосереднє визначене інтегрування. Оскільки обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона – Лейбніца передбачає спочатку взяття невизначеного інтеграла, а потім виконання арифметичних дій, це означає, що принципових відмінностей у методах відшукання невизначеного й обчислення визначеного інтегралів немає, отож, ***безпосереднє обчислення визначеного інтеграла*** передбачає безпосереднє невизначене інтегрування (відшукання однієї з первісних).



Обчислимо інтеграл $\int_1^8 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$:

$$\int_1^8 \left(x+2\cdot\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}}+\frac{1}{x^{2/3}}\right)dx = \int_1^8 x\,dx + 2\int_1^8 x^{1/6}dx + \int_1^8 x^{-2/3}dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{x^{7/6}}{7/6}+3\cdot x^{1/3}\right)\Big|_1^8 = \frac{x^2}{2}\Big|_1^8 + \frac{12}{7}\cdot x\sqrt[6]{x}\Big|_1^8 + 3\cdot\sqrt[3]{x}\Big|_1^8 =$$

$$= \frac{1}{2}(64-1)+\frac{12}{7}(8\sqrt{2}-1)+3(2-1) = \frac{1}{14}(459+192\sqrt{2}) \approx 52,2.$$

23.5.2. Обчислення інтеграла методом підстановки. Нагадаємо, що існує два види підстановок, які застосовуються при інтегруванні із застосуванням нової змінної: $t=\varphi(x)$ і $x=\psi(t)$.

Нехай для визначеності при обчисленні інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ проведено підстановку $x=\psi(t)$.

Теорема 23.4 (*про заміну змінної у визначеному інтегралі*). Якщо:

1) функція $\psi(t)$ і її похідна $\psi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha,\ \beta]$;

2) значення $\psi(t)$ у точках α і β такі, що $\psi(\alpha)=a$ і $\psi(\beta)=b$;

3) складена функція $f(\psi(t))$ неперервна на $[\alpha,\ \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\,d\psi(t). \qquad (23.22)$$

Доведення ґрунтується на зв'язку між невизначеним і визначеним інтегралами. Оскільки:

$$\int f(x)dx=F(x)+C,\ \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

а також

$$\int f(\psi(t))\,d\psi(t)=F(\psi(t))+C,\ \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\,d\psi(t)=$$

$$=F(\psi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\psi(\beta))-F(\psi(\alpha))=F(b)-F(a),$$

то порівнюючи ці два вирази, отримуємо справедливість (23.22).

Підстановка $t=\varphi(x)$ у разі існування оберненої до $\varphi(x)$ функції зводиться до розглянутої: $t=\varphi(x)$, а $x=\varphi^{-1}(t)=\psi(t)$.



Відзначимо, що при обчисленні визначеного інтеграла методом заміни змінної немає необхідності повертатися до вихідної змінної, замість цього треба знаходити межі інтегрування за новою змінною.



Обчислимо визначені інтеграли:

1) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=a\cos t\ ,\ dx=-a\sin t\,dt,\\ \sqrt{a^2-x^2}=a\sin t,\quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & a\\ t & \pi/2 & 0 \end{array}\end{array}\right|=$

$$= -a^2 \cdot \int\limits_{\pi/2}^{0} \sin^2 t \cdot dt = \frac{a^2}{2} \cdot \int\limits_{0}^{\pi/2} (1-\cos 2t) \cdot dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4};$$

$$2) \int\limits_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \left| \begin{array}{ll} t = x^3, & x = 0 \Rightarrow t = 0; \\ dt = 3x^2 dx; & x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^1 e^t dt = \frac{1}{3} e^t \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e-1) \approx 0{,}57.$$

23.5.3. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Розглянемо випадок, коли при обчисленні визначеного інтеграла відшукання первісної вимагає застосування інтегрування частинами.

Теорема 23.5 (***формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла***). Якщо у визначеному інтегралі $\int\limits_a^b f(x)dx$ підінтегральний вираз подано у вигляді добутку $u \cdot dv$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – диференційовні на відрізку $[a,b]$ функції, то виконується співвідношення:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du\,. \tag{23.23}$$

Доведення. Оскільки

$$(uv)' = u'v + uv',$$

то

$$\int\limits_a^b (uv)'dx = \int\limits_a^b u'v dx + \int\limits_a^b uv' dx\,.$$

Застосовуючи до лівої частини останньої рівності формулу Ньютона – Лейбніца, а також враховуючи, що $u'dx = du$, а $v'dx = dv$, здобудемо

$$(uv)\Big|_a^b = \int\limits_a^b v du + \int\limits_a^b u dv,$$

звідси остаточно маємо:

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du\,.$$

Теорему доведено.

Це і є ***формула інтегрування частинами*** у визначеному інтегралі.

Якщо межі інтегрування симетричні відносно нуля, то для скорочення обчислень доцільно ураховувати парність і непарність підінтегральної функції. Так, якщо $f(x)$ – парна функція, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

а якщо $f(x)$ – непарна функція, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Це легко обґрунтувати, спираючись на формулу Ньютона – Лейбніца.



Обчислимо інтеграли:

1) $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

Підінтегральна функція є парною, тобто $f(-x) = f(x)$, тому

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = 2\int_{0}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = x, \quad du = dx \\ dv = \dfrac{\sin x dx}{\cos^2 x}, \quad v = \dfrac{1}{\cos x} \end{array} \right| =$$

$$= 2\left(uv\Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} v\,du \right) = 2\left(\frac{x}{\cos x}\Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} \right) = 2\left(\frac{\pi}{3\cos(\pi/3)} - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)\Big|_0^{\pi/3} \right) =$$

$$= 2\left(\frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \right) = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} \right) \approx 3{,}12;$$

2) $\int\limits_{0}^{e-1} ln(x+1)\,dx.$

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln(x+1),\ du = \dfrac{1}{x+1}dx; \\ dv = dx,\ v = x. \end{array} \right| =$$

$$= x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}dx = (e-1)\ln e - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}dx =$$

$$= e - 1 - x\Big|_0^{e-1} + \ln\left|x+1\right|\Big|_0^{e-1} = e - 1 - e + 1 + \ln e = 1.$$



Ключові терміни

Інтегральна сума; визначений інтеграл; площа криволінійної трапеції; інтегровна функція; середнє значення функції на проміжку; інтеграл зі змінною верхнею межею; методи визначеного інтегрування; формула Ньютона – Лейбніца.



Запитання для самоперевірки

1. Що називається інтегральною сумою функції $f(x)$ на $[a,b]$?
2. Дайте означення визначеного інтеграла.
3. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
4. Як знайти середнє значення функції на проміжку $[a,b]$?
5. Який геометричний, механічний, економічний зміст має визначений інтеграл?
6. У чому полягає різниця між визначеним та невизначеним інтегралами?
7. Що таке інтеграл зі змінною верхньою межею інтегрування? Наведіть його геометричну інтерпретацію.
8. Чому дорівнює похідна від визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею?
9. Запишіть формулу Ньютона – Лейбніца для визначеного інтеграла.
10. Сформулюйте теорему про заміну змінної у визначеному інтегралі.
11. У чому особливість методу заміни змінної у визначеному інтегралі?
12. Запишіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Глава 24. Застосування визначеного інтеграла до деяких геометричних та економічних задач

24.1. Довжина дуги плоскої кривої

Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною і диференційовною на відрізку $[a; b]$. Знайдемо на цьому відрізку довжину лінії, що відповідає графіку даної функції.

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частин точками поділу x_i і впишемо в дугу кривої ламану лінію (рис. 24.1). ***Довжиною дуги*** називається границя довжини вписаної ламаної лінії при необмеженому зменшенні довжини її ланок.

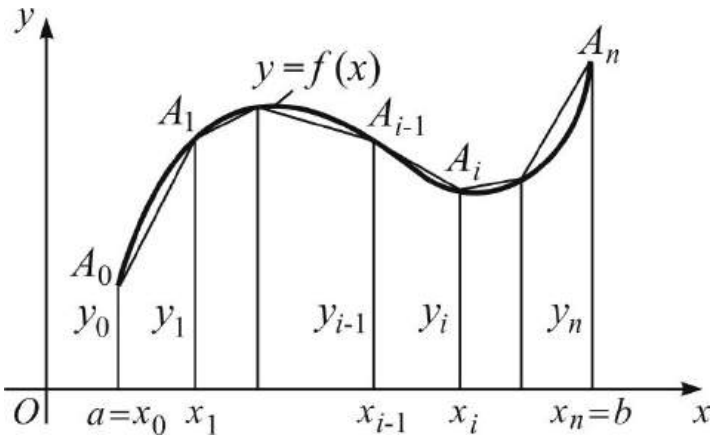


Рис. 24.1

Нехай абсцисами вершин ламаної лінії є значення x_i. Тоді довжина однієї ланки ламаної згідно з теоремою Піфагора визначається як

$$A_{i-1}A_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\,.$$

Звідси:

$$A_{i-1}A_i = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,.$$

За теоремою Лагранжа (формулою скінченних приростів) маємо:

$$A_{i-1}A_i = \Delta x_i \sqrt{1 + (y'(c_i))^2}\,.$$

Довжина всієї ламаної лінії визначається як сума довжини її ланок:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (y'(c_i))^2}\,\Delta x_i\,.$$

Отже, довжина дуги кривої, що відповідає графіку функції $y = f(x)$ на $[a;b]$, становить:

$$l = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + y'^2(c_i)}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \text{ де } 1 \le i \le n\,. \qquad (24.1)$$

Якщо крива задана рівняннями у ***параметричній*** формі

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

то довжина дуги такої кривої визначається за формулою

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt, \qquad (24.2)$$

де t_1 і t_2 – значення параметра, які відповідають кінцям дуги.

Поряд з добре відомою декартовою системою координат xOy, у якій кожній точці площини відповідає пара чисел (x, y) – проекцій точки на координатні осі, користуються полярною системою координат.

Зафіксуємо на площині деяку точку O – ***полюс*** – і промінь OP – ***полярну вісь***. Виберемо довільним чином відмінну від полюса точку M (рис. 24.2).

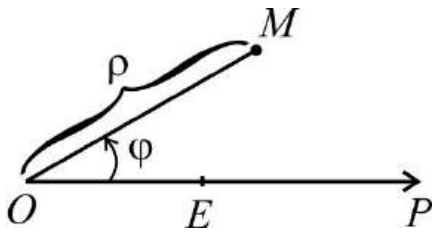


Рис. 24.2

Відстань ρ від полюса O до точки M називається ***полярним радіусом*** точки M: $\rho = OM > 0$. Кут нахилу φ полярного радіуса до полярної осі називається ***полярним кутом*** точки M. У точці O полярний кут невизначений.

Числа ρ і φ називаються ***полярними координатами*** точки M, і пишуть: (ρ, φ) або $M(\rho, \varphi)$.

Полюс O, полярна вісь Op і масштабний (одиничний) відрізок OE визначають ***полярну систему координат*** $\rho O\varphi$.

Полярний кут визначається неоднозначно: при заданому $\rho \neq 0$ точки з координатами $(\rho, \varphi + 2k\pi)$, де $k \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$, збігаються. Зазвичай значення φ беруть з проміжку $[0, 2\pi)$ або $(-\pi, \pi]$ і називають їх ***головними значеннями*** полярного кута.

Рівняння $F(\rho, \varphi) = 0$ є рівнянням лінії L у полярних координатах, якщо координати будь-якої точки $M(\rho, \varphi)$ на лінії задовольняють його, і навпаки, якщо пара чисел (ρ, φ) задовольняє рівняння, то ρ і φ є координатами точки, яка належить лінії:

$$(\rho, \varphi) \in L \Leftrightarrow F(\rho, \varphi) = 0, \qquad (24.3)$$

де F – закон, який відображує властивість точок лінії, ρ і φ – ***поточні координати*** точок лінії.

Зв'язок між координатами точки у полярній $\rho O\varphi$ і декартовій xOy системах координат легко встановити, якщо полюс співпадає з початком декартової системи координат, а полярна вісь розташована на осі абсцис (рис. 24.3), і масштаб систем однаковий.

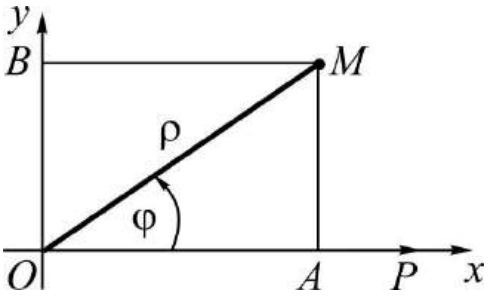


Рис. 24.3

Із ΔOAM ($\angle A = 90^{\circ}$) отримуємо ***формули переходу від декартових до полярних координат*:**

$$\begin{cases} x/\rho = \cos\varphi; \\ y/\rho = \sin\varphi, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad (24.4)$$

де $\rho \geq 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$ або $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Якщо дуга задається рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ в ***полярних*** координатах:

$$\rho = \rho(\varphi); \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

то за формулами (24.2) та (24.4) визначаємо

$$\begin{cases} x'_{\varphi} = \rho' \cos\varphi - \rho\sin\varphi, \\ y'_{\varphi} = \rho' \sin\varphi + \rho\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x'_{\varphi})^2 + (y'_{\varphi})^2} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,.$$

Отже, довжина дуги в полярних координатах знаходиться за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi, \qquad (24.5)$$

де α і β – значення полярного кута, що відповідають кінцям дуги.



Обчислити довжину дуги кривої $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$.

Спочатку треба визначити границі інтегрування. Для цього знайдемо область визначення заданої функції, розв'язавши систему нерівностей:

$$\begin{cases} x - x^2 \geq 0, \\ -1 \leq \sqrt{x} \leq 1, \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-1) \leq 0, \\ 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Тепер визначаємо похідну функції y:

$$y' = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1-x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}};$$

отже,

$$1+\left(y'\right)^2=1+\frac{\left(1-x\right)^2}{x\left(1-x\right)}=1+\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}.$$

За формулою (24.1) маємо:

$$l=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{x}}dx=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2\sqrt{x}\Big|_0^1=2\ (\text{î ä.}).$$



Розглянемо приклад визначення довжини дуги, якщо крива задана параметрично. Система рівнянь

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t; \\ y=a\sin^3 t, \quad t\in[0;2\pi], \end{cases} \tag{24.6}$$

визначає лінію, яка називається астроїдою (рис. 24.4). Знайдемо її довжину.

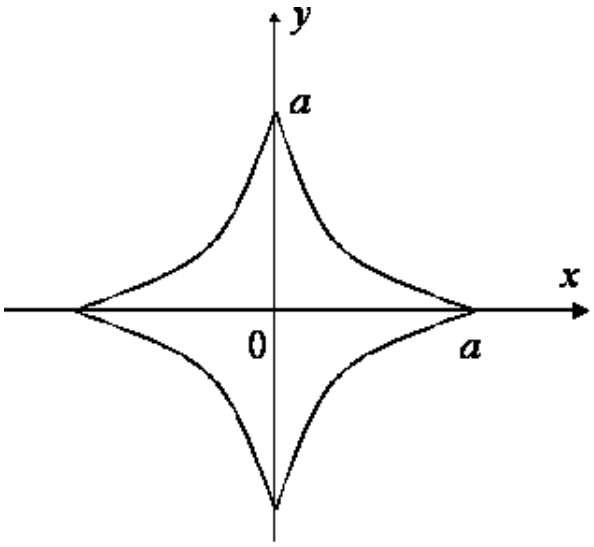


Рис. 24.4

Крива симетрична відносно осей Ox та Oy. Отже, визначимо довжину $\frac{1}{4}$ всієї дуги, а саме ту її частину, що розташована у першій чверті. Тоді параметр t змінюється від $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{cases} x_t'=-3a\cos^2 t\sin t; \\ y_t'=3a\sin^2 t\cos t, \end{cases}$$

$$(x_t')^2+(y_t')^2=9a^2(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)=$$
$$=9a^2\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)==9a^2\sin^2 t\cos^2 t.$$

За формулою (24.2) отримуємо:

$$\frac{1}{4}l=\int_0^{0,5\pi}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}\cdot dt=3a\int_0^{0,5\pi}\cos t\sin t\cdot dt=$$

$$= 3a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{0,5\pi} = \frac{3a}{2}\ (\text{од.}).$$

Відповідно, довжина всієї астроїди дорівнює: $l = 4\cdot\frac{3}{2}a = 6a$ (од.).

III Знайдемо довжину дуги, рівняння якої задано у полярних координатах. Розглянемо криву, що описується рівнянням $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$. Ця крива називається кардіоїдою (рис. 24.5).

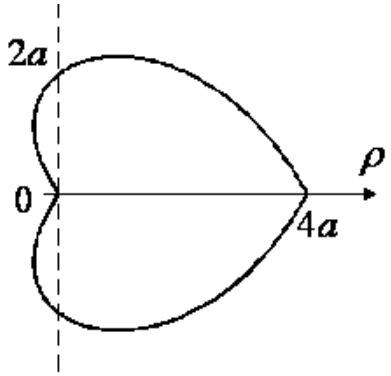


Рис. 24.5

Кардіоїда симетрична відносно полярної осі, тому знайдемо половину її довжини. Отже, кут φ буде змінюватися від $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$. Маємо:

$$\rho' = -2a\sin\varphi,$$

$$\rho^2 + (\rho')^2 = 4a^2(1+\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi =$$

$$= 4a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) =$$

$$= 8a^2(1+\cos\varphi).$$

За формулою (24.5) одержуємо:

$$\frac{1}{2}l = \int_0^{\pi}\sqrt{8a^2(1+\cos\varphi)}d\varphi = a\int_0^{\pi}\sqrt{16\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Тоді довжина усієї лінії дорівнює $l = 16a$ (од.).

24.2. Обчислення площі геометричної фігури

Обчислення площі плоскої фігури в декартових координатах спирається на геометричний зміст визначеного інтеграла.

Розглянемо декілька випадків обчислення площ геометричних фігур.

1. За геометричним змістом визначений інтеграл від неперервної функції $y = f(x)$ на $[a;b]$ чисельно дорівнює площі S криволінійної трапеції, яка обмежена графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox та лініями $x = a$ та $x = b$, за

умови, що функція $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ є невід'ємною. Тобто для $y = f(x) \geq 0$ маємо:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{4.7}$$

2. Якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ недодатна (рис. 24.6), тобто $f(x) \leq 0$, то визначений інтеграл від неї також буде числом недодатним, тому що він є границею інтегральних сум, а значить зберігає знак підінтегральної функції. Тоді для $f(x) \leq 0$ площа криволінійної трапеції буде:

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \tag{24.8}$$

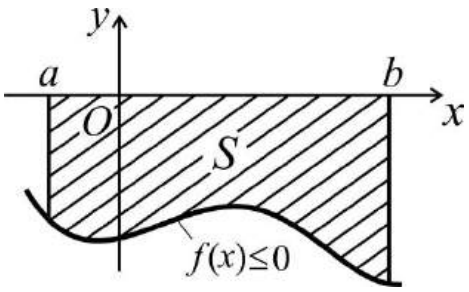


Рис. 24.6

3. Якщо функція $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ змінює знак (рис. 24.7), проходячи через точки $x_1 = c_1, x_2 = c_2$, то для відшукання площі проміжок $[a; b]$ треба розбити на три проміжка $[\grave{a}; \tilde{n}_1]$, $[c_1; c_2]$, $[c_2; b]$, де знак функції залишається сталим, і застосувати формули (24.7) та (24.8).

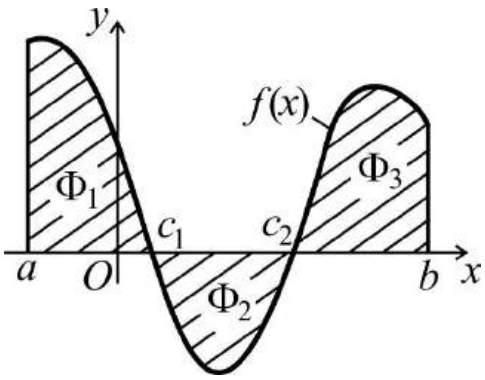


Рис. 24.7

Отже, якщо функція $y = f(x)$ кілька разів змінює знак на $[a; b]$, то площу кожної із фігур Φ_1, Φ_2, Φ_3 можна обчислити за формулою:

$$S = \int_a^b \left| f(x) \right| dx . \qquad (24.9)$$

4. Якщо треба обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, заданими на відрізку $[a, b]$, причому $f_1(x) \le f_2(x)$, то ця площа (рис. 24.8) підраховується за формулою:

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx . \qquad (24.10)$$

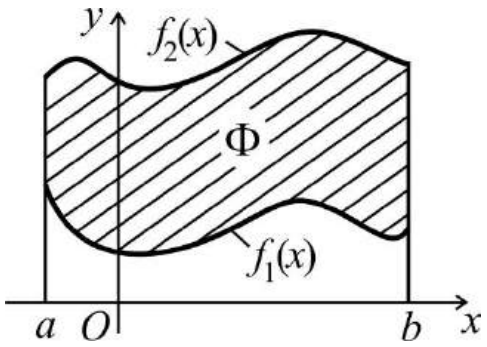


Рис. 24.8

5. Якщо плоска фігура обмежена графіком неперервної на проміжку $[c, d]$ функції $x = g(y)$, прямими $y = c, y = d$ та віссю ординат, то площа S знаходиться за формулою

$$S = \int_c^d g(y)dy . \qquad (24.11)$$

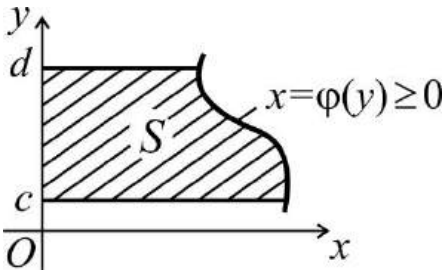


Рис. 24.9



Знайдемо площу фігури, яка обмежена графіком функції $y = x^3$, прямою $x = 1$ та віссю Ox (рис. 24.10).

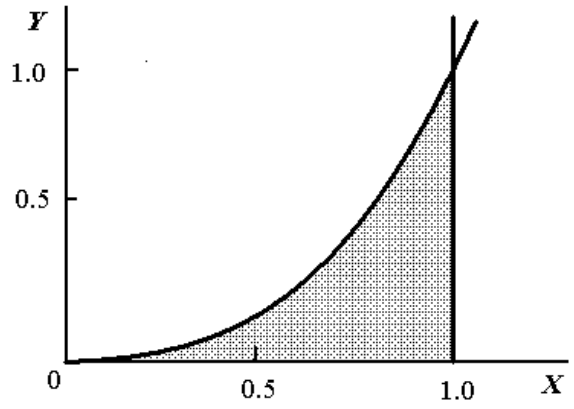


Рис. 24.10

Отже, межі інтегрування становлять:

$$a = 0;\ b = 1.$$

Оскільки функція $y = x^3$ на відрізку $x \in [0;1]$ невід'ємна, то за формулою (24.7) маємо:

$$S = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(\text{кв. од.}).$$

III Обчислимо площу фігури, яка обмежена лініями $y = x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$ та $x = 2$ (рис. 24.11).

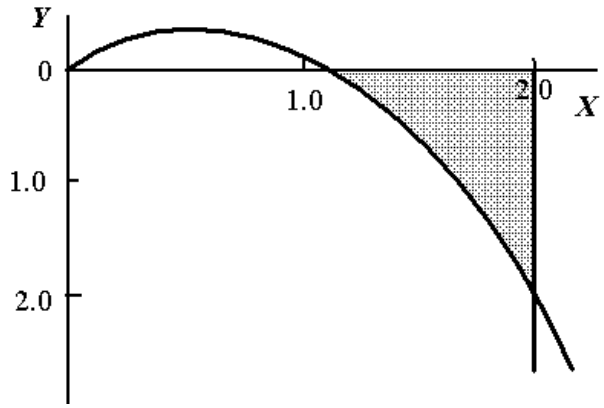


Рис. 24.11

Проміжком інтегрування є відрізок [1; 2]. Оскільки підінтегральна функція $y = x - x^2$ на відрізку [1; 2] недодатна, то за формулою (24.8) маємо:

$$S = -\int_1^2 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}(\text{кв. од.}).$$

III Знайдемо площу фігури, що обмежена лініями $y = \cos x$, $x = 0$; $x = \pi$, $y = 0$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку інтегрування $[0; \pi]$ змінює знак у точці $x = 0{,}5\pi$ (рис. 24.12). Тому за формулою (24.9) маємо:

$$S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{0,5\pi} \cos x dx + \int_{0,5\pi}^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{0,5\pi} \cos x dx - \int_{0,5\pi}^{\pi} \cos x dx =$$

$$= \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \sin 0{,}5\pi - \sin 0 - (\sin \pi - \sin 0{,}5\pi) =$$

$= 1 - 0 - (0 - 1) = 2$ (кв. од.).

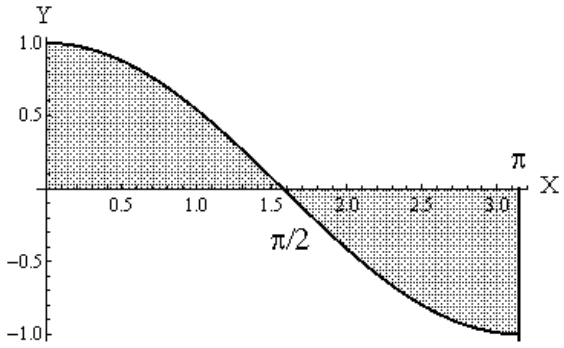


Рис. 24.12

III Знайдемо площу фігури, що обмежена лініями: $y = x^2 - 4x + 2$, $y = x - 2$ (рис. 24.13).

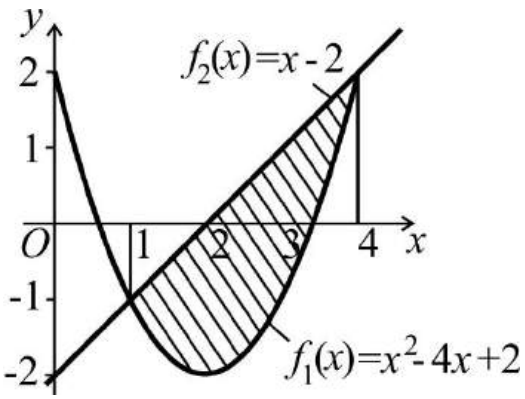


Рис. 24.13

Для визначення меж інтегрування знаходимо точки перетину ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Звідки отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 4. \end{array}\right.$$

Згідно з (24.10) маємо:

$$S = \int_1^4 \Big((x-2) - (x^2 - 4x + 2)\Big) dx =$$

$$= \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right)\Bigg|_1^4 = 4{,}5 \text{ (кв. од.)}.$$

Підкреслимо, що у формулі (24.10) в ролі $f_2(x)$ завжди виступає функція, графік якої обмежує фігуру зверху.

6. Нехай фігура обмежена кривою, рівняння якої задано в параметричній формі, тобто залежність $y = f(x)$ задається параметрично системою рівнянь

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

де $\alpha \le t \le \beta$; $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, яка визначає деяку криву на відрізку $[a, b]$.

Площу фігури, як і раніше, обчислюємо за формулою (24.7), але в ній зробимо заміну змінної: $x = \varphi(t)$, а $dx = \varphi'(t)dt$, тоді $y = f(\varphi(t)) = \psi(t)$. Отже,

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (24.12)$$



Знайдемо площу фігури, обмеженої еліпсом (рис. 24.14), заданим параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Оскільки еліпс симетричний відносно осей координат, то знайдемо $\frac{1}{4}$ частину його площі. Визначимо межі інтегрування. Якщо x змінюється від 0 до a, то за системою рівнянь

$$\begin{cases} a\cos t = 0; \\ a\cos t = a \end{cases}$$

одержуємо, що параметр t змінюється від $0{,}5\pi$ до 0.

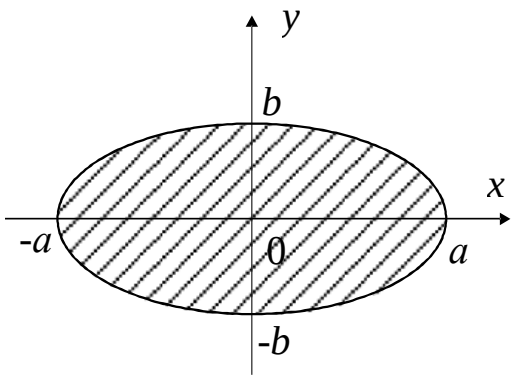


Рис. 24.14

Отже,

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_{0,5\pi}^{0} b\sin t(a\cos t)'dt = -ab\int\limits_{0,5\pi}^{0}\sin^2 t dt = \frac{ab}{2}\int\limits_{0}^{0,5\pi}\left(1-\cos 2t\right)dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{0,5\pi} = \frac{ab}{2}\left(0,5\pi\right) = \frac{\pi ab}{4}\text{ (кв. од.).}$$

Звідси

$$S = \pi ab \text{ (кв. од.).} \qquad (24.13)$$

7. Площа криволінійного сектора.

Розглянемо в полярних координатах геометричну фігуру, яка обмежена лінією $\rho = \rho(\varphi)$ та двома променями $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$, де функція $\rho(\varphi)$ неперервна при $\alpha \le \varphi \le \beta$ (рис. 24.15). Таку фігуру називають ***криволінійним сектором***. Обчислимо площу цього сектора.

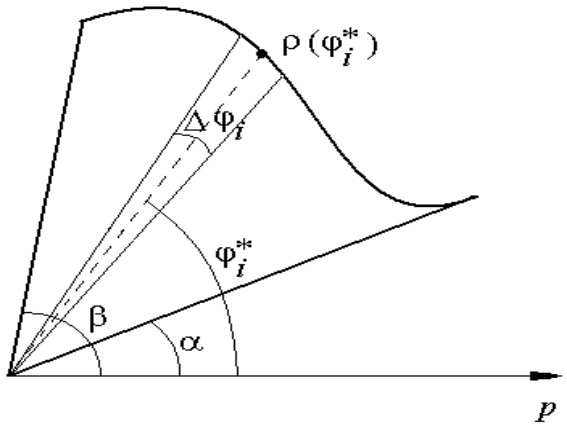


Рис. 24.15

Розіб'ємо криволінійний сектор $[\alpha, \beta]$ на n частин довільним чином. Для i-ї частини, де $\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ $(i = \overline{1,n})$, вважатимемо, що $\rho(\varphi) = const = \rho(\varphi_i^*)$.

Таким чином отримано n секторів кола. Площа i-го сектора кола ΔS_i за відомою із шкільного курсу математики формулою становить:

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho^2(\varphi_i^*)\Delta\varphi_i.$$

Тоді площа ступінчатого сектора

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i.$$

Розглядатимемо цю площу, як інтегральну суму для функції $\rho^2 = \rho^2(\varphi)$ на $[\alpha, \beta]$ і перейдемо до границі при $\max \Delta\varphi_i \to 0$. Отримаємо ***формулу площі криволінійного сектора***:

$$S = \lim_{\max \Delta\varphi_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \rho^2(\varphi_i^*) \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (24.14)$$

Приклад Обчислимо площу фігури, яка обмежена полярною віссю та першим витком спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$, де a – додатне число (рис. 24.16).

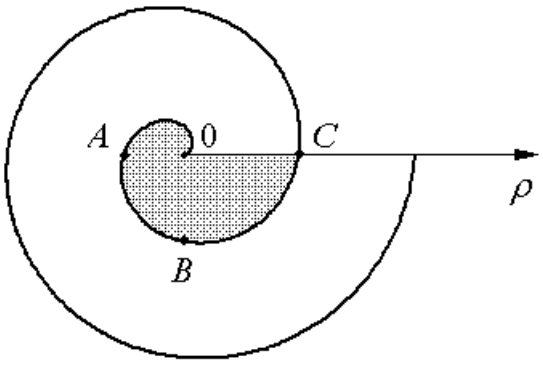


Рис. 24.16

При змінюванні φ від 0 до 2π полярний радіус описує криву, що обмежує криволінійний сектор $0ABC$. За формулою (24.12) маємо:

$$S_{0ABC} = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

24.3. Обчислення об'ємів тіл за відомими площами поперечних перерізів

Нехай маємо деяке тіло, причому відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною P, яка перпендикулярна до осі Ox (рис. 24.17). Ця площа залежить від розташування січної площини і буде функцією $S = S(x)$.

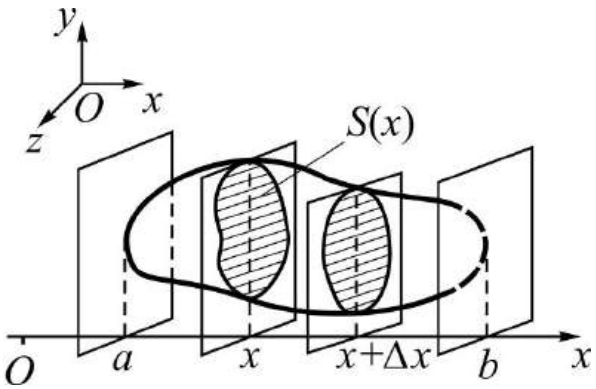


Рис. 24.17

Припустимо також, що $S(x)$ – відома неперервна функція від x. Визначимо об'єм даного тіла.

Якщо провести площини $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2, ..., x = x_n = b$, то вони розіб'ють тіло на циліндри. У кожному частковому проміжку $x_{i-1} \le x \le x_i$ візьмемо довільну точку $x = c_i$ $(i = \overline{1,n})$ і для кожної такої точки побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна до осі Ox, а напрямна є контуром перерізу тіла T площиною $x = c_i$, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тоді об'єм елементарного циліндра з площею основи $S(c_i)$ та висотою Δx_i дорівнюватиме $S(c_i)\Delta x_i$. Якщо взяти $\sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$ і розглядати цю суму як інтегральну для функції $S(x)$, то переходячи до границі при $\max \Delta x_i \to 0$, будемо мати шуканий об'єм тіла, тобто:

$$V = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx. \qquad (24.15)$$



Знайдемо об'єм тіла, обмеженого площинами $z = 0$ і $z = h$ та однопорожнинним гіперболоїдом, який задано рівнянням: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

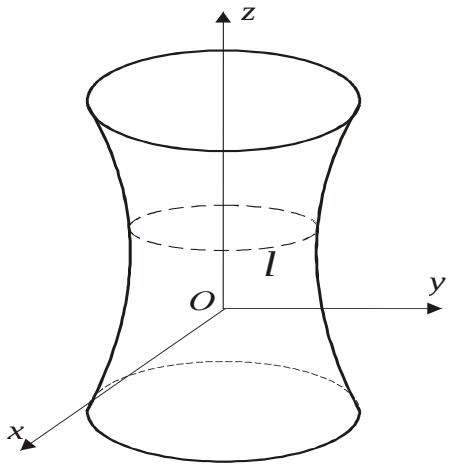


Рис. 24.18

Проведемо площину $z = l$ (рис. 24.18). У перерізі матимемо еліпс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{l^2}{c^2}.$$

Перейдемо до канонічного рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

де $a_1 = \frac{a\sqrt{c^2 + l^2}}{c}$, $b_1 = \frac{b\sqrt{c^2 + l^2}}{c}$.

Площу перерізу знаходимо за відомою формулою площі еліпса (24.13), тобто $S = \pi a_1 b_1$.

Отже, обчислимо об'єм гіперболоїда за формулою (24.15):

$$V = \int_o^h \pi a_1 b_1 dl = \pi \int_0^h \frac{a\sqrt{c^2+l^2}}{c} \cdot \frac{b\sqrt{c^2+l^2}}{c} dl = \pi \frac{ab}{c^2} \int_0^h \left(c^2 + l^2\right) dl =$$

$$= \pi \frac{ab}{c^2} \left(c^2 l \Big|_0^h + \frac{l^3}{3} \Big|_0^h \right) = \pi \frac{ab}{c^2} \left(c^2 h + \frac{h^3}{3} \right) = \pi abh \left(1 + \frac{h^2}{3c^2} \right) \text{ (куб. од.).}$$

24.4. Обчислення об'єму тіла обертання

Нехай на проміжку $[a;b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$. Треба визначити об’єм тіла, що утворилось при обертанні криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, навколо осі Ox (рис. 24.19).

Розіб'ємо проміжок $[a;b]$ на часткові проміжки $x = a = x_0$; $x = x_1$; $x = x_2, ..., x = x_n = b$. У кожному частковому проміжку $x_{i-1} \le x \le x_i$ візьмемо довільну точку $x = c_i$ $(i = \overline{1,n})$, побудуємо циліндри, твірні яких паралельні осі Ox і дорівнюють Δx_i, а основою є кола з радіусом $f(c_i)$. Тоді об’єм елементарного циліндра з площею основи $\pi f^2(c_i)$ та висотою Δx_i дорівнюватиме $\pi f^2(c_i)\Delta x_i$.

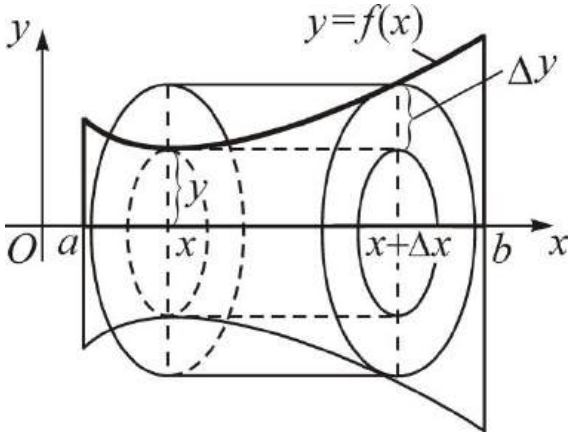


Рис. 24.19

Наближено об’єм тіла обертання визначається як сума об’ємів елементарних циліндрів:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\Delta x_i.$$

Якщо розглядати цю суму як інтегральну, то переходячи до границі при $\max \Delta x_i \to 0$, $n \to \infty$, матимемо шуканий об’єм тіла, тобто:

$$V_x = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(c_i)\Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (24.16)$$

 Знайдемо об’єм кулі радіусом R, яку можна розглядати як результат обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, омеженої півколом

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}\,.$$

Об’єм цієї кулі можна знайти за формулою (24.16):

$$V_x = \pi \int_{-R}^{R} f^2(x)dx = 2\pi \int_{0}^{R} (R^2 - x^2)dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ (куб. од.).}$$

Якщо у співвідношенні для V_x формально замінити x на y, то одержимо об’єм тіла, що отримано шляхом обертання навколо осі Oy криволінійної трапеції, яка обмежена лініями $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y)$ – функція, обернена до $f(x)$), $x = 0$, $y = c$, $y = d$, тобто:

$$V_y = \pi \int_{c}^{d} \varphi^2(y)dy\,. \qquad (24.17)$$

24.5. Застосування інтегралів до деяких економічних задач

Інтегрування в економіці має широкий спектр використання. Наприклад, для відшукання функцій витрат, прибутку, споживання, якщо відомі відповідні функції граничних витрат, граничного прибутку, граничного споживання тощо. Для визначення довільної сталої інтегрування необхідна додаткова умова. Якщо знаходиться функція витрат, використується умова: при кількості продукції $x = 0$ значення функції витрат дорівнює фіксованим витратам, а при відшуканні функції прибутку: при кількості продукції $x = 0$ значення функції дорівнює нулю (прибуток дорівнює нулю, якщо вироби не продані).

Розглянемо ряд економічних задач, для розв'язання яких використовується поняття невизначеного та визначеного інтегралів.

 **1. Відшукання виробничої функції.** Для певного підприємства визначено функцію граничного прибутку залежно від обсягу x виробленої продукції:

$$R'(x) = 30 - 0{,}02x\,.$$

Знайдемо функцію прибутку цього підприємства як первісну від функції граничного прибутку:

$$R(x) = \int (30 - 0,02x)dx = 30x - 0,01x^2 + C.$$

Ця функція повинна задовольняти певні умови. Так, при $x = 0$, $R(x) = 0$, звідки $C = 0$. Отже, функція прибутку набуває вигляду:

$$R(x) = 30x - 0,01x^2.$$



Припустимо, що функція граничних витрат підприємства при виробництві x одиниць продукції має вигляд:

$$f'(x) = 60 - 0,04x + 0,003x^2.$$

Необхідно:

а) знайти функцію витрат, якщо витрати на 100 одиниць продукції складають 7 тис. грн;

б) знайти фіксовані витрати;

в) визначити, якими будуть витрати на виробництво 250 одиниць продукції;

г) знайти максимальне значення прибутку, якщо ціна складає 65,5 грн за одиницю продукції.

1. Знайдемо функцію витрат як первісну від функції граничних витрат підприємства:

$$f(x) = \int (60 - 0,04x + 0,003x^2)dx = 60x - 0,02x^2 + 0,001x^3 + C.$$

Обчислимо довільну сталу C з початкової умови: $f(100) = 7000$, одержимо:

$$7000 = 60 \cdot 100 - 0,02 \cdot 100^2 + 0,001 \cdot 100^3 + C \Rightarrow C = 200.$$

Таким чином, функція витрат має вигляд:

$$f(x) = 60x - 0,02x^2 + 0,001x^3 + 200.$$

2. Для відшукання фіксованих витрат обчислимо функцію витрат при $x = 0$. При цьому $f(0) = 200$.

3. Витрати на виробництво 250 од. продукції складають:

$$f(250) = 60 \cdot 250 - 0,02 \cdot 250^2 + 0,001 \cdot 250^3 + 200 = 29575.$$

4. Прибуток підприємства визначаємо за формулою:

$$P(x) = px - f(x), \text{ де } p - \text{ціна одиниці продукції,}$$

отже, $P(x) = 65,5x - 60x + 0,02x^2 - 0,001x^3 - 200$.

Для визначення максимального значення прибутку проведемо дослідження функції прибутку на екстремум. Спочатку знаходимо критичні точки функції прибутку $P(x)$:

$$P'(x) = 5,5 + 0,04x - 0,003x^2,$$

$$5,5 + 0,04x - 0,003x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 50,\ x_2 = -36,7 < 0.$$

Визначимо знак другої похідної у критичній точці:

$$P''(x) = 0,04 - 0,006x.$$

При $x = 50$ маємо $P''(50) = 0,04 - 0,006 \cdot 50 = -0,26 < 0$, тобто функція прибутку при $x = 50$ має максимум. Значення функції прибутку в цій точці становить: $P(50) = 0$. Таким чином, якщо реалізовувати продукцію за ціною 65,5 грн за одиницю, підприємство не буде мати прибутку.



Відомо, що витрати виробництва $f(x)$ залежно від його обсягу x описуються за допомогою функції $f(x) = 1000 + 2x + 0,04x^2$. Обсяг виробництва змінюється від 100 до 200 одиниць. Визначити середні витрати виробництва.

Для того щоб визначити шукані середні витрати виробництва, використаємо теорему про середнє, записавши її так:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Якщо підінтегральною функцією є $f(x) = 1000 + 2x + 0,04x^2$, а межі інтегрування $a = 100$, $b = 200$, то одержуємо:

$$f(c) = \frac{1}{200-100}\int_{100}^{200}(1000 + 2x + 0,04x^2)dx = \frac{1}{100}\left(1000x + x^2 + 0,04\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{100}^{200} = 2233.$$

Отже, середні витрати виробництва складають 2233 гр. од.

2. Крива Лоренца. Розглянемо відому в економіці задачу про визначення ***коефіцієнта Джині***, що характеризує ступінь нерівності в

розподілі доходів населення країни. Нехай функція $y = f(x)$ – це залежність відсотка доходів від відсотка населення, що їх має. Ця функція має назву ***кривої Лоренца***. Наприклад, якщо $y(0,8) = 0,6$, то це означає, що 80 % населення одержують 60 % сукупного доходу. Очевидно, що $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ y \le x$.

На рис. 24.20 наведено графік функції $y = f(x)$ – кривої Лоренца.

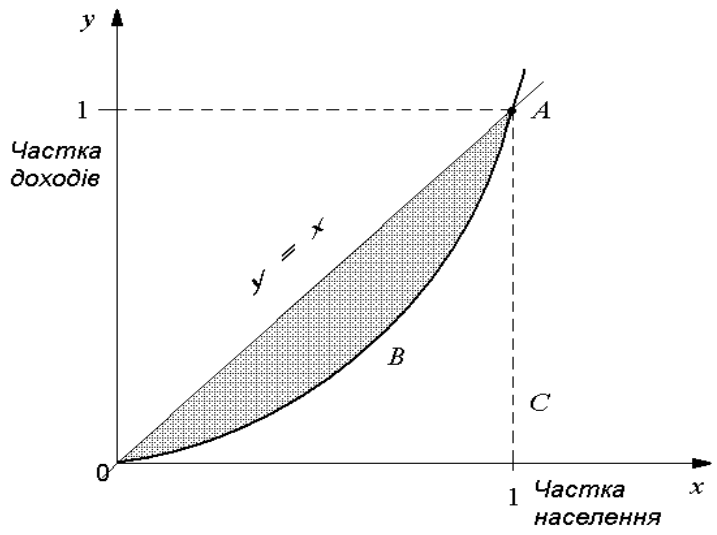


Рис. 24.20

Якщо розподіл доходу рівномірний (в ідеалі), то функцією, яка характеризує такий розподіл, є пряма лінія $y = x$. Відхилення реального розподілу від ідеального вимірюється відношенням площі фігури, обмеженої прямою $y = x$ і кривою Лоренца (на рис. 24.20 вона заштрихована), до площі трикутника, що утворений прямими $y = x$, $x = 1$ та віссю Ox.

Це відношення і є коефіцієнтом Джині.

Позначимо його через k, отже, $k = \dfrac{S_{O\breve{A}B}}{S_{\Delta OAC}}$. Відмітимо, що коефіцієнт Джині завжди $0 \le k \le 1$. При цьому, якщо $k = 0$, то розподіл доходів серед населення рівномірний, якщо $k = 1$ – нерівність розподілу доходів найбільша.



Нехай для однієї із держав крива Лоренца задається рівнянням $y = x^2$, де x – частка населення, y – частка доходу, яку отримує населення.

Обчислимо коефіцієнт Джині: $k = \dfrac{S_{O\breve{A}B}}{S_{\Delta OAC}}$, де $S_{OAC} = \dfrac{1}{2}$,

$$S_{O\breve{A}B} = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Отже, $$k = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} > 0,3.$$

Таким чином, досить високе порівняно з нулем значення k показує суттєво нерівномірний розподіл доходів серед населення в державі.

3. Крива навчання. Розглянемо деякі питання, що виникають при освоєнні нової продукції. Нехай функція $T = F(x)$ описує час, який витрачається на виробництво перших x одиниць продукції. Тоді $f(x) = F'(x)$ приблизно дорівнює часу, який витрачається на виробництво $(x+1)$-ї одиниці продукції. Звичайно використовують функції виду $f(x) = ax^b$, де $a > 0$, $-1 \le b < 0$, a – витрати часу на перший виріб, b – показник виробничого процесу. Така функція називається ***кривою навчання***. Її графік зображено на рис. 24.21.

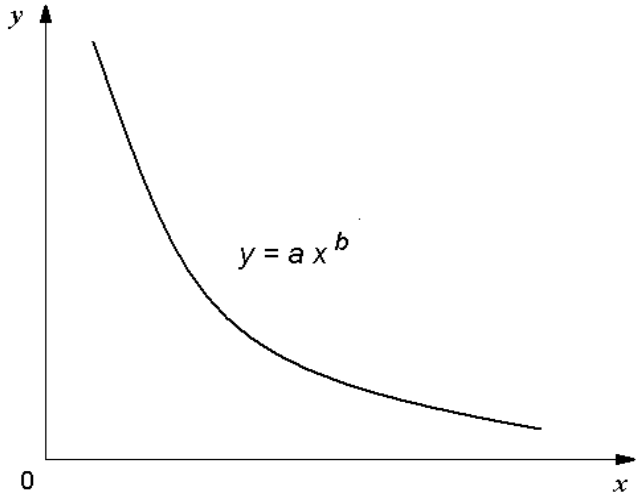


Рис. 24.21

Дійсно, функція $f(x)$ є спадною, тому що час, небхідний для виконання деякої операції, спадає при зростанні числа повторів.

Час, який буде витрачено на виробництво одиниць продукції з номерами від (n_1+1) до n_2, визначається формулою:

$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x)dx.$$



Нехай після виробництва 100 годинників виявилось, що час, який потрібний для виробництва наступних виробів спадає відповідно з формулою $y = 15x^{-0,14}$. Знайдемо час, який буде витрачено на виробництво ще 20 годинників.

За формулою $\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x)dx$ маємо:

$$\Delta T = \int_{100}^{120} 15x^{-0,14}dx = \frac{15x^{0,86}}{0,86}\Bigg|_{100}^{120} = \frac{1500}{86}\left(120^{0,86} - 100^{0,86}\right) = 155,4.$$

4. Закон попиту та пропозиції. Нехай ***крива попиту*** на деякий товар описується функцією $p = f(x)$, а ***крива пропозиції*** на той самий товар –

функцією $p = g(x)$. Знайти виграш споживачів та виграш постачальників.

Уздовж осі *Ox* відкладається кількість товару (x), а вздовж осі *Oy* – його вартість (p). На рис. 24.22 наведено графіки цих кривих.

Традиційно крива попиту позначається літерою D, а крива пропозиції – літерою S (рис. 24.22). Точка перетину цих кривих $(x_0; p_0)$ є ***точкою рівноваги***, якій відповідає ринкова ціна продукції. Зрозуміло, що деякі споживачі зможуть заплатити за товар ціну $p > p_0$.

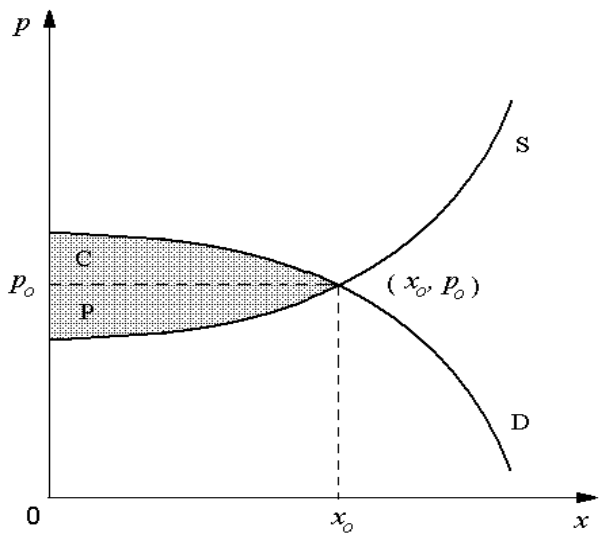


Рис. 24.22

Знайдемо виграш споживачів від встановленої ціни p_0. Розіб'ємо проміжок $[0; x_0]$ на частинні проміжки точками $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = x_0$.

На кожному частковому проміжку $x_{i-1} \le x \le x_i$ візьмемо довільну точку u_i $(i = \overline{1, n})$. Виграш споживачів на цьому відрізку становить: $\big(f(u_i) - p_0\big)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Тоді середній виграш на проміжку $[0; x_0]$ буде:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(u_i) - p_0\big)\Delta x_i .$$

Якщо функція попиту неперервна і $n \to \infty$, а $\max \Delta x_i \to 0$, то ця інтегральна сума має границю:

$$\int_0^{x_0} \big(f(x) - p_0\big)dx .$$

Таким чином, виграш споживачів дорівнює

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0 . \qquad (24.18)$$

Аналогічно знаходиться виграш постачальників

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx . \qquad (24.19)$$

Очевидно, що виграш споживачів дорівнює площі між кривою попиту *D*

та прямою $p = p_0$. Виграш постачальників дорівнює площі між прямою $p = p_0$ та кривою пропозиції S.

 Знайдемо виграші споживачів та постачальників, якщо функція попиту має вигляд $f(x) = 116 - x^2$, а функція пропозиції – $g(x) = \frac{5}{3}x + 20$.

Спочатку визначимо точку риночної рівноваги:

$$116 - x^2 = \frac{5}{3}x + 20,$$

або $$3x^2 + 5x - 288 = 0.$$

Корені квадратного рівняння $x_1 = 9$, $x_2 = -\frac{32}{3}$. Тоді при $x_0 = 9$ маємо $p_0 = f(9) = 35$. За формулою (24.18) виграш споживача становить:

$$C = \int_0^9 \left(116 - x^2\right)dx - 35 \cdot 9 = \left(116x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^9 - 315 = 486.$$

За формулою (24.19) визначаємо виграш постачальника:

$$P = 315 - \int_0^9 \left(\frac{5}{3}x + 20\right)dx = 315 - \left(\frac{5}{6}x^2 + 20x\right)\Bigg|_0^9 = 315 - \frac{5}{6} \cdot 81 - 180 = 67,5.$$

5. Задача дисконтування. Ще однією реальною економічною задачею, до розв'язання якої застосовується інтегральне числення, є задача дисконтування. Визначення початкової суми капіталовкладень за її кінцевою вартістю, яка одержана протягом часу t (зазвичай, це роки) за відомим річним відсотком, або відсотковою ставкою p, називається ***дисконтуванням.*** Тобто дисконтування дозволяє визначити вартість усіх майбутніх грошових потоків, яку б вони мали на початковий момент часу. Задача дисконтування розглядається при визначенні економічної ефективності капіталовкладень.

Нехай обчислення прибутків відбувається протягом періоду $[0, T]$. Тоді K_t – сума, яка накопичена за t років (майбутня вартість), K – сума, дисконтована на початок періоду (початкова вартість), $i = \frac{p}{100}$ – питома

відсоткова ставка, або ***ставка дисконту***. Зазвичай при плануванні грошових потоків проміжки часу визначаються у роках, тому розрахунки здійснюються за формулою склад-них відсотків (відсотки нараховуються не тільки на основний капітал, але і на відсотки попереднього періоду). Отже, сума наприкінці t-го року становитиме $K_t = K \cdot (1+i)^t$.

Звідси визначимо початкову суму:

$$K = \frac{K_t}{(1+i)^t}.$$

Якщо надходження здійснюються щорічно протягом певного проміжку часу, то дисконтована вартість визначається як сума за усіма періодами надходження грошей:

$$PV = \frac{K_1}{1+i} + \frac{K_2}{(1+i)^2} + ... + \frac{K_n}{(1+i)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{K_t}{(1+i)^t}, \qquad (24.20)$$

де PV – сучасна вартість (present value).

За формулою (24.20) передбачається, що стала відсоткова ставка діє протягом усього проміжку часу. Якщо щорічний прибуток змінюється з часом, то майбутні надходження доцільно розглядати як неперервний потік, що характеризується певною ***інтенсивністю*** – прибутком за одиницю часу.

Розіб'ємо весь період часу $[0;T]$ на однакові проміжки $\Delta t = T/n$. Нехай миттєве значення інтенсивності потоку в момент часу t задано функцією $f(t)$. На достатньо малому проміжку часу $[t, t+\Delta t]$ інтенсивність потоку можна вважати сталою, середнє значення якої дорівнює $f(t_k), k = \overline{1,n}$, де $t_k \in [t, t+\Delta t]$. Тоді величина надходжень обчислюється як $f(t_k) \cdot \Delta t$, а сучасна їх вартість становить $PV_k = f(t_k) \cdot \Delta t \cdot (1+i)^{-t_k}$. Для наближеного обчислення загальної вартості грошових потоків, що відповідає сучасному моменту, отримуємо співвідношення:

$$PV \approx \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot (1+i)^{-t_k} \cdot \Delta t. \qquad (24.21)$$

Формула (24.21) описує інтегральну суму. Якщо перейти до границі цієї суми за умови, що $\Delta t \to 0$, то отримуємо співвідношення для точного визначення сучасної вартості

$$PV = \int_0^T f(t)(1+i)^{-t} dt. \qquad (24.22)$$

Якщо замість ставки дисконту застосувати іншу характеристику – силу зростання, яка визначається формулою $\rho = \ln(1+i)$, то отримуємо таке співвідношення:

$$PV = \int_0^T f(t)e^{-\rho t}dt. \qquad (24.23)$$



Припустимо, що фірма передбачає випуск продукції протягом року і за цей період планує отримати прибуток 100 млн грн. Продаж продукції здійснюється рівномірно протягом року. Ставка дисконту становить 15 %.

Сучасну вартість майбутніх надходжень можна наближено оцінити, якщо розглядати дискретний грошовий потік з періодом, що становить 1 рік. Так, за формулою (24.20) при $t = 1$ маємо:

$$PV_1 \approx \frac{100}{1+0{,}15} = 86{,}96 \text{ (млн грн).}$$

Однак такий розрахунок є наближеним, оскільки грошовий потік є неперервним. За умовою задачі надходження від реалізації продукції поступають регулярно протягом року, тому вважатимемо інтенсивність потоку сталою величиною, яка дорівнює 100 млн грн/ рік. Визначаємо, що сила зростання становить $\rho = \ln 1{,}15 = 0{,}14$, і підставляємо ці дані у формулу (24.23):

$$PV = \int_0^1 100 \cdot e^{-0{,}14t}dt = -\frac{100}{0{,}14}e^{-0{,}14t}\Big|_0^1 = 93{,}32 \text{ (млн грн).}$$

Значення $PV = 93{,}32$ говорить про те, що загальний прибуток, який фірма буде отримувати протягом року і який ми оцінюємо як 100 млн грн, на початку року становить 93,32 млн грн.

24.6. Наближене обчислення визначених інтегралів

Формула Ньютона – Лейбніца є найкращим способом обчислення визначеного інтеграла, якщо при відшуканні первісної не виникає труднощів. У випадку, якщо невизначений інтеграл «не береться», тобто первісну не можна подати у вигляді елементарної функції, то використовують формули

наближеного обчислення. Ці формули базуються на геометричному змісті визначеного інтеграла як площі криволінійної трапеції.

1. Формула прямокутників. Нехай треба обчислити визначений інтеграл від неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $y=f(x)$. Згідно з означенням визначеного інтеграла побудуємо інтегральну суму для функції $y=f(x)$.

Поділимо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин точками x_i:

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} \qquad (i=\overline{0,n}).$$

Обчислимо значення функції в точках x_i, а саме $f(x_i)$. Будемо вважати, що площа криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ прямокутників з висотами $f(x_i)$ $(i=\overline{0,n-1})$ і основами $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Тоді:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i). \qquad (24.24)$$

Одержаний вираз (24.24) називається ***формулою прямокутників.***

Зауважимо, що у випадку, який зображено на рис. 24.23, площа фігури, що обмежена кривою $y=f(x)$ та прямими $x=a$, $x=b$ та $y=0$, якій чисельно дорівнює визначений інтеграл, наближено визначається як сума площ прямокутників з висотами $f(x_i)$, обчисленими на лівій межі інтервалу Δx_i. Якщо висотами прямокутників вважати значення функції $f(x_i)$, обчислене на правій межі інтервалу, то ***формула прямокутників*** має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

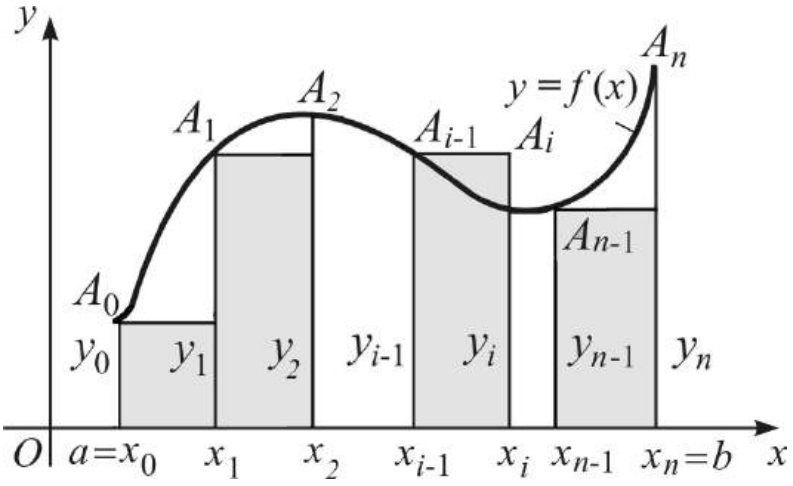


Рис. 24.23

Оскільки для функції $y = f(x)$, неперервної на $[a, b]$, визначається границя при $n \to \infty$ і $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n} \to 0$, то можна стверджувати, що помилка при обчисленні інтеграла буде тим меншою, чим більше n.

Абсолютна похибка Δ при цьому підраховується за формулою:

$$\Delta = \left| \int_a^b f(x)dx - S_n \right|, \tag{24.25}$$

де $$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Відносна похибка визначається як відношення абсолютної похибки до обчисленного значення і подається у відсотках.

2. Формула трапецій. Розглянемо ще один спосіб наближеного обчислення визначеного інтеграла.

Як і в попередньому випадку, відрізок $[a, b]$ ділиться на n рівних частин точками x_i і обчислюються значення функції в цих точках $f(x_i)$ (рис. 24.23). Побудуємо трапеції з висотами Δx_i і основами довжиною $f(x_{i-1})$ та $f(x_i)$. $i = \overline{1, n}$ (рис. 24.24).

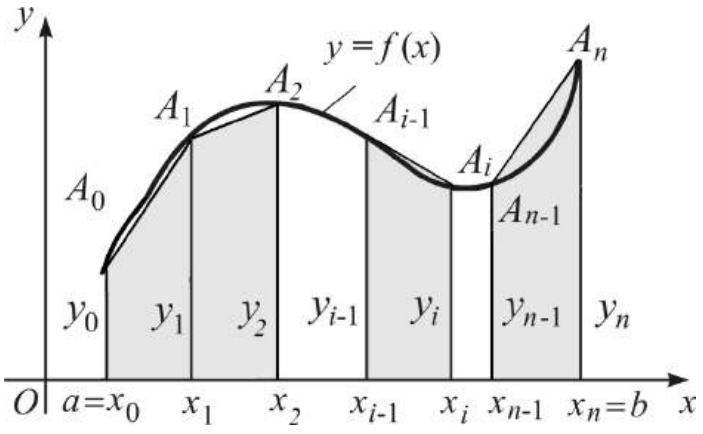


Рис. 24.24

Кожна частина площі під кривою $f(x)$ буде наближено дорівнювати площі прямокутної трапеції з середньою лінією $\dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$ і висотою

$\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$, а вся площа криволінійної трапеції наближено дорівнюватиме площі під ламаною, тобто сумі площ усіх трапецій, обмежених зверху відрізками цієї ламаної.

Відповідно, одержуємо:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)=$$

$$=\frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right). \qquad (24.26)$$

Це і є ***формула трапецій***. Формула (24.26), як і в попередньому випадку, буде тим точнішою, чим більше число n.

Можна довести, що якщо функція $f(x)$ має неперервну обмежену похідну $f'(x)$, яка задовольняє нерівність $|f'(x)| \le M_1$ (де M_1 – число), то для формул (прямокутників і трапецій) абсолютна похибка визначається нерівністю

$$\Delta \le \frac{M_1(b-a)^2}{4n}.$$

Для функцій, які мають обмежену другу похідну $|f''(x)| \le M_2$, для абсолютної похибки має місце така оцінка:

$$\Delta \le \frac{M_2(b-a)^2}{12n^2}. \qquad (24.27)$$

3. Формула Сімпсона. Поділимо відрізок $[a,b]$ на парне число частин $n=2k$. Функцію $y=f(x)$ на відрізку $[x_0, x_2]$ замінимо параболою $y=ax^2+bx+c$, яка проходить через точки $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$ та $A_2(x_2, y_2)$, з віссю симетрії, паралельною осі Oy (рис. 24.25).

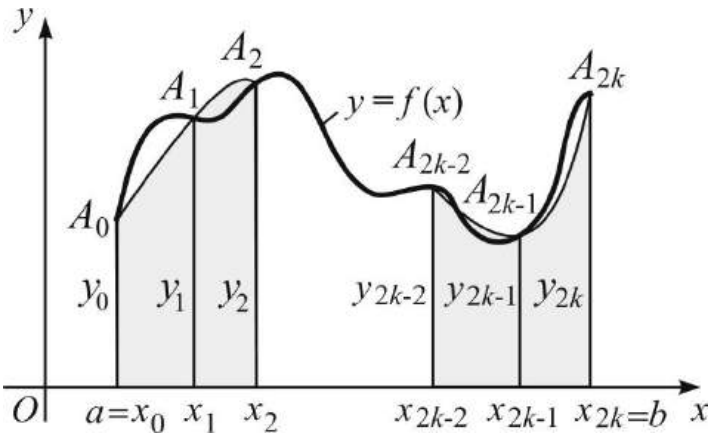


Рис. 24.25

Аналогічні параболи будуємо і для всіх інших пар відрізків. Сума площ криволінійних трапецій, обмежених параболами, і дасть наближене значення інтеграла.

Площа криволінійної трапеції, яка обмежена зверху параболою, що проходить через три точки A_0, A_1, A_2, дорівнює:

$$S = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)), \qquad (24.28)$$

де h – довжина відрізку $[x_0, x_1]$

Щоб довести рівність (24.28), розташуємо допоміжну систему координат так, як це зроблено на рис. 24.26.

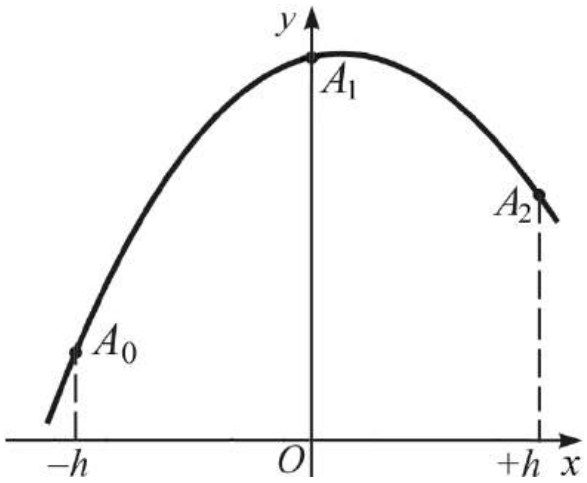


Рис. 24.26

Коефіцієнти параболи a, b, c та значення функції $y = f(x)$ у точках з абсцисами x_0, x_1 та x_2, пов'язані такими співвідношеннями:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при } x_0 = -h, & f(x_0) = ah^2 - bh + c, \\ \text{при } x_1 = 0, & f(x_1) = c, \\ \text{при } x_2 = h, & f(x_2) = ah^2 + bh + c. \end{array}\right\}.$$

При відомих коефіцієнтах a, b, c площу криволінійної трапеції, що обмежена параболою, знаходимо за допомогою визначеного інтеграла:

$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c).$$

З урахуванням значень функції в точках з абсцисами x_0, x_1 та x_2 випливає, що $2ah^2 + 6c = f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)$. Отже,

$S = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$, тобто одержали рівність (24.28).

Застосовуючи до кожної елементарної трапеції формулу (24.28) при $h = \Delta x = \frac{b-a}{2k}$, дістанемо:

$$\begin{aligned}
&\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)),\\
&\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)),\\
&\text{..... ....}\\
&\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}=b} f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})).
\end{aligned} \tag{24.29}$$

Якщо скласти ліві та праві частини записаних рівностей, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ...\\
&+2f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})),
\end{aligned}$$

або

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6k}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=2}^{n} f(x_{2i-2}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) \right). \tag{24.30}$$

Отже, ми отримали ***формулу Сімпсона***, або ***формулу парабол***.

Абсолютна похибка формули парабол становить:

$$\Delta \le \frac{(b-a)^5}{2^5 \cdot 9 \cdot n^4} M_3, \tag{24.31}$$

якщо функція $f(x)$ має на $[a,b]$ неперервну четверту похідну $\left|y^{(4)}\right| \le M_3$, де M_3 – найбільше значення $\left|y^{(4)}\right|$ в інтервалі $[a,b]$.



Таким чином, формула Сімпсона при тому ж самому n $(n = 2k \to \infty)$ *дає найкраще наближення до шуканого інтеграла порівняно з формулами прямокутників чи трапецій.*

Обчислимо інтеграл $\int_0^4 x^2 dx$, застосувавши безпосереднє інтегрування.

$$\int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{64}{3} \approx 21,33.$$

Порівняємо цей результат з результатами наближеного обчислення за формулами прямокутників, трапецій, парабол при $n = 10$ та знайдемо абсолютні та відносні похибки цих обчислень.

Для застосування формул наближеного числення розіб'ємо відрізок $[0,4]$ на 10 рівних частин. Тоді довжина кожного відрізку дорівнює $\Delta x = 0,4$, а значення функції в точках розбиття:

$$y_i = f\left(x_i\right) = x_i^2.$$

Складемо таблицю значень функції для кожної межі інтервалу розбиття:

x_i	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y_i	0	0,16	0,64	1,44	2,56	4	5,76	7,84	10,24	12,96	16

За формулою прямокутників, якщо приймати за висоту прямокутника його ліву межу, визначаємо:

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0,4\big(0 + 0,16 + 0,64 + 1,44 + 2,56 + 4 + 5,76 +$$
$$+7,84 + 10,24 + 12,96\big) = 18,24.$$

За формулою прямокутників, якщо приймати за висоту прямокутника його праву межу, отримуємо трохи інше значення:

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0,4\big(0,16 + 0,64 + 1,44 + 2,56 + 4 + 5,76 +$$
$$+7,84 + 10,24 + 12,96 + 16\big) = 24,64.$$

За формулою трапеції маємо проміжне значення порівняно з обома формулами прямокутників:

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0,4\left(\frac{0+16}{2}+0,16+0,64+1,44+2,56+4+5,76+\right.$$
$$\left.+7,84+10,24+12,96\right)=21,44.$$

За формулою парабол:

$$\int_0^4 x^2 dx \approx \frac{0,4}{3}\left(0+16+4\left(0,16+1,44+4+7,84+12,96\right)+\right.$$
$$\left.+2\left(0,64+2,56+5,76+10,24\right)\right)=21,33.$$

При обчисленні інтеграла за формулою прямокутників абсолютна похибка (за лівою межею) становить:

$$\Delta=\left|18,24-21,33\right|=3,09,$$

а відносна похібка дорівнює:

$$\delta=\frac{3,09}{21,33}\cdot 100\,\%=14,49\,\%.$$

При обчисленні інтеграла за формулою прямокутників абсолютна та відносна похибки (за правою межею) становлять:

$$\Delta=\left|24,64-21,33\right|=3,31 \text{ та } \delta=\frac{3,31}{21,33}\cdot 100\,\%=15,52\,\%.$$

При обчисленні інтеграла за формулою трапецій маємо:

$$\Delta=\left|21,44-21,33\right|=0,11 \text{ та } \delta=\frac{0,11}{21,33}\cdot 100\,\%=0,52\,\%.$$

При обчисленні інтеграла за формулою парабол отримуємо:

$$\Delta=\left|21,33-21,33\right|=0 \text{ та } \delta=0\,\%.$$

Отже, ми переконались, що формула парабол дійсно дає найбільшу точність при наближеному обчисленні визначених інтегралів.

Ключові терміни

Довжина дуги; полярні координати; криволінійний сектор; тіло обертання; коефіцієнт Джині; крива Лоренца; крива навчання; крива попиту; крива пропозиції; точка рівноваги; дисконтування; ставка дисконту; інтенсивність грошового потоку; наближене обчислення визначених інтегралів; формула прямокутників; формула трапецій; формула парабол (Сімпсона); абсолютна похибка; відносна похибка.

Запитання для самоперевірки

1. Запишіть формулу для обчислення площі фігури, що обмежена лініями:

а) $y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$;

б) $x = \varphi(y),\ x = 0,\ y = c,\ y = d$.

2. Як обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ на відрізку $[a,b]$?

3. За якою формулою обчислюється площа фігури, що обмежена лініями $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, де $\alpha \le t \le \beta$?

4. Запишіть формулу для обчислення площі криволінійного сектора, обмеженого кривою, що задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, і променями $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$.

5. Запишіть формулу для обчислення довжини дуги плоскої лінії.

6. Який вигляд має формула для обчислення об’єму тіла за відомими площами поперечних перерізів?

7. Запишіть формулу для обчислення об’єму тіла, яке отримали обертанням криволінійної трапеції з основою на осі Ox навколо осі Ox.

8. Запишіть формулу для обчислення об’єму тіла, яке отримали обертанням криволінійної трапеції з основою на осі Oy навколо осі Oy.

9. Виведіть формулу для обчислення об'єму кулі.

10. Виведіть формулу для обчислення об'єму еліпсоїда.

11. Які приклади застосування визначеного інтеграла в економічних дослідженнях ви знаєте?

12. Напишіть формули:

а) прямокутників;

б) трапецій;

в) Сімпсона, для наближеного обчислення визначеного інтеграла.

Глава 25. Невласні інтеграли. Інтеграл Ейлера – Пуассона

Поняття «невласні інтеграли» пов'язане з порушенням умов теореми 23.1 про існування визначеного інтеграла. Залежно від того, яка саме умова існування порушена, розглядають невласні інтеграли I і II-го типів. Так, розрізняють такі випадки:

1) замість скінченного відрізка $[a, b]$ розглядаються нескінченні інтервали $(-\infty, b]$ або $[a, +\infty)$, або інтервал $(-\infty, +\infty)$;

2) замість підінтегральної функції, яка є неперервною, обмеженою на відрізку інтегрування і має скінченне число точок розриву першого роду, розглядають функцію, що має на цьому відрізку нескінченний розрив, тобто розрив другого роду.

25.1. Інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли I-го типу)

Нехай функція $y = f(x)$ визначена та неперервна на проміжку $[a, +\infty)$. Тоді вона згідно з теоремою 23.1 інтегрована на будь-якому відрізку $[a, \beta] \subset [a, +\infty)$. Отже, існує визначений інтеграл від цієї функції $f(x)$ на $[a, \beta]$:

$$I(\beta) = \int_a^{\beta} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{\beta}, \text{ де } F'(x) = f(x),$$

тобто $F(x)$ є первісною від підінтегральної функції $f(x)$.

Невласним інтегралом I-го типу функції $f(x)$ на проміжку $[a, +\infty)$ називається границя визначеного інтеграла $I(\beta)$ за умови, що верхня межа інтегрування β необмежено зростає, тобто

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^{\beta} f(x)dx. \qquad (25.1)$$

Якщо границя $\lim\limits_{\beta \to +\infty} I(\beta)$ скінченна, то невласний інтеграл I-го роду називається ***збіжним***, або говорять, що він ***збігається***. Якщо границя у

співвідношенні (25.1) є нескінченною або зовсім не існує, то невласний інтеграл І-го роду називається ***розбіжним,*** тобто ***розбігається.***

З урахуванням формули Ньютона – Лейбніца співвідношення (25.1) можна записати так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty} F(x)\Big|_a^{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty} F(\beta) - F(a) = F(+\infty) - F(a), \qquad (25.2)$$

де застосовується позначення $\lim\limits_{\beta\to+\infty} F(\beta) = F(+\infty)$.

Аналогічно визначається невласний інтеграл І-го типу для випадку, коли замість відрізка інтегрування $[a, b]$ розглядається інтервал з нескінченною нижньою межею.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена та неперервна на проміжку $(-\infty, b]$, тоді невласним інтегралом І-го типу цієї функції на проміжку $(-\infty, b]$ називається границя визначеного інтеграла за умови, що нижня межа інтегрування необмежено спадає, тобто

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty} F(x)\Big|_{\alpha}^{b} = F(b) - \lim_{\alpha\to-\infty} F(\alpha) = F(b) - F(-\infty), \qquad (25.3)$$

де застосовується позначення $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} F(\alpha) = F(-\infty)$.

Якщо границя (25.3) скінченна, то невласний інтеграл І-го типу збігається, якщо ні – розбігається.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена та неперервна на проміжку $(-\infty, +\infty)$. Тоді подамо інтеграл на цьому проміжку як суму двох невласних інтегралів І-го типу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{\alpha\to-\infty \\ \beta\to+\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{0} f(x)dx + \lim_{\beta\to+\infty} \int_{0}^{\beta} f(x)dx. \qquad (25.4)$$

Якщо у співвідношенні (25.4) обидві границі існують, то невласний інтеграл І-го типу з нескінченними межами збігається.

Отже, невласний інтеграл І-го типу на проміжку $(-\infty, +\infty)$ визначається співвідношеннями:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty). \qquad (25.5)$$

Загальний порядок відшукання невласного інтегралу І-го типу складається з двох кроків:

1) ***обчислюємо*** визначений інтеграл від $f(x)$ на $[\alpha, \beta]$, де α – змінна нижня межа інтегрування, β – змінна верхня межа інтегрування;

2) ***знаходимо*** границю визначеного інтеграла при прямуванні $\alpha \to -\infty$ та $\beta \to +\infty$.

При дослідженні невласних інтегралів часто постає питання, чи збігається інтеграл. Зрозуміло, що на це питання можна відповісти, якщо обчислити невласний інтеграл. Однак у тому випадку, коли немає можливості знайти первісну підінтегральної функції у вигляді скінченного числа елементарних функцій, можна все ж таки дослідити інтеграл на збіжність. Це можна зробити за допомогою наступних теорем, які наводяться без доведення.

Теорема 25.1. Невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним, якщо для всіх x, де $x \geq a$, має місце нерівність $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, і інтеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ збігається.

При цьому:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Теорема 25.2. Невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається, якщо для всіх x, де $x \geq a$, має місце нерівність:

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x),$$

і інтеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ розбігається.

Встановлення збіжності чи розбіжності невласного інтеграла з використанням теорем 25.1 і 25.2 називається дослідженням на збіжність за

ознакою порівняння, а невласний інтеграл від функції $\varphi(x)$, про збіжність якого відомо заздалегідь, називається ***еталонним інтегралом***.

Теорема 25.3. Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left| f\left(x\right)\right| dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right) dx$. У цьому випадку останній інтеграл називається ***абсолютно збіжним***.

Розглянемо деякі приклади невласних інтегралів І-го типу. Одним із таких інтегралів є ***інтеграл Ейлера – Пуассона:***

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{25.6}$$

Цей інтеграл неможна подати у вигляді скінченної кількості елементарних функції, тому за загальним алгоритмом проблему обчислення інтеграла Ейлера – Пуассона вирішити неможливо. Доведемо, що цей інтеграл збігається, застосувавши теорему 25.1. Як функцію порівняння виберемо функцію $\varphi(x) = e^{-x}$ і порівняємо з нею підінтегральну функцію $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Обидві функції додатні, і при $x \geq 2$ відносно показників степеня виконується нерівність: $-\frac{x^2}{2} \leq -x$. Тоді відносно функцій виконується співвідношення: $0 < f(x) \leq \varphi(x)$. Отже, за теоремою 25.1 інтеграл Ейлера – Пуассона збігається, якщо збігається невласний інтеграл від функції $\varphi(x) = e^{-x}$. Так,

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_0^{\beta} e^{-x} dx = \lim_{\beta \to +\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{\beta} = -\lim_{\beta \to +\infty} e^{-\beta} + 1 = 1.$$

Отже, ми довели, що цей інтеграл збігається, тоді за теоремою 25.1 інтеграл Ейлера – Пуассона теж є збіжним. У главі 26 буде доведено, що цей інтеграл дорівнює:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}. \tag{25.7}$$

При дослідженні питання про збіжність невласних інтегралів I-го типу часто в якості еталонного інтеграла (інтеграла, про який відомо, чи є він збіжним або розбіжним) беруть інтеграл виду:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k} = \int\limits_1^{+\infty} x^{-k}\,dx, \quad k \in \mathbf{R} \setminus \{1\}. \tag{25.8}$$

Властивості цього інтеграла залежать від параметра k:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k} = \left.\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right|_1^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{1}{k-1}, & k > 1; \\ \infty, & k < 1. \end{cases} \tag{25.9}$$

Розглянутий інтеграл (25.8) при $k = 1$ дорівнює:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{+\infty} = \infty.$$

Звідси випливає, що даний інтеграл збігається, якщо $k > 1$, і розбігається, якщо $k \le 1$.



Дослідити на збіжність невласний інтеграл I-го типу:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

За означенням:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Отже, ми довели, що інтеграл збігається, оскільки він дорівнює π.



Дослідити на збіжність невласний інтеграл I-го типу: $\int\limits_1^{+\infty} \cos x\,dx$.

За означенням маємо:

$$\int\limits_1^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \sin x\Big|_1^{\beta} = \lim_{\beta \to +\infty} (\sin\beta - \sin 1).$$

Ця границя не існує оскільки не існує $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\sin\beta$, отже, даний невласний інтеграл розбігається.

 Дослідити на збіжність невласний інтеграл I-го типу:

$$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}.$$

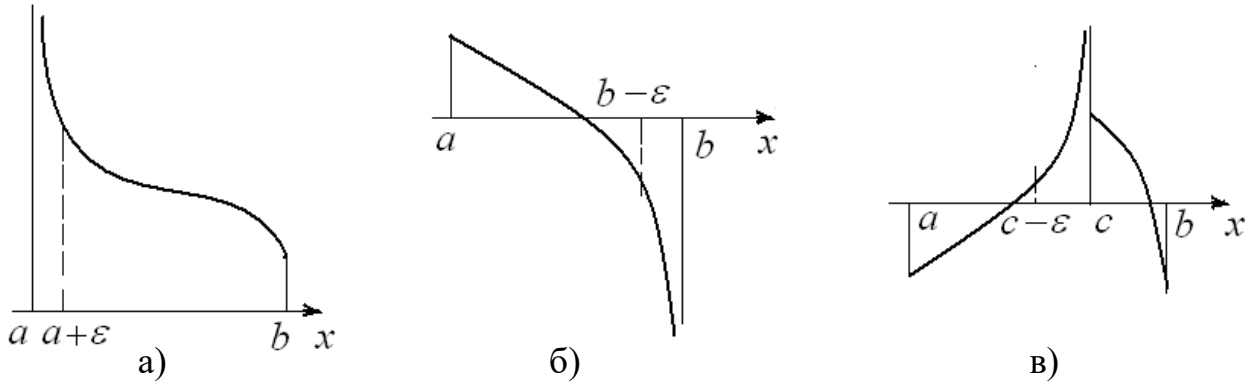
За означенням

$$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\beta\to+\infty}\ln\ln x\Big|_{2}^{\beta}=\lim_{\beta\to+\infty}\left(\ln\ln\beta-\ln\ln 2\right)=+\infty,$$

тобто даний інтеграл розбігається.

25.2. Інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли II-го типу)

Нехай $y=f(x)$ на $[a,b]$ має скінченне число точок розриву II-го роду, Це означає, що односторонні границі функції $y=f(x)$ у цих точках дорівнюють нескінченності, тобто при наближенні до точок розриву $f(x)$ необмежено спадає або зростає. Такі точки називаються особливими точками функції. У загальному випадку точка c є ***особливою точкою*** для даної функції, якщо у ε-околі цієї точки функція визначена, а у самій точці – невизначена. На рис. 25.1 наведені приклади розташування особливих точок c на відрізку $[a,b]$. Так, особливою точкою може бути як лівий, так і правий кінці відрізка, а також будь-яка внутрішня точка. У геометричному смислі вертикальна пряма $x=c$ є асимптотою графіка функції $y=f(x)$.



а) б) в)

Рис. 25.1

Виберемо деяке додатне число $\varepsilon > 0$ і розглядатимемо, відповідно, відрізки $[a+\varepsilon, b]$, $[a, b-\varepsilon]$ та $[a, c-\varepsilon]$(рис. 25.1а, б та в), на яких підінтегральна функція неперервна, отже, існує визначений інтеграл від цієї функції.

Невласним інтегралом II-го типу від функції $y = f(x)$ на проміжку $[a, b]$, де при $x = a$ функція має розрив II-го роду, називається границя визначеного інтеграла на проміжку $[a+\varepsilon, b]$ за умови, що ε прямує до нуля:

$$\int_a^b f(x)dx = |a = c| = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad (25.10)$$

Аналогічно визначають невласні інтеграли II-го роду для випадку, коли особливою точкою є верхня межа відрізка інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = |b = c| = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad (25.11)$$

а також для випадку, коли особлива точка є внутрішньою точкою відрізка інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = |c \in (a, b)| = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx. \qquad (25.12)$$

Невласний інтеграл II-го типу є збіжним, якщо існують скінченні границі в правих частинах формул (25.10) – (25.12). У протилежному випадку їх називають розбіжними.

Порядок обчислення невласних інтегралів II-го роду принципово нічим не відрізняється від порядку визначення невласних інтегралів I-го типу:

обчислити визначений інтеграл на скінченному відрізку і відшукати границю. Якщо для підінтегральної функції не існує первісна у вигляді скінченної суми елементарних функцій, то для дослідження невласних інтегралів II-го типу на збіжність застосовуються ознаки порівняння їх з еталонними інтегралами, тобто такими, про які заздалегідь відомо, збігаються вони чи розбігаються. Часто еталонними беруть інтеграли виду:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^k},\ k \in R \setminus \{1\}. \tag{25.13}$$

Для підінтегральної функції нижня границя відрізку інтегрування є точкою розриву II-го роду, отже, співвідношення (25.13) визначає невласний інтеграл II-го типу. Проведемо дослідження на збіжність цього інтеграла:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^k} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^k} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{1}{1-k} x^{1-k} \right) \Bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{1}{1-k} - \frac{\varepsilon^{1-k}}{1-k} \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-k}, & k < 1; \\ \infty, & k > 1. \end{cases}$$

Якщо $k = 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = \ln 1 - \lim_{\varepsilon \to +0} \ln \varepsilon = - \lim_{\varepsilon \to +0} \ln \varepsilon = \infty.$$

Отже, невласний інтеграл II-го типу $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$ збігається при $k < 1$ і розбігається при $k \geq 1$.



Визначимо, чи збігається невласний інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Його підінтегральна функція має розрив II-го роду в точці $c^0 = 1$, тобто її особливою точкою є верхня границя відрізку інтегрування. За означенням маємо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідно, даний інтеграл збігається.



Обчислимо невласний інтеграл $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+2x-3}$, якщо він збігається.

Підінтегральна функція неперервна на проміжку $[0,2]$ за винятком точки $x=1$, в якій знаменник дорівнює нулю. Отже, в околі цієї точки функція не обмежена, тому інтеграл записуємо в такому вигляді

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x-3} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x-3}.$$

Якщо кожний інтеграл, що знаходиться справа збігається, то даний інтеграл теж буде збігатися.

Розглянемо перший інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x-3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x+1)^2-4} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x+1-2}{x+1+2}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{4}\lim\left(\ln\left|\frac{1-\varepsilon-1}{1-\varepsilon+3}\right| - \ln\left|\frac{0-1}{0+3}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim\left(\ln\left|\frac{-\varepsilon}{4-\varepsilon}\right| - \ln\frac{1}{3}\right) = -\infty.$$

Оскільки перший інтеграл розбігається, то немає потреби обчислювати другий. Остаточно робимо висновок, що заданий невласний інтеграл є розбіжним.



Ключові терміни

Невласний інтеграл І-го типу; збіжний інтеграл; розбіжний інтеграл; абсолютно збіжний інтеграл; ознаки порівняння; еталонний інтеграл; інтеграл Ейлера – Пуассона; особлива точка функції; невласний інтеграл ІІ-го типу.

Запитання для самоперевірки

1. Які інтеграли називаються невласними?
2. Які невласні інтеграли називаються інтегралами I-го типу?
3. Які невласні інтеграли називаються інтегралами II-го типу?
4. Який невласний інтеграл називається інтегралом Ейлера – Пуассона?
5. Які невласні інтеграли називаються збіжними? Наведіть приклад.
6. Які невласні інтеграли називаються розбіжними? Наведіть приклад.
7. Які невласні інтеграли називаються абсолютно збіжними?
8. Наведіть алгоритм перевірки невласного інтеграла I типу на збіжність.
9. Наведіть алгоритм перевірки невласного інтеграла II типу на збіжність.

Глава 26. Подвійний інтеграл, його застосування. Поняття про багатовимірні інтеграли

26.1. Подвійний інтеграл у декартових координатах. Означення, теорема існування

Поняття «подвійний інтеграл» є природним узагальненням поняття «визначений інтеграл» на випадок функції двох змінних. Тому його означення принципово не відрізняється від означення визначеного інтеграла і вводиться аналогічним чином.

Нехай функція $z = f(x, y)$, або $z = f(M)$, де $M = M(x, y)$, визначена і неперервна в замкненій області D площини xOy, тобто на множині точок координатної площини, яка обмежена зімкненою лінією (або лініями) Γ, з урахуванням точок лінії Γ – межі області.

Виконаємо таку (стандартну) процедуру:

- ***розіб'ємо*** область D довільним чином якими-небудь лініями на n часткових областей із площами Δs_i, $i = \overline{1, n}$ (або просто на n площинок Δs_i (рис. 26.1) і найбільшу з відстаней між двома точками межі площинки назвемо ***діаметром площинки*** λ_i, $i = \overline{1, n}$, а максимальний серед них $\lambda = \max\limits_i \{\lambda_i\}$ – ***діаметром розбиття*** області D;

- ***виберемо*** на кожній із площинок довільним чином по точці $M_i(x_i, y_i)$, $i=\overline{1,n}$, обчислимо $f(M_i)$ і знайдемо добутки $f(M_i)\cdot\Delta s_i$;
- ***складемо*** суму всіх таких добутків

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta s_i\,, \tag{26.1}$$

яку назвемо ***інтегральною сумою*** для функції $f(x, y)$ в області D;

- ***обчислимо*** границю (якщо вона існує) інтегральної суми (26.1) за умови, що діаметр розбиття прямує до нуля при необмеженому зростанні n, тобто $\lambda \to 0$ разом з $n \to \infty$.

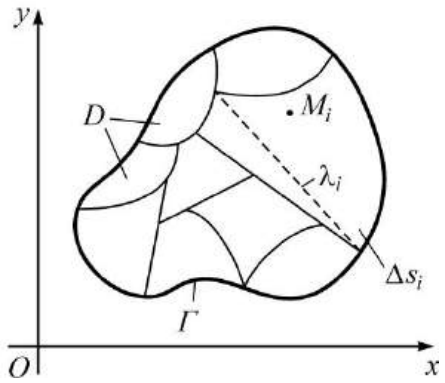


Рис. 26.1

Скінченна границя I інтегральної суми S_n, коли діаметр розбиття прямує до нуля ($\lambda \to 0$), а $n \to \infty$, називається ***подвійним інтегралом*** (від) функції $f(x, y)$ по області D і позначається так:

$$\iint\limits_D f(M)ds, \quad \text{або} \quad \iint\limits_D f(x, y)ds,$$

де $\iint$ – знак (символ) подвійного інтеграла;

D – область інтегрування;

$f(M) = f(x, y)$ – підінтегральна функція;

$f(x, y)ds$ – підінтегральний вираз;

x, y – змінні інтегрування;

ds – елемент площі, або диференціал площі.

Отже, за означенням

$$\iint\limits_D f(x, y)ds = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} S_n = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i. \qquad (26.2)$$

Теорема 26.1 ***(існування подвійного інтеграла)***. Якщо задана функція двох змінних неперервна в розглядуваній замкненій області, то існує скінченна границя інтегральної суми, і вона не залежить ні від способу розбиття на площинки, ні від вибору точок у них для складання інтегральної суми, тобто подвійний інтеграл існує. Теорему наводимо без доведення.

Функція $z = f(x, y)$ у цьому випадку називається ***інтегрованою*** на області D.

Згідно з теоремою 26.1 розбиття області D можна здійснювати найпростішим із можливих способів. У декартовій системі координат xOy – прямими, паралельними координатним осям. У цьому випадку площинка – прямокутник зі сторонами $\Delta x, \Delta y$, який утворюється при переході від точки $M(x, y)$ до точки $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$, де $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$. Тому $\Delta s = \Delta x \cdot \Delta y$, а $ds = \Delta s = dx \cdot dy$. Таким чином, можна записати:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, ds = \left| ds = dx \cdot dy \right| = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

26.2. Геометричний зміст подвійного інтеграла

Аналізуючи з геометричної точки зору процедуру, яка передувала означенню подвійного інтеграла, для невід'ємної в області D функції $\left(f(x, y) \geq 0 \;\; \forall (x, y) \in D\right)$, приходимо до висновку: кожний доданок $f(M_i) \cdot \Delta s_i$ інтегральної суми чисельно дорівнює об'єму прямої призми з площею основи Δs_i і висотою $N_i M_i = f(M_i)$ (рис. 26.2), а інтегральна сума чисельно дає наближене значення V_n об'єму V тіла, обмеженого циліндричною поверхнею з твірною, паралельною осі Oz, і напрямною Γ; областю D (або, що теж саме, площиною $z = 0$) і поверхнею $z = f(x, y)$.

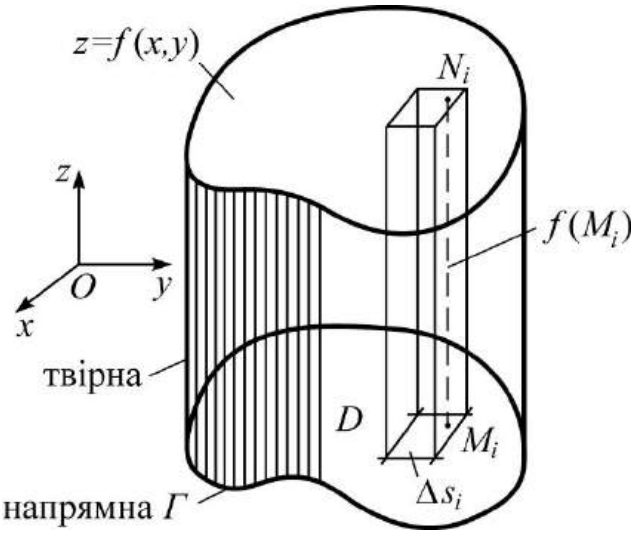


Рис. 26.2

Вказане наближення тим краще, чим менше будуть Δs_i, тому природно покласти, що $V = \lim\limits_{\lambda \to 0} V_n$, тобто: у ***геометричному смислі*** подвійний інтеграл функції $f(x, y) \geq 0$ по області D чисельно дорівнює об'ємові тіла, обмеженого поверхнею $z = f(x, y)$, площиною $z = 0$ і циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz, а напрямною є межа Γ області D, тобто

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy. \tag{26.3}$$

26.3. Властивості подвійного інтеграла

Порівнюючи означення подвійного інтеграла та означення визначеного інтеграла функції однієї змінної, можна зробити висновок, що за конструкцією ці означення аналогічні. Тому властивості подвійного інтеграла, а також їх доведення майже повторюють відповідні властивості визначеного інтеграла. Наведемо ці властивості без доведення.

1. Подвійний інтеграл від алгебраїчної суми неперервних в області D функцій дорівнює алгебраїчній сумі подвійних інтегралів від доданків:

$$\begin{aligned} &\iint\limits_D (f_1(x, y) + f_2(x, y) + \cdots + f_n(x, y))dxdy = \\ &= \iint\limits_D f_1(x, y)dxdy + \iint\limits_D f_2(x, y)dxdy + \ldots + \iint\limits_D f_n(x, y)dxdy. \end{aligned} \tag{26.4}$$

2. Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_D cf(x, y)dxdy = c\iint\limits_D f(x, y)dxdy,\ c - const. \tag{26.5}$$

3. Якщо область інтегрування D розбити на дві області D_1 і D_2 без спільних внутрішніх точок і функція $f(x, y)$ неперервна в області D, то

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy. \tag{26.6}$$

4. Якщо $f(x, y) \geq 0$ в області D, то

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy \geq 0. \tag{26.7}$$

5. Якщо в кожній точці області D функції $f(x,y)$ і $\varphi(x,y)$ неперервні і задовольняють умову $f(x,y) \geq \varphi(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy. \tag{26.8}$$

6. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області інтегрування D і задовольняє нерівності $m \leq f(x,y) \leq M$, де m та M – найменше і найбільше значення функції $f(x,y)$ в області D, то

$$mS \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq M \cdot S, \tag{26.9}$$

де S – площа області D.

7. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, то в цій області існує така точка (ξ,η), що

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\cdot S, \tag{26.10}$$

де S – площа області. Значення $f(\xi,\eta)$ називається ***середнім значенням функції*** $f(x,y)$ в області D.

26.4. Зведення подвійного інтеграла до повторного

При обчисленні подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ будемо мати на увазі той факт, що його значення дорівнює об'єму циліндричного тіла з основою D, обмеженого поверхнею $z = f(x,y)$. Нагадаємо, що задача про обчислення об'єму тіла була розглянута в застосуваннях визначеного інтеграла до задач геометрії. Тоді була одержана формула

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx, \tag{26.11}$$

де $S(x)$ – площа поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, а $x = a$ і $x = b$ – рівняння площин, що обмежують дане тіло.

Скористаємося цією формулою при обчисленні подвійного інтеграла

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

де $f(x,y)\geq 0$ і неперервна в області D.

1. Нехай область D площини xOy обмежена прямими $x=a, x=b\,(a<b)$ та двома неперервними кривими $y_1(x)$ і $y_2(x)$ $(y_1(x)<y_2(x))$, кожна з яких перетинається довільною прямою $x=x_0$ $(a<x_0<b)$, паралельною осі Oy, тільки в одній точці (рис. 26.3, 26.4). Така область називається ***правильною*** (або ***простою***) відносно осі Oy. Відповідне циліндричне тіло зображено на рис. 26.5.

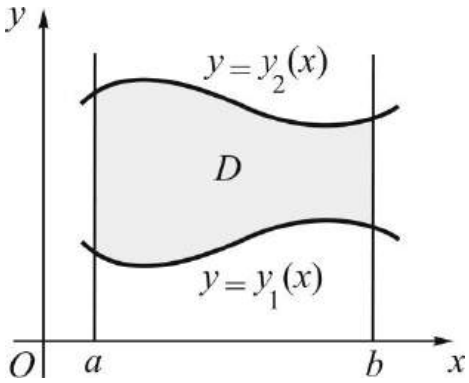


Рис. 26.3

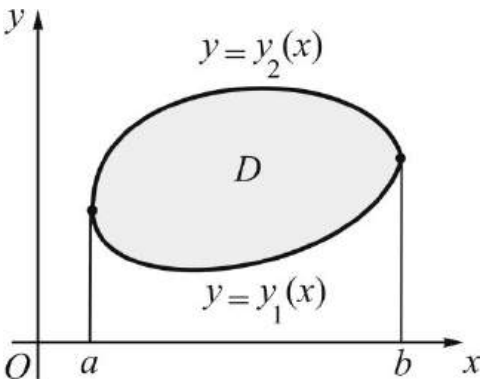


Рис. 26.4

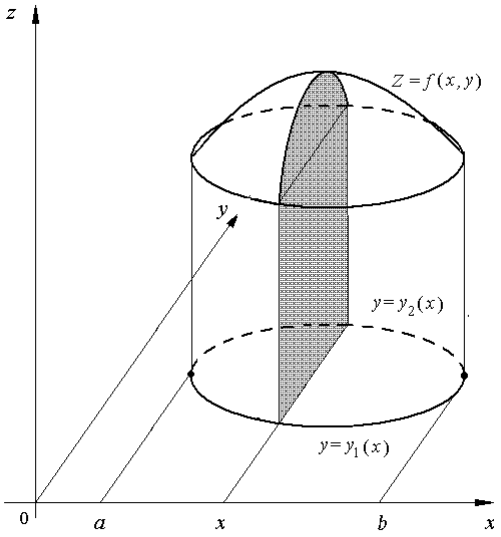


Рис. 26.5

Проведемо довільну площину, паралельну площині zOy. У переріз і циліндричного тіла і цієї площини одержуємо криволінійну трапецію, площа якої виражається інтегралом від функції $f(x,y)$, де x вважається сталим, а y змінюється від $y_1(x)$ до $y_2(x)$. Таким чином, площа перерізу дорівнює

$$S(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Згідно з формулою (26.3) об'єм даного циліндричного тіла дорівнює:

$$V=\int_b^a\left(\int_{y(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

З іншого боку, на підставі геометричного змісту подвійного інтеграла

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Зіставляючи останні дві формули, остаточно отримуємо

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

Або в зручніші формі

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (26.12)$$

Інтеграли в правій частині формули (26.12) називаються двократними, або повторними від функції $z=f(x)$.

У наведеній формулі (26.12) інтегрується за змінною y спочатку інтеграл $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ (***внутрішній*** інтеграл), у якому змінна x вважається сталою, після чого одержана функція від x інтегрується в межах від a до b (***зовнішній*** інтеграл).

2. Аналогічно область D на площині xOy називається ***правильною*** (або ***простою***) відносно осі Ox, якщо вона обмежена прямими $y=c$ і $y=d$ $(c<d)$ та кривими $x=x_1(y)$ і $x=x_2(y)$ $(x_1(y)<x_2(y)$, а будь-яка пряма $y=y_0$ $(c<y_0<d)$, яка паралельна осі Ox, перетинає кожну з цих кривих тільки

в одній точці (рис. 26.6, 26.7).

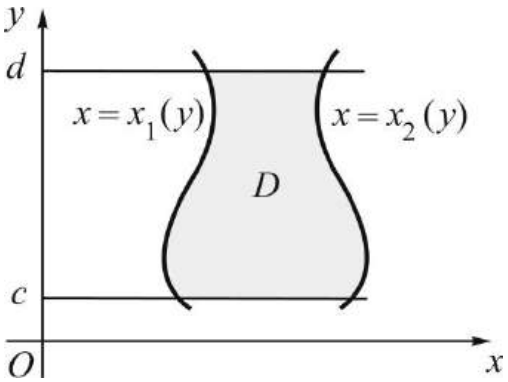


Рис. 26.6

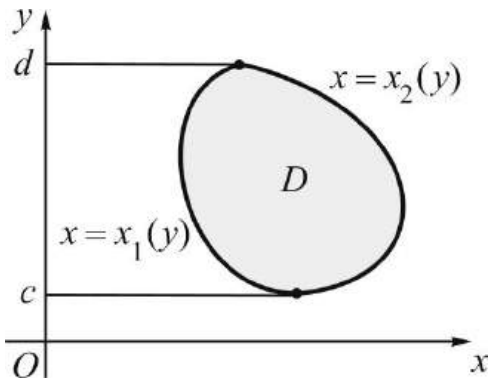


Рис. 26.7

Для такої області (простої відносно x) обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення двократних, або повторних, інтегралів за формулою:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (26.13)$$

Таким чином, для зведення подвійного інтеграла до двократних треба спочатку побудувати область інтегрування D, а потім застосовувати одну із формул (26.12) або (26.13).

Якщо область D не є правильною, то її представляють у вигляді об'єднання правильних областей, здійснивши її розбиття на частини прямими, що паралельні координатним осям, і застосовують властивість 3 подвійного інтеграла, а саме

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy. \qquad (26.14)$$

Формули зведення подвійного інтеграла до повторних приймають особливо простий вигляд, якщо область D є прямокутником зі сторонами, паралельними осям координат (рис. 26.8).

У цьому випадку межі інтегрування є сталими не тільки для зовнішнього, але і для внутрішнього інтегралів.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx. \qquad (26.15)$$

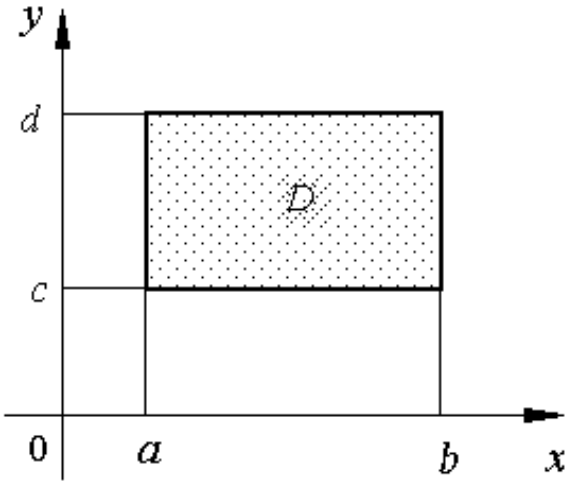


Рис. 26.8

Обчислимо $\iint\limits_D e^{x+\sin y}\cos y\cdot dxdy$, якщо область D – прямокутник: $0\le x\le \pi$, $0\le y\le \dfrac{\pi}{2}$.

За формулою (26.15) маємо:

$$\iint\limits_D e^{x+\sin y}\cos y\cdot dxdy=\int\limits_0^{\pi}dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^x e^{\sin y}\cos y\cdot dy=\int\limits_0^{\pi}e^x\left(e^{\sin y}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dx=$$

$$=e^x\Big|_0^{\pi}\cdot\left(e^{\sin\frac{\pi}{2}}-e^{\sin 0}\right)=\left(e^{\pi}-1\right)(e-1).$$

Обчислимо $\iint\limits_D \dfrac{x}{y}dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=e^x$, $y=e^{2x}$ і $x=2$.

Побудуємо область D (рис. 26.9). Область D правильна відносно осі Oy. Тому:

$$\iint\limits_D \frac{x}{y}dxdy=\int\limits_0^2 xdx\int\limits_{e^x}^{e^{2x}}\frac{dy}{y}=\int\limits_0^2 x(\ln y)\Big|_{e^x}^{e^{2x}}dx=\int\limits_0^2 x(\ln e^{2x}-\ln e^x)dx=$$

$$=\int\limits_0^2 x(2x-x)dx=\int\limits_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

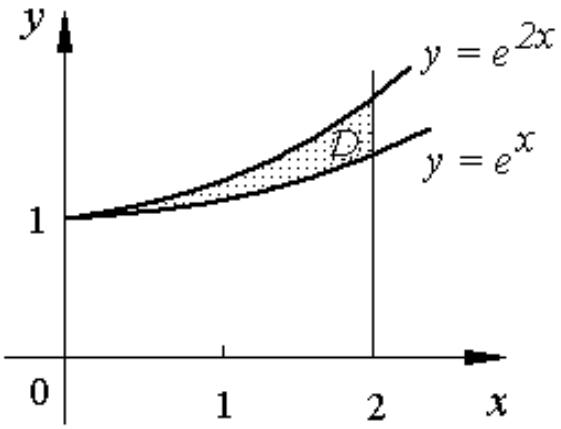


Рис. 26.9

Приклад 3 Обчислимо $\iint\limits_D x\sqrt{y}\cdot dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=x$, $y=3x$ і $y=1$.

Побудуємо область D (рис. 26.10).

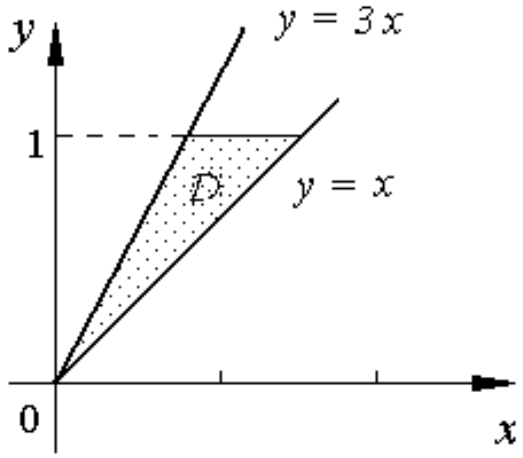


Рис. 26.10

Область D правильна відносно осі Ox. Тому:

$$\iint\limits_D x\sqrt{y}dxdy=\int\limits_0^1\sqrt{y}dy\int\limits_{\frac{y}{3}}^{y}xdx=\int\limits_0^1\sqrt{y}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{y}{3}}^{y}dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{y}\cdot\frac{8}{9}y^2dy=$$

$$=\frac{4}{9}\int\limits_0^1 y^{\frac{5}{2}}dy=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{8}{63}.$$

Обчислимо $\iint\limits_D y \cdot dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=\sqrt{x}$, $y=-x$, $x-y=2$.

Побудуємо область D (рис. 26.11).

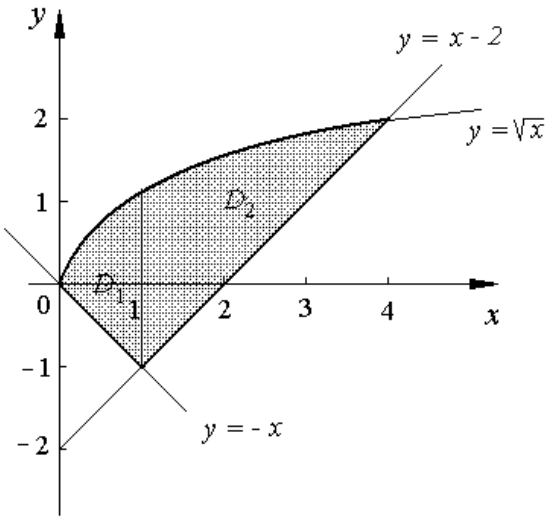


Рис. 26.11

Знайдемо точки перетину заданих ліній, розв'язуючи дві системи рівнянь:

а) $\begin{cases} y=-x \\ y=x-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x-2=\sqrt{x} \\ y=x-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-5x+4=0 \\ x\geq 0 \\ y=x-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$.

Область D не є простою ні відносно осі Ox, ні відносно осі Oy. Розіб'ємо її прямою $x=1$ на дві прості області D_1 і D_2. За формулою (26.13) маємо:

$$\iint\limits_D ydxdy = \iint\limits_{D_1} ydxdy + \iint\limits_{D_2} ydxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{x}} ydy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_{x-2}^{\sqrt{x}} ydy =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{y^2}{2}\Bigg|_{-x}^{\sqrt{x}} dx + \int\limits_1^4 \frac{y^2}{2}\Bigg|_{x-2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x-x^2\right)dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \left(x-(x-2)^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{(x-2)^3}{3}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(8-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}.$$

26.5. Подвійний інтеграл у полярних координатах

При переході у подвійному інтегралі від декартових координат x і y до полярних координат ρ і φ, які пов'язані з декартовими координатами співвідношеннями:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

має місце формула

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi, \tag{26.16}$$

де ρ і φ – полярні координати точок області D.

Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах зводиться до обчислення двократних (повторних) інтегралів по ρ і по φ залежно від вигляду області D (рис. 26.12).

Якщо область D обмежена променями, які утворюють з полярною віссю Op кути φ_1 і φ_2, і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$, де $\rho_1 < \rho_2$, $\varphi_1 < \varphi_2$ (рис. 26.12), то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho. \tag{26.17}$$

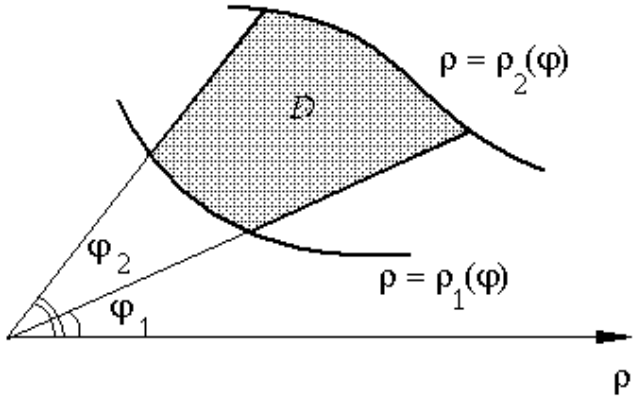


Рис. 26.12

Якщо область D обмежена лінією $\rho = \rho(\varphi)$ і початок координат лежить усередені області, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho. \tag{26.18}$$

Зауважимо, що перехід до полярних координат у подвійному інтегралі доцільно робити, якщо область інтегрування є кругом, кільцем або їх частинами, тобто межа області D містить дуги кіл і відрізки променів, що виходять із полюса O.



Обчислимо $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, де D – круг $x^2+y^2 \le 4x$.

Застосуємо полярні координати: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Одержимо рівняння кола у вигляді $\rho=4\cos\varphi$. Побудуємо в декартових координатах коло $x^2+y^2=4x$, або $\left(x-2\right)^2+y^2=4$ (рис. 26.13). Тут φ змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, а ρ – від $\rho=0$ до $\rho=4\cos\varphi$.

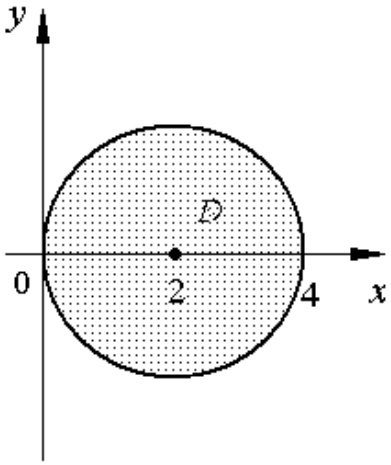


Рис. 26.13

Отже,

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{4\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 64\cos^4\varphi d\varphi = 64\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = 16\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 16\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi = 16\left(\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 16\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 24\pi.$$

Обчислити за допомогою подвійного інтеграла в полярних координатах невласний інтеграл – інтеграл Ейлера – Пуассона:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Зауважимо, що цей інтеграл відіграє важливу роль у теорії ймовірностей.

Позначимо $I=\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ або, що теж саме, $I=\int\limits_0^{\infty} e^{-y^2}dy$, оскільки інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування.

Знайдемо $I_1=\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx\cdot\int\limits_0^{\infty} e^{-y^2}dy=I^2=\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$,

де D – перша чверть декартової системи координат ($0\le x<\infty,\ 0\le y<\infty$) (рис. 26.14).

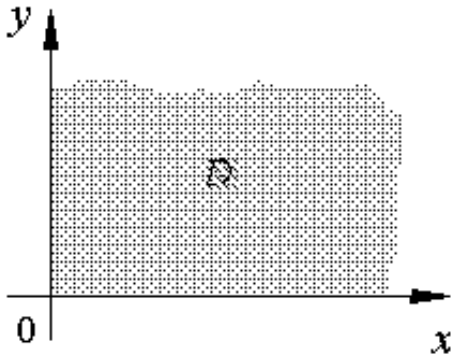


Рис. 26.14

Для обчислення I_1 перейдемо до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тоді $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{4}$.

Звідки $I=\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, а оскільки функція e^{-x^2} парна, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

26.6. Обчислення площі плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла

Якщо у формулі (26.3) $V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ покласти $f(x,y)=1$, то $V = \iint\limits_D dxdy$. Але в цьому випадку $V = S_D \cdot 1 = S_D$. Отже, отримали площу плоскої фігури D:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy. \tag{26.19}$$

Якщо область D визначена у полярних координатах нерівностями $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, $\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)$, то

$$S = \iint\limits_D \rho d\varphi d\rho = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho. \tag{26.20}$$



Знайти площу фігури, що обмежена лініями $xy = 4$, $x + y = 5$.

Побудуємо фігуру, площу якої треба знайти (рис. 26.15).

Перша лінія – це гіпербола, побудована тільки одна вітка; інша вітка нам не потрібна. Друга лінія – це пряма. Знайдемо точки перетину цих ліній, для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x(5-x) = 4, \\ y = 5 - x. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння

$$5x - x^2 - 4 = 0 \text{ або } x^2 - 5x + 4 = 0,$$

звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, тоді $y_1 = 4$, $y_2 = 1$.

Для знаходження площі фігури скористаємося формулою **(**26.19**)**. Зовнішній інтеграл беремо по *x*, що змінюється від $x = 1$ до $x = 4$.

Внутрішній інтеграл беремо по y, що змінюється від $y=\dfrac{4}{x}$ до $y=5-x.$

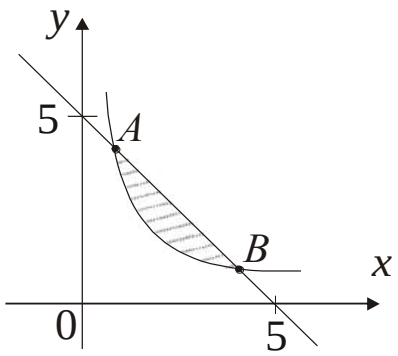


Рис. 26.15

Отже,

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_1^4 dx\int\limits_{\frac{4}{x}}^{5-x} dy=\int\limits_1^4 y\Big|_{\frac{4}{x}}^{5-x}dx=$$

$$\int\limits_1^4\left(5-x-\frac{4}{x}\right)dx=\left(5x-\frac{x^2}{2}-4\ln|x|\right)\Big|_1^4=$$

$$=20-5-8+\frac{1}{2}-4\ln 4+4\ln 1=$$

$$=\left(\frac{15}{2}-8\ln 2\right)(\text{êâ. î ä})$$

III Обчислимо площу плоскої області D, обмеженої колом $x^2+y^2=2x$ і прямими $y=0,\ y=x\sqrt{3}$.

Побудуємо область D (рис. 26.16).

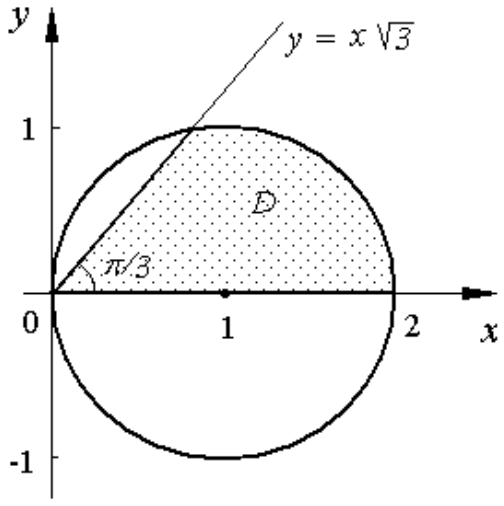


Рис. 26.16

Рівняння кола $x^2+y^2=2x$ перетворимо до вигляду $(x-1)^2+y^2=1$. Площу області доцільно обчислити в полярних координатах: $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi$. Запишемо рівняння кола: $\rho^2=2\rho\cos\varphi$, або $\rho=2\cos\varphi$.

Кут φ за умовою змінюється від $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Таким чином,

$$S = \iint\limits_D \rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cos^2\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2\varphi) d\varphi = \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

26.7. Обчислення об'єму тіла за допомогою подвійного інтеграла

За означенням подвійного інтеграла і його геометричним змістом було доведено, що подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ дорівнює об'єму тіла, обмеженого поверхнею $z = f(x,y) \geq 0$, областю D площини xOy та циліндричною поверхнею з напрямною по межі області D і твірними, паралельними осі Oz, а саме:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Приклад Знайдемо об’єм тіла, обмеженого поверхнями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$. Побудуємо область інтегрування D (рис. 26.17).

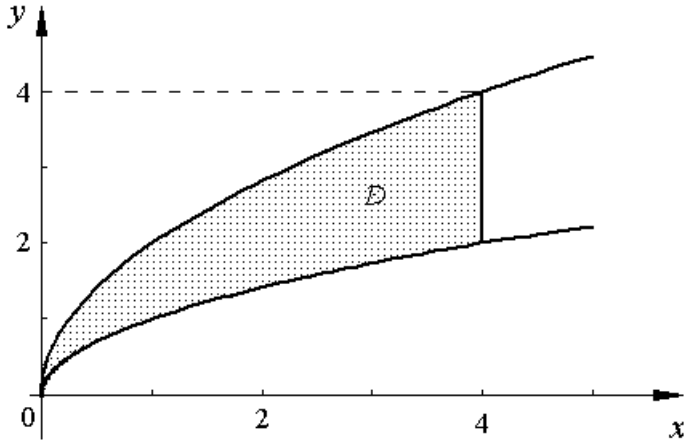


Рис. 26.17

Задане тіло обмежене зверху поверхнею $z = 4 - x$. За формулою (26.3) одержуємо:

$$V = \iint\limits_D (4 - x)\,dxdy = \int\limits_0^4 (4 - x)\,dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^4 (4 - x)\sqrt{x}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^4 \left(4\sqrt{x} - x\sqrt{x}\right)dx = \left(\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right)\Bigg|_0^4 = \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{128}{15} \text{ (êóá. î ä).}$$



Знайдемо об’єм тіла, обмеженого параболоїдом $z = 1 - x^2 - y^2$ і площинами $z = 0$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$ (у I октанті).

Побудуємо область D згідно з умовою задачі (рис. 26.18).

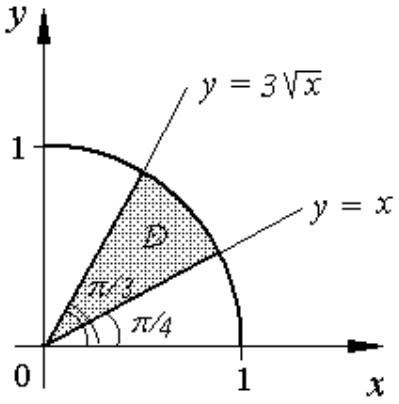


Рис. 26.18

Обчислимо об’єм V, здійснивши у подвійному інтегралі перехід до полярних координат. Рівняння кола $x^2 + y^2 = 1$ має вигляд $\rho = 1$, а прямі $y = x$ і $y = 3\sqrt{x}$ утворюють з віссю Ox кути $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{\pi}{3}$ відповідно.

Отже,

$$V = \iint\limits_D \left(1 - x^2 - y^2\right)dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^1 \left(1 - \rho^2\right)\rho\,d\rho =$$

$$= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{48} \approx 0,065 \,(\text{êóá. ñì}).$$

Підводячи підсумки розглянутої теми, зазначимо, що поряд з подвійними також існують і багатовимірні (m-вимірні, $m \geq 2$) інтеграли. Означення відповідних інтегралів вводяться аналогічно тому, як це було зроблено при визначенні подвійного інтеграла, а їх обчислення зводиться до обчислення m-кратних визначених інтегралів. Найбільш поширеними є потрійні інтеграли від функції $u = f(x, y, z)$ по просторовій області V, обмеженій деякою замкненою поверхнею. Його взяття зводиться до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.



Ключові терміни

Подвійний інтеграл; діаметр розбиття; середнє значення функції на області; циліндричне тіло; область, правильна у напрямі осі; кратні інтеграли; зовнішній інтеграл; внутрішній інтеграл.



Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення подвійного інтеграла.
2. Сформулюйте властивості подвійного інтеграла.
3. Який алгоритм обчислення подвійних інтегралів?
4. Який вигляд має подвійний інтеграл у полярних координатах?
5. Як обчислюється площа плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла?
6. Як обчислюється об’єм просторового тіла за допомогою подвійного інтеграла?

Приклади та вправи за розділом 6

Приклади застосування інтегрального числення
до розв'язання задач з економіки

6.1. Нехай задана функція граничного доходу залежно від обсягу продукції

$$R'(x) = 25 - 0{,}08x.$$

Знайти функцію доходу та закон попиту на продукцію.

Розв'язання. Оскільки $R'(x) = 25 - 0{,}08x$, то

$$R = \int (25 - 0{,}08x)dx = 25x - 0{,}04x^2 + C.$$

Дохід дорівнює нулю, якщо не реалізовано жодного виробу, тому маємо:

$$R(0) = 0, \text{ звідки } C = 0.$$

Отже, функція доходу така:

$$R(x) = 25x - 0{,}04x^2.$$

Якщо ціна одиниці продукції p, то дохід визначається формулою $R = px$. Отже, якщо поділити дохід на x, знайдемо функцію попиту:

$$P(x) = \frac{R(x)}{x} = 25 - 0{,}04x.$$

6.2. Знайти обсяг продукції, що вироблятиме мале підприємство за перші 3 години роботи, якщо функція продуктивності праці має вигляд:

$$f(x) = x^2 + e^{-x}.$$

Розв'язання. Обсяг продукції обчислюється за формулою $P = \int_0^T f(x)dx$.

Отже, $P = \int_0^3 \left(x^2 + e^{-x}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - e^{-x}\right)\Big|_0^3 = 9 - e^{-3} + e^0 = 10 - e^{-3} \approx 9{,}95$ (ум. од.).

6.3. Знайти обсяг продукції, виробленої за другу годину, якщо відома функція продуктивності $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

Розв'язання. Для відшукання обсягу продукції обчислимо визначений інтеграл:

$$P = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{10}{3} \approx 3{,}3 \text{ (ум. од.)}.$$

6.4. На виготовлення 100 поштових конвертів (1 одиниця продукції) було витрачено 50 хвилин. У подальшому час виготовлення змінювався за формулою: $f(x) = 50x^{-0,25}$.

Скільки хвилин буде потрібно для виготовлення 300 конвертів після того, як 400 вже було виготовлено?

Розв'язання. Обчислюємо інтеграл:

$$\int_4^7 50x^{-0,25} dx = 50 \frac{x^{0,75}}{0,75} \Bigg|_4^7 = \frac{200}{3} \left(7^{0,75} - 4^{0,75} \right) = 98{,}34 \text{ (хв.)}.$$

6.5. Знайти середнє значення витрат, якщо обсяг виробництва змінюється від 3 до 5 гр. од., якщо відомо, що витрати залежно від обсягу виробництва можна описати такою функцією: $f(x) = 2x^2 + 3x + 8$. При якому обсязі продукції витрати приймають середнє значення?

Розв'язання. Використаємо теорему про середнє значення функції:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

у результаті чого отримаємо:

$$f(c) = \frac{1}{2} \int_3^5 \left(2x^2 + 3x + 8 \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 8x \right) \Bigg|_3^5 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{250}{3} + \frac{75}{2} + 40 - \frac{54}{3} - \frac{27}{2} - 24 \right) = \frac{158}{3} \text{(гр. од.)}.$$

Отже, середні витрати виробництва дорівнюють $\frac{158}{3}$ (гр. од.).

Тепер знайдемо обсяг продукції, при якому витрати набувають значення $\frac{158}{3}$, тобто розв'яжемо рівняння:

$$2x^2 + 3x + 8 = \frac{158}{3}, \text{ або } 6x^2 + 9x - 134 = 0.$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 3216}}{12};\ x_1 = \frac{-9 + \sqrt{3297}}{12} \approx 4;\ x_2 = \frac{-9 - \sqrt{3297}}{12} - \text{не підходить.}$$

Отже, при $x \approx 4$(гр. од.) витрати набувають середнє значення.

6.6. Функція граничних витрат має вигляд:

$$C'(x) = 50 + 0{,}08x.$$

Фіксовані витрати складають 1200 гр. од. на місяць, вартість одного виробу – 98 гр. од.

Знайти функцію витрат. Які витрати потрібні для виробництва 200 виробів? Визначити максимальний прибуток.

Розв'язання. За умовою задачі відомо, що $C'(x) = 50 + 0{,}08x$, тоді

$$C(x) = \int (50 + 0{,}08x)dx,\ \ C(x) = 50x + 0{,}04x^2 + C_1.$$

Фіксовані витрати складають 1200 гр. од., тому маємо:

$$C(x) = 50x + 0{,}04x^2 + 1200.$$

Далі треба обчислити витрати на виробництво 200 виробів.

$$C(200) = 50 \cdot 200 + 0{,}04 \cdot 200^2 + 1200 = 12800 \text{ (гр. од.)}.$$

Прибуток залежно від обсягу продукції складає

$$P = 98x - 50x - 0{,}04x^2 - 1200,$$

або

$$P = 48x - 0{,}04x^2 - 1200.$$

Для визначення максимального прибутку знаходимо похідну:

$$P' = 48 - 0{,}08x.$$

Далі за необхідною умовою існування екстремуму маємо:

$$48 - 0{,}08x = 0,$$

звідки $x = 600$. Прибуток буде максимальним при $x = 600$, оскільки $P'' = -0{,}08 < 0$ і складатиме:

$$P(600) = 48 \cdot 600 - 0{,}04 \cdot 600^2 - 1200 = 13200 \text{ (гр. од.)}.$$

Отже: функція витрат $C(x)=50x+0{,}04x^2+1200$; витрати на виробництво 200 виробів складають 12 800 гр. од.; максимальний прибуток дорівнює 13 200 гр. од.

6.7. Нехай відомі закони попиту та пропозиції:

$$p=80-x^2, \qquad q=\frac{2}{3}x+\frac{32}{3}.$$

Знайти виграш споживача та виграш постачальника.

Розв'язання. Знайдемо точку ринкової рівноваги x, для якої $p=q$.

$$80-x^2=\frac{2}{3}x+\frac{32}{3},\ 3x^2+2x-208=0,$$

звідки $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+624}}{3}$, $x_1=8$, $x_2=-\dfrac{26}{3}$ (не підходить).

Якщо кількість товару складає 8 ум. од., то ринкова ціна становить: $p(8)=16$ (ум. од.).

Тоді ціна всього товару дорівнює 16·8=108 (ум. од.).

Деякі споживачі можуть заплатити за товар більше ринкової ціни. Тоді виграш споживача (див. (24.18)) складатиме: $C=\int\limits_0^8 p(x)dx-108$.

$$C=\int\limits_0^8\left(80-x^2\right)dx-108=\left(80x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^8-108\approx 361\,(\text{ум. од.}).$$

Виграш постачальника (24.19) складатиме:

$$P=108-\int\limits_0^8 q(x)dx.$$

$$P=108-\int\limits_0^8\left(\frac{2}{3}x+\frac{32}{3}\right)dx=108-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{32}{3}x\right)\Bigg|_0^8\approx 1{,}3\ (\text{ум. од.}).$$

Отже, виграш споживача наближено становить 361 (ум. од.), виграш постачальника – 1,3 (ум. од.).

6.8. Функція сукупних витрат підприємства та рівняння попиту на товар задаються такими функціями:

$$C(x)=600+92x+2x^2;\ p=260-3x-x^2.$$

При якому обсязі виробництва підприємство буде мати максимальний прибуток?

Розв'язання. Виграш споживача визначається формулою:

$$S = \int_0^{x_0} p dx - p_0 x_0,$$

де x_0 – обсяг виробництва, p_0 – рівноважна ціна. Прибуток підприємства складає:

$$\Pi = px - C(x),$$
$$\Pi = \left(260 - 3x - x^2\right)x - 600 - 92x - 2x^2,$$
$$\Pi = -x^3 - 5x^2 + 168x - 600.$$

Знаходимо похідну і критичні точки функції $\Pi(x)$:

$$\Pi' = -3x^2 - 10x + 168,$$
$$3x^2 + 10x - 168 = 0,$$

звідки $x_1 = 6, x_2 = -\frac{28}{3}$ не підходить.

$\Pi'' = -6x - 10$, $\Pi''(6) < 0$, отже, при $x_1 = 6$ прибуток максимальний.

$p_0 = p(6) = 260 - 3 \cdot 6 - 6^2 = 206.$

Тоді $p_0 x_0 = 206 \cdot 6 = 1236$. Таким чином, споживач має виграш:

$$S = \int_0^6 \left(260 - 3x - x^2\right)dx - 1236 = \left(260x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^6 - 1236 = 198 \text{ (гр. од.)}$$

Отже, якщо обсяг виробництва становить 6 одиниць, то підприємство має максимальний прибуток, а споживач – виграш 198 гр. од.

6.9. Визначити дисконтований (початковий) прибуток підприємства за 5 років, якщо відсоткова ставка дорівнює 8 %, а річний прибуток є функцією часу: $f(t) = t$.

Розв'язання. На проміжку часу $[0; T]$ дисконтований прибуток обчислюється за допомогою визначеного інтеграла:

$$D = \int_0^T f(t) e^{-\alpha t} dt.$$

За умовою задачі маємо:

$$D = \int_0^5 te^{-0,08t} dt.$$

Для обчислення інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами.

Нехай $u = t, dv = e^{-0,08t}dt$, тоді $du = dt,\ v = -\dfrac{e^{-0,08t}}{0,08}$.

$$D = \frac{te^{-0,08t}}{-0,08}\Bigg|_0^5 + \int_0^5 \frac{e^{-0,08t}}{0,08}dt = -\frac{125}{2}e^{-0,4} - \frac{e^{-0,08t}}{(0,08)^2}\Bigg|_0^5 =$$

$$= -\frac{125}{2}e^{-0,4} - \frac{625}{4}\left(e^{-0,4} - 1\right) = \frac{625}{4} - \frac{875}{4}e^{-0,4} \approx 9,62 \text{ (гр. од.)}.$$

6.10. Розподіл доходу в деякій країні визначається кривою Лоренца:

$$y = 0,79x^2 + 0,21x.$$

Яку частку доходу одержують 10 % найбільш незахищеного населення? Обчислити коефіцієнт нерівномірного розподілу сукупного доходу.

Розв'язання. Знайдемо частку доходу, яку одержують 10 % найбільш незахищеного населення:

$$y(0,1) = 0,79 \cdot (0,1)^2 + 0,21 \cdot 0,1 = 0,0289.$$

Отже, 10 % найбільш незахищеного населення одержують 2,89 % сукупного доходу.

Обчислимо коефіцієнт нерівномірного розподілу сукупного доходу, який дорівнює відношенню площі фігури, що обмежена кривою $y = 0,79x^2 + 0,21x$ і прямою $y = x$, до площі фігури, що обмежена прямими $y = x,\ x = 1,\ y = 0$ (див. рис. 24.17). Отже, коефіцієнт Джині дорівнює:

$$k = \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}.$$

Визначаємо відповідні площі, а саме:

$$S_1 = \int_0^1 \left(x - 0,79x^2 - 0,21x\right)dx = \left(\frac{0,79x^2}{2} - \frac{0,79x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 0,1317;$$

$$S_2 = 0,5.$$

Тоді $k = 0,1317 / 0,5 = 0,2634.$

Таким чином, коефіцієнт нерівномірного розподілу сукупного доходу (коефіцієнт Джині) складає 0,2634.

6.11. Нехай після виготовлення 50 мобільних телефонів виявилось, що час на виготовлення наступних телефонів спадає за формулою $f(x)=8x^{-0,12}$. Знайти час, який необхідний для виготовлення ще 10 телефонів.

Розв'язання. Час, який необхідний на виробництво одиниць продукції з номерами від (n_1+1) до n_2 визначається за формулою:

$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x)dx.$$

Для даної задачі:

$$\Delta T = \int_{50}^{60} 8x^{-0,12}dx = \frac{8x^{0,88}}{0,88}\Bigg|_{50}^{60} = \frac{100}{11}\left(60^{0,88}-50^{0,88}\right) = 49,47 \text{ (од. часу).}$$

Отже, для виготовлення додатково 10 телефонів необхідно витратити 49,47 од. часу.



Задачі та вправи до самостійного розв'язання

Для наведених нижче інтегралів знайти первісну, застосовуючи властивості невизначеного інтеграла та таблицю основних інтегралів:

6.12. $\int\left(9x^2-10\sqrt[4]{x}+3\sqrt{x}\right)dx.$

6.13. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx.$

6.14. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

6.15. $\int tg^2 x dx.$

6.16. $\int\frac{\sin 9x-\sin 5x}{\cos 7x}dx.$

6.17. $\int(1-3x)^{17}dx.$

6.18. $\int\sqrt[4]{(12x-5)^3}dx.$

6.19. $\int e^{3x-5}dx.$

6.20. $\int\frac{dx}{11-4x}.$

6.21. $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx.$

6.22. $\int\frac{dx}{\sin^2(7x-2)}.$

6.23. $\int\frac{3\sin x}{1-2\cos x}dx.$

6.24. $\int \frac{3x^3}{2x^4+3}dx.$

6.25. $\int \frac{dx}{x^2-10}.$

Знайти первісну, застосовуючи метод підстановки (заміни змінної):

6.26. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+2}}dx.$

6.27. $\int e^{4\sin x}\cos x dx.$

6.28. $\int \frac{\ln^5(3x-2)}{3x-2}dx.$

6.29. $\int \frac{e^{3x}}{4-e^{6x}}dx.$

6.30. $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx.$

6.31. $\int x\cos\left(x^2-1\right)dx.$

6.32. $\int \left(x^2+1\right)^5 x dx.$

6.33. $\int \frac{dx}{\arcsin^4 x\sqrt{1-x^2}}.$

6.34. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}.$

6.35. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x^2}}.$

6.36. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx.$

6.37. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}dx.$

Знайти первісну, застосовуючи метод інтегрування частинами:

6.38. $\int x\ln x dx.$

6.39. $\int (x-7)\sin x dx.$

6.40. $\int (1-3x)\cos 2x dx.$

6.41. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx.$

6.42. $\int (4-x)e^{-3x}dx.$

6.43. $\int \ln\left(1+x^2\right)dx.$

6.44. $\int x\,arctgx dx.$

6.45. $\int x^2 e^{-2x}dx.$

6.46. $\int e^x \sin x dx.$

6.47. $\int \sqrt{4+x^2}dx.$

Знайти інтеграли від квадратних тричленів:

6.48. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$

6.49. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+28}}.$

6.50. $\int \frac{6x-1}{x^2-4x+13}dx.$

6.51. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx.$

6.52. $\int \frac{3-5x}{4x^2+16x-9}dx.$

6.53. $\int \frac{7-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$

Знайти інтеграли від раціональних дробів:

6.54. $\int \frac{3x+8}{(x-2)(x+5)}dx.$

6.55. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx.$

6.56. $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}dx.$

6.57. $\int \frac{x^2-7x-6}{(x^2+9)(x-3)}dx.$

6.58. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}.$

6.59. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

6.60. $\int \frac{7x-15}{x(x^2-2x+5)}dx.$

6.61. $\int \frac{x^3-7x^2+8}{(x^2+4)x^2}dx.$

Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

6.62. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}.$

6.63. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}.$

6.64. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$

6.65. $\int \sin 2x\cos 4xdx.$

6.66. $\int \sin^3 xdx.$

6.67. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx.$

6.68. $\int \cos^4 xdx.$

6.69. $\int tg^4 xdx.$

6.70. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx.$

6.71. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{2+5tg^2 x}}.$

Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

6.72. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx.$

6.73. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}.$

6.74. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}.$

6.75. $\int \sqrt{\frac{x}{x+5}}\frac{dx}{x^2}.$

6.76. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$

6.77. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$

6.78. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(9+x^2)^5}}.$

6.79. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx.$

Обчислити визначені інтеграли за формулою Ньютона – Лейбніца:

6.80. $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx.$

6.81. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}.$

6.82. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx.$

6.83. $\int_0^4 \frac{dx}{25-x^2}.$

6.84. $\int_4^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}.$

6.85. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+10}.$

6.86. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$

6.87. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos 5x dx.$

Обчислити визначені інтеграли методом заміни змінної (підстановок):

6.88. $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx.$

6.89. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx.$

6.90. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}.$

6.91. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx.$

6.92. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

6.93. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx.$

6.94. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x}.$

6.95. $\int_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx.$

Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:

6.96. $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx$.

6.97 $\int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x dx$.

6.98. $\int_0^1 \arcsin x dx$.

6.99. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$.

6.100. $\int_{-1}^0 (2x+3) e^{-x} dx$.

6.101. $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

6.102. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$.

6.103. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

6.104. $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$.

6.105. $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.

6.106. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+9}$.

6.107. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$.

Знайти площі фігур, обмежених заданими лініями:

6.108. $y = 3 \cdot x^{-1}$; $x + y = 4$.

6.109. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

6.110. $y = \sqrt{1-x}$, $y = x + 1$, $y = 0$.

6.111. $y = x^2$, $xy = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

6.112. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

6.113. $\rho = 2a(1 + \cos \varphi)$.

Знайти довжину дуги заданої кривої:

6.114. $y = \ln \sin x$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

6.115. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le \frac{3}{4}$.

6.116. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$.

6.117. $\rho = 2 \sin \varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Знайти об’єми тіл, утворених обертанням навколо осі Ox фігур, обмежених заданими лініями:

6.118. $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$.

6.119. $y = 3\sin x,\ y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$.

6.120. $y = e^{1-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$.

6.121. $y = x^2,\ xy = 8,\ x = 4,\ y = 0$.

Розв’язати задачі:

6.122. Продуктивність праці робітника протягом дня задається функцією

$$f(t) = -0{,}0324t^2 + 0{,}4t + 0{,}2 \text{ (од./год.)},$$

де t – час від початку роботи, $0 \le t \le 8$.

Знайти функцію, яка характеризує обсяг продукції, та обчислити кількість продукції, виробленої протягом робочого дня.

6.123. Вартість перевезення вантажу на один кілометр задається функцією:

$$f(t) = \frac{25}{x + 3} \text{ (гр. од./км)}.$$

Визначити витрати на перевезення вантажу на відстань 15 км.

6.124. Функція граничного доходу має вигляд:

$$f(t) = 25 - 0{,}02x - 0{,}003x^2.$$

Знайти функцію доходу і рівняння попиту.

6.125. Знайти середнє значення витрат $C(x) = 3x^2 + 5x - 8$, виражених у грошових одиницях, якщо обсяг продукції змінюється від 0 до 4 гр. од. Визначити обсяг виробництва, при якому витрати досягають середнього значення.

6.126. Знайти середнє значення витрат на виробництво деякого обсягу продукції, якщо відомо, що витрати $f(x) = 3x^2 + 8x + 1$ змінюються залежно обсягу виробництва, який зростає від 0 до 3 (гр. од.).

6.127. Продуктивність праці характеризується функцією:

$$f(t) = \frac{4}{2t + 3} + 3.$$

Визначити обсяг продукції, виробленої робітником:

а) за третю годину робочого дня;

б) за перші три години робочого дня.

6.128. Визначити запас товару на складі, який накопичується протягом доби, якщо швидкість надходження товару визначається функцією:

$$f(t) = 3t^2 + 4t + 5,$$

де t – час від початку надходження товару.

6.129. Нехай річний прибуток складає 10 000 гр. од., відсоткова ставка дорівнює 5 %, відсотки нараховуються неперервно. Обчислити дисконтований (початковий) прибуток за 10 років.

6.130. Розподіл прибуткового податку в деякій країні визначається кривою Лоренца $y = f(x)$, де x – частка населення, що сплачує податки, y – частка загального податку.

Яку частку загального податку сплачують 15 % найбіднішого населення? Знайти коефіцієнт Джині, якщо крива Лоренца описується функцією:

а) $y = 0{,}83x^2 + 0{,}17x$;

б) $y = \frac{8}{15}x^2 + \frac{7}{15}x$.

Обчислити подвійні інтеграли по області, обмеженої заданими лініями:

6.131. $\iint\limits_D \sin(x - y)dxdy,\ y = x,\ y = 2x,\ x = \pi.$

6.132. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy,\quad y = x,\quad y = \frac{1}{x},\ x = 2.$

6.133. $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy,\quad y = x,\quad y = 2,\quad x = \ln 2.$

6.134. $\iint\limits_D xdxdy,\quad y = x + 2,\quad y = x^2.$

6.135. $\iint\limits_D ydxdy,\ y = \sqrt{x},\ y = -x,\ x - y = 2.$

Знайти площі плоских областей, обмежених заданими лініями:

6.136. $y = x^2,\ x + y = 6.$

6.137. $y = 3x^2,\ y = 4x - x^2.$

6.138. $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x = 4.$

6.139. $y^2 = -x,\ x = -4.$

Відповіді

6.12. $3x^3-8\sqrt[4]{x^5}+2\sqrt{x^3}+C$.

6.13. $-\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$.

6.14. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$.

6.15. $-x+\operatorname{tg}x+C$.

6.16. $-\cos 2x+C$.

6.17. $\dfrac{(1-3x)^{18}}{-54}+C$.

6.18. $\dfrac{\sqrt[4]{(12x-5)^7}}{21}+C$.

6.19. $\dfrac{1}{3}e^{3x-5}+C$.

6.20. $\dfrac{\ln|11-4x|}{-4}+C$.

6.21. $\ln\left(x^2-3x+8\right)+C$.

6.22. $\dfrac{-\operatorname{ctg}(7x-2)}{7}+C$.

6.23. $\dfrac{3}{2}\ln|1-2\cos x|+C$.

6.24. $\dfrac{3}{8}\ln\left(2x^4+3\right)+C$.

6.25. $\dfrac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|+C$.

6.26. $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\left(x^2+2\right)^2}+C$.

6.27. $\dfrac{1}{4}e^{4\sin x}+C$.

6.28. $\dfrac{1}{18}\ln^6(3x-2)+C$.

6.29. $\dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{e^{3x}+2}{e^{3x}-2}\right|+C$.

6.30. $e^{\operatorname{tg}x}+C$.

6.31. $\dfrac{1}{2}\sin\left(x^2-1\right)+C$.

6.32. $\dfrac{1}{12}\left(x^2+1\right)^6+C$.

6.33. $-\dfrac{1}{3\arcsin^3 x}+C$.

6.34. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}}+C$.

6.35. $\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{3+4x^2}\right|+C$.

6.36. $e^{\sqrt{2x-1}}+C$.

6.37. $\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

6.38. $\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$.

6.39. $(7-x)\cos x+\sin x+C$.

6.40. $\dfrac{1-3x}{2}\sin 2x-\dfrac{3\cos 2x}{4}+C$.

6.41. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$.

6.42. $\frac{3x-11}{9}e^{-3x}+C$.

6.43. $x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$.

6.44. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$.

6.45. $-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+C$.

6.46. $\frac{1}{2}e^x\left(\sin x-\cos x\right)+C$.

6.47. $\frac{x\sqrt{4+x^2}}{2}+2\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right|+C$.

6.48. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$.

6.49. $\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x+28}\right|+C$.

6.50. $3\ln\left(x^2-4x+13\right)+\frac{11}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C$.

6.51. $3\sqrt{x^2-4x+5}+C$.

6.52. $\frac{13}{20}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+9}\right|-\frac{5}{8}\ln\left|4x^2+16x-9\right|+C$.

6.53. $6\arcsin\frac{x-1}{2}+\sqrt{3+2x-x^2}+C$.

6.54. $2\ln\left|x-2\right|+\ln\left|x+5\right|+C$.

6.55. $4\ln\left|x-1\right|+5\ln\left|x-4\right|-7\ln\left|x+3\right|+C$.

6.56. $-\frac{3}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\ln\left|x+1\right|+\frac{3}{4}\ln\left|x-1\right|+C$.

6.57. $\ln\left(x^2+9\right)-\ln\left|x-3\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

6.58. $\ln\left|x\right|-\frac{1}{2}\ln\left|x+1\right|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

6.59. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln\left|x\right|+5\ln\left|x-2\right|-3\ln\left|x+2\right|+C$.

6.60. $\frac{3}{2}\ln\left(x^2-2x+5\right)-3\ln\left|x\right|+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

6.61. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{2}{x}+C$.

6.62. $C-\frac{1}{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

6.63. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x)+C$.

6.64. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+C$.

6.65. $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 6x}{12}+C$.

6.66. $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$.

6.67. $\frac{1}{7\cos^7 x}-\frac{1}{5\cos^5 x}+C$.

6.68. $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$.

6.69. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg}x+x+C$.

6.70. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x}+\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+C$.

6.71. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}x+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\frac{2}{3}}\right|+C$.

6.72. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$.

6.73. $\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)+C$.

6.74. $6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

6.75. $-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x+5}{x}}+C$.

6.76. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C$.

6.77. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C$.

6.78. $\frac{x^3}{27\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}+C$.

6.79. $C-\frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^5}}{45x^5}$.

6.80. $\frac{17}{6}$.

6.81. $\frac{7}{32}$.

6.82. $\frac{2}{3}$.

6.83. $\frac{1}{10}\ln 9$.

6.84. $\frac{\pi}{6}$.

6.85. $\frac{\pi}{12}$.

6.86. $\frac{\pi}{6}$.

6.87. 0.

6.88. 9.

6.89. 2.

6.90. $\frac{1}{4}$.

6.91. $\frac{1}{4}$.

6.92. 2.

6.93. 1.

6.94. $\frac{1}{2}arctg2$.

6.95. $\frac{81}{8}\pi$.

6.96. 4.

6.97. $\frac{1}{9}$.

6.98. $\frac{\pi}{2}-1$.

6.99. $\frac{e^2-5}{e}$.

6.100. $3e-5$.

6.101. 1.

6.102. $\frac{1}{4}$.

6.103. Розб.

6.104. $\frac{1}{2}$.

6.105. Розб.

6.106. $\frac{\pi}{6}$.

6.107. 4. **6.108.** $4-3\ln 3$ (кв. од.).

6.109. 9 (кв. од.). **6.110.** $\frac{7}{6}$ (кв. од.).

6.111. $\frac{1}{3}+\ln 3$ (кв. од.). **6.112.** $\frac{3\pi a^2}{8}$ (кв. од.). **6.113.** $6\pi a^2$ (кв. од.).

6.114. $\frac{1}{2}\ln 3$ (од.). **6.115.** $\sqrt{2}$ (од). **6.116.** 8 (од.).

6.117. $\frac{2\pi}{3}$ (од.). **6.118.** $\frac{3\pi}{10}$ (куб. од.). **6.119.** $4\pi^2$ (куб. од.).

6.120. $\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$ (куб. од.). **6.121.** $\frac{112\pi}{5}$ (куб. од.).

6.122. $u(t)=-0{,}0108t^3+0{,}2t^2+0{,}2t$; 124 (од.).

6.123. 44,8 (гр. од.).

6.124. $u=25x-0{,}01x^2-0{,}001x^3$; $p=25-0{,}01x-0{,}001x^2$.

6.125. $f(c)=18$ (гр. од.), $x=2{,}23$ (*од.*).

6.126. 22 грн. **6.127. а)** $2\ln\frac{9}{7}+3$; **б)** $2\ln 3+9$.

6.128. 15 096 (од.). **6.129.** 78 694 (гр. од.).

6.130. а) $y(0{,}15)=0{,}0442$; $k=0{,}2766$;

б) $y(0{,}15)=0{,}082$; $k=0{,}1778$.

6.131. $-\pi$. **6.132.** $\frac{9}{4}$.

6.133. $\frac{(e^2-2)^2}{2}$. **6.134.** $\frac{9}{4}$.

6.135. $\frac{7}{3}$. **6.136.** $\frac{125}{6}$ (кв. од.).

6.137. $\frac{2}{3}$ (кв. од.). **6.138.** $\frac{16}{3}$ (кв. од.).

6.139. $\frac{32}{3}$ (кв. од.).

Розділ 7. Диференціальні рівняння

У більшості випадків закони, що керують тими чи іншими природними явищами, знаходять своє втілення у формі диференціальних рівнянь. Ісаак Ньютон, який вважається засновником математичного природознавства, розглядав дві задачі. У першій з них для заданої функції визначалась відповідна їй похідна. Отже, це задача диференціального числення. Друга задача передбачає, що за рівнянням, яке містить похідні деякої функції, визначають співвідношення між функцією та аргументом. Отже, у цьому випадку маємо задачу теорії звичайних диференціальних рівнянь. Своє відкриття у цій галузі Ньютон вважав таким важливим, що відомості про нього надав лише у зашифрованому вигляді. У перекладі зміст цього відкриття такий: «Розв'язувати диференціальні рівняння корисно».



Після вивчення даної теми ви зможете:

- Знати й розрізняти типи диференціальних рівнянь та методи їх розв'язання;
- розуміти поняття диференціальних рівнянь як інструменту розв'язання задач в економіці, обґрунтовувати доцільність їх застосування;
- вміти застосовувати диференціальні рівняння при опрацюванні різних моделей в економіці;
- вміти досліджувати економічну динаміку сучасних процесів на основі застосування диференціальних рівнянь;
- знати основні класичні моделі в економіці, що представлені у формі диференціальних рівнянь.

Глава 27. Диференціальні рівняння першого порядку: основні поняття

27.1. Основні поняття та означення

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що пов'язує невідому функцію однієї або кількох змінних, незалежні змінні та похідні (або диференціали) від функції різних порядків. Якщо функція, відносно якої

розглядається диференціальне рівняння, залежить лише від однієї змінної, то таке диференціальне рівняння називається ***звичайним***. Звичайне диференціальне рівняння зв'язує аргумент x, деяку невідому функцію $y = y(x)$ та її похідні має вигляд:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',...,\ y^{(n)}) = 0. \qquad (27.1)$$

Рівняння (27.1) називається ***рівнянням, що не розв'язане відносно старшої похідної***.

Досить часто зустрічаються диференціальні рівняння, в яких старша похідна $y^{(n)}$ виражена в явному вигляді як функція аргументу x, невідомої функції $y = y(x)$ та її похідних нижчих порядків:

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ y'',...,\ y^{(n-1)}). \qquad (27.2)$$

Рівняння виду (27.2) називається ***рівнянням, що розв'язане відносно старшої похідної***.

Якщо невідома функція є функцією кількох змінних, то диференціальне рівняння називається ***рівнянням у частинних похідних***. У цьому розділі розглядаються диференціальні рівняння для функції лише однієї змінної, тому далі термін «звичайне» стосовно диференціального рівняння ми опускатимемо.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної або диференціала, що в нього входить.

Отже, за означенням:

1) $y' + y \cdot x = x^2 + 1$ – диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної;

2) $y'' = e^{-x} + 3 \cdot x^2$ – диференціальне рівняння другого порядку, що розв'язане відносно похідної.

Задача про відшукання розв'язку диференціального рівняння називається задачею його інтегрування. ***Розв'язком диференціального рівняння*** n***-го порядку*** *на деякому інтервалі* називають n разів диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = \varphi(x)$, підстановка якої у рівняння перетворює його у тотожність на даному інтервалі. Графік розв'язку диференціального рівняння називається ***інтегральною кривою***. Рівняння (27.1), (27.2) мають безліч розв'язків, які утворюють ***сім'ю інтегральних кривих***. Розв'язати диференціальне рівняння означає знайти всі його розв'язки.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається n-параметрична сім'я функцій

$$y = \varphi(x, C_1, ..., C_n), \tag{27.3}$$

(параметри $C_1, C_2, ..., C_n$ цієї сім'ї називаються ***довільними сталими***), якщо кожна функція з цієї сім'ї є розв'язком рівняння (27.1), і навпаки, кожен розв'язок рівняння можна задати формулою (27.3), зафіксувавши відповідним чином значення довільних сталих.

Якщо загальний розв'язок отримано в неявному вигляді:

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0, \tag{27.4}$$

то він називається ***загальним інтегралом рівняння***.

Частинним розв'язком рівняння називається розв'язок, який отримують із загального, якщо довільним сталим надати певних числових значень.

Ми вже розглядали задачу про визначення первісної за її похідною. Рівняння

$$y' = f(x)$$

можна розглядати як диференціальне рівняння, яке розв'язане відносно похідної. Загальним розв'язком цього рівняння є множина первісних функції $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Дійсно, $\left(F(x) + C\right)' = f(x)$, отже, при підстановці будь-якої первісної вихідне рівняння перетворюється у тотожність.



Припустимо, що для деякого підприємства при виробництві A одиниць залежність граничної капіталоємності L праці від обсягу капіталу K описується функцією:

$$\frac{dL}{dK} = -\frac{1}{K^2}.$$

Визначимо функцію, що описує взаємозамінність праці і капіталу при сталому обсязі випуску продукції. Ця задача зводиться до визначення первісної за її відомою похідною. Отже,

$$L'_K = -\frac{A}{K^2} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{A}{K} + C, \quad \text{де } C - \text{довільна стала.}$$

27.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{27.5}$$

або рівняння

$$y' = f(x, y). \tag{27.6}$$

З рівняння (27.6) чітко видно, що тут $x-$ незалежна змінна, $y = y(x) -$ шукана функція від x. Інколи диференціальне рівняння першого порядку подається в диференціальній формі

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Така форма запису рівняння симетрична відносно змінних x і y, змінні входять у нього рівноправно. Можна вважати $y = y(x)$ невідомою функцією від незалежної змінної x, або $x = x(y) -$ невідомою функцією від незалежної змінної y.

Загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку залежить від однієї довільної сталої C і має вигляд:

$$y = \varphi(x, C). \tag{27.7}$$

Геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку полягає у наступному. Оскільки згідно з рівнянням (27.6) у кожній точці області D, у якій задана функція $f(x, y)$, визначається похідна першого порядку, тобто кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = \varphi(x, C)$, то говорять, що рівняння (27.6) задає поле напрямів в області D.

Загальному розв'язку (27.7) відповідає безліч інтегральних кривих. Для того щоб серед них виділити криву, яка проходить через певну точку, необхідно задати ***початкову умову*** у вигляді координат цієї точки: $y_0 = y(x_0)$. Задача відшукання розв'язку диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову, має назву ***задачі Коші***.

Розв'язок диференціального рівняння (27.7) може існувати не для будь-якої функції $f(x, y)$ і не за будь-якою початковою умовою.

Теорема 27.1 (*існування та єдиність розв'язку*). Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f'_y(x, y)$ неперервні в деякій області D і точка $(x_0, y_0) \in D$, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, що належить цій області і задовольняє початкову умову $y_0 = y(x_0)$.

Доведення цієї теореми виходить за межі навчальної програми.

Геометричний зміст теореми 27.1 полягає в тому, що існує лише одна інтегральна крива, що проходить через точку $(x_0, y_0) \in D$.

Для відшукання розв'язку задачі Коші потрібно у загальний розв'язок (27.7) диференціального рівняння підставити початкову умову та розв'язати рівняння $y_0 = \varphi(x_0, C)$ відносно сталої C. Тоді частинний розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ буде розв'язком задачі Коші.



Знайдемо розв'язок задачі Коші, якщо відомо, що функція $y = y(x)$ задовольняє диференціальне рівняння $y' = x$ та умову $y(2) = 4$.

Спочатку визначимо функцію, для якої похідна першого порядку дорівнює $y' = x$. Це функції вигляду $y = 0{,}5x^2 + C$, де C – довільна стала. Таким чином, ми знайшли загальний розв'язок диференціального рівняння, якому відповідає сім'я кривих (рис. 27.1).

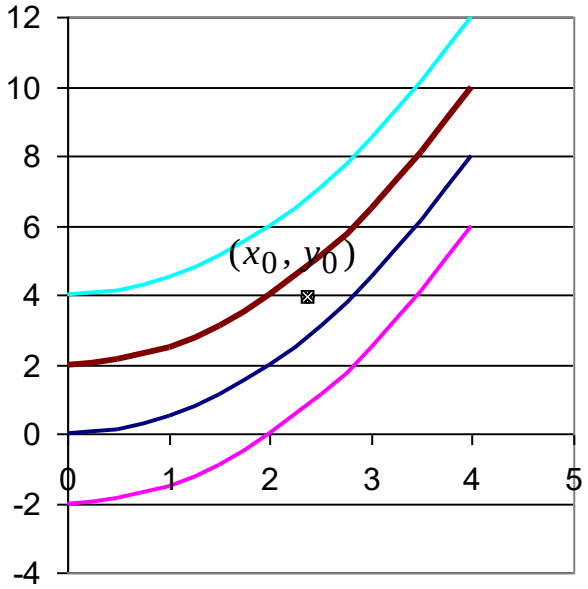


Рис. 27.1

Оскільки функція, яка може бути розв'язком задачі Коші, повинна задовольняти початкову умову

$$y(2) = 4,$$

то підставивши ці значення у вираз для функції, отримаємо, що $C = 2$. Отже, в сім'ї кривих, які описуються функціями $y = 0{,}5x^2 + C$, знайдено ту криву $y = 0{,}5x^2 + 2$, яка проходить через точку $(2; 4)$.

27.3. Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння вигляду:

$$M_1(x)N_1(y)dy + M_2(x)N_2(y)dx = 0 \qquad (27.8)$$

називається ***рівнянням з відокремлюваними змінними***. Цей тип рівнянь є найпростішим, але й дуже важливим, оскільки більш складні рівняння за допомогою спеціальних перетворень зводяться саме до такого типу.

Розглянемо алгоритм розв'язання диференціальних рівнянь цього типу.

1. Поділивши рівняння (27.8) на добуток $M_1(x)\cdot N_2(y)$ (за умови, що цей добуток не дорівнює нулю), одержимо рівняння, в якому коефіцієнт при диференціалі dy є функцією лише змінної y, а коефіцієнт при диференціалі dx – лише змінної x:

$$\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy + \frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx = 0. \qquad (27.9)$$

У рівнянні (27.9) змінні x та y відокремлені, воно називається ***рівнянням з відокремленими змінними***.

2. Проінтегрувавши ліву та праву частини рівняння (27.9), отримуємо:

$$\int \frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy + \int \frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx = C. \qquad (27.10)$$

Знаходячи інтеграли, одержуємо розв'язки рівняння у вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$ або $y = \varphi(x, C)$.

Точки площини, в яких умови теореми 27.1 порушуються, називаються ***особливими точками***. Розв'язки рівняння, за яких $M_1(x)\cdot N_2(y) = 0$, називаються ***особливими розв'язками***, бо їх не можна отримати із загального розв'язку ні при якому значенні довільної сталої.



Розглянемо рівняння $x\sqrt{y^2-1}\,dx + y\sqrt{x^2-1}\,dy = 0$.

Поділивши обидві частини рівняння на добуток $\sqrt{y^2-1}\sqrt{x^2-1} \neq 0$, одержуємо:

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{ydy}{\sqrt{y^2-1}} = 0.$$

Оскільки змінні відокремлені, то можна інтегрувати рівняння почленно:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2-1}} = \int 0dx,$$

отже, загальним інтегралом рівняння буде функція:

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} = C.$$

Окрім того, потрібно окремо розглянути випадок, коли $\sqrt{y^2-1}\sqrt{x^2-1}$ перетворюється в нуль. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функції $x = \pm 1$ та $y = \pm 1$ також є розв'язками рівняння, які потрібно приєднати до загального розв'язку.



Ще один приклад. Знайдемо розв'язок рівняння $y'(1-x) = y+1$.

Переходимо в рівнянні від похідної до диференціалів і відокремлюємо змінні. Одержуємо:

$$(1+y)dx + (x-1)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x-1} + \frac{dy}{y+1} = 0.$$

Після інтегрування отримуємо:

$$\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dy}{y+1} = C.$$

Оскільки константа C є довільною, то її можна записати у вигляді логарифма, що є зручним для подальших перетворень:

$$\ln|x-1| + \ln|y+1| = \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln\left|(x-1)(y+1)\right| = \ln|C|, C \neq 0.$$

Звідси отримуємо:

$$(x-1)(y+1) = C.$$

Розглянемо окремо випадок, коли знаменники перетворюються в нуль, тобто випадок $y = -1$. Безпосередньо переконуємося, що це розв'язок рівняння. Він, до речі, міститься у загальному розв'язку при $C = 0$. Випадок $x = 1$ розглядати не потрібно, оскільки в рівнянні відразу вважається, що x – незалежна змінна.

27.4. Однорідні диференціальні рівняння

Функція $f(x,y)$ називається ***однорідною виміру*** n, якщо для будь-якого $\lambda \neq 0$ справджується тотожність $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$.

Диференціальні рівняння виду

$$y' = f(x,y) \tag{27.11}$$

або

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

де $f(x,y)$ - неперервна однорідна функція нульового виміру, $M(x,y), N(x,y)$ – неперервні однорідні функції однакового виміру, називаються ***однорідними***.

Можна показати, що функцію $f(x,y)$ в рівнянні (27.11) можливо представити як функцію відношення своїх аргументів: $f(x,y) = \varphi(y/x)$. У цьому випадку рівняння (27.11) набуває вигляду:

$$y' = \varphi(y/x). \tag{27.12}$$

Це рівняння легко перетворити у рівняння з відокремлюваними змінними, якщо застосувати таку підстановку:

$$u = y/x.$$

Оскільки $y = ux$ та $y' = u + xu'$, то рівняння (27.12) приймає вигляд:

$$xu' + u = \varphi(u),$$

звідки

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{27.13}$$

Це означає, що в рівнянні (27.13) змінні відокремлено. Інтегруючи обидві частини (27.13), одержимо:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C.$$

За цим співвідношенням знайдемо загальний інтеграл рівняння: $F(u,C) = 0$. Повертаючись до вихідної змінної за допомогою підстановки $y = xu$, отримаємо розв’язок однорідного рівняння.

 Розв’яжемо рівняння

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$

Перевіримо, чи є це рівняння однорідним:

$$f(\lambda x,\ \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{2(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{\lambda^2 (x^2 + y^2)}{2\lambda^2 xy} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = f(x,\ y).$$

Отже, функція $f(x, y)$ є однорідною нульового виміру, а диференціальне рівняння є однорідним. Перетворимо його таким чином:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + (y/x)^2}{2y/x}.$$

Тепер зробимо підстановку $y/x = u$, $y = ux$ та $y' = u + xu'$:

$$xu' = \frac{1 + u^2}{2u} - u \quad \Rightarrow \quad \frac{2udu}{1 - u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$-\ln\left|1 - u^2\right| = \ln\left|C_1 x\right| \quad \Rightarrow \quad C_1 x = 1/(1 - u^2).$$

Повертаючись до вихідної змінної, отримуємо загальний інтеграл:

$$x^2 - y^2 = Cx,\ \text{де}\ C = \frac{1}{C_1}.$$

 Знайти частинний розв’язок рівняння $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$, який задовольняє початкову умову $y(2) = \pi$.

Спочатку знайдемо загальний розв’язок рівняння. Оскільки права частина рівняння є функцією відношення $\frac{y}{x}$, рівняння є однорідним. Введемо нову змінну $y/x = u$, тоді $y = ux$ та $y' = u + xu'$. Підставляючи одержані співвідношення в вихідне рівняння, маємо:

$$u + xu' = u + \operatorname{tg} u \quad \Rightarrow \quad ctgu \cdot du = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln C;\ C > 0.$$

Тепер, зробивши обернену підстановку, маємо:

$$\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = \ln|Cx|.$$

Таким чином, ми отримали загальний інтеграл рівняння:

$$\sin\frac{y}{x} = Cx,\ \text{де}\ C \in R.$$

Тепер скористаємось початковою умовою:

$$\sin\frac{\pi}{2} = C \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad C = 0{,}5.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\sin\frac{y}{x} = 0{,}5 \cdot x.$$

До ***однорідних*** рівнянь зводяться рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}, \tag{27.14}$$

де a, b, c, a_1, b_1, c_1 – задані сталі.

Якщо $c = c_1 = 0$, то (27.14) є однорідним, якщо $c \neq 0$ або $c_1 \neq 0$, то роблять заміну $x = u + \alpha,\ y = v + \beta,$ де α, β – деякі сталі. Враховуючи співвідношення $dx = du,\ dy = dv,\ y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$, одержимо (27.14) у вигляді:

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv + a\alpha + b\beta + c}{a_1 u + b_1 v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}. \tag{27.15}$$

Сталі α, β підбирають так, щоб у лінійних функціях чисельника і знаменника (27.15) зникли вільні члени, тобто щоб пара (α, β) була розв'язком системи

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0. \end{cases} \tag{27.16}$$

Тоді рівняння (27.15) стає однорідним:

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv}{a_1u + b_1v}. \tag{27.17}$$

Розв'язавши рівняння (27.17), повертаються до змінних x, y.

Якщо система (27.16) несумісна, тобто $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda \neq \frac{c_1}{c}$, то $a_1 = \lambda a,\ b_1 = \lambda b$, звідки

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}.$$

Тоді за допомогою підстановки $z = ax + by$ рівняння зводять до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно, враховуючи рівність $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$, одержуємо:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b(z + c)}{\lambda z + c_1} + a.$$

Той самий підхід можна застосовувати до інтегрування рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

де f – деяка неперервна функція.



Розв'яжемо диференціальне рівняння $y' = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$.

Це рівняння виду (27.14), в якому $c = -3$, а $c_1 = -1$.

Отже, запропоноване рівняння зводиться до однорідного, тому робимо заміну $x = u + \alpha,\ y = v + \beta$. Сталі α, β визначаємо як розв'язок системи

$$\begin{cases}\alpha+\beta-3=0,\\ \alpha-\beta-1=0,\end{cases}$$

звідки $\alpha=2, \beta=1$ та $x=u+2,\ y=v+1$.

У нових змінних рівняння стає однорідним і набуває вигляду $\dfrac{dv}{du}=\dfrac{u+v}{u-v}$.

Робимо заміну $v=tu,\ \dfrac{dv}{du}=t+u\dfrac{dt}{du}$, яка приводить до

$$t+u\frac{dt}{du}=\frac{1+t}{1-t},\ \text{або}\ u\frac{dt}{du}=\frac{1+t^2}{1-t}.$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо рівняння:

$$\frac{1-t}{1+t^2}dt=\frac{du}{u};\qquad \operatorname{arctg}t-0,5\ln(1+t^2)=\ln|u|+\ln|C|,\ C\neq 0;$$

$$\operatorname{arctg}t=\ln\left(|Cu|\sqrt{1+t^2}\right).$$

Повертаємось до змінних u, v, а потім до x, y:

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{u}=\ln\left(|C|\sqrt{u^2+v^2}\right);\qquad \operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}=\ln\left(|C|\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\right).$$

Останнє співвідношення є загальним інтегралом заданого диференціального рівняння.

27.5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке є лінійним відносно невідомої функції та її похідної, тобто рівняння виду:

$$y'+p(x)y=g(x), \tag{27.18}$$

де $p(x)$ та $g(x)$ – задані неперервні на деякому проміжку функції від x (вони також можуть бути сталими). Якщо $g(x)\equiv 0$ то рівняння

$$y'+p(x)y=0$$

називається ***лінійним однорідним***.

Існує декілька методів інтегрування таких рівнянь.

1. Метод Бернуллі. Даний метод полягає в наступному: шукатимемо розв'язок рівняння у вигляді добутку двох невідомих функцій:

$$y = u(x)v(x).$$

Диференціюючи останнє співвідношення, дістанемо

$$y' = u'v + uv'.$$

Таким чином, вихідне рівняння (27.18) набуває вигляду:

$$u'v + (v' + p(x)v)u = g(x). \qquad (27.19)$$

Зауважимо, що одну з функцій $u(x)$ або $v(x)$ можна обирати довільним чином, тому функцію $v(x)$ підберемо так, щоб множник при u в рівнянні (27.19) перетворився в нуль. Тоді отримаємо

$$\begin{cases} v' + p(x) \cdot v = 0; \\ u'v = g(x). \end{cases} \qquad (27.20)$$

Обидва рівняння системи (27.20) є рівняннями з відокремлюваними змінними.

Інтегруючи перше рівняння системи, знайдемо функцію $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -p(x)dx.$$

Нагадаємо, що нас цікавить будь-який частинний розв'язок одержаного рівняння, отже,

$$\ln|v| = -\int p(x)dx \quad \Rightarrow \quad v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Підставляючи знайдений розв'язок $v(x)$ у друге рівняння системи (27.20), отримаємо:

$$\frac{du}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} \quad \Rightarrow \quad du = g(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Звідси

$$u(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Таким чином, загальний розв'язок лінійного рівняння (27.18) має вигляд:

$$y(x)=u(x)v(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right). \qquad (27.21)$$

2. Метод варіації довільної сталої (***метод Лагранжа***). Суть методу полягає у тому, що за загальним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку, в якому припускають, що $C=C(x)$, знаходять розв'язок вихідного рівняння.

Отже, за методом Лагранжа спочатку розв'язують лінійне однорідне рівняння

$$y'+p(x)y=0, \qquad (27.22)$$

яке є рівнянням з відокремлюваними змінними, тому при $y\neq 0$ маємо:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx; \qquad \ln|y|=-\int p(x)dx+\ln|C|;$$

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}. \qquad (27.23)$$

Функція (27.23) є загальним розв'язком (27.22), причому частинний розв'язок $y=0$ міститься у ньому при $C=0$.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y=C(x)e^{-\int p(x)dx}, \qquad (27.24)$$

де $C(x)$ – невідома диференційовна функція. Диференціюючи (27.24), дістанемо:

$$y'=C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Тоді (27.18) набуде вигляду:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=g(x),$$

звідки $$C'(x)=g(x)e^{\int p(x)dx},$$

або $$C(x)=\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд:

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx, \qquad (27.25)$$

де перший доданок є загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння, а другий – частинним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння.



Розглянемо обидва методи на прикладі. Знайдемо розв'язок рівняння $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x$.

За методом Бернуллі застосовуємо підстановку $y = uv$, де u і v – функції від x, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y і y' у вихідне рівняння, одержуємо:

$$u'v + uv' - uv\,\mathrm{tg}\,x = \cos x.$$

Згрупуємо члени, що містять u, і винесемо u за дужки, а саме:

$$u'v + u\left(v' - v\,\mathrm{tg}\,x\right) = \cos x.$$

Отже,

$$\begin{cases} v' - vtgx = 0; \\ u'v = \cos x. \end{cases}$$

За першим рівнянням системи знаходимо функцію v, для чого відокремлюємо змінні:

$$\frac{dv}{dx} = v\,\mathrm{tg}\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \mathrm{tg}\,x dx$$

і інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \mathrm{tg}\,x dx.$$

Отримуємо частинний розв’язок:

$$\ln|v| = -\ln|\cos x| \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|\cos x|^{-1} \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\cos x}.$$

Знайдену функцію v підставляємо в друге рівняння системи і отримуємо диференціальне рівняння відносно функції u:

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = \cos x \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = \cos^2 x.$$

Отже,

$$du = \cos^2 x dx.$$

Інтегруємо

$$\int du = \int \cos^2 x dx + C \qquad \Rightarrow \qquad u = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx + C.$$

Звідси отримуємо:

$$u = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Таким чином, шуканий загальний розв'язок має вигляд

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C\right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Розв'яжемо цей же приклад методом варіації довільної сталої.

Спочатку складаємо однорідне рівняння, яке відповідає вихідному:

$$y' - ytgx = 0$$

і знаходимо його загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{y} = tgxdx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln|C| \Rightarrow \; y = \frac{C}{\cos x}.$$

Припустимо, що $C = C(x)$. Тоді, підставивши у вихідне рівняння $y' = \dfrac{C'(x)\cos x - C(x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$, дістанемо:

$$\frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\operatorname{tg} x = \cos x.$$

Приводимо подібні члени й отримуємо:

$$\frac{C'(x)}{\cos x} = \cos x \quad \Rightarrow \quad dC = \cos^2 x \cdot dx.$$

Ми вже знаходили функцію за таким диференціалом, отже, можемо записати:

$$C(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Підставляючи замість довільної сталої у загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння знайдене значення $C = C(x)$, матимемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння:

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C\right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Зрозуміло, що ми отримали той самий розв'язок.



Розв’яжемо рівняння

$$\left(y^3 - xy\right)y' = 1.$$

Дане рівняння лінійне, але відносно функції $x = x(y)$. Запишемо його інакше:

$$\left(y^3 - xy\right)\frac{dy}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^3 - xy = \frac{dx}{dy}.$$

Отже, маємо: $x' + xy = y^3$. Ми отримали лінійне рівняння відносно $x(y)$. За методом Бернуллі його розв'язок шукаємо у вигляді $x = u\left(y\right)\cdot v\left(y\right)$, звідки $x' = u'v + uv'$. Підставляємо у рівняння x та x' і одержуємо:

$$u'v + uv' + uvy = y^3.$$

Групуємо в лівій частині другий і третій доданки і виносимо за дужки u:

$$u'v + u\left(v' + vy\right) = y^3.$$

Від рівняння переходимо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} v' + vy = 0, \\ u'v = y^3. \end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо v.

$$v' + vy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dy} = -vy,$$

звідки

$$\frac{dv}{v} = -ydy.$$

Інтегруючи одержане рівняння, маємо:

$$\ln\left|v\right| = -\frac{y^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Знаючи функцію v, з другого рівняння системи знайдемо u:

$$u'e^{-\frac{y^2}{2}} = y^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy}e^{-\frac{y^2}{2}} = y^3.$$

Отже, у диференціалах записуємо так:

$$du = e^{\frac{y^2}{2}} y^3 dy .$$

Інтегруємо це рівняння:

$$u = \int e^{0,5y^2} y^3 dy.$$

Знайдемо інтеграл, застосувавши метод інтегрування частинами:

$$\int e^{0,5y^2} y^3 dy = \begin{vmatrix} u = y^2 & du = 2ydy \\ dv = e^{0,5y^2} \cdot y \cdot dy & v = e^{0,5y^2} \end{vmatrix} = e^{0,5y^2} \cdot y^2 - 2\int e^{0,5y^2} \cdot ydy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{0,5y^2} \cdot y^3 \cdot dy = e^{0,5y^2} \cdot y^2 - 2e^{0,5y^2} + C.$$

Отже, остаточно $u = y^2 e^{\frac{y^2}{2}} - 2e^{\frac{y^2}{2}} + C$.

Таким чином,

$$x = \left(y^2 e^{\frac{y^2}{2}} - 2e^{\frac{y^2}{2}} + C \right) e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = y^2 - 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Рівняння Бернуллі. Диференціальне рівняння виду:

$$y' + p(x)\, y = y^n g(x), \text{ де } n \in R,\ n \neq 0, n \neq 1, \tag{27.26}$$

називається ***рівнянням Бернуллі.*** У цьому рівнянні $p(x)$ та $g(x)$ – деякі неперервні функції, які можуть бути і сталими. Рівняння Бернуллі є нелінійним рівнянням, оскільки невідома функція $y(x)$ в праву частину рівняння входить нелінійно.

Рівняння Бернуллі можна розв’язати зведенням його до лінійного, якщо застосувати заміну змінної.

Зауважимо, що для додатних n функція $y = 0$ є частинним розв’язком рівняння (27.26).

Далі, вважаючи $y \neq 0$, поділимо обидві частини рівняння (27.26) на y^n, тоді одержимо:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\, y^{1-n} = g(x). \tag{27.27}$$

Введемо нову функцію

$$z(x) = y^{1-n}. \qquad (27.28)$$

Для першої похідної цієї функції маємо:

$$z' = (1-n)\, y^{-n}\, y'.$$

Підставимо одержані співвідношення у (27.27) і отримаємо лінійне диференціальне рівняння відносно функції z, а саме:

$$z' + (1-n) z\, p(x) = (1-n) g(x),$$

алгоритм розв'язання якого нам вже відомий.



Знайдемо розв'язок рівняння $y' + \frac{y}{x} = -xy^2.$

Це рівняння Бернуллі. Приводимо його до лінійного, застосовуючи заміну (27.28). У нашому прикладі $n = 2$, тому

$$z = y^{-1} \Rightarrow \quad z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y' \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = -z'.$$

Рівняння приймає вигляд:

$$y' + \frac{y}{x} = -xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = -x \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{z}{x} = x.$$

Отже, ми отримали лінійне рівняння відносно z. Розв'язок його шукаємо у вигляді $z = uv$, звідси $z' = u'v + uv'$. Підставляючи z і z' у рівняння, отримуємо:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x \quad \Rightarrow \quad u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = x \Rightarrow \begin{cases} v' - \frac{v}{x} = 0, \\ u'v = x. \end{cases}$$

З першого рівняння знайдемо v.

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}.$$

Відокремлюємо змінні й інтегруємо рівняння:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}.$$

Отже, $\ln|v| = \ln|x|$, тобто $v = x$.

З другого рівняння системи знайдемо u:

$$u'v = x, \text{ звідки } \quad u'x = x, \text{ або } \frac{du}{dx} = 1 \;\Rightarrow\; du = dx.$$

Після інтегрування отримуємо:

$$u = x + C.$$

Таким чином, $z = (x + C)x$.

Повертаємося до змінної $y = \frac{1}{z}$:

$$y = \frac{1}{x(C + x)} = \frac{1}{Cx + x^2}.$$

27.6. Рівняння у повних диференціалах

Диференціальне рівняння виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{27.29}$$

називається ***рівнянням у повних диференціалах***, якщо $M(x, y), N(x, y), \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ – неперервні функції, причому

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{27.30}$$

Назва рівняння пояснюється тим, що при виконанні умови (27.30) ліва частина рівняння (27.29) є повним диференціалом, тобто існує така диференційов-на функція $U(x, y)$, $(x, y) \in D$, що має місце рівність

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y), \tag{27.31}$$

Доведемо, що (27.30) є необхідною та достатньою умовою (27.31).

Дійсно, нехай виконується (27.31), тоді $M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$, $N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$, звідки $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$.

Згідно з неперервністю мішаних частинних похідних маємо $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$, тому $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Нехай виконується умова (27.30). Побудуємо деяку диференційовну функцію $U(x, y)$, таку, щоб мало місце (27.31) , тобто $M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$, $N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$.

Із першої рівності маємо:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y), \qquad (27.32)$$

де x_0 – абсциса будь-якої точки з області існування розв'язку рівняння. При інтегруванні за змінною x змінна y вважається параметром, тому і довільна стала інтегрування має залежати від y. Підберемо функцію $\varphi(y)$ так, щоб виконувалось $N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$. Для цього диференціюємо (27.32) за змінною y:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y) \right) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y),$$

тоді з урахуванням (27.30):

$$N(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y); \qquad N(x, y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y);$$

$$\varphi'(y) = N(x_0, y); \qquad \varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + C_1.$$

Отже, шукана функція матиме вигляд

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + C_1, \qquad (27.33)$$

де (x_0, y_0) – деяка точка з області існування розв'язку диференціального рівняння. Нагадаємо, що (27.33) – це функція, диференціал якої дорівнює лівій частині рівняння (27.29), тому загальний інтеграл цього рівняння має вигляд $U(x, y) = C$, або

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C. \qquad (27.34)$$

Зауважимо, що при практичному використанні формул (27.32) – (27.34), можна обчислювати невизначені інтеграли замість визначених.

Якщо умова (27.30) не виконується, то інколи вдається підібрати таку функцію $\mu(x,y)$, після множення на яку обох частин рівняння (27.29) ліва частина цього рівняння стає повним диференціалом. Функція $\mu(x,y)$ називається ***інтегрувальним множником*** рівняння.

Помножимо (27.29) на $\mu(x,y)$:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0.$$

Це рівняння буде рівнянням у повних диференціалах, якщо $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, тобто

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}; \qquad M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right);$$

$$M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} - N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \qquad (27.35)$$

Рівняння (27.35) є диференціальним рівнянням у частинних похідних відносно невідомої функції $\mu(x,y)$. Доведено, що за певних умов це рівняння має безліч розв'язків, тобто $\mu(x,y)$ існує, але у загальному випадку задача (27.35) складніша, ніж задача (27.29).

Розглянемо частинні випадки, коли рівняння (27.35) спрощується. Нехай інтегрувальний множник залежить лише від y, тобто $\mu(x,y) = \mu(y)$, тоді $\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = 0$, а співвідношення (27.35) набуде вигляду

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{M}. \qquad (27.36)$$

Якщо права частина рівності (27.36) не залежить від змінної x, то

$$\mu(y) = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).\frac{1}{M}dy}. \qquad (27.37)$$

Аналогічно, якщо $\mu(x,y) = \mu(x)$, то інтегрувальний множник обчислюється за формулою:

$$\mu(y) = e^{-\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{N}dy}. \qquad (27.38)$$



Розв’яжемо диференціальне рівняння

$$\left(2x+3x^2y\right)dx+\left(x^3-3y^2\right)dy=0.$$

Дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах, бо виконується умова (27.30), дійсно:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+3x^2y\right)=3x^2; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3-3y^2\right)=3x^2.$$

Застосуємо формулу (27.32) для відшукання функції $U(x,y)$:

$$U(x,y)=\int\left(2x+3x^2y\right)dx+\varphi(y)=x^2+x^3y+\varphi(y),$$

звідки згідно з умовою $N(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}$ дістанемо:

$$x^3+\varphi'(y)=x^3-3y^2; \qquad \varphi'(y)=-3y^2; \qquad \varphi(y)=-y^3+C_1.$$

Отже, $U(x,y)=x^2+x^3y-y^3+C_1$,

тому загальним інтегралом рівняння є

$$x^2+x^3y-y^3=C.$$



Розв’яжемо диференціальне рівняння

$$\left(y+xy^2\right)dx-xdy=0.$$

Для даного рівняння не виконується умова (27.30), бо

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y+xy^2\right)=1+2xy; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(-x\right)=-1.$$

Складемо вираз, що є правою частиною співвідношення (27.36):

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{M}=\frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}=-\frac{2}{y}\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y},$$

звідки маємо

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -\frac{2}{y};\ \ \ln|\mu| = -2\ln|Cy|.$$

Вибираємо $C = 1$ й одержуємо шуканий інтегрувальний множник $\mu = \frac{1}{y^2}$.

Помножимо вихідне рівняння на $\mu = \frac{1}{y^2}$:

$$\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0.$$

Для цього рівняння $M(x,y) = \frac{1}{y} + x,\ N(x,y) = -\frac{x}{y^2}$, а значить умова повного диференціала (27.30) виконується, тому

$$U(x,y) = \int\left(\frac{1}{y} + x\right)dx + \varphi(y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y).$$

Згідно з умовою $N(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$ маємо:

$$-\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x}{y^2};\quad \varphi'(y) = 0;\ \ \varphi(y) = C_1.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$.



Ключові терміни

Звичайне диференціальне рівняння; рівняння, що розв’язане відносно похідної; порядок диференціального рівняння; рівняння у частинних похідних; загальний розв’язок диференціального рівняння; загальний інтеграл; геометричне тлумачення диференціального рівняння першого порядку; інтегральна крива; сім'я інтегральних кривих; частинний розв’язок диференціального рівняння; особливі розв’язки; початкова умова; задача Коші; рівняння з відокремлюваними змінними; особливі точки; однорідне рівняння першого порядку; лінійне диференціальне рівняння першого порядку; метод Бернуллі; метод варіації довільної сталої; рівняння Бернуллі; рівняння в повних диференціалах.



Запитання для самоперевірки

1. Який вигляд має диференціальне рівняння n-го порядку?

2. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку?

3. Що називається частинним розв'язком?

4. Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку. Дайте її геометричну інтерпретацію.

5. Які види диференціальних рівнянь першого порядку ви знаєте?

6. Який вид має диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними?

7. Що таке особливі точки? Який розв'язок називається особливим?

8. Яке диференціальне рівняння називається однорідним? Наведіть спосіб його інтегрування.

9. Яку заміну треба зробити для розв'язання однорідних рівнянь?

10. Яке рівняння першого порядку називається лінійним?

11. Як розв'язати лінійне диференціальне рівняння за методом Бернуллі?

12. У чому полягає метод варіації довільної сталої?

13. Як можна звести рівняння Бернуллі до лінійного диференціального рівняння?

14. Як інтегрується диференціальне рівняння в повних диференціалах?

Глава 28. Диференціальні рівняння вищих порядків

28.1. Диференціальні рівняння вищих порядків. Основні поняття

Диференціальним рівнянням порядку n (або n-го порядку) називається рівняння, яке пов'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідні $y', y'', ..., y^{(n)}$, тобто рівняння виду

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0. \qquad (28.1)$$

Якщо (28.1) можна розв’язати відносно похідної $y^{(n)}$, то маємо диференціальне рівняння n-го порядку у вигляді:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right). \qquad (28.2)$$

Розв'язком диференціального рівняння n-го порядку на множині D називається n разів диференційовна на цій множині функція $y=\varphi(x)$, підстановка якої, а також її похідних у диференціальне рівняння, перетворює його в тотожність за змінною x на D.

Задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку полягає у тому, щоб знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \qquad (28.3)$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається функція

$$y=\varphi\left(x,C_1,C_2,...,C_n\right), \qquad (28.4)$$

що залежить від n довільних сталих $C_1,C_2,...,C_n$ і задовольняє такі умови:

1) функція $y=\varphi\left(x,C_1,C_2,...,C_n\right)$ є розв'язком диференціального рівняння при будь-яких значеннях сталих $C_1,C_2,...,C_n$ з деякої множини;

2) для довільних початкових умов (28.3) можна підібрати такі сталі $C_1^0,C_2^0,...,C_n^0$, при яких розв'язок $y=\varphi\left(x,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0\right)$ буде задовольняти початкові умови.

Частинним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається функція

$$y=\varphi\left(x,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0\right), \qquad (28.5)$$

яка одержується із загального розв'язку, якщо вільним сталим надати певні числові значення.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено у неявній формі, тобто у вигляді рівняння $\Phi\left(x,y,C_1,C_2,...,C_n\right)=0$, то такий розв'язок називається загальним інтегралом диференціального рівняння. Рівність $\Phi\left(x,y,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0\right)=0$ називають частинним інтегралом диференціального рівняння.

Теорема Коші (достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші). Якщо в диференціальному рівнянні n-го порядку (28.2) функція $f\left(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}\right)$ неперервна та має неперервні частинні похідні за

змінними $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ в деякій області D, що містить точку $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Зауважимо, що на відміну від диференціального рівняння першого порядку, через кожну точку (x_0, y_0) площини xOy буде проходити не одна, а безліч інтегральних кривих диференціального рівняння n-го порядку.

Дійсно, нехай задано диференціальне рівняння другого порядку $y'' = f\left(x, y, y'\right)$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$. Зафіксуємо (x_0, y_0), тоді через цю точку буде проходити єдина інтегральна крива з кутом нахилу дотичної до осі абсцис α, до того ж $\operatorname{tg}\alpha = y_0'$. Якщо змінювати y_0' при незмінних (x_0, y_0), то одержимо безліч інтегральних кривих з різними кутами нахилу, що проходять через задану точку.

28.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

Серед диференціальних рівнянь n-го порядку розрізняють рівняння, що припускають зниження порядку (їх розв'язання зводиться до розв'язання диференціальних рівнянь порядку на одиницю нижче від вихідного) і рівняння, порядок яких не можна знизити, тому вони вимагають застосування спеціальних методів для їх розв'язання.

Розглянемо найпростіші випадки диференціальних рівнянь n-го порядку, що припускають зниження порядку.

Диференціальне рівняння n-го порядку обов'язково повинно містити похідну n-го порядку, оскільки саме вона визначає порядок даного рівняння, а наявність інших елементів – функції або незалежної змінної – не є обов'язковою. Якщо у диференціальному рівнянні який-небудь з цих елементів відсутній, то ***рівняння припускає зниження порядку***. Спосіб, за допомогою якого здійснюється зниження порядку, залежить від того, який саме елемент у цьому рівнянні відсутній.

1. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x). \qquad (28.6)$$

Загальний розв’язок цього рівняння знаходиться n-кратним інтегруванням початкового рівняння.



Знайдемо розв’язок рівняння $y'' = \cos x$. Оскільки $(y')' = \cos x$, тобто $d(y') = \cos x dx$, то проінтегрувавши обидві частини цього рівняння, отримаємо:

$$y' = \sin x + C_1.$$

Звідки $dy = (\sin x + C_1)\,dx$. Проінтегрувавши обидві частини одержаного виразу, дістанемо загальний розв’язок вихідного рівняння:

$$y(x) = -\cos x + C_1 x + C_2.$$



Розглянемо задачу Коші. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' = 3x^2$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Спочатку шукаємо загальний розв'язок рівняння $y'' = 3x^2$. Для цього треба послідовно проінтегрувати дане рівняння. Отже, після першого інтегрування отримуємо:

$$y' = \int 3x^2 dx = x^3 + C_1.$$

Звідси визначаємо диференціал функції $dy = \left(x^3 + C_1\right)dx$. Інтегруючи ще раз, маємо загальний розв’язок рівняння:

$$\int dy = \int \left(x^3 + C_1\right)dx + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2.$$

Тепер треба знайти C_1 і C_2, враховуючи початкові умови.

За умовою $y(0) = 2$ і $y'(0) = 1$, тоді:

$$\begin{cases} 2 = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2, \\ 1 = 0 + C_1. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Таким чином, частинний розв'язок: $y = \frac{x^4}{4} + x + 2$.

2. Рівняння, що не містить шуканої функції ($k \geq 1$). Тобто рівняння:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0. \qquad (28.7)$$

Порядок такого рівняння можна знизити, якщо ввести нову функцію

$$p(x) = y^{(k)}(x), \qquad (28.8)$$

тоді
$$y^{(k+1)} = p', ..., y^{(n)} = p^{(n-k)}. \qquad (28.9)$$

Таким чином, вихідне рівняння зводиться до рівняння порядку $n-k$ відносно невідомої функції $p(x)$:

$$F\left(x, p, p', ..., p^{(n-k)}\right) = 0. \qquad (28.10)$$



Розв'язати рівняння: $y'' = x - \frac{y'}{x}$.

Оскільки рівняння не містить невідомої функції $y(x)$, то для його розв'язання використаємо підстановку (28.8) $y' = p(x)$, тоді $y'' = p'(x)$. Одержимо лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $p(x)$:

$$p'(x) + \frac{p(x)}{x} = x.$$

Для розв'язання цього рівняння зробимо підстановку: $p(x) = u(x)v(x)$.

Тоді рівняння набуває вигляду:

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x.$$

Перейдемо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0; \\ u'v = x. \end{cases}$$

З першого рівняння системи отримуємо:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи ліву та праву частини останнього співвідношення, знаходимо: $v = x^{-1}$. Відносно невідомої функції $u(x)$ маємо диференціальне рівняння:

$$\frac{u'}{x} = x \;\Rightarrow\; du = x^2 dx \;\Rightarrow\; u(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1.$$

Отже, маємо функцію $p(x)$:

$$p(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

Оскільки $p(x) = \frac{dy}{dx}$, то

$$dy = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \right) dx.$$

Проінтегрувавши обидві частини останнього рівняння, отримаємо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y(x) = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

3. Рівняння, що не містить незалежної змінної:

$$F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0. \qquad (28.11)$$

Такі рівняння допускають пониження порядку на одиницю, якщо покласти

$$y'_x = p(y), \qquad (28.12)$$

де $p(y)$ – нова залежна змінна.

Дійсно, тоді

$$y''_x = \frac{dp}{dy} y'_x = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y'''_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy} p \right) = p''_y p^2 + \left(p'_y \right)^2 p \qquad (28.13)$$

і таке інше, а задане рівняння зводиться до диференціального рівняння

$$F_1\left(y, p, p', ..., p^{(n-1)}\right) = 0. \qquad (28.14)$$

Отже, одержане рівняння $-(n-1)$-го порядку відносно $p(y)$.

 Розв’язати рівняння

$$y''y = 1 + y'^2.$$

Оскільки рівняння не містить аргументу x у явному вигляді, то позначимо $y' = p(y)$. Тоді $y'' = p'(y)y' = p(y)p'(y)$. Підставивши ці вирази у вихідне рівняння, одержимо: $pp'y = 1 + p^2$ або

$$p\frac{dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}.$$

Звідси:

$$\frac{1}{2}\ln(1+p^2) = \ln|y| + \ln C_1 \;\Rightarrow\; 1 + p^2 = C_1^2 y^2 \;\Rightarrow\; p = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}.$$

Повернемось до вихідних змінних, враховуючи, що $p(y) = y'$:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx.$$

Інтегруючи обидві частини одержаного рівняння, отримаємо загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння:

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}\right| = \pm(x + C_2).$$

4. Рівняння, яке є однорідним відносно $y, y', ..., y^{(n)}$, а саме:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad (28.15)$$

якщо

$$F\left(x, \lambda y, \lambda y', ..., \lambda y^{(n)}\right) = \lambda^k F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right),\ k \in N.$$

Рівняння даного типу допускають зниження порядку на одиницю при заміні невідомої функції $y(x)$ на нову функцію $p(x) = \frac{y'}{y}$.

 Розв’язати диференціальне рівняння $3(y')^2 = 4yy'' + y^2$.

Рівняння є однорідним відносно y, y', y'', тому поділимо його на y^2, $y \neq 0$, у результаті одержимо рівняння у вигляді $3\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 4\frac{y''}{y} + 1.$

Зробимо заміну: $p(x) = \frac{y'}{y} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \Rightarrow \frac{y''}{y} = p' + p^2.$

Отже, з урахуванням заміни, одержимо вихідне рівняння у вигляді:

$$3p^2 = 4p' + 4p^2 + 1 \Rightarrow -4p' = 1 + p^2 \Rightarrow \frac{dp}{1+p^2} = -\frac{1}{4}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} p = C_1 - \frac{1}{4}x \Rightarrow p = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{1}{4}x\right),$$

або, повертаючись до функції $y(x)$, дістанемо:

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{1}{4}x\right) \Rightarrow \frac{dy}{y} = \operatorname{tg}(C_1 - \frac{1}{4}x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = 4\ln\left|\cos\left(C_1 - \frac{1}{4}x\right)\right| + \ln|C_2| \Rightarrow y = C_2\cos^4\left(C_1 - \frac{1}{4}x\right).$$

Зауважимо, що $y = 0$ є частинним розв'язком рівняння.

28.3. Однорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку **зі сталими коефіцієнтами** називається рівняння виду

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad (28.16)$$

де $a_0, a_1, ..., a_n$ – дійсні числа. Термін "лінійне" пов'язаний з тим, що рівняння (28.16) містить невідому функцію $y(x)$ і всі її похідні лише в першому степені.

Окремим випадком (28.16) є рівняння другого порядку:

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (28.17)$$

де коефіцієнти p та q – сталі.

Розглянемо властивості розв'язків рівняння (28.17).

Теорема 28.1. Якщо функція $y = y_1(x)$ є розв'язком рівняння (28.17), то і функція $y = Cy_1(x)$, де C – довільна стала, теж буде розв'язком цього рівняння.

Доведення. Оскільки функція $y = y_1$ є розв'язком рівняння (28.17), то звідси маємо:

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0.$$

Тепер підставимо у рівняння (28.17) функцію $y = Cy_1$. Одержимо:

$$Cy_1'' + Cpy_1' + Cqy_1 = C(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0,$$

а це і означає, що $y = Cy_1$ також є розв'язком рівняння (28.17).

Теорема 28.2. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками рівняння $y'' + py' + qy = 0$, то їх сума теж є розв'язком цього рівняння.

Доведення. Підставимо вираз $y = y_1 + y_2$ у вихідне рівняння і проведемо групування:

$$(y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) = (y_1'' + py_1' + qy_1) + (y_2'' + py_2' + qy_2) = 0.$$

Оскільки за умовою функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками рівняння, то їх сума $y = y_1 + y_2$ також є розв'язком рівняння.

Два розв'язки y_1 та y_2 називаються ***лінійно залежними*** на множині D, якщо їх відношення дорівнює сталому числу: $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, $\lambda = const$. У противному разі розв'язки y_1 і y_2 називаються ***лінійно незалежними:*** $\frac{y_1}{y_2} \neq \lambda$, $\lambda = const$.

Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ – деякі функції, то визначник

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 \qquad (28.18)$$

називається ***визначником Вронського (вронскіаном)*** даних функцій.

Теорема 28.3. Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ лінійно залежні на множині D, то їхній вронскіан на цій множині дорівнює нулю.

Доведення. Нехай $y_1(x) = \lambda y_2(x)$, $\lambda = const$, тоді $y_1' = \lambda y_2'$ та

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 28.4. *Я*кщо вронскіан $W(y_1, y_2)$ розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$ рівняння (28.17) не дорівнює нулю при деякому значенні незалежної змінної x_0 на множині D, то він не дорівнює нулю при жодному значенні x на цій множині.

Доведення. Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (28.17), тому мають місце рівності:

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0; \qquad y_2'' + py_2' + qy_2 = 0.$$

Віднімемо з другого рівняння, помноженого на y_1, перше рівняння, помножене на y_2, одержимо

$$\left(y_1 y_2'' - y_1'' y_2\right) + p\left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right) = 0.$$

Зауважимо, що $W'(y_1, y_2) = \left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$, тоді маємо диференціальне рівняння першого порядку відносно вронскіана:

$$W' + pW = 0.$$

Знайдемо його розв'язок, який задовольняє початкову умову $W(x_0) = W_0$. Якщо $W \neq 0$, то маємо:

$$\frac{dW}{W} = -pdx; \qquad \ln|W| = -px + \ln|C|; \qquad W = Ce^{-px}.$$

Враховуючи початкову умову, одержимо $C = W_0 e^{px_0}$ та

$$W = W_0 e^{px_0 - px}. \tag{28.19}$$

За умовою теореми $W_0 \neq 0$, тому з (28.19) випливає, що $W \neq 0$ для будь-якого $x \in D$.

Теорема 28.5. *Я*кщо розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$ рівняння (28.17) лінійно незалежні на D, то їхній вронскіан (28.18) не дорівнює нулю при жодному значенні $x \in D$.

Доведення теореми проводиться від супротивного.

Сукупність двох розв'язків рівняння (28.17), визначених і лінійно незалежних на X, називається ***фундаментальною системою розв'язків***.

Теорема 28.6. *Я*кщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ - фундаментальна система розв'язків рівняння (28.17), то

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (28.20)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, є його загальним розв'язком.

Дійсно, з властивостей розв'язків рівняння (28.17) випливає, що (28.20) є розв'язком рівняння (28.17). Доведемо, що для будь-яких початкових умов $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ можна підібрати значення сталих C_1, C_2 так, щоб відповідний частинний розв'язок $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ задовольняв початкові умови. Підставимо задані початкові умови в (28.20):

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0). \end{cases}$$

З одержаної системи можна визначити відповідні C_1, C_2, бо визначник системи не дорівнює нулю, тому що частинні розв'язки лінійно незалежні. Отже, частинний розв'язок, який одержується із загального розв'язку (28.20) при відповідних (знайдених) C_1, C_2, задовольняє початкові умови.

28.4. Відшукання загального розв'язку однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

28.4.1. Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння виду:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Зауважимо, що це рівняння не містить аргумент x у явному вигляді, отже, воно допускає зниження порядку завдяки введенню нової змінної. Однак розглянемо інший підхід, який доцільно буде застосовувати і при розв'язанні неоднорідних диференціальних рівнянь.

Будемо шукати частинний розв'язок рівняння (28.17) у вигляді показникової функції:

$$y = e^{kx}.$$

Знаходимо похідні від цієї функції:

$$y' = ke^{kx} \text{ та } y'' = k^2 e^{kx}$$

і підставляємо їх у рівняння:

$$k^2 e^{kx} + p \cdot ke^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Вважаючи, що $e^{kx} \neq 0$, після скорочення маємо рівняння відносно k

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{28.21}$$

яке називається ***характеристичним рівнянням*** даного однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Зауважимо, що для того, щоб одержати характеристичне рівняння (28.21), достатньо похідні y'', y' та функцію y в (28.17) замінити на відповідні степені величини k, розглядаючи при цьому функцію y як похідну нульового порядку.

Розв'язавши характеристичне рівняння, знайдемо значення k:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,. \tag{28.22}$$

Розглянемо різні випадки розв'язків характеристичного рівняння, від яких залежить вигляд частинного розв'язку диференціального рівняння.

1. Корені рівняння дійсні та різні. Якщо характеристичне рівняння має додатний дискримінант, тобто $\frac{p^2}{4} - q > 0$, то $k_1 \neq k_2$. У цьому випадку $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння, оскільки їх відношення не є сталою величиною. Тоді відповідно до теореми 28.6 загальний розв'язок рівняння матиме вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{28.23}$$



Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Це лінійне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо для нього характеристичне рівняння: $k^2 - k - 6 = 0$. Корені цього рівняння є дійсними і різними: $k_1 = -2;\ k_2 = 3$. Отже, їм відповідають два частинних розв'язки $y_1 = e^{-2x}$ та $y_2 = e^{3x}$, які є лінійно незалежними. Відповідно, маємо загальний розв'язок рівняння у вигляді:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

2. Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні. Якщо дискримінант характеристичного рівняння дорівнює нулю, тобто $\frac{p^2}{4} - q = 0$, то рівняння має дійсні і рівні корені $k_1 = k_2 = k$. У цьому випадку $y_1 = e^{kx}$ – частинний розв'язок рівняння, оскільки $k -$ корінь характеристичного рівняння. Другий частинний розв'язок, який є лінійно незалежним від першого, можна знайти у вигляді $y_2 = xe^{kx}$. Це легко перевірити безпосередньо підстановкою y_2 у рівняння (28.17). Підставляючи y_2 у рівняння, дістаємо:

$$(xe^{kx})'' + p(xe^{kx})' + q(xe^{kx}) = (2ke^{kx} + k^2 xe^{kx}) + p(e^{kx} + kxe^{kx}) + qxe^{kx} =$$
$$= e^{kx}(x(k^2 + pk + q) + 2k + p) \equiv 0,$$

оскільки вираз у дужках дорівнює нулю (зважаючи на те, що $k = -\frac{p}{2}$ – кратний корінь характеристичного рівняння). Відношення $\frac{y_2}{y_1} = x \neq const$, отже, функції y_1 та y_2 лінійно незалежні. За теоремою 28.6 лінійна комбінація цих функцій (тобто функція (28.20)) є загальним розв'язком рівняння (28.17).

Отже, загальний розв'язок рівняння буде:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \qquad (28.24)$$



Знайдемо загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$. Для цього спочатку запишемо його характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 4 = 0$. Корені рівняння дійсні і рівні: $k_1 = k_2 = 2$. Отже, маємо два частинних лінійно незалежних розв'язки: $y_1 = e^{2x}$ та $y_2 = xe^{2x}$. Відповідно, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

3. Характеристичне рівняння не має дійсних коренів. Якщо $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то характеристичне рівняння має ***комплексно-спряжені корені***:

$$k_1 = \alpha + \beta \cdot i; \quad k_2 = \alpha - \beta \cdot i,$$

де $i=\sqrt{-1}$ – ***уявна одиниця***, для якої $i^2=-1, \alpha, \beta$ – дійсні числа;

α – дійсна частина комплексного числа;

$\beta \cdot i$ – уявна частина комплексного числа.

Відповідно,

$$\alpha=-\frac{p}{2}; \quad \beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

Можна довести, що у цьому випадку диференціальне рівняння має два дійсні частинні розв'язки, які є лінійно незалежними:

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x; \quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Покажемо, що функція $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ є розв'язком рівняння (28.17). Знайдемо похідні:

$$y_2'=e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x),$$
$$y_2''=e^{\alpha x}(\alpha^2\sin\beta x-\beta^2\sin\beta x+2\alpha\beta\cos\beta x).$$

Підставляючи y_2, y_2', y_2'' у рівняння (28.17), одержуємо:

$$e^{\alpha x}(\sin\beta x(\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q)+\cos\beta x(2\alpha\beta+p\beta))=$$
$$=e^{\alpha x}(\sin\beta x(\frac{p^2}{4}-\frac{-p^2+4q}{4}+p\cdot\left(\frac{-p}{2}\right)+q)+\cos\beta x(2\cdot\left(\frac{-p}{2}\right)\cdot\beta+p\beta))=$$
$$=e^{\alpha x}\sin\beta x(\frac{p^2}{4}+\frac{p^2}{4}-q-\frac{p^2}{2}+q)\equiv 0.$$

Отже, функція $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ є розв'язком рівняння (28.17).

Аналогічно доводиться, що функція $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ також є розв'язком рівняння (28.17). Оскільки розв'язки y_1 та y_2 лінійно незалежні:

$$\frac{y_2}{y_1}=\operatorname{tg}\beta x\neq const,$$

то згідно з теоремою 28.6 загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y=e^{ax}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x). \qquad (28.25)$$



Знайдемо загальний розв’язок рівняння

$$y'' + 2y' + 10y = 0.$$

Запишемо відповідне характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 10 = 0$. Воно має комплексно-спряжені корені: $k_{1,2} = -1 \pm 3i$. Тобто $\alpha = -1;\ \beta = 3$. Цим кореням відповідають два частинні розв’язки:

$$y_1 = e^{-x}\cos 3x, \quad \text{та} \quad y_2 = e^{-x}\sin 3x.$$

Загальний розв’язок рівняння має вигляд:

$$y(x) = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

28.4.2. Лінійне однорідне диференціальне рівняння порядку n зі сталими коефіцієнтами. Таке рівняння має вигляд:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \qquad (28.26)$$

Зауважимо, що всі теореми відносно властивостей розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку (28.17) узагальнюються на рівняння будь-якого порядку.

Розв’язки $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ рівняння (28.26) називаються ***лінійно незалежними*** на множині X, якщо їх лінійна комбінація дорівнює нулю $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$ за умови, що всі сталі $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ дорівнюють нулю.

Сукупність n лінійно незалежних розв’язків рівняння (28.26) називається ***фундаментальною системою розв’язків***.

Теорема 28.7. Якщо система функцій $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальна система розв’язків рівняння (28.26), то функція

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \qquad (28.27)$$

де $C_1,\ C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі, є його загальним розв’язком.

Визначником Вронського системи функцій $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називається визначник

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \qquad (28.28)$$

Якщо система функцій $y_1(x),\ y_2(x), ..., y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (28.26) на множині X неперервні та мають $(n-1)$-ну неперервну похідну на цій множині, то вронскіан цих функцій не дорівнює нулю в жодній точці X (ця умова є необхідною та достатньою).

Для відшукання фундаментальної системи розв'язків рівняння (28.26) складаємо характеристичне рівняння. Характеристичним для рівняння (28.26) називається рівняння n-го степеня відносно k виду:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0. \qquad (28.29)$$

Тоді загальний розв'язок (28.26) будується залежно від характеру коренів рівняння (28.29):

1) кожному дійсному простому кореню k відповідає частинний розв'язок $y = e^{kx}$;

2) кожній парі комплексно-спряжених простих коренів $\alpha + i\beta,\ \alpha - i\beta$ відповідають два частинних розв'язки:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

3) кожному дійсному кореню k кратності r відповідають r лінійно незалежних частинних розв'язків:

$$y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx},\ ...,\ y_r = x^{r-1}e^{kx};$$

4**)** кожній парі комплексно-спряжених коренів $\alpha + i\beta,\ \alpha - i\beta$ кратності r відповідають $2r$ частинних розв'язків:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ ...,\ y_r = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_{r+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{r+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ ...,\ y_{2r} = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Загальна кількість частинних розв'язків повинна дорівнювати порядку диференціального рівняння.

 Знайти частинний розв'язок рівняння $y''+4y'+5y=0$, якщо

$$y(0)=-3,\ y'(0)=0.$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного рівняння. Його характеристичне рівняння

$$k^2+4k+5=0.$$

Визначаємо корені:

$$k_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-5}\ \text{ або }\ k_{1,2}=-2\pm i.$$

$$y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Для відшукання C_1 і C_2 використовуємо початкові умови, але спочатку знайдемо y' (як похідну добутку)

$$y'=-2e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-2x}(C_2\cos x-C_1\sin x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ y'=-e^{-2x}(-2C_1\cos x-2C_2\sin x)-C_1\sin x+C_2\cos x).$$

Складаємо систему рівнянь для знаходження C_1 і C_2

$$\begin{cases}y(0)=-3,\\ y'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}-3=e^0\left(C_1\cos 0+C_2\sin 0\right),\\ 0=e^0\left(-2C_1\cos 0-2C_2\sin 0-C_1\sin 0+C_2\cos 0\right),\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}C_1=-3,\\ -2C_1+C_2=0\end{cases}\Rightarrow C_1=-3,\ C_2=-6.$$

Таким чином, частинний розв'язок даного рівняння

$$y=e^{-2x}(-3\cos x-6\sin x),\ \text{ або }\ y=-3e^{-2x}(\cos x+2\sin x).$$

 Розв'язати диференціальне рівняння $y^{(4)}-y=0.$

Характеристичне рівняння для даного диференціального

$$k^4-1=0$$

має корені $k_1=1,\ k_2=-1,\ k_{3,4}=\pm i.$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Ключові терміни

Диференціальне рівняння другого порядку; загальний розв’язок диференціального рівняння другого порядку; частинний розв’язок; геометрична інтерпретація початкових умов; рівняння, що допускають зниження порядку; лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами; лінійно залежні розв'язки; лінійно незалежні розв'язки; характеристичне рівняння; комплексно-спряжені корені; уявна одиниця; фундаментальна система розв'язків; визначник Вронського.

Запитання для самоперевірки

1. Які диференціальні рівняння n-го порядку допускають зниження порядку?

2. Як розв’язати рівняння $y^{(n)} = f(x)$?

3. Як розв’язати рівняння $F(x, y', y'') = 0$?

4. Як розв’язати рівняння $F(y, y', y'') = 0$?

5. Що називається лінійним диференціальним рівнянням другого порядку?

6. Який вигляд має лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

7. Які функції називаються лінійно незалежними на множині D?

8. Яке рівняння називається характеристичним для даного однорідного диференціального рівняння?

9. Які функції називаються лінійно незалежними на даній множині?

10. Які частинні розв'язки має однорідне рівняння, якщо корені характеристичного рівняння:

а) дійсні й різні;

б) дійсні й рівні;

в) комплексно-спряжені?

11. Який вигляд має загальний розв'язок однорідного рівняння, якщо корені характеристичного рівняння:

а) дійсні й різні;

б) дійсні й рівні;

в) комплексно-спряжені?

Глава 29. Розв’язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

29.1. Структура розв'язку лінійних неоднорідних рівнянь

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння, яке має вигляд:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x), \tag{29.1}$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – сталі.

Для відшукання загального розв’язку рівняння (29.1) використовують таку теорему.

Теорема 29.1. Загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння порядку n дорівнює сумі будь-якого його частинного розв’язку та загального розв’язку відповідного однорідного рівняння:

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \overline{y}(x), \tag{29.2}$$

де $\overline{y}$ – загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння, $\tilde{y}$ – деякий частинний розв’язок, який визначається виглядом правої частини неоднорідного рівняння, тобто функції $f(x)$.

Доведення. Нехай $\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$ – загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння, а $\tilde{y}$ – деякий частинний розв’язок неоднорідного рівняння. Таким чином:

$$\begin{gathered} \overline{y}^{(n)} + a_1 \overline{y}^{(n-1)} + \cdots + a_n \overline{y} = 0, \\ \tilde{y}^{(n)} + a_1 \tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + a_n \tilde{y} = f(x). \end{gathered} \tag{29.3}$$

Склавши почленно рівняння (29.3) і врахувавши, що похідна суми дорівнює сумі похідних, одержуємо:

$$(\overline{y} + \tilde{y})^{(n)} + a_1 (\overline{y} + \tilde{y})^{(n-1)} + \cdots + a_n (\overline{y} + \tilde{y}) = f(x). \tag{29.4}$$

Звідси видно, що функція $y(x) = \tilde{y}(x) + \overline{y}(x)$ буде розв’язком неоднорідного диференціального рівняння (29.1). Цей розв’язок є загальним,

оскільки до нього входять незалежні довільні сталі $C_1, C_2, ..., C_n$ і $y_1, y_2, \dots, y_n$ – лінійно незалежні.

Таким чином, для визначення загального розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами застосовують такий алгоритм:

1) знаходять загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння;

2) знаходять будь-який частинний розв'язок $\tilde{y}$ неоднорідного рівняння, вигляд якого визначають за правою частиною цього рівняння;

3) знайдені розв'язки додають, одержана сума і буде загальним розв'язком неоднорідного рівняння.

29.2. Розв'язання лінійних неоднорідних рівнянь зі спеціальними правими частинами

Розглянемо питання про відшукання частинних розв'язків рівняння залежно від вигляду правої частини рівняння (так звана ***спеціальна права частина***).

1. Права частина лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n. У цьому випадку можливі такі ситуації:

а) число α не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$\tilde{y} = Q_n(x)e^{\alpha x} = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_n)e^{\alpha x}, \qquad (29.5)$$

де $Q_n(x)$ – повний многочлен від x того же степеня, що і $P_n(x)$. Коефіцієнти цього многочлена не можуть залишатись невідомими, оскільки загальний розв'язок вже містить довільні сталі. Тому їх визначають шляхом підстановки частинного розв'язку (29.5) у неоднорідне рівняння (29.1). При цьому прирівнюють коефіцієнти, що стоять при однакових степенях аргументу x у лівій та правій частинах рівняння (29.1). Цей метод має назву ***методу невизначених коефіцієнтів***;

б) число α збігається з одним із коренів характеристичного рівняння.

Оскільки у цьому випадку вираз (29.5) дає розв'язок, який є лінійно залежним відносно однієї зі складових загального розв'язку, то деякий частинний розв'язок шукають у вигляді:

$$\tilde{y} = xQ_n(x)e^{\alpha x}; \qquad (29.6)$$

в) число α збігається з кратним коренем кратності r характеристичного рівняння, тобто $\alpha = k_1 = k_2 = \cdots = k_r$. Оскільки у цьому випадку і вираз (29.5), і вираз (29.6) дають лінійно залежні функції відносно складових загального розв'язку, то деякий частинний розв'язок шукають у вигляді:

$$\tilde{y} = x^r Q_n(x) e^{\alpha x}. \tag{29.7}$$



Знайдемо розв'язок диференціального рівняння

$$2y'' - 5y' + 3y = \left(x^2 + 1\right)e^x.$$

Спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, для цього складаємо характеристичне рівняння:

$$2k^2 - 5k + 3 = 0.$$

Знайдемо його корені:

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4}, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = \frac{3}{2}.$$

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{3}{2}x}.$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння, правою частиною якого є функція $f(x) = \left(x^2 + 1\right)e^x$, тобто $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$. Враховуючи, що $\alpha = 1$ і збігається з коренем характеристичного рівняння, складаємо частинний розв'язок у вигляді:

$$y = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x \quad \Rightarrow \quad y = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^x.$$

Для відшукання A, B, C підставляємо $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ у вихідне рівняння, та порівнюємо коефіцієнти многочленів при однакових степенях x лівої та правої частин рівняння:

$$3\left|\, y = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^x\right.$$

$$-5\left|\, \tilde{y}' = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)e^x + \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^x,\right.$$

$$2\left|\tilde{y}'' = (6Ax+2B)e^x + \left(3Ax^2+2Bx+C\right)e^x + \left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^x + \right.$$
$$+\left(3Ax^2+2Bx+C\right)e^x = (6Ax+2B)e^x + \left(6Ax^2+4Bx+2C\right)e^x +$$
$$+\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^x.$$

Одержуємо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів:

$$\left.\begin{matrix} x^2 \\ x \\ x^0 \end{matrix}\right| \begin{cases} -3A = 1, \\ 12A - 2B = 0, \\ 4B - C = 1. \end{cases}$$

Розв'язком системи рівнянь є: $A = -\frac{1}{3}$, $B = -2$, $C = -9$.

Отже, частинний розв'язок рівняння набуває вигляду:

$$\tilde{y} = \left(-\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 9x\right)e^x,$$

тоді загальний розв'язок даного рівняння запишеться таким чином:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{3x}{2}} - \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 9x\right)e^x.$$

Якщо права частина неоднорідного диференціального рівняння (29.1) є сумою двох спеціальних функцій $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частинний розв'язок цього рівняння визначають як суму частинних розв'язків: $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$.



Знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^x.$$

Спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Для цього записуємо його характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$ і знаходимо його корені: $k_1 = k_2 = 3$. Оскільки корінь є кратним, то загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x}.$$

Права частина даного рівняння є сумою двох спеціальних функцій $f_1(x)=3x$ та $f_2(x)=-8e^x$, тому частинний розв'язок шукаємо як суму двох функцій $\tilde{y}_1=Ax+B$, $\tilde{y}_2=Ce^x$, а саме

$$\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2 \quad \Rightarrow \tilde{y}=Ax+B+Ce^x.$$

Знаходимо першу та другу похідні від функції $\tilde{y}$ та підставляємо їх і саму функцію в початкове рівняння, у результаті чого отримуємо:

$$Ce^x-6(A+Ce^x)+9(Ax+B+Ce^x)=3x-8e^x.$$

Прирівняємо коефіцієнти подібних членів обох частин рівняння й отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} 9A=3, \\ 4C=-8, \\ 9B-6A=0. \end{cases}$$

Звідси: $A=1/3$, $C=-2$, $B=2/9$. Отже, $\tilde{y}=1/3x+2/9-2e^x$.

Таким чином, маємо загальний розв'язок:

$$y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+1/3x+2/9-2e^x.$$



Розв’язати диференціальне рівняння $y^{(4)}-y=x^3+1$.

Характеристичне рівняння $k^4-1=0$ має корені $k_{1,2}=\pm1$, $k_{3,4}=\pm i$. Загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння запишеться таким чином:

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

У заданому рівнянні $f(x)=x^3+1=P_3(x)e^{0x}$, причому $\alpha=0$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому шукаємо частинний розв’язок неоднорідного рівняння у вигляді: $\tilde{y}=Q_3(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$.

Знайдемо похідні $\tilde{y}', \tilde{y}'', \tilde{y}''', \tilde{y}^{(4)}$ та підставимо в задане рівняння:

$$\left|\begin{array}{l}\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,\\ \tilde{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C,\\ \tilde{y}'' = 6Ax + 2B,\\ \tilde{y}''' = 6A,\\ \tilde{y}^{(4)} = 0.\end{array}\right.$$

$$-Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = x^3 + 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x, тоді $A = -1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = -1$ та $\tilde{y} = -x^3 - 1$. Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1.$$



Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''' + y'' - 2y' = x - e^x.$$

Характеристичне рівняння $k^3 + k^2 - 2k = 0$ має корені $k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = -2$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}$.

У даному рівнянні $f(x) = x - e^x = P_1(x)e^{0x} + P_0(x)e^x$. Враховуючи, що $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1$ є простими коренями характеристичного рівняння, шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді:

$$\tilde{y} = xQ_1(x) + xQ_0(x)e^x = x\left(Ax + B\right) + Cxe^x.$$

Отже,

$$\left|\begin{array}{l}\tilde{y} = Ax^2 + Bx + Cxe^x,\\ \tilde{y}' = 2Ax + B + Ce^x + Cxe^x,\\ \tilde{y}'' = 2A + 2Ce^x + Cxe^x,\\ \tilde{y}''' = 3Ce^x + Cxe^x.\end{array}\right.$$

$$-4Ax + 2A - 2B + 3Ce^x = x - e^x,$$

звідки: $A = -1/4,\ B = -1/4,\ C = -1/3$.

Отже, загальний розв'язок рівняння:

$$y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-2x} - \frac{1}{4} x\left(x+1\right) - \frac{1}{3} x e^{x}.$$

2. Права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами є функцією:

$$f(x) = e^{\alpha x}\,(a\cos\beta x + b\sin\beta x), \tag{29.8}$$

де a, b – сталі.

При цьому розрізнюють два випадки:

а) комплексно-спряжені числа $\alpha \pm \beta i$ не є коренями характеристичного рівняння. Тоді частинний розв’язок має вигляд:

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}\,(A\cos\beta x + B\sin\beta x), \tag{29.9}$$

де сталі A, B визначаються за методом невідомих коефіцієнтів порівнюванням коефіцієнтів при $\cos\beta x$ і $\sin\beta x$ у лівій та правій частинах рівняння (29.1), якщо у це рівняння підставити частинний розв’язок $\tilde{y}$ та його похідні;

б) комплексно-спряжені числа $\alpha \pm \beta i$ збігаються з коренями характеристичного рівняння (r – кратність коренів**)**. У цьому випадку:

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}\, x^{r}\,(A\cos\beta x + B\sin\beta x), \tag{29.10}$$

де A, B визначаються за методом невизначених коефіцієнтів.

При знаходженні частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами пропонуємо користуватися таблицею (табл. 29.1).

Таблиця 29.1

Частинні розв'язки неднорідного рівняння

Права частина рівняння $ay'' + by' + cy = f(x)$	**Корені характеристичного рівняння** $ak^2 + bk + c = 0$	**Вигляд частинного розв'язку**
1	2	3

$f(x)=P_n(x)$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n	а) число 0 не є коренем характеристичного рівняння	$\tilde{y}=Q_n(x)$, де $Q_n(x)$ – повний многочлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами

Закінчення табл. 29.1

1	2	3
	б) число 0 є коренем кратності r характеристичного рівняння	$\tilde{y}=x^r Q_n(x)$
$f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$	а) число α не є коренем характеристичного рівняння	$\tilde{y}=e^{\alpha x}Q_n(x)$
	б) число α є коренем кратності r характеристичного рівняння	$\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}Q_n(x)$
$f(x)=P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_n(x)\sin\beta x$	а) число βi не є коренем характеристичного рівняння	$\tilde{y}=U_n(x)\cos\beta x+$ $+V_n(x)\sin\beta x$, де $U_n(x)$ і $V_n(x)$ – многочлени з невизначеними коефіцієнтами
	б) число βi є коренем характеристичного рівняння	$\tilde{y}=x\left(U_n(x)\cos\beta x+\right.$ $\left.+V_n(x)\sin\beta x\right)$
$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+\right.$ $\left.+Q_n(x)\sin\beta\right)$	а) число $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння	$\tilde{y}=e^{\alpha x}\left(U_n(x)\cos\beta x+\right.$ $\left.+V_n(x)\sin\beta x\right)$
	б) число $\alpha+\beta i$ є коренем характеристичного рівняння	$\tilde{y}=e^{\alpha x}x\left(U_n(x)\cos\beta x+\right.$ $\left.+V_n(x)\sin\beta x\right)$



Знайдемо загальний розв’язок рівняння

$$y''+y'-6y=\cos 2x-3\sin 2x.$$

Спочатку визначаємо загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння:

$$y''+y'-6y=0.$$

Характеристичне рівняння $k^2+k-6=0$ має різні дійсні корені: $k_1=2$; $k_2=-3$. Їм відповідають два лінійно незалежних частинних розв'язки: $y_1=e^{2x}$ і $y_2=e^{-3x}$. Звідси маємо загальний розв'язок однорідного рівняння у вигляді:

$$\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}.$$

Права частина рівняння містить функцію $f(x)=\cos 2x-3\sin 2x$, яка є функцією виду $f(x)=e^{\alpha x}(a\cos\beta x+b\sin\beta x)$, де $\alpha=0,\beta=2$, отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді:

$$\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Знайдемо похідні:

$$\tilde{y}'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,$$
$$\tilde{y}''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

У задане рівняння підставляємо $\tilde{y},\tilde{y}'$ та $\tilde{y}''$ і одержуємо:

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-2A\sin 2x+2B\cos 2x-6A\cos 2x-6B\sin 2x=$$
$$=\cos 2x-3\sin 2x,$$

або

$$(2B-10A)\cos 2x-(10B+2A)\sin 2x=\cos 2x-3\sin 2x.$$

Звідси маємо систему рівнянь відносно коефіцієнтів A,B:

$$\begin{cases}2B-10A=1,\\10B+2A=3.\end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо, що $A=-\frac{1}{26}$, $B=\frac{4}{13}$.

Отже, частинним розв'язком даного рівняння є

$$\tilde{y}=-\frac{1}{26}\cos 2x+\frac{4}{13}\sin 2x.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}-\frac{1}{26}(\cos 2x-8\sin 2x).$$



Знайти розв'язок рівняння $y''-2y=2xe^x(\cos x-\sin x)$.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння, для цього складемо відповідне йому характеристичне рівняння: $k^2-2=0$. Оскільки його коренями є $k_1=-\sqrt{2}$, $k_2=\sqrt{2}$, то загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\overline{y}=C_1e^{-\sqrt{2}x}+C_2e^{\sqrt{2}x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина рівняння $f(x)=2xe^x(\cos x-\sin x)$ є функцією виду

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta\right),$$

тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}=e^x\left((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\right).$$

Для обчислення A,B,C,D у вихідне рівняння підставляємо $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$, де

$$\tilde{y}'=e^x\left((Ax+B+A+Cx+D)\cos x+(Cx+D-Ax-B+C)\sin x\right).$$
$$\tilde{y}''=e^x\left((2Cx+2A+2C+2D)\cos x+(-2Ax-2A-2B+2C)\sin x\right).$$

Отримуємо тотожність:

$$2e^x\left((Cx+A+C+D)\cos x-(Ax+A+B-C)\sin x\right)-$$
$$-2e^x\left((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\right)\equiv 2xe^x(\cos x-\sin x),$$

або після групування

$$\left((C-A)x+A-B+C+D\right)\cos x+$$
$$+\left((-A-C)x-A-B-D+C\right)\sin x\equiv x(\cos x-\sin x).$$

Складемо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів, для чого прирівняємо коефіцієнти подібних членів у обох частинах тотожності, і маємо:

$$\begin{array}{l}x\cos x\\ \cos x\\ x\sin x\\ \sin x\end{array}\left|\begin{cases}C-A=1,\\ A-B+C+D=0,\\ -A-C=-1,\\ -A-B+C-D=0.\end{cases}\right.\Rightarrow\begin{cases}A=0;\\ B=1;\\ C=1;\\ D=0.\end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння записуємо у вигляді:

$$\tilde{y} = e^x \left(\cos x + x \sin x\right).$$

Тепер отримуємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + e^x \left(\cos x + x \sin x\right).$$

29.3. Розв'язання неоднорідних диференціальних рівнянь методом варіації довільних сталих

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x),$$

права частина якого $f(x)$ – будь-яка функція, $a_1, a_2, ..., a_n$ – дійсні сталі. У цьому випадку для його розв'язання застосовують метод варіації довільних сталих, або метод Лагранжа.

Метод Лагранжа. Запишемо загальний алгоритм застосування цього методу для диференціального рівняння n-го порядку.

1^0. Для відповідного однорідного рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$$

знаходиться загальний розв'язок у вигляді:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x), \qquad (29.11)$$

де $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ – його частинні розв'язки.

2^0. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукається у вигляді:

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \cdots + C_n(x) y_n(x), \qquad (29.12)$$

де невідомі функції $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) + ... + C_n'(x) y_n(x) = 0; \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) + ... + C_n'(x) y_n'(x) = 0; \\ .... \quad ..... \quad ..... \quad ..... \quad ..... \quad ..... \quad ..... \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + .. + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \qquad (29.13)$$

Розв'язавши систему рівнянь (29.13), знайдемо $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$ і далі, інтегруючи, визначаємо $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$.



Знайдемо загальний розв'язок рівняння: $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ відповідного однорідного рівняння має корені $k_{1,2} = \pm i$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння записуємо як

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x ,$$

де $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ – два його лінійно незалежні розв'язки.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо згідно з методом варіації довільних сталих у вигляді:

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x .$$

Функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Для розв'язання системи можна застосувати формули Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \sin x .$$

Отже,

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} , \qquad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \sin x .$$

Інтегруючи одержані рівності, отримуємо:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{\cos x}{1+\sin x}\right| + \sin x + C_3 ,$$

$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_4 .$$

Підставляючи $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у загальний розв'язок однорідного рівняння, одержуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = C_3 \cos x + C_4 \sin x + \cos x \ln \left| \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right|.$$

29.4. Системи диференціальних рівнянь

Досить часто для опису досліджуваних процесів не достатньо одного диференціального рівняння, тому використовується їх сукупність.

Сукупність n лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з n невідомими функціями $y_1, y_2, ..., y_n$ від однієї незалежної змінної x:

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = q_1, \\ y_2' + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = q_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = q_n, \end{cases} \tag{29.14}$$

де коефіцієнти a_{ik} та вільні члени q_i, $(i, k = \overline{1,n})$ є функціями від x, називається ***системою лінійних диференціальних рівнянь***. Якщо рівняння системи (29.14) розв'язані відносно похідних, то система лінійних диференціальних рівнянь називається ***нормальною***.

Якщо коефіцієнти системи (29.14) є сталими величинами, то така система називається ***системою диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами***. При $q_i = 0 \left(i = \overline{1,n} \right)$ система називається ***однорідною***, у противному разі – ***неоднорідною***.

Загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (29.14) називається сукупність n функцій, що залежать від незалежної змінної x та n довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \\ y_2 &= y_2\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \\ \ldots \quad &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n &= y_n\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \end{aligned} \tag{29.15}$$

які задовольняють усі рівняння системи (29.14).

Якщо незалежну змінну позначити через t, то система набуває вигляду

$$\dot{y}_k + \sum_{i=1}^{n} a_{ki} y_k = q_k \quad \left(k = \overline{1,n}\right), \tag{29.16}$$

де $\dot{y}_k$ – похідна першого порядку за аргументом t.

Задача Коші для системи диференціальних рівнянь полягає у визначенні такого розв'язку (29.15) системи (29.14), який задовольняє початкові умови: $y_1\left(x_0\right) = b_1$, $y_2\left(x_0\right) = b_2$, ... , $y_n\left(x_0\right) = b_n$.

Одним із способів розв'язання системи є ***метод виключення***, який передбачає виключення $\left(n-1\right)$ невідомих функцій, внаслідок чого система (29.16) зводиться до диференціального рівняння n-го порядку відносно однієї з невідомих функцій.



Знайдемо розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 5y + 4z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 4y + 5z. \end{cases}$$

Це нормальна система лінійних диференціальних рівнянь. Застосуємо для її розв’язання метод виключення. Продиференціюємо перше рівняння системи:

$$y'' = 5y' + 4z'.$$

Враховуючи друге рівняння, маємо:

$$y'' = 5y' + 4\left(4y + 5z\right) \quad \Rightarrow \quad y'' = 5y' + 16y + 20z.$$

За першим рівнянням системи визначаємо, що

$$z = \frac{1}{4}\left(y' - 5y\right),$$

тоді: $y'' = 5y' + 16y + 5\left(y' - 5y\right) \quad \Rightarrow \quad y'' - 10y' + 9y = 0$.

Отже, для визначення функції $y = y(x)$ ми отримали однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння має вигляд: $k^2 - 10k + 9 = 0$. Звідси визначаємо корені: $k_1 = 1$, $k_2 = 9$. Записуємо загальний розв'язок дифе-ренціального рівняння другого порядку для функції $y = y(x)$:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

Тепер знаходимо функцію $z = z(x)$, підставивши у перше рівняння системи y та y', але спочатку знайдемо y':

$$y' = C_1 e^x + 9C_2 e^{9x}.$$

$$z = \frac{1}{4}\left(C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} - 5C_1 e^x - 5C_2 e^{9x}\right),$$

або

$$z = \frac{1}{4}\left(4C_2 e^{9x} - 4C_1 e^x\right) = C_2 e^{9x} - C_1 e^x.$$

Отже, загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x},$$
$$z = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

Розглянемо ще один метод розв'язування системи диференціальних рівнянь, який називається ***алгебраїчним***.

Нехай задано нормальну систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11} y + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n, \\ \dot{y}_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dot{y}_n = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n, \end{cases} \tag{29.17}$$

де a_{ij} – сталі величини, $y_i = y_i(t)$ – невідомі функції $\left(i, j = \overline{1,n}\right)$.

Систему (29.17) можна записати як матричне рівняння:

$$\dot{Y} = A \cdot Y,$$

де

$$\dot{Y}=\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \vdots\\ \dot{y}_n\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

Частинні розв'язки системи шукатимемо у вигляді сукупності показникових функцій:

$$y_1=\alpha_1 e^{kt},\quad y_2=\alpha_2 e^{kt},\ ...,\quad y_n=\alpha_n e^{kt},$$

де α_i $(i=\overline{1,n})$ – невизначені сталі, які треба знайти.

Підставляючи ці функції в (29.17) і скорочуючи на множник $e^{kt}\neq 0$, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$.

$$\begin{cases}(a_{11}-k)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n=0,\\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-k)\alpha_2+\dots+a_{2n}\alpha_n=0,\\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\dots+(a_{nn}-k)\alpha_n=0.\end{cases}\qquad(29.18)$$

Знайдемо визначник цієї системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k\end{vmatrix}.\qquad(29.19)$$

Якщо k таке, що визначник $\Delta\neq 0$, то система рівнянь (29.18) має тільки тривіальний розв'язок: $y_1=y_2=\dots=y_n=0$.

Нетривіальний розв'язок системи (29.18) матимемо лише при таких k, за яких визначник (29.19) цієї системи дорівнюватиме нулю.

Отже, для визначення k ми приходимо до рівняння n-го порядку:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k\end{vmatrix}=0.\qquad(29.20)$$

Це рівняння називається ***характеристичним рівнянням системи диференціальних рівнянь,*** його корені – ***коренями характеристичного рівняння***.

Розглянемо тільки випадок, коли корені характеристичного рівняння дійсні й різні.

Для кожного кореня k_i $(i=\overline{1,n})$ записують систему (29.18) і визначають коефіцієнти $\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},\ldots,\alpha_n^{(i)}$. Оскільки ранг матриці системи дорівнює $n-1$, то один із коефіцієнтів можна вибрати довільно. Вважатимемо його рівним одиниці.

Тоді одержуємо частинні розв'язки системи:

для k_1:

$$y_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^{k_1t},\ y_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^{k_1t},\ ...,\ y_n^{(1)}=\alpha_n^{(1)}e^{k_1t};$$

для k_2:

$$y_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{k_2t},\ y_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{k_2t},\ ...,\ y_n^{(2)}=\alpha_n^{(2)}e^{k_2t};$$

… … … … … … … … … … … … …

для k_n:

$$y_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)}e^{k_nt},\ y_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)}e^{k_nt},\ ...,\ y_n^{(n)}=\alpha_n^{(n)}e^{k_nt}.$$

Систему n частинних розв’язків

$$\begin{cases} y_1^{(1)}(x),\ y_1^{(2)}(x),\ ...,\ y_1^{(n)}(x), \\ y_2^{(1)}(x),\ y_2^{(2)}(x),\ ...,\ y_2^{(n)}(x), \\ ..... \\ y_n^{(1)}(x),\ y_n^{(2)}(x),\ ...,\ y_n^{(n)}(x) \end{cases}$$

називають ***фундаментальною системою розв’язків*** на інтервалі (a,b), якщо визначник

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & ... & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & ... & y_2^{(n)}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & ... & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

не дорівнює нулю.

Відповідно, загальний розв'язок системи (29.16) має вигляд:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1\alpha_1^{(1)}e^{k_1t} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{k_2t} + \ldots + C_n\alpha_1^{(n)}e^{k_nt}, \\ y_2 &= C_1\alpha_2^{(1)}e^{k_1t} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{k_2t} + \ldots + C_n\alpha_2^{(n)}e^{k_nt}, \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ y_n &= C_1\alpha_n^{(1)}e^{k_1t} + C_2\alpha_n^{(2)}e^{k_2t} + \ldots + C_n\alpha_n^{(n)}e^{k_nt}, \end{aligned} \qquad (29.21)$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі.



Знайдемо загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

Будемо шукати частинні розв'язки цієї системи у вигляді $y_1 = \alpha_1 e^{kt}$ та $y_2 = \alpha_2 e^{kt}$. Для визначення невідомих коефіцієнтів α_1, α_2 цих функцій складаємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$(2-k)(4-k) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 6k + 5 = 0.$$

Корені рівняння $k_1 = 1,\ k_2 = 5.$

При $k_1 = 1$ система (29.18) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0, \\ 3\alpha_1^{(1)} + 3\alpha_2^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Звідси $\alpha_1^{(1)} = -\alpha_2^{(1)}$.

Нехай $\alpha_2^{(1)} = 1$, тоді $\alpha_1^{(1)} = -1.$

Отже, маємо розв'язки:

$$y_1^{(1)} = -e^t, \quad y_2^{(1)} = e^t.$$

При $k_2 = 5$ система (29.18) набуває вигляду:

$$\begin{cases} -3\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} = 0, \\ 3\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Звідси $3\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$. Покладаючи $\alpha_1^{(2)} = 1$, отримаємо $\alpha_2^{(2)} = 3$. Тоді:

$$y_1^{(2)} = e^{5t}, \quad y_2^{(2)} = 3e^{5t}.$$

Таким чином, ми отримали фундаментальну систему розв’язків:

$$y_1^{(1)} = -e^t, \; y_2^{(1)} = e^t,$$

$$y_1^{(2)} = e^{5t}, \; y_2^{(2)} = 3e^{5t}.$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$y_1 = -C_1 e^t + C_2 e^{5t},$$
$$y_2 = C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$



Ключові терміни

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами; спеціальна права частина; метод невизначених коефіцієнтів; метод Лагранжа; нормальна система лінійних диференціальних рівнянь; однорідна система диференціальних рівнянь; неоднорідна система диференціальних рівнянь; загальний розв’язок системи диференціальних рівнянь; задача Коші для системи диференціальних рівнянь; метод виключення; алгебраїчний спосіб розв’язання; характеристичне рівняння системи диференціальних рівнянь; фундаментальна система розв’язків.



Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте теорему про загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.

2. Який загальний вигляд має лінійне неоднорідне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

3. Яку структуру має загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку?

4. Як записується частинний розв'язок неоднорідного рівняння, якщо функція у його правій частині має вигляд:

а) $P_n(x)e^{\alpha x}$;

б) $M\cos\beta x + N\sin\beta x$;

в) $e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta\right)$?

5. Як знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, якщо функція у його правій частині є сумою функцій $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$?

6. У чому полягає метод Лагранжа (варіації довільної сталої) при розв'язанні диференціального рівняння другого порядку (n-го) порядку?

7. Дайте означення нормальної системи лінійних диференціальних рівнянь.

8. Що таке загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь?

9. Сформулюйте задачу Коші для системи диференціальних рівнянь.

10. У чому полягає метод виключення для розв'язання системи диференціальних рівнянь?

11. Поясніть суть алгебраїчного методу відшукання розв'язку систем диференціальних рівнянь.

Глава 30. Лінійні різницеві рівняння

30.1. Основні поняття та означення

Аналогом диференціальних рівнянь для функції $y = f(x)$, де x приймає натуральні значення $(x \in N)$, є різницеві рівняння. Вони часто використовуються в економіці при дослідженні еволюції економічних систем на тривалих проміжках часу, тобто в моделях економічної динаміки з дискретним часом.

Нехай незалежна змінна x приймає натуральні значення $n, n+1, n+2, \text{K}$. Позначимо $y_n = f(n); y_{n+1} = f(n+1); \ldots$. В економічних задачах як незалежна змінна n, як правило, виступає час t, а y_t – значення залежної змінної в момент часу t.

Різницевим рівнянням k-го **порядку** називається співвідношення виду

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}) = 0, \qquad (30.1)$$

або

$$F(n, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}) = 0. \qquad (30.1^1)$$

Розв'язком різницевого рівняння є послідовність, загальний член якої y_n при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність.

Розв'язок $y_n(n, C_1, C_2, ..., C_k)$, який визначає загальний член послідовності як функцію аргументу n і містить k довільних сталих C_1, C_2, ..., C_k, називається ***загальним розв'язком різницевого рівняння***, а розв'язок $y_n(n, C_1^0, C_2^0, ..., C_k^0)$, який отримується із загального при конкретних значеннях довільних сталих, називається ***частинним розв'язком різницевого рівняння.***

Розглянемо декілька простих задач, математичними моделями яких є різницеві рівняння.



Нехай маємо геометричну прогресію:

$$1, u, u^2, u^3, \ldots,$$

де u – її знаменник.

Геометричну прогресію можна описати різницевим рівнянням:

$$y_n = u \cdot y_{n-1}, \quad y_0 = 1, \quad n \in N.$$

Таким чином, загальний член геометричної прогресії u^n є розв'язком найпростішого різницевого рівняння, де u – стале число (знаменник геометричної прогресії).

Нагадаємо, що $e^{\alpha x}$ – розв'язок аналогічного диференціального рівняння

$$y' = \alpha y; \ \frac{dy}{dx} = \alpha y; \ \frac{dy}{y} = \alpha dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \alpha \int dx; \ \ln|y| = \alpha x + C, \ y = e^{\alpha x} \text{ при } C = 0.$$

Аналогія між розв'язком лінійного різницевого рівняння та лінійного диференціального рівняння розповсюджується і на рівняння будь-якого порядку. Як правило, загальний розв'язок різницевого рівняння є лінійною комбінацією k геометричних прогресій, тоді як для диференціального рівняння – це лінійна комбінація експонент.

Якщо у диференціальному рівнянні k-го порядку маємо залежність між функцією $y(x)$ та її похідними y', y'', ..., $y^{(k)}$, то у різницевих рівняннях ця залежність задається відносно загального члена послідовності y_n та членів

послідовності y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_{n+k} або y_{n-1}, y_{n-2}, ..., y_{n-k} і необхідно знайти формулу її загального члена y_n.

 Нехай маємо арифметичну прогресію:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,$$

де d – різниця прогресії.

Таку прогресію можна описати різницевим рівнянням першого порядку:

$$y_{n+1} = y_n + d, \quad y_0 = a,$$

або рівнянням другого порядку

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0.$$

Дійсно,

$$y_{n+2} = y_{n+1} + d, \quad d = y_{n+1} - y_n,$$

тобто

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_{n+1} - y_n, \quad \text{або} \quad y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0.$$

 Розглянемо ще один приклад.

Нехай до банку внесена сума розміром X_0 під $p\,\%$ річних. Визначимо, яким буде розмір банківського рахунку через n років.

Застосуємо відому формулу складних відсотків:

$$X_n = X_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

або

$$X_n = X_{n-1}\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

яка є різницевим рівнянням першого порядку.

30.2. Лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами

Рівняння виду

$$a_k y_n + a_{k-1}y_{n-1} + a_{k-2}y_{n-2} + \ldots + a_0 y_{n-k} = f(n), \qquad (30.2)$$

або

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + a_{k-2} y_{n+k-2} + ... + a_0 y_n = f(n), \qquad (30.3)$$

де a_0, a_1, ..., a_k – сталі коефіцієнти,

називається ***неоднорідним різницевим лінійним рівнянням*** k-го порядку **зі *сталими коефіцієнтами***.

Рівняння виду

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + a_{k-2} y_{n-2} + ... + a_0 y_{n-k} = 0, \qquad (30.4)$$

або

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + a_{k-2} y_{n+k-2} + ... + a_0 y_n = 0, \qquad (30.5)$$

тобто різницеві лінійні рівняння, у яких $f(n) = 0$, називаються ***різницевими лінійними однорідними рівняннями*** k-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Зауважимо, що для різницевих рівнянь теореми аналогічні теоремам для відшукання розв'язку диференціальних рівнянь.

Теорема 30.1. Якщо однорідне різницеве рівняння має розв'язком послідовність $y_n^{(1)}$, то його розв'язком також буде послідовність

$$y_n^{(2)} = C y_n^{(1)}, \text{ де } C - \text{стала}. \qquad (30.6)$$

Теорема 30.2. Якщо однорідне різницеве рівняння має розв'язком послідовності $y_n^{(1)}$ і $y_n^{(2)}$, то його розв'язком також буде послідовність

$$y_n = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)}, \qquad (30.7)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Теорема 30.3. Якщо $\tilde{y}_n$ є частинним розв'язком неоднорідного різницевого рівняння, а $\bar{y}_n(n, C_1, C_2, ..., C_k)$ є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння, то загальним розв'язком неоднорідного рівняння буде послідовність

$$y_n = \bar{y}_n(n, C_1, C_2, ..., C_k) + \tilde{y}_n, \qquad (30.8)$$

де C_1, C_2, ..., C_k – довільні сталі.

Для доведення цих теорем потрібно підставити (30.6), (30.7) та (30.8) у відповідні різницеві рівняння.

30.3. Однорідні лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо однорідне лінійне різницеве рівняння ***першого*** порядку:

$$y_n - ay_{n-1} = 0\text{, де } a - \text{стала.} \tag{30.9}$$

Будемо шукати його розв'язок у вигляді:

$$y_n = a^n. \tag{30.10}$$

Перевіримо, чи є ця послідовність розв'язком даного рівняння. Для цього підставимо вираз (30.10) у рівняння. Оскільки $y_{n-1} = a^{n-1}$, то рівняння набуває вигляду:

$$a^n - aa^{n-1} = a^n - a^n = 0,$$

тобто послідовність $y_n = a^n$ є розв'язком даного рівняння.

Тоді ***загальним розв'язком*** однорідного рівняння є послідовність

$$y_n = Ca^n, \tag{30.11}$$

де C – довільна стала, яку можна знайти, якщо задана початкова умова.



Знайдемо за допомогою різницевого рівняння формулу складних відсотків, якщо суму X_0 покладено під $p\,\%$ річних.

Розмір рахунку у поточному році визначається за результатами попереднього року співвідношенням:

$$X_n = X_{n-1}\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Це однорідне різницеве рівняння, і його розв'язком буде

$$X_n = C\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

де за початковою умовою $C = X_0$.

Розглянемо метод розв’язання ***однорідних лінійних різницевих рівнянь довільного порядку*** (30.4). Будемо шукати його розв'язок у вигляді послідовності

$$y_n = Z^n,$$

де $Z -$ стале число, яке підлягає визначенню.

Якщо підставити $y_n = Z^n$ в рівняння (30.4) або (30.5), то одержимо:

$$a_k Z^n + a_{k-1} Z^{n-1} + a_{k-2} Z^{n-2} ... + a_0 Z^{n-k} = 0,$$

або після скорочення на $Z^{n-k} \neq 0$

$$a_k Z^k + a_{k-1} Z^{k-1} + ... + a_0 = 0. \qquad (30.12)$$

Отримане рівняння називається ***характеристичним рівнянням*** для даного різницевого. Аналогічно знаходиться характеристичне рівняння й у випадку лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Таким чином, задача відшукання розв'язку різницевого рівняння зводиться до розв'язання алгебраїчного рівняння k-го степеня відносно Z.

Щодо коренів характеристичного рівняння можливі такі випадки:

а) усі корені дійсні та різні;

б) корені дійсні, але серед них є кратні;

в) серед коренів є комплексно-спряжені.

Наприклад, якщо характеристичне рівняння має різні корені, то загальний розв'язок різницевого рівняння шукають у вигляді:

$$y_n = C_1 Z_1^n + C_2 Z_2^n + ... + C_k Z_k^n, \qquad (30.13)$$

де $Z_1^n, Z_2^n, ..., Z_k^n$ – лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння.

Розглянемо ***однорідне*** різницеве рівняння другого порядку, а саме

$$y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n = 0, \qquad (30.14)$$

де p та q – сталі коефіцієнти.

Його характеристичним рівнянням є квадратне рівняння:

$$Z^2 + pZ + q = 0 \qquad (30.15)$$

із дискримінантом $D = p^2 - 4q$. Корені цього рівняння мають вигляд:

$$Z_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Для відшукання загального розв'язку рівняння (30.15) розглянемо наступні три випадки: $D > 0$, $D = 0$ та $D < 0$.

1. Корені характеристичного рівняння дійсні й різні ($D > 0$). У цьому випадку загальним розв'язком рівняння буде послідовність

$$y_n = C_1 Z_1^n + C_2 Z_2^n, \qquad (30.16)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

 Знайдемо розв'язок однорідного різницевого рівняння:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння

$$Z^2 - 5Z + 6 = 0,$$

коренями якого є $Z_1 = 2,\ Z_2 = 3$. Таким чином, загальним розв'язком різницевого рівняння буде послідовність:

$$y_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n.$$

 Розглянемо ще один приклад. Знайдемо розв'язок однорідного різницевого рівняння:

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння $Z^2 - 3Z + 2 = 0$, яке має корені $Z_1 = 1,\ \ Z_2 = 2$. Тоді загальним розв'язком різницевого рівняння є послідовність

$$y_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n.$$

2. Корені характеристичного рівняння дійсні й рівні ($D = 0$). Характеристичне рівняння має корені $Z_1 = Z_2 = Z$. Загальним розв'язком різницевого рівняння у цьому випадку буде послідовність виду

$$y_n = C_1 Z^n + C_2 n Z^n. \qquad (30.17)$$

 Знайдемо загальний розв'язок однорідного різницевого рівняння

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння $Z^2 - 6Z + 9 = 0$, корені якого рівні: $Z_1 = Z_2 = 3$.

Отже, загальним розв'язком різницевого рівняння є послідовність

$$y_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n.$$

Дійсно, $Z_1^n = 3^n$ є частинним розв'язком вихідного рівняння. Покажемо, що $Z_2^n = n3^n$ також є частинним розв'язком цього рівняння. Знайдемо:

$$y_{n+2} = (n+2)\cdot 3^{n+2}; \quad y_{n+1} = (n+1)\cdot 3^{n+1}.$$

Тепер підставимо ці вирази у вихідне рівняння, звідки дістанемо:

$$(n+2)\cdot 3^{n+2} - 6(n+1)\cdot 3^{n+1} + 9n\cdot 3^n = 3^n\left((n+2)\cdot 3^2 - 6(n+1)\cdot 3 + 9n\right) =$$

$$= 3^n(9n+18-18n-18+9n) \equiv 0,$$

отже, $Z_2^n = n3^n$ є частинним розв'язком даного різницевого рівняння.

3. Характеристичне рівняння має комплексно-спряжені корені ($D<0$). У цьому випадку коренями характеристичного рівняння є $Z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Тоді загальний розв'язок різницевого рівняння можна подати у вигляді:

$$y_n = \rho^n(C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi), \qquad (30.18)$$

де ρ – модуль комплексного числа, а φ – головне значення його аргументу:

$$\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}, \ \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Доведення формули виходить за межі програми.



Знайдемо загальний розв'язок різницевого рівняння

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 0.$$

Його характеристичне рівняння має корені: $Z_{1,2} = 1 + i\sqrt{3}$ $(D<0)$, де $\alpha = 1, \beta = \sqrt{3}$. Згідно з формулою (30.18) загальним розв'язком рівняння є послідовність:

$$y_n = 2^n\left(C_1 \sin\frac{\pi}{3}n + C_2 \cos\frac{\pi}{3}n\right),$$

де $\rho = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, а кут $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$.

30.4. Однорідні різницеві рівняння з початковими умовами

Нагадаємо, що загальний розв'язок різницевого рівняння, в який входять довільні сталі $C_1,\ C_2,\ ...,C_k$, задає множину розв'язків різницевого рівняння, а для відшукання частинного розв'язку треба визначити довільні сталі із так званих початкових умов, яким повинна задовольнити послідовність при значеннях $n = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ k-1$, якщо різницеве рівняння має порядок k.

Початкові умови задають у вигляді співвідношень:

$$y_n = y_n^0 (n = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ k-1). \qquad (30.19)$$



Знайдемо частинні розв'язки різницевого рівняння

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0,$$

які задовольняють початкові умови $y_0 = 1,\ y_1 = 3$.

Спочатку визначимо загальний розв'язок заданого рівняння. Для цього складемо його характеристичне рівняння:

$$Z^2 - 3Z + 2 = 0.$$

Коренями отриманого рівняння є $Z_1 = 1,\ Z_2 = 2$, отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$y_n = C_1 + C_2 2^n.$$

Знайдемо сталі C_1 та C_2 із початкових умов:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Отже, частинним розв'язком рівняння є послідовність $y_n = 2^{n+1} - 1$.

30.5. Неоднорідні різницеві рівняння зі спеціальною правою частиною

Неоднорідне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + a_{k-2} y_{n+k-2} + ... + a_0 y_n = f(n)$$

має загальний розв'язок, який є сумою загального розв'язку відповідного однорідного різницевого рівняння $\bar{y}_n$ та частинного розв'язку заданого неоднорідного рівняння $\tilde{y}_n$. Отже, загальним розв'язком неоднорідного рівняння є послідов-ність:

$$y_n = \bar{y}_n + \tilde{y}_n.$$

Нагадаємо, що аналогічну форму має загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Розглянемо ***неоднорідні*** різницеві рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною:

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = f(n), \quad \text{якщо} \quad f(n) = P_m(n) \cdot b^n,$$

де $P_m(n)$ – поліном від n степеня m; p, q, b – дійсні сталі.

Частинний розв'язок неоднорідного різницевого рівняння шукатимемо у вигляді

$$\tilde{y}_n = Q_m(n) \cdot n^l \cdot b^n, \tag{30.20}$$

де l – кратність числа b як коріня характеристичного рівняння;

$Q_m(n)$ – повний поліном m-го степеня від n з невідомими коефіцієнтами, значення яких знаходять за методом невизначених коефіцієнтів.

Для різницевого рівняння другого порядку виду

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = P_m(n) \cdot b^n \tag{30.21}$$

можливі такі випадки стосовно коренів характеристичного рівняння:

$$Z^2 + pZ + q = 0.$$

1.Стала b не є коренем характеристичного рівняння, тобто $Z_1 \neq b$, $Z_2 \neq b$. Тоді частинний розв'язок має вигляд:

$$\tilde{y}_n = Q_m(n) \cdot b^n. \tag{30.22}$$

2. Стала b є одним із коренів характеристичного рівняння, тобто $Z_1 = b$, $Z_2 \neq b$. Тоді частинний розв'язок має вигляд:

$$\tilde{y}_n = n \cdot Q_m(n) \cdot b^n. \tag{30.23}$$

3. Стала b є кратним коренем характеристичного рівняння, тобто $Z_1 = Z_2 = b$. Тоді

$$\tilde{y}_n = n^2 \cdot Q_m(n) \cdot b^n. \qquad (30.24)$$



Для прикладу знайдемо загальний розв'язок різницевого рівняння:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 3.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння:

$$Z^2 - 5Z + 6 = 0.$$

Звідси $Z_1 = 2; \quad Z_2 = 3$.

Загальним розв'язком однорідного різницевого рівняння є послідовність

$$\overline{y}_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n.$$

Розглянемо праву частину даного неоднорідного рівняння. Бачимо, що $P_m(n) = P_0(n) = 3$, а $b = 1$. Тобто частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$\tilde{y}_n = Q_0(n) = A,$$

де A – деяка стала, яку необхідно визначити (стала $b = 1$ не є коренем характеристичного рівняння). Підставимо тепер $\tilde{y}_n$ до вихідного рівняння. Отже,

$$\tilde{y}_{n+2} = A; \quad \tilde{y}_{n+1} = A; \quad \tilde{y}_n = A.$$

Для відшукання сталої A маємо рівняння: $A - 5A + 6A = 3$, звідси $A = \frac{3}{2}$.

Таким чином, загальним розв'язком вихідного різницевого рівняння є послідовність:

$$y_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{3}{2}.$$



Знайдемо загальний розв'язок рівняння: $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2^n(n-2)$.

Оскільки його ліва частина співпадає з лівою частиною рівняння у попередньому прикладі, то загальний розв’язок однорідного рівняння нам вже відомий: $\overline{y}_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$.

Маємо $b = 2$, тобто значення сталої b співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$\tilde{y}_n = (An + B) \cdot n \cdot 2^n.$$

Визначимо коефіцієнти A і B, підставивши $\tilde{y}_n$ у вихідне різницеве рівняння.

Оскільки

$$\tilde{y}_{n+1} = \big(A(n+1) + B\big) \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1} = \Big(A(n+1)^2 + B(n+1)\Big) 2^{n+1},$$
$$\tilde{y}_{n+2} = \big(A(n+2) + B\big) \cdot (n+2) \cdot 2^{n+2} = \Big(A(n+2)^2 + B(n+2)\Big) \cdot 2^{n+2},$$

то маємо рівняння відносно сталих A і B:

$$2^{n+2}\Big(A(n+2)^2 + B(n+2)\Big) - \Big(5A(n+1)^2 + 5B(n+1)\Big) \cdot 2^{n+1} +$$
$$+ 2^n \Big(An^2 + Bn\Big) 6 = 2^n (n-2).$$

Скоротимо обидві частини на 2^n, розкриємо дужки та порівняємо коефіцієнти при однакових степенях n у лівій та правій частинах рівняння:

$$\begin{array}{r|l} n^2 & 4A - 10A + 6A = 0, \\ n & 16A + 4B - 20A - 10B + 6B = 1, \\ n^0 & 16A + 8B - 10A - 10B = -2. \end{array}$$

Для відшукання A і B дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4A = 1, \\ 3A - B = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4}; \\ B = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Отже, загальним розв'язком неоднорідного різницевого рівняння є послідовність

$$y_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}n^2\right) \cdot 2^n.$$



Розв'яжемо різницеве рівняння: $y_{n+2}-4y_{n+1}+4y_n=2^n$.

Характеристичне рівняння для відповідного йому однорідного рівняння $Z^2-4Z+4=0$ має рівні корені: $Z_1=Z_2=2$, отже, загальним розв'язком однорідного рівняння є послідовність

$$\bar{y}_n=C_1 2^n+C_2 n2^n.$$

Права частина рівняння має вигляд: $P_m(n)=P_0(n)=1$, а $b=2$. Оскільки $b=2$ є двократним коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$\tilde{y}_n=An^2\cdot 2^n.$$

Знаходимо сталу A підстановкою $\tilde{y}_n$ до рівняння:

$$A(n+2)^2\cdot 2^{n+2}-4A(n+1)^2\cdot 2^{n+1}+4An^2\cdot 2^n=2^n.$$

Звідси маємо $A=\frac{1}{8}$.

Таким чином, загальним розв'язком рівняння є послідовність:

$$y_n=C_1 2^n+C_1 n2^n+\frac{1}{8}n^2 2^n.$$

30.6. Системи лінійних різницевих рівнянь

Системою лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами k-го порядку називається сукупність k лінійних різницевих рівнянь першого порядку з k невідомими послідовностями $y_n^{(1)}$, $y_n^{(2)}$, ..., $y_n^{(k)}$:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)}+a_{11}y_n^{(1)}+a_{12}y_n^{(2)}+\ldots+a_{1k}y_n^{(k)}=q_1(n); \\ y_{n+1}^{(2)}+a_{21}y_n^{(1)}+a_{22}y_n^{(2)}+\ldots+a_{2k}y_n^{(k)}=q_2(n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n+1}^{(k)}+a_{k1}y_n^{(1)}+a_{k2}y_n^{(2)}+\ldots+a_{kk}y_n^{(k)}=q_k(n), \end{cases} \qquad (30.25)$$

де a_{ij} – сталі, які називаються коефіцієнтами системи;

$q_k(n)$ – вільні члени, що є функціями натурального аргументу n.

Якщо всі $q_i(n) = 0\ (i = \overline{1,k})$, то система рівнянь називається ***однорідною***.

Порівнюючи систему різницевих рівнянь із системою диференціальних рівнянь, бачимо їх повну аналогію.

Загальним розв'язком системи (30.25) називається сукупність послідовностей $y_n^{(1)}$, $y_n^{(2)}$, ..., $y_n^{(k)}$ від натурального аргументу n та k довільних сталих C_1, C_2, ..., C_k, тобто

$$\begin{cases} y_n^{(1)} = y_n^{(1)}(n, C_1, C_2, ..., C_k); \\ y_n^{(2)} = y_n^{(2)}(n, C_1, C_2, ..., C_k); \\ ..... \\ y_n^{(k)} = y_n^{(k)}(n, C_1, C_2, ..., C_k), \end{cases} \tag{30.26}$$

що задовольняє систему при будь-яких значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_k$, та довільний розв'язок системи міститься в цій сукупності при деяких фіксованих значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_k$.

Задача з початковими умовами формулюється так: знайти такий розв'язок системи (30.25), що задовольняє умови:

$$y_0^{(1)} = b_1,\ y_0^{(2)} = b_2, ..., y_0^{(k)} = b_k.$$

Розв'язок системи можна знайти методом виключення, при цьому систему лінійних різницевих рівнянь k-го порядку буде зведено до одного лінійного різницевого рівняння k-го порядку.



Розв'язати систему різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = 5y_n^{(1)} + 4y_n^{(2)} \\ y_{n+1}^{(2)} = 4y_n^{(1)} + 5y_n^{(2)} \end{cases}.$$

Для розв'язання застосуємо метод виключення. Підставимо замість n у перше рівняння $n+1$. Тоді матимемо: $y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 4y_{n+1}^{(2)}$. Ураховуючи друге рівняння, отримуємо:

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 4\left(4y_n^{(1)} + 5y_n^{(2)}\right) \quad \Rightarrow \quad y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 16y_n^{(1)} + 20y_n^{(2)}.$$

З першого рівняння системи

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{4}\left(y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)}\right),$$

тоді $y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 16y_n^{(1)} + 5\left(y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)}\right) \quad \Rightarrow \quad y_{n+2}^{(1)} - 10y_{n+1}^{(1)} + 9y_n^{(1)} = 0.$

Отримали однорідне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, характеристичним рівнянням якого є алгебраїчне рівняння:

$$Z^2 - 10Z + 9 = 0.$$

Корені цього рівняння дорівнюють: $Z_1 = 1; Z_2 = 9$. Звідси знаходимо загальний розв'язок:

$$y_n^{(1)} = C_1 + C_2 9^n,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Послідовність $y_n^{(2)}$ знаходимо з (30.26), але спочатку із отриманого загального розв'язку знайдемо:

$$y_{n+1}^{(1)} = C_1 + C_2 9^{n+1}.$$

Тоді

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{4}\left(C_1 + 9C_2 9^n - 5C_1 - 5C_2 9^n\right) \quad \Rightarrow \quad y_n^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4C_2 9^n - 4C_1\right) = C_2 9^n - C_1.$$

Таким чином, загальним розв'язком вихідної системи є послідовності

$$\begin{aligned} y_n^{(1)} &= \quad C_1 + C_2 \cdot 9^n, \\ y_n^{(2)} &= -C_1 + C_2 \cdot 9^n. \end{aligned}$$



Знайдемо розв'язок неоднорідної системи лінійних різницевих рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = \quad 5y_n^{(1)} - 3y_n^{(2)} + 2 \cdot 3^n, \\ y_{n+1}^{(2)} = \quad y_n^{(1)} + y_n^{(2)} - 5. \end{cases}$$

Запишемо перше рівняння системи у вигляді:

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3y_{n+1}^{(2)} + 2 \cdot 3^{n+1}.$$

Враховуючи друге рівняння, маємо

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3(y_n^{(1)} + y_n^{(2)} - 5) + 2 \cdot 3^{n+1},$$

або

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3y_n^{(1)} - 3y_n^{(2)} + 15 + 2 \cdot 3^{n+1}.$$

З першого рівняння системи отримуємо

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{3}\left(-y_{n+1}^{(1)} + 5y_n^{(1)} + 2 \cdot 3^n\right),$$

тоді:

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3y_n^{(1)} + y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)} - 2 \cdot 3^n + 15 + 2 \cdot 3^{n+1},$$

або

$$y_{n+2}^{(1)} = 6y_{n+1}^{(1)} - 8y_n^{(1)} + 4 \cdot 3^n + 15.$$

Таким чином, отримали неоднорідне різницеве рівняння другого порядку відносно $y_n^{(1)}$

$$y_{n+2}^{(1)} - 6y_{n+1}^{(1)} + 8y_n^{(1)} = 4 \cdot 3^n + 15.$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, характеристичним рівнянням якого є $Z^2 - 6Z + 8 = 0$. Його корені $Z_1 = 2;\quad Z_2 = 4.$ Звідси загальним розв'язком однорідного рівняння є послідовність

$$\overline{y}_n^{(1)} = C_1 2^n + C_2 4^n.$$

Для визначення частинного розв'язку неоднорідного рівняння праву частину рівняння розглядаємо як суму двох спеціальних функцій.

Отже, маємо два випадки для визначення доданків, що складають частинний розв’язок:

1) $y_{n+2}^{(1)} - 6y_{n+1}^{(1)} + 8y_n^{(1)} = 4 \cdot 3^n;$

2) $y_{n+2}^{(1)} - 6y_{n+1}^{(1)} + 8y_n^{(1)} = 15.$

У першому випадку $f_1(n) = 4 \cdot 3^n, P_0(n) = 4,$ а $b = 3,$ тому шукаємо частинний розв'язок у вигляді $\tilde{y}_n^{(1)} = A \cdot 3^n$ ($b = 3$ не є коренем

характеристичного рівняння) та знаходимо A шляхом підстановки $\tilde{y}_n^{(1)} = A \cdot 3^n$ у неоднорідне рівняння:

$$A \cdot 3^{n+2} - 6 \cdot A \cdot 3^{n+1} + 8 \cdot A \cdot 3^n = 4 \cdot 3^n,$$

або

$$9A - 18A + 8A = 4,$$

тобто $A = -4$. Отже, першим доданком частинного розв'язку неоднорідного рівняння є послідовність $\tilde{y}_n^{(1)} = -4 \cdot 3^n$.

У другому випадку $f_2(n) = P_0(n) = 15$, тому частинний розв'язок буде $\tilde{y}_n^{(1)} = B$. Підставивши його в рівняння, отримаємо, що $B = 5$. Отже, $\tilde{y}_n^{(1)} = 5$.

Звідси загальним розв'язком неоднорідного рівняння є послідовність

$$y_n^{(1)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 5.$$

Послідовність $y_n^{(2)}$ знайдемо, якщо використаємо перше рівняння вихідної системи різницевих рівнянь, а саме:

$$-3y_n^{(2)} = y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)} - 2 \cdot 3^n,$$

або

$$-3y_n^{(2)} = C_1 \cdot 2^{n+1} + C_2 \cdot 4^{n+1} - 4 \cdot 3^{n+1} + 5 - 5 \cdot C_1 \cdot 2^n - 5 \cdot C_2 \cdot 4^n +$$
$$+20 \cdot 3^n - 25 - 2 \cdot 3^n = -3 \cdot C_1 \cdot 2^n - C_2 \cdot 4^n + 6 \cdot 3^n - 20.$$

Отже, $$y_n^{(2)} = C_1 2^n + \frac{C_2}{3} 4^n - 2 \cdot 3^n + \frac{20}{3}.$$

Таким чином, загальним розв'язком даної неоднорідної системи рівнянь будуть послідовності

$$y_n^{(1)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 5,$$
$$y_n^{(2)} = C_1 2^n + \frac{C_2}{3} 4^n - 2 \cdot 3^n + \frac{20}{3}.$$



Ключові терміни

Різницеве рівняння; порядок різницевого рівняння; розв'язок різницевого рівняння (загальний, частинний); початкові умови; числова послідовність; різницеве лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами; однорідне різницеве

рівняння; неоднорідне різницеве рівняння; характеристичне рівняння; спеціальна права частина; лінійна система різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами; однорідна система різницевих рівнянь; загальний розв'язок системи.



Запитання для самоперевірки

1. Який вигляд має лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами?
2. Що називається розв'язком різницевого рівняння?
3. Запишіть однорідне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами.
4. Яке рівняння називається характеристичним для даного різницевого і як воно отримується?
5. У якому вигляді знаходимо загальний розв'язок однорідного різницевого рівняння залежно від коренів характеристичного рівняння:

а) корені дійсні різні;

б) корені рівні;

в) корені комплексно-спряжені?

6. Який вигляд мають початкові умови для різницевого рівняння k-го порядку?
7. Який вигляд мають неоднорідні різницеві рівняння зі спеціальною правою частиною?
8. Запишіть структуру загального розв'язку неоднорідного різницевого рівняння.
9. У якому вигляді знаходяться частинні розв'язки неоднорідного різницевого рівняння залежно від правої частини рівняння?
10. Який вигляд мають системи лінійних різницевих рівнянь k-го порядку?
11. Як задаються початкові умови для системи лінійних рівнянь?
12. Який метод розв'язання систем лінійних різницевих рівнянь k-го порядку ви знаєте?

Глава 31. Використання диференціальних та різницевих рівнянь в економічних задачах

Розглянемо ряд традиційних задач, математичними моделями яких є диференціальні та різницеві рівняння.

31.1. Визначення первісної для неперервної функції

Нагадаємо, що похідна визначає швидкість змінювання функції незалежно від того, який процес ця функція описує. Отже, найпростішим диференціальним рівнянням є рівняння виду:

$$F'(x) = f(x). \tag{31.1}$$

Тобто операція відшукання первісної для заданої функції $f(x)$ це і є інтегрування диференціального рівняння (31.1). Отже,

$$F(x) = \int f(x)dx + C. \tag{31.2}$$

 Нехай функція граничних витрат y' залежно від обсягу виробництва x має вигляд:

$$y' = 60 + 0,04x.$$

Знайдемо функцію витрат виробництва. Для цього проінтегруємо диференціальне рівняння й отримаємо:

$$\int dy = \int (60 + 0,04x)\,dx + C.$$

Тобто функція витрат має вигляд:

$$y = 60x + 0,02x^2 + C.$$

Довільну сталу C можна визначити із початкових умов.

 Нехай функція граничного прибутку залежно від обсягу виробництва x має вигляд:

$$R'(x) = (5 - x)e^{-\frac{x}{5}}.$$

Знайдемо функцію прибутку $R(x)$ як розв'язок задачі Коші для даного диференціального рівняння. Початкова умова в таких задачах очевидна: при $x=0$ маємо $R(x)=0.$

Знаходимо первісну $R(x)$.

Отже,

$$R(x)=\int(5-x)e^{-\frac{x}{5}}dx+C.$$

Для обчислення інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int(5-x)e^{-\frac{x}{5}}dx=-5(5-x)e^{-\frac{x}{5}}-5\int e^{-\frac{x}{5}}dx=-5(5-x)e^{-\frac{x}{5}}+25e^{-\frac{x}{5}}+C.$$

З початкової умови $R(0)=0$ маємо: $C=0$.

Отже, функція прибутку залежно від обсягу виробництва визначається як

$$R(x)=5xe^{-\frac{x}{5}}.$$

31.2. Відшукання еластичності функції

Нагадаємо, що для функції однієї змінної $y=f(x)$ її ***еластичністю*** називається добуток аргументу x на темп змінювання функції y, а саме:

$$E_x(y)=x\frac{y'}{y}. \qquad (31.3)$$

Якщо еластичність функції задано, маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції y.



Знайдемо функцію витрат залежно від обсягу виробництва x, якщо еластичність цієї функції є сталою величиною, тобто $E_x(y)=a-const.$

Відповідно з умовою задачі та за формулою (31.3) маємо рівняння:

$$a=x\frac{y'}{y},\ \text{або}\ y'=\frac{ay}{x}.$$

Звідси

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{x};\ \frac{dy}{y}=a\frac{dx}{x};\qquad \int\frac{dy}{y}=a\int\frac{dx}{x}+\ln C;\qquad \ln|y|=a\ln|x|+\ln|C|.$$

Отже, загальним розв'язком рівняння є функція $y=Cx^a$.



Знайдемо функцію попиту $x = x(p)$, де x – обсяг товару, а p – його ціна, якщо відомо значення ціни p_0 у точці x_0, а еластичність попиту має вигляд:

$$E_p(x) = \frac{x-100}{x};\ x_0 = 10 \text{ при } p_0 = 90.$$

Згідно з означенням (31.3) еластичність попиту має вигляд:

$$E_p(x) = p \cdot \frac{x'}{x}.$$

За умовою задачі маємо диференціальне рівняння:

$$\frac{x-100}{x} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x},$$

яке є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Отже, треба знайти частинний розв'язок цього рівняння, що задовольняє дану початкову умову. Визначаємо загальний розв'язок:

$$\frac{dx}{x-100} = \frac{dp}{p} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x-100} = \int \frac{dp}{p} + \ln|C|.$$

Таким чином, маємо:

$$\ln|x-100| = \ln|p| + \ln|C|,\ C \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x-100 = pC.$$

Значення сталої C знайдемо за початковою умовою: $x_0 = 10$, $p_0 = 90$. Отже,

$$10-100 = 90C,\ C = -1.$$

Остаточно функція попиту залежно від ціни товару має вигляд:

$$x = 100 - p.$$



Знайдемо ціну p товару як функцію його обсягу x, якщо ціна одиниці товару становить $p = 18$, а еластичність ціни має вигляд:

$$E_x(p) = \frac{p-20}{p}.$$

За формулою (31.3) еластичність ціни визначається як:

$$E_x(p) = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{x}{p}.$$

Тоді за умовою задачі:

$$\frac{p-20}{p} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{x}{p}.$$

Звідси,

$$\frac{dp}{p-20} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dp}{p-20} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|, \; C \neq 0.$$

Отже,

$$\ln|p-20| = \ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad p - 20 = Cx.$$

За початковою умовою $p_0 = 18$ при $x_0 = 1$ визначаємо сталу C:

$$18 - 20 = C \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad C = -2.$$

Ціна товару залежно від обсягу товару визначається функцією:

$$p = 20 - 2x.$$

31.3. Модель природного зростання

Припустимо, що функція $y = y(t)$ у точці t змінюється зі швидкістю, яка пропорційна значенню функції в цій точці, тобто:

$$y'(t) = ky(t), \tag{31.4}$$

де $k = const$ – коефіцієнт пропорційності.

Отже, функція $y(t)$ задовольняє диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язок якого отримуємо у вигляді загального інтеграла:

$$\int \frac{dy}{y} = k\int dt + \ln|C|, \; C \neq 0 \Rightarrow \ln|y| = kt + \ln|C|,$$

або в явному вигляді

$$y = C \cdot e^{kt}, \; C = const. \tag{31.5}$$

Вперше це рівняння отримав Якоб Бернуллі. Воно називається ***рівнянням природного зростання*** й описує багато різних процесів у природі та суспільстві. Так, якщо у певної рослини або тварини немає природних ворогів, достатньо території та їжі, то кількість популяції необмежено зростає за цим

законом. В економіці цим рівнянням описують: процеси кредитування, випуск продукції, зростання грошового внеску в банк, зростання населення.



Задача Бернуллі про кредитування. Нехай позичальник за користування кредитом щорічно виплачує кредиторові відсотки $p\,\%$ від початкової суми X_0. Визначимо, скільки він повинен сплатити за рік на кожну одиницю позиченої суми, якщо відсотки зростають неперервно.

За умовою задачі відсотки зростають неперервно, отже, швидкість зменшення боргу $y(t)$ у момент часу t пропорційна значенню цієї величині у той же момент часу з коефіцієнтом пропорційності $k=\frac{p}{100}$. Звідси маємо рівняння:

$$y'(t)=\frac{p}{100}y(t).$$

Загальним розв'язком цього рівняння є $y(t)=C\cdot e^{\frac{p}{100}t}$. З початкової умови задачі при $t_0=0, y=X_0$ отримуємо: $y(t)=X_0e^{\frac{p}{100}\cdot t}$.

Таким чином, за кожну одиницю позиченої суми позичальник зобов'язаний сплачувати

$y(t)=X_0e^{\frac{p}{100}\cdot t}$ гр. од., а за рік ця сума складе: $y(1)=X_0\cdot e^{\frac{p}{100}}$ гр. од.



Модель природного зростання випуску продукції. Знайдемо закон зростання випуску продукції за умов, що ринок не насичується.

Припустимо, що деякий товар продається за ціною p, а кількість товару на момент часу t визначається як $y=y(t)$. Тоді прибуток, який отримано на момент часу t, становить $R(t)=p\cdot y(t)$. Якщо ринок не насичується, то підприємство впродовж довгого часу буде мати прибуток, тому доцільно розширювати виробництво. Отже, частина отриманого прибутку буде витрачатись на розширення виробництва.

Нехай на інвестиції $I(t)$ у розширення виробництва витрачається m-та частина доходу, тобто:

$$I(t)=\frac{py(t)}{m}. \qquad (31.6)$$

Завдяки розширенню виробництва зростає прибуток, і його m-та частина теж використовується на розширення випуску продукції. Це приведе до зростання швидкості випуску $y'(t)$, яка буде пропорційною збільшенню інвестицій. Тобто $y'(t) = aI(t)$, або $y'(t) = \frac{ap}{m} y(t)$ $(a - const)$. Отже, ми одержали дифе-ренціальне рівняння виду (31.4), де $k = \frac{ap}{m}$, а саме – рівняння природного зростання. Загальним розв'язком цього рівняння є функція $y = C \cdot e^{kt}$, яка у даному випадку показує, на скільки швидко зростає обсяг виробництва, якщо постійно вкладати частину прибутку у його розширення.

31.4. Модель зростання з умовою насиченості

У наведених вище прикладах розв'язком диференціального рівняння природного зростання є функція $y(t) = C \cdot e^{kt}$, яка швидко зростає зі зростанням часу t і може бути використана тільки для обмежених проміжків часу, як правило, на початку виробництва нової продукції. У реальних задачах з часом ринок насичується або зростання кількості населення не може бути нескінченним тощо.

Суперечність моделі (31.4) – (31.5) із реальністю, якщо проміжок часу є достатньо великим, врахована у моделі зростання, в якій коефіцієнт пропорційності k вважається функцією змінної $y(t)$. Наприклад, для зростання кількості населення була запропонована залежність

$$y'(t) = a\left(1 - \frac{y(t)}{b}\right) \cdot y(t), \text{ де } a \text{ і } b - \text{сталі.} \qquad (31.7)$$

Тобто на відміну від рівняння (31.4) коефіцієнт $k = a\left(1 - \frac{y(t)}{b}\right)$ є спадаючою функцією, що залежить від величини $y(t)$.

Рівняння (31.7) є диференціальним рівнянням першого порядку. Відокремивши в ньому змінні, знаходимо:

$$\frac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{b}\right)} = adt.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо загальний розв'язок рівняння:

$$\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b-y}\right)dy = a\int dt + \ln|C|,$$

або $$\ln|y| - \ln|b-y| = at + \ln|C|,\ C\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{b-y} = Ce^{at}.$$

Звідси

$$y(t) = \frac{bCe^{at}}{1+Ce^{at}}. \tag{31.8}$$

Отже, процес зростання в умовах насиченості описується функцією (31.8).

Аналогічну модель можна також використати для зростання випуску продукції в умовах конкуренції.

Покладемо в (31.8) $b=1$ та $C=1$. Якщо для цього випадку чисельник і знаменник функції $y(t)$ поділити на вираз e^{at}, то отримаємо цю функцію у вигляді:

$$y(t) = \frac{1}{1+e^{-at}}. \tag{31.9}$$

Графік функції $y = y(t)$ називається ***логістичною кривою*** (рис. 31.1).

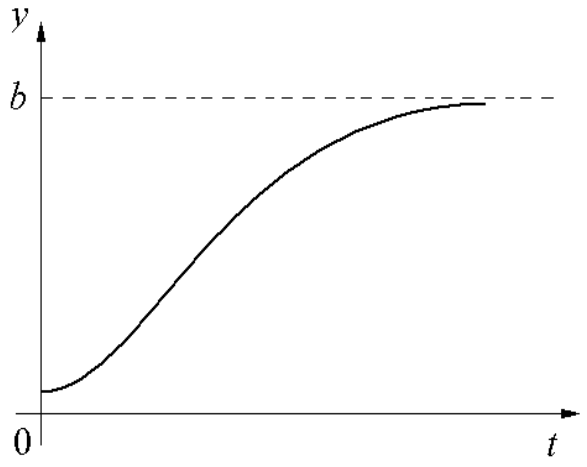


Рис. 31.1

Пряма $y(t) = b$ називається ***прямою насиченості.***

Функція $y = y(t)$ називається ***логістичною функцією.*** Вона використовується у статистичних моделях для прогнозу того, відбудеться чи ні певна подія. Прогноз будується на значеннях великої кількості ознак, а сама функція може приймати лише два значення: 1, якщо подія відбувається, і 0, якщо не відбувається. Це так звані задачі з бінарним відгуком. Сам метод прогнозу має назву ***логіт-регресії.***



Розглянемо приклад. Нехай кількість населення деякої держави залежно від часу t задовольняє рівняння

$$\frac{dy}{dt}=0,2y\left(1-\frac{y}{10^4}\right).$$

У початковий момент часу $(t=0)$ кількість населення сягала 1000 осіб. Визначити, через скільки років ця кількість збільшиться у 4 рази.

За умовою задачі $a=0,2;\ b=10^4$. Згідно з (31.8) одержимо:

$$y(t)=\frac{10^4Ce^{0,2t}}{1+Ce^{0,2t}}.$$

Визначаємо сталу C з початкової умови: $y(0)=1000$. Отримуємо рівняння:

$$10^3=\frac{10^4C}{1+C}\quad\Rightarrow\quad 1+C=10C.$$

Звідки: $C=\frac{1}{9}$. Частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y(t)=\frac{10^4\cdot 9^{-1}e^{0,2t}}{1+9^{-1}e^{0,2t}}.$$

За умовою задачі треба визначити, при якому значенні аргументу t функція матиме значення $y(t)=4\cdot 10^3$. Розв'яжемо рівняння:

$$4\cdot 10^3=\frac{10^4\cdot 9^{-1}e^{0,2t}}{1+9^{-1}e^{0,2t}}\quad\Rightarrow\quad 2=\frac{5}{9e^{-0,2t}+1}.$$

З останньої рівності маємо:

$$18e^{-0,2t}=3\quad\Rightarrow\quad e^{0,2t}=6.$$

Таким чином, $0,2t=\ln 6$, $t=8,96$. Отже, населення держави зросте у 4 рази приблизно через 9 років.

31.5. Динаміка ринкових цін

Попит та пропозиція є основними економічними категоріями ринкових відносин. Позначимо через $x = x(p)$ функцію попиту залежно від ціни одиниці товару p, а через $y = y(p)$ – відповідну пропозицію, яка також є функцією ціни одиниці товару.

Розглянемо найпростішу модель, в якій попит та пропозиція є лінійними функціями ціни одиниці товару, а саме:

$$\begin{aligned} x(p) &= a - bp, \\ y(p) &= np + m, \end{aligned} \qquad (a, b, n, m - \text{ додатні сталі}). \tag{31.10}$$

Дійсно, попит залежно від ціни товару повинен спадати зі зростанням p, а пропозиція, навпаки, – зростати. У випадку низьких цін попит буде перевищувати пропозицію ($x(p) > y(p)$), а якщо ціна буде занадто великою – навпаки, пропозиція перевищуватиме попит ($y(p) > x(p)$). Ринок буде збалансованим, якщо попит буде дорівнювати пропозиції, тобто $y(p) = x(p)$. Напам'ятаємо, що відповідне значення ціни одиниці товару p_0 у цьому випадку називається ***ціною рівноваги***, або ***рівноважною ціною***, а попит та пропозиція – ***рівноважними***. Знайдемо рівноважну ціну з умови $x(p) = y(p)$.

За формулами (31.10) маємо:

$$a - bp_0 = np_0 + m,$$

звідки

$$p_0 = \frac{a - m}{n + b}. \tag{31.11}$$

При рівноваговій ціні ринок залежно від часу є збалансованим, а ціна на товар лишається сталою.

У дійсності попит далеко не завжди знаходиться у відповідності із пропозицією, тобто $x(p) > y(p)$ або $y(p) > x(p)$. Отже, виникає потреба розглянути динамічну модель, у якій ціна товару змінюється протягом часу, тобто $p = p(t)$ і дати відповідь на запитання, за який проміжок часу ціна буде прямувати до ціни рівноваги.

Визначимо $p = p(t)$ у припущенні, що швидкість змінювання ціни в будь-який момент часу t є прямо пропорційною різниці між попитом та пропозицією у той же самий момент часу. Отже,

$$\frac{dp}{dt} = k\big(x(p) - y(p)\big), \quad (k > 0).$$

Відповідно із (31.10) одержимо рівність:

$$\frac{dp}{dt} = k(a - bp - np - m) \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dt} = k\big(a - m - p(b+n)\big). \qquad (31.12)$$

Перепишемо рівність (31.12) дещо інакше:

$$\frac{dp}{dt} + p \cdot k(b+n) = k(a-m). \qquad (31.13)$$

Таким чином, динамічна модель описується лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку.

Оскільки права частина (31.13) є сталою, то можна розглядати рівняння (31.13) як рівняння з відокремлюваними змінними, а саме:

$$dp = (k(a-m) - p \cdot k(b+n))dt \Rightarrow \frac{dp}{k(a-m) - p \cdot k(b+n)} = dt. \quad (31.14)$$

Інтегруючи ліву та праву частини рівняння (31.14), одержимо його загальний інтеграл:

$$\int \frac{dp}{k(a-m) - p \cdot k(b+n)} = \int dt + C_1. \qquad (31.15)$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (31.13) має вигляд:

$$p(t) = C e^{-k(b+n)t} + \frac{a-m}{b+n}. \qquad (31.16)$$

Знайдемо сталу C із початкової умови: ціна у початковий момент часу $t = 0$ дорівнює $p(0)$. Отже,

$$p(0) = C + \frac{a-m}{b+n} \qquad \Rightarrow \qquad C = p(0) - \frac{a-m}{b+n}.$$

Таким чином,

$$p(t) = \left(p(0) - \frac{a-m}{b+n} \right) e^{-k(b+n)t} + \frac{a-m}{b+n}, \qquad (31.17)$$

або з урахуванням (31.11)

$$p(t) = (p(0) - p_0) e^{-k(b+n)t} + p_0.$$

Розглянемо тенденції $p(t)$ залежно від часу. Припустимо, що $t \to \infty$, тоді

$$p(t) \to \frac{a-m}{b+n},$$

тобто $p(t)$ прямує до ціни рівноваги p_0, і ринок динамічно стабільний.

Залежно від співвідношення ціни у початковий момент часу $p(0)$ і рівноважної ціни p_0 (див. (31.11)) маємо такі випадки:

1) $p(0) = \frac{a-m}{b+n} = p_0, \quad p(t) = \frac{a-m}{b+n} = p_0$, отже, ринок стабільний;

2) $p(0) > \frac{a-m}{b+n} = p_0$, отже, крива $p(t)$ буде розміщена вище прямої рівноваги $p(t) = p_0$;

3) $p(0) < \frac{a-m}{b+n} = p_0$, отже, крива $p(t)$ буде розміщена нижче прямої рівноваги $p(t) = p_0$.

На рис 31.2 подана крива $p(t)$ для різних співвідношень початкової та рівноважної цін.

На рис. 31.2 наведено розташування кривої $p(t)$, що описує зміну ціни одиниці товару у часі, і прямої рівноваги.

Таким чином, в усіх розглянутих вище випадках для динамічної стабілізації ринку повинна задовольнятись умова $k(b+n) > 0$.

Розглянемо задачу попиту та пропозиції у дещо іншій постановці. Як відзначалося раніше, попит $x(p)$ і пропозиція $y(p)$ – це економічні категорії товарного виробництва, які функціонують на ринку.

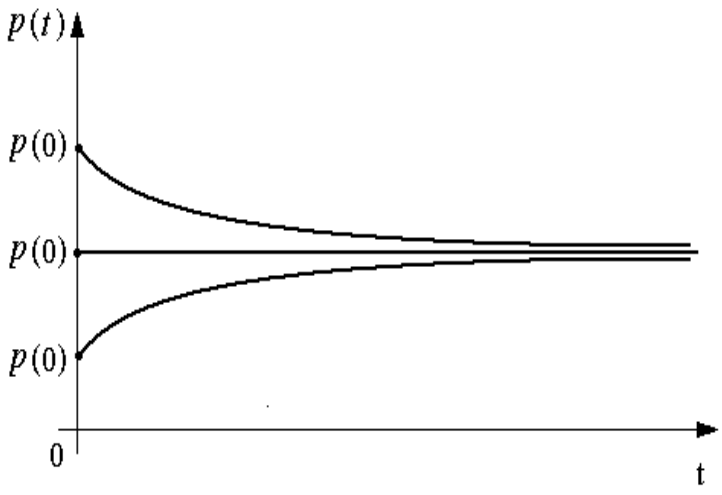


Рис. 31.2

При цьому і попит, і пропозиція є функціями ціни товару p, і основна проблема ринкових відносин полягає у приведенні у відповідність попиту та пропозиції залежно від часу. Необхідно визначити таку залежність ціни від часу, щоб між попитом і пропозицією зберігалась рівновага.

Якщо позначити функцію ціни $p = p(t)$, то її похідна $p' = p'(t)$ – це тенденція формування ціни на ринку. Залежно від різних факторів попит і пропозиція можуть бути різними функціями ціни, а також тенденцій формування ціни. Найпростіший випадок – це лінійна залежність:

$$x(p, p') = a_1 p' + b_1 p + c_1;$$
$$y(p, p') = a_2 p' + b_2 p + c_2.$$

За умови рівності $x(p, p') = y(p, p')$ одержимо диференціальне рівняння з відокремлюванними змінними:

$$(a_1 - a_2) p' + (b_1 - b_2) p + c_1 - c_2 = 0,$$

або
$$(a_1 - a_2) \frac{dp}{dt} = (b_2 - b_1) p + c_2 - c_1.$$

Загальним інтегралом цього рівняння є:

$$(a_1 - a_2) \int \frac{dp}{(b_2 - b_1) p + c_2 - c_1} = \int dt + C.$$

Отже,

$$\frac{(a_1 - a_2)}{b_2 - b_1} \ln\left|(b_2 - b_1) p + c_2 - c_1\right| = t + C, \qquad (31.18)$$

де C – стала величина, що визначається з початкових умов: $t = 0; \quad p = p_0$.



Функції попиту та пропозиції мають вигляд:

$$x = 30 - p - 4\frac{dp}{dt},$$
$$y = 20 + p + \frac{dp}{dt}.$$

Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо $p = 7$ при $t = 0$.

Визначимо рівноважну ціну залежно від часу з умови $x(p, p') = y(p, p')$.

Отже,

$$30 - p - 4\frac{dp}{dt} = 20 + p + \frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad -2p + 10 = 5\frac{dp}{dt}.$$

Тоді

$$\frac{dp}{p-5}=-\frac{2}{5}dt \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dp}{p-5}=-\frac{2}{5}\int dt+C.$$

Звідси знаходимо:

$$\ln|p-5|=-0,4t+C \quad \Rightarrow \quad p=e^{-0,4t+C}+5.$$

Визначаємо сталу C із початкової умови $(t=0;\,p=7)$:

$7=e^{C}+5\Rightarrow e^{C}=2.$

Тоді рівноважна ціна залежно від часу має вигляд: $p=2e^{-0,4t}+5.$

Відзначимо, що при $t\to\infty$, рівноважна ціна має границю $\lim\limits_{t\to\infty}p=5$, тобто є стійкою.



Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$x(p,p')=50-2p-4\frac{dp}{dt};$$
$$y(p,p')=70+2p-5\frac{dp}{dt}.$$

1. Знайти залежність рівноважної ціни p від часу, якщо $p=10$, $t=0$.

2. Знайти $\lim\limits_{t\to\infty}p$ і перевірити, чи є рівноважна ціна стійкою.

Для відшукання рівноважної ціни прирівнюємо попит і пропозицію та отримуємо рівняння:

$$50-2p-4\frac{dp}{dt}=70+2p-5\frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dt}=20+4p.$$

Звідси,

$$\frac{dp}{20+4p}=dt \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dp}{20+4p}=\int dt+C.$$

Отже,

$$\frac{1}{4}\ln|20+4p|=t+C \quad \Rightarrow \quad 20+4p=e^{4t+4C}.$$

З початкової умови ($p=10$ при $t=0$) маємо, що $60=e^{4C} \Rightarrow 20+4p=60e^{4t}$.

Отже, $p=15e^{4t}-5$.

Знайдемо $\lim\limits_{t\to\infty} p$: $\lim\limits_{t\to\infty}(15\cdot e^{4t}-5)=\infty$. Звідси випливає, що рівноважна ціна є нестійкою, а саме зростає у часі.



Нехай попит і пропозиція на товар визначаються співвідношеннями

$$x(p,p',p'')=2p''-p'-p+15;\quad y(p,p',p'')=3p''+p'+p+5,$$

де p – ціна товару; p' – тенденція формування ціни; p'' – темп зміни ціни. Нехай також у початковий момент часу $p(0)=6,\quad x(0)=y(0)=10.$ Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни від часу.

З умови рівноваги попиту та пропозиції, маємо

$$x=y.$$

Отже,

$$2p''-p'-p+15=3p''+p'+p+5,$$

звідки одержуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$p''+2p'+2p=10.$$

Відповідне однорідне рівняння:

$$p''+2p'+2p=0.$$

Характеристичне рівняння $k^2+2k+2=0$ має корені $k_{1,2}=-1\pm i.$

Загальний розв’язок однорідного рівняння запишеться таким чином:

$$\bar{p}(t)=C_1e^{-t}\cos t+C_2e^{-t}\sin t.$$

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$\tilde{p}=A.$$

Тоді

$$\tilde{p}'=0;\quad \tilde{p}''=0.$$

Підставивши ці значення в диференціальне рівняння, отримаємо

$$2A=10,$$

$$A=5,\quad \tilde{p}=5.$$

Загальний розв’язок буде таким:

$$p(t)=e^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)+5.$$

Врахуємо початкові умови:

$$p(0)=6;\quad 6=C_1+5;\quad C_1=1.$$

Тоді

$$p(t)=e^{-t}(\cos t+C_2\sin t)+5;$$

$$p'(t)=-e^{-t}(\cos t+C_2\sin t)+e^{-t}(-\sin t+C_2\cos t)=$$

$$=e^{-t}[(C_2-1)\cos t-(C_2+1)\sin t];$$

$$p''(t)=-e^{-t}[(C_2-1)\cos t-(C_2+1)\sin t]+e^{-t}[-(C_2-1)\sin t-(C_2+1)\cos t]=$$

$$=e^{-t}[-2C_2\cos t+2\sin t].$$

Звідси,

$$p'(0)=C_2-1$$

$$p''(0)=-2C_2.$$

Враховуючи, що $x=2p''-p'-p+15$ і $x(0)=10,$ знаходимо

$$10=2(-2C_2)-(C_2-1)-6+15,$$

звідки $C_2=0.$ Отже, $p(t)=5+e^{-t}\cos t.$

31.6. Використання різницевих рівнянь в економіці

Розглянемо деякі економічні задачі, математичними моделями яких є різницеві рівняння. Відзначимо, що у задачах, які зводяться до диференціальних рівнянь, розглядається функція $y = f(x)$ або $y = f(t)$ на даному етапі часу t незалежно від того, який процес ця функція описує. Однак можливі випадки, коли математичною моделлю задачі є співвідношення між значенням функції, яку потрібно визначити на даному етапі часу, та її значеннями на попередніх етапах часу: $y_{t-1} = y(t-1)$, $y_{t-2} = y(t-2)$ та ін. Задача у такій постановці зводиться не до диференціальних, а до різницевих рівнянь. Традиційними моделями задач такого типу є ***павутинна модель ринку*** та економічна ***модель розвитку Самюельсона – Хікса***.

31.6.1. Павутинна модель ринку. Розглянемо задачу щодо попиту та пропозиції в такій постановці. Припустимо, що ціна товару на ринку є функцією часу $p(t)$, а пропозиція $y(p)$ розглядається залежно від ціни товару на попередньому часовому етапі $p(t-1)$, тоді як попит $x(p)$ залежить від ціни товару у даний момент часу $p(t)$. Тобто попит і пропозиція описуються рівняннями:

$$y(t) = m + np(t-1),$$
$$x(t) = a - bp(t),$$

де a, b, m, n – додатні сталі.

Виходячи з умов відповідності попиту та пропозиції, маємо різницеве рівняння для відшукання рівноважної ціни у момент часу t:

$$a - bp(t) = m + np(t-1),$$

або

$$p_t + \frac{n}{b} p_{t-1} = \frac{a-m}{b}. \qquad (31.19)$$

При початковій умові $p_t = p_{t-1} = p_0$ одержуємо рівноважну ціну $p_0 = \frac{a-m}{b+n}$, яка від часу не залежить.

Загальний розв'язок різницевого рівняння першого порядку є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку даного неоднорідного рівняння:

$$p_t = \overline{p}_0 + \frac{a-m}{b+n}. \qquad (31.20)$$

Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$p_t + \frac{n}{b} p_{t+1} = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння $z + \frac{n}{b} = 0$, коренем якого є $z = -\frac{n}{b}$. Отже, загальним розв'язком однорідного різницевого рівняння є послідовність $\overline{p}_t = C\left(-\frac{n}{b}\right)^t$, а загальним розв'язком вихідного неоднорідного рівняння – послідовність

$$p_t = C\left(-\frac{n}{b}\right)^t + \frac{a-m}{b+n}. \qquad (31.21)$$

Якщо $n < b$, то послідовність p_t має коливальний характер і збігається до ціни рівноваги. Якщо $n = b$, то p_t періодично коливається відносно ціни рівноваги. Якщо $n > b$, то при $t \to \infty$ $\left|\left(-\frac{n}{b}\right)^t\right| \to \infty$ (рівновага нестійка). У дійсності нескінченно зростаючі коливання неможливі, тому що при великих відхиленнях від рівноваги лінійні залежності попиту і пропозиції від ціни не реалізуються.

31.6.2. Модель розвитку Самюельсона – Хікса. Нехай функція $y_t = y(t)$ описує національний дохід, $c = c(t)$ є функцією споживання на даному етапі t. Припустимо, що на даному етапі споживання запізнюється від національного прибутку, тобто залежить від національного прибутку на попередньому етапі часу як $y_{t-1} = y(t-1)$. Відповідно

$$c(t) = my_{t-1} + A, \qquad (31.22)$$

де m – гранична швидкість споживання, яка показує, на скільки збільшується споживання, якщо прибуток зростає на одиницю: $m = \frac{\Delta c}{\Delta y}$, A – постійні витрати.

Припустимо також, що підприємці вкладають інвестиції $i(t)$ після того, як переконаються, що приріст національного прибутку є стійким. Тобто

$$i(t) = a\left(y_{t-1} - y_{t-2}\right), \tag{31.23}$$

де a – фактор ***акселерації*** ($a > 0$).

Умова рівноважності попиту та пропозиції має вигляд:

$$y(t) = c(t) + i(t),$$

або

$$y_t = (a+m)\, y_{t-1} - a y_{t-2} + A. \tag{31.24}$$

Рівняння (31.24) називається ***рівнянням Хікса***. Якщо величини a, m, А є сталими, то рівняння Хікса є лінійним неоднорідним різницевим рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння має вигляд:

$$Z^2 - (a+m)Z + a = 0. \tag{31.25}$$

Найцікавішим для досліджень є випадок комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння (у цьому разі розв'язок має коливальний характер). Це має місце, коли дискрименант рівняння

$$D = \frac{(a+m)^2}{4} - a < 0,$$

отже, коренями характеристичного рівняння є комплексно-спряжені числа:

$$Z_{1,2} = \frac{a+m}{2} \pm i\sqrt{-D}\,.$$

Таким чином, загальним розв'язком однорідного різницевого рівняння є послідовність:

$$\bar{y}_t = \rho^t \left(C_1 \cos\varphi t + C_2 \sin\varphi t\right), \tag{31.26}$$

де

$$\rho = \sqrt{\frac{(a+m)^2}{4} - D} = \sqrt{\frac{(a+m)^2}{4} - \frac{(a+m)^2}{4} + a} = \sqrt{a}\,,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-D}}{\frac{a+m}{2}} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4a}{(a+m)^2} - 1}\,.$$

Знайдемо частинний розв'язок різницевого рівняння (31.24), який шукатимемо у вигляді $\bar{y}_t = C$. Послідовність $\bar{y}_t = C$ підставимо у рівняння і визначимо сталу:

$$C = \frac{A}{1-(a+m)+a} = \frac{A}{1-m}.$$

Загальним розв'язком різницевого рівняння Хікса є послідовність

$$y_t = \left(\sqrt{a}\right)^t \left(c_1 \cos t\varphi + c_2 \sin t\varphi\right) + \frac{A}{1-m}. \qquad (31.27)$$

У реальних задачах економіки $m < 1$ та $a > 1$. При таких значеннях граничної швидкості споживання m і фактора акселерації a розв'язок рівняння Хікса є нестійким і має коливальний характер. Це означає, що навіть при сталому темпі капіталовкладень економіка має нестійкий характер і періоди зростання змінюються періодами спаду.



Розв'яжемо рівняння Хікса, якщо $a = 1,22$; $m = 0,98$; $A = 0,05$. За таких умов рівняння (31.24) набуває вигляду:

$$y_t - 2,2\,y_{t-1} + 1,22\,y_{t-2} = 0,05. \qquad (31.28)$$

Знайдемо частинний розв'язок даного рівняння. З виглядом правої частини маємо $\bar{y}_t = C$. Підставимо $\bar{y}_t = C$ у вихідне рівнянні й отримаємо:

$$C - 2,2C + 1,22C = 0,05 \quad \Rightarrow \quad C = 2,5.$$

Отже, маємо частинний розв'язок неоднорідного різницевого рівняння $\bar{y}_t = 2,5$.

Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. За його характеристичним рівнянням

$$Z^2 - 2,2Z + 1,22 = 0$$

знаходимо корені $Z_{1,2} = 1,1 \pm 0,1i$.

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\overline{y}_t = \left(\sqrt{a}\right)^t \left(C_1 \cos \varphi t + C_2 \sin \varphi t\right), \qquad (31.29)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{0,1}{1,1} = 0,09. \qquad (31.30)$$

Отже,

$$\overline{y}_t = \left(\sqrt{1,22}\right)^t \left(C_1 \cos 0,09t + C_2 \sin 0,09t\right).$$

Таким чином, загальним розв'язком неоднорідного різницевого рівняння є послідовність

$$y_t = \left(\sqrt{1,22}\right)^t \left(C_1 \cos 0,09t + C_2 \sin 0,09t\right) + 2,5. \qquad (31.31)$$



Ключові терміни

Рівняння природного зростання; задача Бернуллі про кредитування; зростання з умовою насиченості; логістична крива; пряма насиченості; ціна рівноваги; павутинна модель ринку; модель розвитку Самюельсона – Хікса; рівняння Хікса.



Запитання для самоперевірки

1. Наведіть приклади економічних задач, в яких невідома функція визначається на основі її еластичності.

2. Моделлю яких економічних задач є модель природного зростання?

3. Які особливості має модель зростання з умовою насиченості?

4. Якщо задані функції попиту та пропозиції, то яка ціна на продукцію називається рівноважною?

5. Яка математична модель враховує динаміку ринкових цін?

6. Поясніть поняття павутинної моделі ринку.

7. Запишіть різницеве рівняння Хікса.

8. Моделлю яких економічних задач є модель Самюельсона – Хікса?

Приклади та вправи за розділом 7

Приклади використання теорії диференціальних рівнянь
для розв'язання задач з економіки

7.1. Нехай функція граничних витрат має вигляд:

$$y' = 55 + 0{,}06x\,.$$

Знайти функцію витрат виробництва.

Розв'язання. Дане рівняння перепишемо так:

$$\frac{dy}{dx} = 55 + 0{,}06x \quad \Rightarrow \quad dy = (55 + 0{,}06x)dx\,.$$

Диференціали рівні, тоді інтеграли теж є рівними з точністю до константи. Отже,

$$\int dy = \int (55 + 0{,}06x)dx + C.$$

Тобто функція витрат має вигляд:

$$y = 55x + 0{,}03x^2 + C\,.$$

Довільну сталу C можна визначити, якщо задана початкова умова.

7.2. Нехай функція граничного прибутку має вигляд:

$$R' = 40 - 0{,}08x\,.$$

Знайти функцію прибутку R.

Розв'язання. Перетворимо вихідне рівняння:

$$\frac{dR}{dx} = 40 - 0{,}08x \quad \Rightarrow \quad dR = (40 - 0{,}08x)dx\,,$$

звідси

$$\int dR = \int (40 - 0{,}08x)dx + C \quad \Rightarrow \quad R = 40x - 0{,}04x^2 + C\,.$$

Зрозуміло, що при $x = 0$ прибуток дорівнює нулю, тому $C = 0$.

Отже, функція прибутку має вигляд:

$$R(x) = 40x - 0{,}04x^2\,.$$

7.3. Знайти ціну товару як функцію обсягу x, якщо ціна одиниці товару $p = 20$, а еластичність ціни має вигляд:

$$E_x(p) = \frac{p - 40}{p}.$$

Розв'язання. Використовуючи формулу

$$E_x(p) = \frac{x}{p}\frac{dp}{dx},$$

маємо:

$$\frac{x}{p}\frac{dp}{dx} = \frac{p - 40}{p}, \text{ або } \frac{dp}{p - 40} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{dp}{p - 40} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|p - 40| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Звідси $p - 40 = C \cdot x$.

З початкової умови знаходимо значення сталої C:

$$20 - 40 = C \quad \Rightarrow \quad C = -20.$$

Отже, ціна товару як функції обсягу така:

$$p = 40 - 20x.$$

7.4. Знайти функцію попиту $x = x(p)$, де x – обсяг товару, p – його ціна, якщо відома ціна p при заданому обсязі товару, а еластичність попиту має вигляд:

$$E_p(x) = \frac{x - 50}{x},$$

а $x(15) = 20$.

Розв'язання. За означенням еластичності маємо:

$$E_p(x) = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}.$$

Отже, диференціальне рівняння має вигляд:

$$\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{x - 50}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x - 40} = \frac{dp}{p}.$$

Далі інтегруємо:

$$\int \frac{dx}{x-40} = \int \frac{dp}{p} + \ln|C|$$

і одержуємо

$$\ln|x-50| = \ln|p| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad x - 50 = pC.$$

Сталу C знаходимо з початкової умови:

$$20 - 50 = 15C \quad \Rightarrow \quad C = -2.$$

Отже, функція попиту має вигляд:

$$x = 50 - 2p.$$

7.5. Знайти виробничу функцію, якщо відомо, що $y(1) = 10$, а залежність еластичності виробничої функції від кількості вкладених коштів x визначається функцією:

$$E_x(y) = \frac{x^2 + y^2}{y^2},$$

де y – обсяг виробництва (в одиницях вартості).

Розв'язання. Відомо, що за означенням еластичність виробничої функції визначається як

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}.$$

Отже, маємо диференціальне рівняння:

$$\frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{dy}{dx}.$$

Звідси отримуємо $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$, тобто однорідне рівняння.

Зробимо заміну змінної: $\frac{y}{x} = t$, або $y = xt$, тоді $y' = t + xt'$.

Після підстановки рівняння має такий вигляд:

$$\frac{1}{t} + t = t + xt'.$$

Таким чином, ми одержали рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{1}{t} = x\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad tdt = \frac{dx}{x}.$$

Далі інтегруємо

$$\int tdt = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|$$

і звідси отримуємо:

$$\frac{t^2}{2} = \ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2x^2} = \ln|Cx|,$$

або

$$y^2 = 2x^2 \ln|C \cdot x| \Rightarrow \; y = \pm|x|\sqrt{2\ln|C \cdot x|}.$$

Оскільки $x>0$, $y>0$, то $y = x\sqrt{\ln(C \cdot x)^2}$.

Знайдемо значення сталої C із початкової умови: $10 = \sqrt{\ln C^2}$. Підносимо до квадрата обидві частини і маємо: $100 = \ln C^2$, звідки $C^2 = e^{100}$.

Тоді

$$y = x\sqrt{\ln\left(e^{100}x^2\right)} \quad \Rightarrow \quad y = x\sqrt{\ln e^{100} + \ln x^2}.$$

Отже, маємо виробничу функцію: $y = x\sqrt{100 + 2\ln x}$.

7.6. Повні витрати виробництва y залежать від загального обсягу продукції x. Відомо, що граничні та повні витрати для усіх значень x задовольняють рівняння:

$$y' - 2y + x = 0.$$

Знайти функцію повних витрат, яка задовольняє початковій умові: $y(0) = 0$.

Розв'язання. Для знаходження функції повних витрат y треба знайти розв'язок диференціального рівняння:

$$y' - 2y = -x,$$

яке є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Його розв'язок будемо шукати у вигляді: $y = u(x)v(x)$. Звідси $y' = u'v + uv'$, тоді отримаємо:

$$u'v + uv' - 2uv = -x \quad \Rightarrow \quad u'v + u(v' - 2v) = -x.$$

Далі розглядаємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} v' - 2v = 0; \\ u'v = -x. \end{cases}$$

З першого рівняння цієї системи знаходимо функцію $v(x)$ як його частинний розв'язок:

$$\frac{dv}{dx} = 2v \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int dx.$$

Звідси $\ln|v| = 2x$, отже, $v = e^{2x}$.

Цей вираз підставляємо у друге рівняння системи:

$$u'e^{2x} = -x \quad \Rightarrow \quad du = -xe^{-2x}dx.$$

Змінні відокремлені, отже, можна здійснювати інтегрування:

$$\int du = -\int xe^{-2x}dx.$$

Застосувавши інтегрування частинами, маємо:

$$u = -\left(-x\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right) \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

Тоді отримуємо загальний розв'язок рівняння:

$$y = \left(\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + C\right)e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + C \cdot e^{2x}.$$

За початковою умовою знаходимо значення довільної сталої C:

$$0 = \frac{1}{4} + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{4}.$$

Тепер визначаємо частинний розв'язок:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}\left(2x - e^{2x} + 1\right).$$

Отже, функція повних витрат, що задовольняє початковій умові $y(0) = 0$, має вигляд:

$$y = \frac{1}{4}\left(2x - e^{2x} + 1\right).$$

7.7. Функції попиту x та пропозиції y залежно від рівноважної ціни p мають вигляд:

$$x = 40 - 3p - 5\frac{dp}{dt}, \quad y = 60 + p - 4\frac{dp}{dt}.$$

Знайти залежність рівноважної ціни p від часу, якщо $p = 5$ при $t = 0$.

Розв'язання. Якщо попит і пропозиція співпадають, то

$$40 - 3p - 5\frac{dp}{dt} = 60 + p - 4\frac{dp}{dt}.$$

Отримали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{dt} + 4p + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dt} = -4(p + 5).$$

Отже,

$$\frac{dp}{p+5} = -4dt.$$

Тоді

$$\int \frac{dp}{p+5} = -4\int dt + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|p+5| = -4t + \ln|C|,$$

або

$$\ln\left|\frac{p+5}{C}\right| = -4t \quad \Rightarrow \quad C \cdot e^{-4t} = p + 5.$$

З початкової умови знайдемо C:

$$Ce^0 = 5 + 5 \quad \Rightarrow C = 10.$$

Отже, $p + 5 = 10e^{-4t}$, або $p = 10e^{-4t} - 5$.

Таким чином, залежність рівноважної ціни p від часу t має такий вигляд:

$$p = 10e^{-4t} - 5.$$

Зауважимо, що при $t \to \infty$ рівноважна ціна $p \to 5$.

7.8. Нехай попит та пропозиція на певний товар визначаються відповідно співвідношеннями

$$x(p) = 13p' + 3p - 1, \qquad y(p) = 3p' - 2p + 14,$$

де p – ціна за одиницю товару; p' – тенденція формування ціни.

У початковий момент часу ціна за одиницю товару складала 5 гр. од.

Знайти залежність рівноважної ціни від часу. Визначити, чи є рівноважна ціна стійкою.

Розв'язання. Виходячи з умови, що $x(p)=y(p)$, маємо

$$13p'+3p-1=3p'-2p+14 \quad \Rightarrow \quad 2p'+p-3=0.$$

Ми одержали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{-(p-3)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p-3}=-\frac{1}{2}dt,$$

звідки

$$\ln|p-3|=-\frac{t}{2}+\ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{p-3}{C}\right|=-\frac{t}{2},$$

або

$$p-3=C\cdot e^{-\frac{t}{2}}.$$

З початкової умови маємо $5-3=Ce^{0} \Rightarrow C=2$.

Тепер $p=2e^{-\frac{t}{2}}+3$. Рівноважна ціна є стійкою, бо $\lim\limits_{t\to\infty} p=3$.

Отже, для рівноваги попиту та пропозиції необхідно, щоб ціна залежно від часу змінювалася за законом: $p=2e^{-\frac{t}{2}}+3$.

7.9. Чисельність населення деякого регіону задовольняє диференціальне рівняння $y'(t)=0{,}05y\left(1-10^{-6}y\right)$, де час t вимірюється роками. У початковий момент часу населення складало 10 тисяч громадян. Визначити, через скільки років населення зросте в 10 разів.

Розв'язання. Знайдемо розв'язок рівняння:

$$y'=0{,}05y\left(1-10^{-6}y\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}=\frac{0{,}05y}{10^{6}}\left(10^{6}-y\right),$$

звідки

$$\frac{dy}{y\left(10^{6}-y\right)}=\frac{0{,}05}{10^{6}}dt.$$

Інтегруємо:

$$\int\frac{dy}{y\left(10^{6}-y\right)}=\frac{0{,}05}{10^{6}}\int dt+\ln|C|.$$

Дріб $\dfrac{1}{y\left(10^6-y\right)}$ надаємо у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{1}{y\left(10^6-y\right)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{10^6-y}.$$

Звідси маємо рівняння для визначення коефіцієнтів:

$$1=A\left(10^6-y\right)+By.$$

Отже, якщо $y=0$, то $A=10^{-6}$; якщо $y=10^6$, то $B=10^{-6}$.

Тоді:

$$\int\frac{dt}{y\left(10^6-y\right)}=10^{-6}\int\frac{dy}{y}+10^{-6}\int\frac{dy}{10^6-y}=10^{-6}\ln|y|-10^{-6}\ln\left|10^6-y\right|.$$

Отже,

$$10^{-6}\ln|y|-10^{-6}\ln\left|10^6-y\right|=\frac{0,05}{10^6}t+\ln|C_1|,$$

або

$$\ln\left|\frac{y}{10^6-y}\right|=0,05t+\ln|C| \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{y}{10^6-y}\right|=C\cdot e^{0,05t}.$$

Знайдемо C, використовуючи початкову умову (при $t=0$ $y=10^4$):

$$\frac{10^4}{10^6-10^4}=Ce^0 \quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{99}.$$

Тоді маємо:

$$\frac{y}{10^6-y}=\frac{1}{99}e^{0,05t} \quad\Rightarrow\quad 99y=10^6e^{0,05t}-ye^{0,05t},$$

звідки

$$y=\frac{10^6e^{0,05t}}{99+e^{0,05t}}.$$

Тепер визначимо, через скільки років кількість населення зросте у 10 разів.

$$10^4\cdot10=\frac{10^6e^{0,05t}}{99+e^{0,05t}},\ \text{або}\ 99+e^{0,05t}=10e^{0,05t}.$$

Звідси $e^{0,05t}=11$, отже, $t=\dfrac{\ln11}{0,05}\approx47,96$ (років).

Таким чином, у даному регіоні кількість населення зросте в 10 разів приблизно через 48 років.

7.10. Нехай швидкість зростання загальних потреб населення p відносно відсотка прибутку x даної верстви населення описується функцією e^{-x}. Знайти функцію, що характеризує залежність загальних потреб від відсотка прибутку для будь-яких верст населення.

Розв'язання. За умовою задачі маємо диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2p}{dx^2} = e^{-x}.$$

Це рівняння другого порядку, у якому відсутні функція p та її перша похідна p'.

Рівняння перепишемо так: $\frac{d(p')}{dx} = e^{-x}$, або $d(p') = e^{-x}dx$.

Інтегруємо обидві частини рівняння, і зліва отримаємо похідну першого порядку від функції p:

$$\frac{dp}{dx} = \int e^{-x}dx + C_1 \;\Rightarrow\; \frac{dp}{dx} = -e^{-x} + C_1 \;\Rightarrow\; dp = \left(-e^{-x} + C_1\right)dx.$$

Інтегруючи вдруге, дістанемо:

$$p = e^{-x} + C_1 \cdot x + C_2.$$

Отже, ми визначили загальний розв'язок рівняння.

Оскільки без отримання доходів споживання неможливе, то маємо початкову умову: $p(0) = 0.$

Зрозуміло, що при відсутності прибутку, швидкість приросту потреб теж дорівнює нулю, тобто маємо ще одну початкову умову: $p'(0) = 0.$

Отже, для знаходження сталих C_1 і C_2 маємо дві початкові умови. Використовуємо їх:

$$e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \text{ звідси } C_2 = -1.$$

$$-e^0 + C_1 = 0, \text{ звідси } C_1 = 1.$$

Підставляємо знайдені C_1 і C_2 у загальний розв'язок і отримуємо:

$$p = e^{-x} + x - 1.$$

Отже, залежність загальних потреб населення від відсотка прибутку описується функцією: $p = e^{-x} + x - 1$.

7.11. Нехай попит та пропозиція на товар визначаються відповідно співвідношеннями:

$$x(t) = 3p'' - p' + p + 14, \quad y(t) = 4p'' + p' + 2p + 4,$$

де p – ціна товару; p' – тенденція формування ціни; p'' – темпи зміни ціни.

Знайти залежність рівноважної ціни від часу, враховуючи початкові умови:

$$p = 15 \quad \text{при } t = 0; \; p' = 5 \text{ при } t = 0.$$

Розв'язання. За умовою $x(t) = y(t)$, тоді

$$3p'' - p' + p + 14 = 4p'' + p' + 2p + 4,$$

звідки

$$p'' + 2p' + p = 10.$$

Знаходимо розв'язок цього лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами: $p(t) = \bar{p} + \tilde{p}$, де $\bar{p}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння, $\tilde{p}$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$p'' + 2p' + p = 0,$$

його характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

має корені $k_1 = k_2 = -1$.

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\bar{p} = e^{-t}\left(C_1 + C_2 \cdot t\right).$$

Далі будемо шукати деякий частинний розв'язок $\tilde{p}$ вихідного неоднорідного рівняння у вигляді:

$$\tilde{p} = A \quad .$$

Визначаємо похідні і підставляємо їх і саму функцію $\tilde{p}$ в задане рівняння:

$$\tilde{p}' = 0; \; \tilde{p}'' = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 10.$$

Отже, $p = e^{-t}\left(C_1 + C_2 t\right) + 10$.

Знаходимо C_1 і C_2, використовуючи початкові умови:

1) $p(0) = 15$: тоді $15 = e^0\left(C_1 + C_2 \cdot 0\right) + 10$, звідси $C_1 = 5$;

2) $p'(0) = 5$: оскільки $p' = -e^{-t}\left(C_1 + C_2 t\right) + e^{-t} \cdot C_2$, то:

$5 = -e^0\left(C_1 + C_2 \cdot 0\right) + e^0 \cdot C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 10$.

Отже, залежність ціни від часу, враховуючи початкові умови, описується функцією:

$$p(t) = e^{-t}\left(5 + 10t\right) + 10.$$

7.12. Нехай попит і пропозиція деякого товару на ринку описується відповідно рівняннями:

$$x(t) = 5 - 2p_t, \quad y(t) = 3 + 4p_{t-1}.$$

Знайти залежність ціни від часу, якщо $p_t = p_{t-1} = p_0$.

Розв'язання. Виходячи з умов відповідності попиту та пропозиції, маємо різницеве рівняння для відшукання рівноважної ціни у момент часу t:

$$5 - 2p_t = 3 + 4p_{t-1} \;\Rightarrow\; 2p_t + 4p_{t-1} = 2,$$

або

$$p_t + 2p_{t-1} = 1.$$

При початковій умові $p_t = p_{t-1} = p_0$ маємо:

$$p_0 = \frac{1}{3}$$ – це рівноважна ціна.

Знайдемо загальний розв'язок розглядуваного різницевого рівняння. Він є сумою загального розв'язку однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку неоднорідного:

$$p = \bar{p} + \tilde{p}.$$

Однорідному рівнянню $p_t + 2p_{t-1} = 0$ відповідає характеристичне:

$$z + 2 = 0 \;\Rightarrow\; z = -2.$$

Тоді $\bar{p} = C \cdot (-2)^t$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння вже було знайдено: $\tilde{p} = \frac{1}{3}$.

Отже, маємо загальний розв'язок різницевого рівняння Хікса:

$$p_t = C \cdot (-2)^t + \frac{1}{3}.$$

Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty} |p_t| = \infty$, звідси робимо висновок, що рівновага є нестійкою.

7.13. Знайти розв'язок різницевого рівняння Хікса:

$$y_t - 2{,}2\,y_{t-1} + 1{,}25\,y_{t-2} = 0{,}1.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок шукаємо як суму загального розв'язку однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку даного неоднорідного рівняння:

$$p = \bar{p} + \tilde{p}.$$

Частинний розв'язок рівняння беремо у вигляді:

$$\tilde{p} = C.$$

Підставляємо C у задане рівняння:

$$C - 2{,}2C + 1{,}25C = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Отже, $\tilde{p} = 2$.

Знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_t - 2{,}2\,y_{t-1} + 1{,}25\,y_{t-2} = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння:

$$z^2 - 2{,}2z + 1{,}25 = 0,$$

яке має комплексно-спряжені корені

$$z = 1{,}1 \pm \sqrt{1{,}21 - 1{,}25}, \quad z = 1{,}1 \pm 0{,}2i.$$

Отже,

$$\bar{p} = \left(\sqrt{1{,}1^2 + (0{,}2)^2}\right)^t \left(C_1 \cos\varphi t + C_2 \sin\varphi t\right),$$

де $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{0{,}2}{1{,}1} = 0{,}182.$

Таким чином, $p(t) = \left(\sqrt{1{,}25}\right)^t \left(C_1 \cos 0{,}182t + C_2 \sin 0{,}182t\right) + 2.$

Задачі та вправи для самостійного розв'язання

Перевірити, чи є розв'язком даного диференціального рівняння вказана функція

7.14. $y'x^3 + 2y = 0, \quad y = 2e^{\frac{1}{x^2}}$.

7.15. $yxdx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0, \quad y = e^{\sqrt{1-x^2}}$.

7.16. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y = x^2 e^x$.

Рівняння з відокремлюваними змінними

Знайти загальні інтеграли або загальні розв'язки заданих диференціальних рівнянь

7.17. $x\sqrt{9-y^2}\,dx - y\left(4+x^2\right)dy = 0$.

7.18. $\left(xy^2 - y^2\right)dx + \left(x^2 y + x^2\right)dy = 0$.

7.19. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.

Знайти частинні розв'язки, які задовольняють вказані початкові умови

7.20. $\sin^2 x\cos^2 y dx = \cos^2 x dy, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$.

7.21. $y'e^{-x} = x - 1, \quad y(1) = -e$.

7.22. $x\left(y^6+1\right)dx + y^2\left(x^4+1\right)dy = 0, \quad y(0) = 1$.

7.23. $\left(1+x^2\right)y' = xy - y\sqrt{1+x^2}, \quad y(0) = 1$.

Однорідні рівняння

Знайти загальні інтеграли або загальні розв'язки заданих диференціальних рівнянь

7.24. $\left(xy - x^2\right)y' = y^2$.

7.25. $xy' + y = 2y(\ln y - \ln x)$.

7.26. $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}$.

7.27. $(x+y)dx + 2xdy = 0$.

Знайти частинні розв'язки, які задовольняють вказані початкові умови

7.28. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}, \quad y(1) = 0{,}5\pi$.

7.29. $\left(x^2 + y^2\right)dx = 2xydy, \quad y(4) = 0$.

7.30. $y^2 + x^2 y' = xyy', \quad y(1) = 1$.

7.31. $xy' - y = x\cos^2\frac{y}{x}, \quad y(3) = 0$.

Лінійні рівняння і рівняння Бернуллі

Знайти загальні інтеграли або загальні розв'язки заданих диференціальних рівнянь

7.32. $\left(x^2+1\right)y'-xy=x^3+x$.

7.33. $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

7.34. $xy'-y=x^2\cos x$.

7.35. $y'-xy=-e^{-x^2}y^3$.

Знайти частинні розв'язки, які задовольняють вказаній початковій умові

7.36. $y'+3y=xe^{-3x},\ y(0)=0$.

7.37. $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x,\ y(e)=\dfrac{e^2}{2}$.

7.38. $\left(1-x^2\right)y'+2xy=xy^2,\ y(0)=0{,}5$.

Розв'язати рівняння, що припускають зниження порядку

7.39. $y''=\sin 2x+x$.

7.40. $\left(1+x^2\right)y''-2xy'=0$.

7.41. $yy''-y'(1+y')=0$.

Знайти частинні розв'язки за вказаними початковими умовами

7.42. $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x},\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\ln 2}{2},\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

7.43. $y''=\dfrac{y'}{x}\left(1+\ln\dfrac{y'}{x}\right),\ y(1)=\dfrac{1}{2},\ y'(1)=e$.

7.44. $2y(y')^3+y''=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=-3$.

Лінійні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Знайти загальні розв'язки заданих диференціальних рівнянь

7.45. $3y''-2y'-8y=0$.

7.46. $y''+3y'=0$.

7.47. $y''+4y'+4y=0$.

7.48. $4y''-8y'+5y=0$.

Знайти частинні розв'язки за вказаними початковими умовами

7.49. $y''-5y'+6y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$.

7.50. $y''+2y'+y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$.

7.51. $y''+4y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=2$.

7.52. $y''-2y'+10y=0,\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=e^{\frac{\pi}{6}}$.

Знайти загальні розв'язки неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь

7.53. $y'' - 8y' + 7y = 14$.

7.54. $y'' - 2y' = x^2 - 1$.

7.55. $y'' + 3y' - 10y = 12xe^{-2x}$.

7.56. $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

7.57. $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

7.58. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.

7.59. $y'' + 4y = \sin x$.

7.60. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$.

Знайти частинні розв'язки за вказаними початковими умовами

7.61. $y'' - y' = 2(1 - x),\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.

7.62. $y'' + 4y = e^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

7.63. $y'' - 4y = e^{-2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

7.64. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

7.65. $y'' + y = -\sin 2x,\ y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 1$.

Записати для вказаних рівнянь вигляд частинних розв'язків

7.66. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}\left(1 - x^2\right)$.

7.67. $y'' - 3y' = x^2 - 2$.

7.68. $y'' + 2y' + y = \sin x + e^x$.

7.69. $y'' + 10y' = x^2 + xe^{-10x}$.

Знайти загальний розв'язок рівнянь методом варіації довільних сталих

7.70. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

7.71. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь

7.72. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y,\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y$.

7.73. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y,\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y,\ x(0) = 1,\ y(0) = 3$.

Розв'язати різницеві рівняння

7.74. $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 4 \cdot 5^n$.

7.75. $y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = n \cdot 5^n$.

7.76. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2 \cdot 3^n$.

7.77. $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = n \cdot 2^n$.

Розв’язати задачі

7.78. Функція граничного прибутку деякого підприємства має вигляд:

$$R'(x) = 40 - 0{,}08x - 0{,}006x^2.$$

Знайти функцію прибутку.

7.79. Знайти функцію попиту при початковій умові: $x = 4$ при $p = 10$. Відомо, що її еластичність стала і дорівнює $E_p(x) = -2$.

7.80. Відомо, що еластичність виробничої функції $y = f(x)$ відносно певного чинника x характеризується співвідношенням:

$$E_x(y) = \frac{2x^2 - x}{x^2 - x - 1}.$$

Визначити виробничу функцію, якщо відомо, що її графік проходить через точку М (1; 2).

7.81. Повні витрати виробництва y є функцією від загального обсягу продукції x. Відомо, що граничні та повні витрати для усіх значень x задовольняють рівняння: $y' - 4y + x = 0$. Знайти функцію повних витрат, яка задовольняє початкову умову: $y(0) = 0$.

7.82. Знайти функцію попиту, якщо її еластичність визначається співвідношенням $E_p(x) = \frac{x - 300}{x}$, де $0 < x < 300$; відомо, що $x = 12$ при $p = 36$.

7.83. Чисельність населення деякого робітничого селища задовольняє диференціальному рівнянню:

$$y'(t) = 0{,}1y\left(1 - 10^{-5}y\right),$$

де час t вимірюється у роках. У початковий момент чисельність населення складала 5 000 громадян. Визначити, через скільки років населення зросте у 5 разів.

7.84. Функції попиту та пропозиції, відповідно, мають вигляд:

$$x(p) = 80 - 4p + 3p', \qquad y(p) = 104 - 8p + p'.$$

Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо $p = 2$ при $t = 0$. Визначити, чи є рівноважна ціна стійкою.

7.85. Знайти залежність ціни p від часу t, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями

$$x(t) = p'' - 4p' - p + 17, \quad y(t) = 2p'' + p' + 3p + 5,$$
$$p(0) = 3, \quad x(0) = 11, \quad x(t) = y(t).$$

7.86. Знайти розв'язок різницевого рівняння Хікса:

$$y(t)-2,4y(t-1)+1,28y(t-2)=0,06.$$

Проаналізувати поведінку загального розв'язку рівняння



Відповіді

7.14. Так. **7.15.** Так. **7.16.** Ні.

7.17. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\sqrt{9-y^2}=C.$ **7.18.** $\ln|xy|+\frac{y-x}{xy}=C.$

7.19. $2\sin x+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right|=C.$ **7.20.** $tgy=1-x+tgx.$

7.21. $y=e^x(x-2).$ **7.22.** $3arctgx^2+2arctgy^3=\frac{\pi}{2}.$

7.23. $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$ **7.24.** $y=Ce^{\frac{y}{x}}.$

7.25. $y=xe^{Cx^2+1}.$ **7.26.** $y=\frac{Cx^2}{2}-\frac{1}{2C}.$ **7.27.** $x\left(x+3y\right)^2=C.$

7.28. $y=x\arcsin x.$ **7.29.** $(x-2)^2-y^2=4.$ **7.30.** $y=x\ln(ey).$

7.31. $x=3e^{\operatorname{tg}\frac{y}{x}}.$ **7.32.** $y=1+x^2+C\sqrt{1+x^2}.$

7.33. $y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)$ **.7.34.** $y=x\sin x+Cx.$ **7.35.** $y^2=\frac{e^{x^2}}{2(x+C)}.$

7.36. $y=\frac{x^2}{2}e^{-3x}.$ **7.37.** $y=\frac{1}{2}x^2\ln x.$ **7.38.** $y=\frac{2\left(x^2-1\right)}{x^2-4}.$

7.39. $\frac{x^3}{6}-\frac{\sin 2x}{4}+C_1x+C_2.$ **7.40.** $C_1y=x+\frac{x^3}{3}+C_2.$

7.41. $y=C_1e^{c_2x}+\frac{1}{C_2}.$ **7.42.** $y=-\ln\cos x.$

7.43. $y=xe^x-e^x+\frac{1}{2}.$ **7.44.** $y^3-y=3x.$

7.45. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}.$ **7.46.** $y=C_1e^{-3x}+C_2.$

7.47. $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}.$ **7.48.** $y=e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right).$

7.49. $y = e^{2x}$. **7.50.** $y = (2x+1)e^{-x}$. **7.51.** $y = \sin 2x$.

7.52. $y = -\frac{1}{3}e^{x}\cos 3x$. **7.53.** $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{7x} + 2$.

7.54. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}$.

7.55. $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{12} - x\right)e^{-2x}$. **7.56.** $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - xe^{x}$.

7.57. $y = (C_1 + C_2 x)e^{x} + x^2 e^{x}$.

7.58. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \frac{6}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x$.

7.59. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{3}\sin x$. **7.60.** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + \sin x$.

7.61. $y = e^{x} + x^2 + 1$. **7.62.** $y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{7}{8}\cos 2x + \frac{3}{8}\sin 2x$.

7.63. $y = \frac{13}{16}e^{2x} + \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{4}x\right)e^{-2x}$. **7.64.** $y = \frac{3}{2}x^2 e^{-2x}$.

7.65. $y = \frac{\sin 2x}{3} - \frac{\sin x}{3} - \cos x$. **7.66.** $y = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x^2 e^{5x}$.

7.67. $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. **7.68.** $y = A\sin x + B\cos x + A_1 x^2 e^{-x}$.

7.69. $y = \left(Ax^2 + Bx + c\right)x + (A_1 x + B_1)xe^{-10x}$.

7.70. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$.

7.71. $y = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{x} + xe^{x}\ln|x|$.

7.72. $x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}$, $y = C_1 e^{t} + 3C_2 e^{-t}$. **7.73.** $x = 2e^{3t} - e^{t}$, $y = 2e^{3t} + e^{t}$.

7.74. $y_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{2}{3}5^n$. **7.75.** $y_n = C_1 \cos\frac{\pi}{3}n + C_2 \sin\frac{\pi}{3}n + \left(\frac{n}{21} - \frac{5}{49}\right)5^n$.

7.76. $y_n = 2^n\left(C_1 + C_2 n\right)3^n + 2\cdot 3^n$. **7.77.** $y_n = \left(C_1 + C_2 n\right)3^n + \left(n+4\right)2^n$.

7.78. $R(x) = 40x - 0{,}04x^2 - 0{,}002x^3$. **7.79.** $p\sqrt{x} = 20$.

7.80. $y = 2\left(1 + x - x^2\right)$. **7.81.** $y = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{4}e^{4x} + \frac{1}{4}\right)$.

7.82. $p = 37{,}5 - 0{,}125x$. **7.83.** $t \approx 18{,}46$ року. **7.84.** $p = -4e^{-2t} + 6$.

7.85. $p(t) = \frac{1}{9}(-e^{-4t} + e^{-t}) + 3$. **7.86.** $y(t) = C_1(0{,}8)^t + C_2(1{,}6)^t - 0{,}5$.

Розділ 8. Ряди

 Досліджуючи природні явища, вчені часто звертали увагу на існування певних послідовностей та їх властивостей. Ці послідовності здавались такими привабливими, що намагались за їх допомогою намагались описувати закони природи. Одну з найвідоміших послідовностей утворюють **числа Фібоначчі**. Зараз, наприклад, числа Фібоначчі застосовуються при торгівлі на ринку Форекс для визначення рівня, якого може досягти ціна.

Однак цікаві властивості мають не тільки самі послідовності, але й границі сум нескінченної кількості членів послідовностей. Такі суми використовуються для наближеного обчислення значень усіх елементарних функцій та при складанні таблиць їх значень, при обчисленні інтегралів, які «не беруться», розв'язуванні деяких типів диференціальних рівнянь тощо. Нескінченні суми, утворені з послідовностей, – предмет розгляду даного розділу.



Після вивчення даної теми ви зможете:

- розрізняти різні типи рядів;
- знати методи дослідження рядів на збіжність;
- вміти застосовувати ряди у наближених обчисленнях;
- знати величини в економіці, пов'язані з рядами;
- знати типи економічних задач, для розв'язання яких доцільно застосовувати ряди.

Глава 32. Основні поняття та означення. Необхідна ознака збіжності ряду

32.1. Числовий ряд та його збіжність

Припустимо, що задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ або послідовність функцій $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$

Розглянемо спочатку числову послідовність та введемо поняття ***ряду***. Послідовність функцій є предметом розгляду у наступних главах.

Числовим рядом називається вираз вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \qquad (32.1)$$

Числа $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ мають назву ***членів ряду***, а u_n називається ***загальним членом ряду***. Числовий ряд вважається ***заданим***, якщо відома формула загального члена ряду або будь-яке інше правило, за яким можна знайти довільний член ряду.



Наприклад, нехай загальний член ряду задається формулою

$$u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}.$$

Запишемо ряд у вигляді суми його членів. Для цього послідовно підставимо у вказану вище формулу значення $n = 1, 2, ...$ і подамо ряд у вигляді нескінченної суми:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n} + \cdots$$

Розглянемо ще один ряд, загальний член якого записується формулою

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Відповідний йому ряд має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots$$

Зазначимо, що у наведених прикладах за вказаним загальним членом утворювався ряд. Можна ставити у певному сенсі обернену задачу, а саме задачу про відшукання загального члена за кількома заданими доданками нескінченної суми. Така задача розв'язується неоднозначно, тому намагаються знайти формулу загального члена ряду найпростішого вигляду.

 Наприклад, щоб записати формулу загального члена ряду

$$\frac{1}{1\cdot 7}-\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}-\frac{1}{7\cdot 13}+\ldots,$$

заданого у вигляді суми перших чотирьох його членів, проаналізуємо закономірність утворення цих чисел при зростанні номера доданка. Так, кожен член ряду має вигляд дробу з одиницею у чисельнику, а знаменник має вигляд добутку двох непарних чисел, з яких друге число на шість одиниць більше за перше. Оскільки знаки членів ряду чергуються, то загальний член ряду можна записати у вигляді

$$u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}.$$

Сума перших n членів ряду називається ***частковою сумою ряду***. Так, наприклад, $S_1=u_1$, $S_2=u_1+u_2$, $S_3=u_1+u_2+u_3-$ суми одного, двох, трьох членів ряду, а у загальному вигляді

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n. \qquad (32.2)$$

Послідовність часткових сум може мати скінченну чи нескінченну границю або не мати границі взагалі.

Числовий ряд називається ***збіжним***, якщо послідовність його часткових сум збігається, тобто існує скінченна границя

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n, \qquad (32.3)$$

при цьому число S називається ***сумою ряду***.

Ряд називається ***розбіжним***, якщо границя часткових сум не існує або ж вона дорівнює нескінченності.

Якщо ряд збігається і його сума дорівнює S, то записують:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i. \qquad (32.4)$$

 Проведемо дослідження на збіжність числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)=4+7+10+13+\ldots$$

За означенням (32.2) знайдемо суму n перших членів даного ряду:

$$S_n=4+7+10+13+\ldots+3n+1.$$

Даний ряд можна представити як суму членів арифметичної прогресії з першим членом $a_1=4$ та різницею $d=3$. Отже, цю часткову суму можна знайти за формулою суми n перших членів арифметичної прогресії

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n,$$

тоді

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(3n+5)}{2}=\infty,$$

отже, ряд ***розбігається***.



Дослідити на збіжність і знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$$

Перетворимо загальний член ряду за формулою:

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Тоді часткова сума дорівнює

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

тобто ряд ***збігається,*** а його ***сума*** дорівнює числу 1.



Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

Утворивши послідовність часткових сум цього ряду, дістанемо:

$$S_1=1,\quad S_2=0,\quad S_3=1,\quad S_4=0,\quad \ldots$$

Ясно, що така послідовність обмежена, але не має границі, отже, за означенням ряд ***розбігається.***

32.2. Ряд геометричної прогресії

Розглянемо нескінченну геометричну прогресію. Загальний член геометричної прогресії задається формулою $b_n=b_1q^{n-1},\ n\in N$, де b_1 – перший член геометричної прогресії, а q – її знаменник. Тоді числовий ряд, що складається із членів геометричної прогресії, має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_1q^{n-1}=b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots+b_1q^{n-1}+\ldots \qquad (32.5)$$

Часткова сума такого ряду обчислюється за формулою

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \qquad (32.6)$$

Знайдемо границю цього співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{b_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n).$$

1^0. ***Нехай*** $|q|<1$. Границя часткової суми ряду при $n\to\infty$ існує і

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S=\frac{b_1}{1-q},$$

оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.Отже, ряд, побудований з членів нескінченної спадної геометричної прогресії, збігається.

2^0. ***Нехай*** $|q|>1$. Границя часткової суми ряду при $n\to\infty$ нескінченна

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty,$$

оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$. У розглянутому випадку ряд розбігається.

3^0. ***Нехай*** $q = 1$. У цьому випадку часткова сума ряду може бути обчислена так:

$$S_n = b_1 + b_1 + b_1 + ... + b_1 = nb_1.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, тобто відповідний ряд розбігається.

4^0. ***Нехай*** $q = -1$. Тоді часткову суму ряду можна обчислити так:

$$S_n = 0, \text{ якщо } n - \text{парне},$$
$$S_n = b_1, \text{ якщо } n - \text{ непарне}.$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, а це значить, відповідний ряд є розбіжним.

Таким чином, доведено, що ряд, побудований із членів геометричної прогресії, ***збігається***, якщо $|q| < 1$, та ***розбігається***, якщо $|q| \geq 1$.

32.3. Гармонійний ряд

Числовий ряд, який має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \tag{32.7}$$

називається ***гармонійним рядом***.

Дослідимо цей ряд на збіжність. Спочатку запишемо ряд у такому вигляді:

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots.$$

Тепер утворимо з даного ряду інший ряд, замінивши усі доданки всередині кожної дужки на найменший доданок, указаний у цій дужці. Дістанемо допоміжний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots$$

Особливість такого ряду полягає в тому, що кожна сума дробів, які містяться у кожній дужці, дорівнює $0,5$.

Обчислимо n-ту часткову сумму S_n допоміжного ряду, де $n=2^k$ (k – кількість доданків, що виділені дужками) у частковій сумі допоміжного ряду:

$$S_{2^k}=1+\frac{1}{2}k.$$

Якщо $k\to\infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2^k}=\infty$. Тому допоміжний ряд є розбіжним, а його послідовність часткових сум необмежена. Оскільки часткова сума початкового ряду (гармонійного) при $n=2^k$ більша за часткову суму допоміжного, то послідовність часткових сум гармонійного ряду також необмежена і тому не може мати скінченної границі. Отже, ***гармонійний*** ряд (32.7) є ***розбіжним***.

32.4. Властивості збіжних рядів

Називатимемо n-м **залишком (**або просто **залишком)** ряд, отриманий відкиданням з даного ряду перших n його членів:

$$R_n=\sum_{i=1}^{\infty}u_{n+i}=u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{n+m}+... \qquad (32.8)$$

Першим членом n-го залишку є член початкового ряду, що має номер $(n+1)$.

Теорема 32.1. Якщо ряд (32.1) збігається, то збігається і його залишок, і, навпаки, якщо збігається залишок ряду, то збігається й даний ряд.

Доведення. Нехай збігається ряд (13.1). Доведемо, що збігається його n-й залишок. Напишемо часткову суму $n+m$ членів даного ряду:

$$S_{n+m}=S_n+(u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{n+m}). \qquad (32.9)$$

Зафіксуємо номер n і нехай $m\to\infty$, тоді границя лівої частини рівності існує і дорівнює сумі ряду S. Управій частині рівності границя першого доданка стала, бо число n – фіксоване, тоді границя другого доданка існує і скінченна при $m\to\infty$, тобто залишок збігається, а його сума дорівнює R. Таким чином,

$$S=S_n+R. \qquad (32.10)$$

Доведемо обернене твердження. Нехай у рівності (32.9) збігається другий доданок, тобто існує границя R_n. Тоді існує границя правої частини рівності, значить, існує і границя лівої частини. Із рівності (32.10) випливає, що залишок ряду, що збігається, прямує до нуля при $n \to \infty$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0.$$



Збіжність або розбіжність ряду не порушується, якщо вилучити з нього або додати до нього скінченну кількість членів.

Теорема 32.2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається і має суму $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, то збігається й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot u_n$, одержаний із нього множенням кожного члена на стале число λ, а сума утвореного ряду дорівнює сумі даного, помноженій на λ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot u_n = \lambda \cdot S. \qquad (32.11)$$

Теорема 32.3. Якщо ряди із загальними членами u_n та v_n збігаються та відомі суми для кожного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = B,$$

то для довільних чисел α та β ряд із загальним членом $\alpha u_n + \beta v_n$ є збіжним, а його сума дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha A + \beta B. \qquad (32.12)$$

Останні дві теореми легко доводяться на основі властивостей границь.



Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{1}{3^n} + 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Загальний член цього ряду має вигляд:

$$2\cdot\frac{1}{3^n}+6\cdot\frac{1}{2^n}=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Розглянемо допоміжні ряди. Кожен з рядів із загальними членами $u_n=(1/3)^n$ та $v_n=(1/2)^n$ збігається, оскільки ці ряди утворюються нескінченними спадними геометричними прогресіями. Звідси за теоремою 32.3 досліджуваний ряд збігається. Для відшукання його суми спочатку знаходимо суму кожного із допоміжних рядів. Так, для першого з рядів маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1/3}{1-1/3}=\frac{1}{2}.$$

Для другого ряду дістанемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1/2}{1-1/2}=1.$$

Тепер за другою частиною теореми 32.3 знаходимо суму досліджуваного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha\cdot u_n+\beta\cdot v_n)=2\cdot\frac{1}{2}+6\cdot 1=7.$$

32.5. Необхідна ознака збіжності ряду

У багатьох ситуаціях питання про збіжність чи розбіжність ряду важливіше за питання про відшукання суми ряду (найчастіше тому, що друга задача значно важча). Тому виникає необхідність пошуку й обґрунтування ознак збіжності рядів.

Зауважимо: знаючи про збіжність деякого ряду, ми можемо не без успіху скористатись комп'ютером для наближеного обчислення суми ряду, навіть не знаючи теорії, тоді як використання комп'ютера для відшукання суми розбіжного ряду приведе до природної появи деякого числа, яке не матиме жодного відношення до неіснуючої суми ряду.

Виділяють ***необхідну*** ознаку збіжності, яка є єдиною для всіх типів рядів, і ***достатні*** ознаки, використання яких залежать від типів рядів.

Необхідна ознака збіжності ряду ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 32.4. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то границя загального члена ряду при $n \to \infty$ дорівнює 0, тобто

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \qquad (32.13)$$

Доведення. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається і його сума дорівнює S. Оскільки $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, то можна записати $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Знайдемо границі лівої та правої частин останньої рівності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорему доведено.



Співвідношення (32.13) якраз і є ***необхідною ознакою збіжності ряду***.

Слід зауважити, що коли необхідна умова не виконується, то досліджуваний ряд є розбіжним. Тобто умова

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \qquad (32.14)$$

є ***достатньою ознакою розбіжності*** числового ряду.

Справді, якби ряд збігався, то границя його загального члена дорівнювала б нулю. Отже, ряд ***розбігається***.

Однак, якщо необхідна ознака виконується, то це ще не значить, що відповідний ряд є збіжним. Тобто питання про збіжність ряду залишається відкритим і потребує подальшого дослідження. Наприклад, для гармонійного ряду необхідна ознака збіжності виконується, але безпосереднє обчислення границі
часткової суми ряду показує, що ряд розбіжний.



Дослідити, чи збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n-3}.$$

Знайдемо границю загального члена ряду:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n-3} = \frac{2}{5} \neq 0,$$

тому необхідна ознака не виконується, звідси й випливає, що ряд розбігається.

 Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності. Згідно з другою чудовою границею дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1} = 1/e \neq 0.$$

Це значить, що необхідна ознака збіжності ряду не виконується, отже, даний ряд є розбіжним.

 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5n^2-3}.$$

Знайдемо границю загального члена ряду:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{5n^2-3} = 0.$$

Отже, використати небхідну ознаку для даного ряду не вдається, але зрозуміло, що ряд на нескінченності поводить себе майже як гармонійний ряд. Справді, маємо очевидну нерівність

$$\frac{2n+1}{5n^2-3} > \frac{2}{5n},$$

з якої випливає, що даний ряд розбігається, бо послідовність його часткових сум не є обмеженою, оскільки вона більша за послідовність часткових сум ряду, пропорційного (з коефіцієнтом $\lambda = 2/5$) розбіжному гармонійному ряду.

 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3+3}.$$

Знайдемо границю загального члена ряду:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^3+3} = 0.$$

Для даного ряду використати необхідну ознаку неможливо. Очевидно, що на нескінченності ряд поводить себе як ряд з загальним членом $u_n = \frac{1}{n^2}$, який збігається (*порівняйте* його з рядом $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, для якого $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$).

Отже, вихідний ряд також збігається.

Таким чином, при дослідженні рядів, для яких виконується необхідна ознака збіжності, потрібна або якась достатня ознака, або можливість знайти формулу для часткової суми S_n, щоб безпосередньо відшукати її границю.



Ключові терміни

Числа Фібоначчі; числовий ряд; члени ряду; загальний член ряду; рекурентне співвідношення; часткова сума ряду; сума ряду; збіжність числового ряду; збіжний та розбіжний ряди; ряд геометричної прогресії; гармонійний ряд; n-й залишок ряду; необхідна ознака збіжності; достатня ознака розбіжності ряду.



Запитання для самоперевірки

1. Що називається рядом?
2. Які ряди називаються числовими?
3. Які можливі способи задання ряду?
4. Який ряд називається збіжним, а який – розбіжним?
5. Сформулюйте властивості збіжних рядів.
6. У яких випадках збігається або розбігається ряд, члени якого утворюють геометричну прогресію?
7. Що можна сказати про збіжність або розбіжність гармонійного ряду?
8. У чому полягає необхідна ознака збіжності ряду?
9. Що можна сказати про поведінку ряду, якщо границя його загального члена не дорівнює нулю при необмеженому зростанні n?
10. Що можна сказати про поведінку ряду, якщо його загальний член прямує до нуля?

Глава 33. Достатні умови збіжності числових рядів

Розглянемо спочатку ряди, члени яких не змінюють знак залежно від n, тобто знак кожного із них не залежить від номера. Такі ряди називають ***знакосталими***. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n -$ ***ряд з додатними членами***, якщо $u_n > 0$ для усіх $n \geq 1$. Якщо ж усі члени ряду ***від'ємні***, його дослідження на збіжність зводиться до дослідження ряду з додатними членами винесенням за дужки множника (-1).

33.1. Ознака порівняння

Теорема 33.1. Нехай маємо два ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{33.1}$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{33.2}$$

Якщо для всіх членів цих рядів виконуються нерівності

$$0 \leq u_n \leq v_n, \tag{33.3}$$

то із збіжності ряду з загальним членом v_n випливає збіжність ряду з загальним членом u_n, а із розбіжності ряду з загальним членом u_n – розбіжність ряду з загальним членом v_n.

Доведемо спочатку перше твердження теореми. Для цього розглянемо часткові суми

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \quad \text{та} \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v_i .$$

Із збіжності другого ряду випливає існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, тоді з умови $v_n \geq 0$ дістанемо $\sigma_n \leq \sigma$. Тепер з умови $0 \leq u_n \leq v_n$ виходить, що $0 \leq S_n \leq \sigma_n \leq \sigma$. Це значить, що послідовність часткових сум S_n монотонно зростає й обмежена зверху. За теоремою Вейєрштрасса вона має границю, тобто

існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Отже, ряд із загальним членом u_n збігається. Перша частина теореми доведена.

Для доведення другої частини припустимо, що існує розбіжний ряд із загальним членом u_n, а ряд із загальним членом v_n збігається. З першої частини доведення випливає, що перший ряд також збіжний, що суперечить зробленому припущенню, отже, воно хибне, значить, ряд із загальним членом v_n також розбігається. Теорему доведено.

Ця теорема є базою для встановлення факту збіжності ряду за ***ознакою порівняння***.



При застосуванні ознаки порівняння в якості еталонного ряду може використовуватись ряд нескінченної спадної геометричної прогресії як приклад збіжного ряду та гармонійний ряд як приклад розбіжного ряду.

При розв'язанні задач буває зручніше використовувати ***ознаку порівняння рядів з додатними членами*** **у** ***граничній формі:*** якщо існує скінченна, ненульова границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \qquad (0 < k < \infty), \tag{33.4}$$

то обидва ряди (33.1) та (33.2) або збігаються, або розбігаються одночасно.

Справді, якщо умова (33.4) виконується, то можна довести, що починаючи з деякого номера виконується умова ознаки порівняння.



Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

З очевидної нерівності $3^n < (n+1)\cdot 3^n$, правильної при $n \geq 1$, дістанемо нерівність $\frac{1}{(n+1)3^n} < \frac{1}{3^n}$, $n \in N$, і розглянемо ряди з загальними членами $u_n = \frac{1}{(n+1)3^n}$ та $v_n = \frac{1}{3^n}$.

Ряд із загальним членом v_n збігається як сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником, меншим за одиницю. За ознакою порівняння збігається й ряд із загальним членом u_n.

 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5}$.

Для порівняння візьмемо ряд із загальним членом $v_n = \frac{1}{n}$. Застосуємо ознаку порівняння у граничній формі. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n-1)\cdot n}{3n^2+5} = \frac{2}{3}$, то ряди поводять себе однаково, а саме досліджуваний ряд розбігається, бо еталонним є гармонійний ряд із загальним членом $v_n = \frac{1}{n}$, який розбігається.

 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Запишемо ряд у розгорнутій формі:

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}} + \ldots$$

Порівняємо даний ряд із рядом, що є залишком гармонійного ряду, а тому є розбіжним:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Для цього перевіримо виконання умови ознаки порівняння (теореми 33.1). Маємо:

$$\sqrt{1\cdot 2} < \sqrt{2\cdot 2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} > \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2\cdot 3} < \sqrt{3\cdot 3} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} > \frac{1}{3},$$

і у загальному випадку

$$\sqrt{n(n+1)} < \sqrt{(n+1)(n+1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}.$$

Враховуючи, що члени даного ряду більші за відповідні члени розбіжного ряду, оскільки $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$, то ряд розбігається за ознакою порівняння.

33.2. Ознака Даламбера

Теорема 33.2. Нехай для ряду із додатим загальним членом $u_n > 0$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l. \tag{33.5}$$

Тоді:

1^0. *Якщо* $l < 1$, то ряд ***збігається***.

2^0. *Якщо* $l > 1$, то ряд ***розбігається***.

3^0. *Якщо* $l = 1$, то інформації недостатньо, щоб зробити висновок про збіжність чи розбіжність ряду.

Доведення. 1^0. Нехай $l < 1$. За означенням границі послідовності для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке N, що при $n \geq N$ виконується нерівність

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

Позначимо $l + \varepsilon = r$ і виберемо ε таким, щоб виконувалась нерівність $r < 1$. Тоді:

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < r, \quad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < r, \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < r, \ldots$$

Звідси маємо:

$$u_{N+1} < r \cdot u_N,$$

$$u_{N+2} < r \cdot u_{N+1} < r^2 \cdot u_N,$$

$$u_{N+3} < r \cdot u_{N+2} < r^3 \cdot u_N,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Побудуємо ряд:

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots = \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i,$$

який є N-м залишком досліджуваного ряду. Члени цього залишку менші за відповідні члени нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом u_N і знаменником r, оскільки $u_{N+m} < u_N \cdot r^m$.

За ознакою порівняння N-й залишок досліджуваного ряду збігається, отже, збігається і даний ряд.

2^0. Нехай $r>1$, тоді $\varepsilon>0$ виберемо настільки малим, щоб для числа $l-\varepsilon=r$ виконувалась нерівність $r>1$. При достатньо великих n будемо мати:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1}>u_n .$$

У цьому випадку кожний наступний член ряду більший від попереднього. Оскільки всі вони додатні, то не може виконуватись необхідна умова збіжності ряду. Отже, при $l>1$ даний ряд розбігається. Теорему доведено.

 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}.$$

Позначимо $u_n=\frac{n}{3^n}$, тоді $u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$. Знайдемо відношення наступного члена ряду до попереднього:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)3^n}{n3^{n+1}}=\frac{(n+1)}{3n}$$

і обчислимо його границю. Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1.$$

Отже, ряд збігається за ознакою Даламбера.

 Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

Позначимо

$$u_n=\frac{2^n}{n!},\ u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Запишемо відношення

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!}=\frac{2}{n+1}.$$

Знайшовши границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1,$$

дістанемо, що ряд збігається за ознакою Даламбера.



Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}.$$

Позначимо $u_n=\frac{n!}{5^n}$, тоді $u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$. Знайдемо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n(n+1)!}{n!5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=+\infty>1,$$

а тому за ознакою Даламбера ряд розбігається.



Дослідити на збіжність за ознакою Даламбера ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\ \text{та}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Розглянемо границю відношення наступного члена до попереднього для першого ряду, щоб скористатись ознакою Даламбера:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}:\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1.$$

Видно, що ознака Даламбера не дає можливості зробити висновок про збіжність чи розбіжність ряду, хоча саме про цей ряд ми знаємо, що він збіжний і його сума дорівнює числу 1.

За ознакою Даламбера розглянемо границю відношення наступного члена до попереднього для другого ряду:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Видно, що ознака Даламбера також не дає можливості зробити висновок про збіжність чи розбіжність ряду, хоча саме про цей ряд ми знаємо, що він розбіжний як гармонійний ряд.

На цьому прикладі ми пересвідчились, що випадок $l=1$ у теоремі Даламбера в принципі не може дати відповідь на запитання про збіжність чи розбіжність ряду, оскільки існують як збіжні, так і розбіжні ряди, для яких умова $l=1$ виконується.

33.3. Радикальна ознака Коші

Теорема 33.3. Нехай для ряду із додатним загальним членом $u_n>0$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l. \tag{33.6}$$

Тоді:

$1^{0.}$ Якщо $l<1$, то ряд ***збігається***.

$2^{0.}$ Якщо $l>1$, то ряд ***розбігається***.

3^{0}. Якщо $l=1,$ то інформації недостатньо, щоб зробити висновок про збіжність чи розбіжність ряду.

Доведення теореми аналогічне доведенню попередньої теореми.



Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^n.$$

За ознакою Коші маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n+3}=\frac{3}{5}<1.$$

Отже, ряд збігається.



Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}.$$

Знайдемо границю виразу

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1.$$

Звідси випливає, що ряд збігається.

33.4. Інтегральна ознака Коші

Теорема 33.4. Нехай $f(x)$ – невід'ємна незростаюча неперервна функція на проміжку $[1;+\infty)$, $f(1)=u_1$, $f(2)=u_2,\cdots, f(n)=u_n,\ldots$

Тоді:

1^0. Якщо невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ ***збіжний,*** то й ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ***збіжний***.

2^0. Якщо невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ ***розбіжний***, то й ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ***розбіжний***.

Теорему подаємо без доведення.

Розглянемо застосування інтегральної ознаки Коші на прикладах.



Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad \text{де}\quad s=const\quad (s\subset R).$$

Цей ряд називають ***рядом Діріхле,*** або **узагальненим *гармонійним рядом*.**

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо інтегральну ознаку Коші, обчисливши інтеграл

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^s}=\lim_{N\to\infty}\int\limits_1^{N}\frac{dx}{x^s}=$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{N\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-s}\right)\cdot x^{1-s}\Big|_1^N=\lim\limits_{N\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-s}\right)N^{1-s}+\dfrac{1}{(s-1)}=\begin{cases}1/(s-1), & s>1\\ \infty & s<1\end{cases}\\ \lim\limits_{N\to\infty}\ln|x|\Big|_1^N=\lim\limits_{N\to\infty}\ln N=\infty, \quad s=1.\end{cases}$$

Отже, при $s>1$ інтеграл збіжний, при $s\le 1$ – розбіжний. Тому й ряд Діріхле збіжний при $s>1$ і розбіжний при $s\le 1$. При $s=1$ ряд Діріхле називають гармонійним рядом. Цей ряд було розглянуто раніше:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Відзначимо, що ряд Діріхле, як і гармонійний ряд, використовують в ознаці порівняння рядів як еталонний ряд, тобто ряд, про який відомо, збігається він чи розбігається.

 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

Скористаємось інтегральною ознакою Коші. Нехай

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

Тоді

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} dx = -\frac{1}{\ln(x+1)}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається. Тому збігається й даний ряд.

 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$

Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

Неважко пересвідчитись за допомогою похідної, що дана функція монотонно спадна при $x \geq 1$. Тому знайдемо невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b\to+\infty} (-2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^b) = 2\lim_{b\to+\infty} \left(e^{-1} - e^{-\sqrt{b}}\right) = \frac{2}{e}.$$

Оскільки невласний інтеграл збіжний, то й даний ряд збіжний.

33.5. Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду

Знакозмінним рядом називається ряд, членами якого є дійсні числа довільного знака.

Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду базується на дослідженні ряду, утвореного із абсолютних величин членів даного ряду.

Теорема 33.5. Нехай маємо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{33.7}$$

Якщо ряд, утворений із абсолютних величин його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{33.8}$$

збігається, то збігається й початковий ряд.

Доведення. Позначимо n-ну часткову суму даного знакозмінного ряду через $S_n^{(1)}$. Тоді $S_n^{(1)} = S_n^{(1)+} - S_n^{(1)-}$, де $S_n^{(1)+}$ – сума усіх додатних доданків, а $S_n^{(1)}$ – сума абсолютних величин усіх від'ємних доданків часткової суми $S_n^{(1)}$. Дістанемо, що n-на часткова сума ряду, утвореного із абсолютних величин членів даного ряду, дорівнюватиме $S_n^{(2)} = S_n^{(1)+} + S_n^{(1)-}$. За умовою теореми вона існує, а тому існують границі послідовностей $S_n^{(1)+}$ і $S_n^{(1)-}$, бо кожна з них буде зростаючою і обмеженою зверху послідовністю. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)+} - \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)-},$$

то існування скінченної границі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)}$ доведено. Отже, даний знакозмінний ряд є збіжним рядом.

Ця ознака є достатньою ознакою збіжності, але вона не є необхідною. Існують збіжні знакозмінні ряди, для яких ряди, утворені з абсолютних величин членів початкового ряду, є розбіжними.

Знакозмінний ряд називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд, утворений з абсолютних величин його членів.

Якщо даний ряд збігається, а ряд, утворений із абсолютних величин його членів розбігається, то такий ряд називається ***умовно збіжним***.



Зауважимо, що для дослідження збіжного ряду на абсолютну або умовну збіжність можна використати ознаки порівняння, Даламбера або Коші, тобто ознаки збіжності рядів з додатними членами. Якщо ж поведінка

вихідного ряду невідома, то на основі теореми 33.5 можно зробити висновок про збіжність даного ряду тільки за умови збіжності ряду, складеного з абсолютних величин членів даного ряду. Якщо ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду розбігається, то про збіжність чи розбіжність даного ряду теорема відповіді не дає.

 Проведемо дослідження на збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}, \alpha = const$.

Оскільки $|\sin n\alpha| \le 1$, то $\left|\sin(n\alpha) \cdot \frac{1}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4}$. У правій частині останньої нерівності маємо загальний член ряду Діріхле, для якого $s = 4$. Цей ряд збігається. Отже, за ознакою порівняння рядів, ряд, що утворений з абсолютних величин членів досліджуваного ряду, збігається. Таким чином, досліджуваний ряд збігається абсолютно.

33.6. Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду

Окремим випадком знакозмінного ряду є ряд, у якого довільні два сусідні члени мають різні знаки. Він має назву ***знакопереміжного ряду*** і має вигляд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \qquad u_n > 0. \tag{33.9}$$

Теорема 33.6 (*ознака Лейбніца*). Нехай для знакопереміжного ряду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \; u_n > 0$$

виконуються умови

$$u_1 \ge u_2 \ge \ldots \ge u_n \ge u_{n+1} \ge \ldots \quad \text{та} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{33.10}$$

(кожен наступний член ряду за абсолютною величиною не більший за попередній, і границя загального члена ряду при $n \to \infty$ дорівнює нулю).

Тоді даний ряд збіжний, а його сума S невід'ємна і не перевищує першого члена ряду, тобто $0 \le S \le u_1$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $n = 2m$, тобто n є парним числом. Тоді

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m}.$$

Перепишемо цю рівність так:

$$S_{2m} = \quad (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Із умови теореми випливає, що вираз у кожній дужці невід'ємний. Отже, сума $S_{2m} \geq 0$ і вона зростає зі зростанням m. Запишемо цю саму суму інакше:

$$S_{2m} = \quad u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Отже, $S_{2m} \leq u_1$. Таким чином, послідовність S_{2m} монотонно зростає й обмежена зверху. Звідси випливає, що вона має границю, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m} = S,$$

де число S належить проміжку $0 \leq S \leq u_1$. Отже, доведено, що послідовність парних часткових сум S_{2m} має шукану границю S.

Доведемо, що часткові суми з непарними номерами мають своєю границею те саме число S. Розглянемо для цього суму n перших членів ряду, де $n = 2m+1$. Її можна записати у вигляді: $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Знайдемо границі лівої та правої частин цієї рівності при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2m} + \lim_{n\to\infty} u_{2m+1} = S,$$

оскільки за умовою теореми $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$. Доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m+1} = S$, тому даний ряд збігається, бо довільна (з парним чи непарним номером) часткова сума S_n має одну та ту саму скінченну границю S при $n \to \infty$.

Перевірка виконання умов (33.10) для знакопереміжного ряду є дослідженням його на збіжність за ***ознакою Лейбніца.***

Наслідок. Якщо знакопереміжний ряд збігається, то збігається і його n-й залишок

$$(-1)^n \left(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots\right),$$

а його сума не перевищує за абсолютною величиною першого члена ряду, тобто u_{n+1}. Дійсно, тому що залишок задовольняє умовам ознаки Лейбніця.



Звідси випливає наступний важливий практичний висновок, який використовується при наближеному обчисленні суми знакопереміжного ряду.

Суму збіжного знакопереміжного ряду (33.9) можна наближено замінити сумою його перших n членів. Тоді похибка за абсолютною величиною, згідно з наслідком із ознаки Лейбніца, не буде перевищувати першого із відкинутих членів ряду, тобто

$$\left|S - S_n\right| \le u_{n+1}. \qquad (33.11)$$

 Дослідити на збіжність знакопереміжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Перевіримо виконання першої та другої вимог щодо збіжності знакопереміжного ряду:

$$1)\ 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots > \frac{1}{n} > \cdots; \qquad 2) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Отже, обидві умови виконуються, і ряд збігається за ознакою ***Лейбніца.*** Ряд збігається умовно, тому що ряд, складений з абсолютних величин членів даного ряду $\left|u_n\right| = \frac{1}{n}$, розбігається як гармонійний.

 Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$.

Маємо знакопереміжний ряд. Цей ряд збігається, бо виконуються умови ознаки Лейбніца. Перевіримо тепер, збігається він абсолютно чи умовно. Для цього утворимо ряд із абсолютних величин членів досліджуваного ряду:

$$\left|u_n\right| = \frac{1}{n^2}.$$

Ряд збігається за інтегральною ознакою Коші $(s > 1)$. Таким чином, вихідний ряд збігається.

Зауважимо, що для перевірки умови ознаки Лейбніця $u_1 \ge u_2 \ge \text{K} \ge u_n \ge \text{K}$ можна знайти похідну від функції $f(x) = \frac{1}{x^2}$, відповідну загальному члену ряду, та показати, що похідна $f'(x) < 0$.



Ключові терміни

Знакосталий ряд; ряд з додатними членами; ознака порівняння; ознака порівняння рядів у граничній формі; ознака Даламбера; радикальна ознака Коші; інтегральна ознака Коші; ряд Діріхле або узагальнений гармонійний ряд; знакозмінний ряд; абсолютно збіжний ряд; умовно збіжний ряд; знакопереміжний ряд; ознака Лейбніца.



Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте достатні ознаки збіжності числових рядів:

а) ознаку порівняння;

б) ознаку Даламбера;

в) радикальну ознаку Коші;

г) інтегральну ознаку Коші.

2. Наведіть приклади загальних членів ряду до кожної достатньої ознаки.

3. Чому в загальному випадку ознака Даламбера не застосовується для рядів, що досліджуються за ознакою порівняння?

4. Які ряди називаються знакозмінними?

5. Наведіть приклади дослідження ряду за різними ознаками. Порівняйте отримані результати.

6. Сформулюйте достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.

7. Як досліджуються на збіжність знакозмінні ряди, для яких достатня ознака не виконується?

8. Які ряди називаються знакопереміжними?

9. У чому полягає ознака Лейбніца?

10. Яка ознака використовується для оцінки похибки при заміні суми знакопереміжного ряду сумою його n перших членів?

11. Який ряд називається абсолютно збіжним?

12. Який ряд називається умовно збіжним?

13. Наведіть приклади абсолютно збіжних рядів.

14. Наведіть приклади умовно збіжних рядів.

15. Як довести нерівність в ознаці Лейбніца у загальному випадку?

Глава 34. Степеневий ряд та його збіжність. Ряди Тейлора і Маклорена

34.1. Функціональні ряди. Степеневий ряд

У попередніх главах ми розглядали ряди, членами яких є числа. Однак ряди можуть утворювати і послідовності, що є функціями якоїсь змінної.

Ряд називається ***функціональним***, якщо його членами є функції змінної x, які визначені на деякій множині X, тобто ряд вигляду

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots, \tag{34.1}$$

де $u_n(x)$ – загальний член ряду.

Точка x називається ***точкою збіжності функціонального ряду***, якщо при підстановці її в ряд утворюється збіжний числовий ряд. Отже, сума ряду є функцією від x і її можна позначити через $S(x)$.

Степеневим рядом називається функціональний ряд, членами якого є степеневі функції $a_n x^n$ зі зростаючими цілими показниками степенів:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \qquad n\in N, \tag{34.2}$$

де дійсні числа $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots-$ коефіцієнти ряду. Вираз $u_n=a_nx^n$ є ***загальним членом степеневого ряду***.

Іноді розглядають степеневий ряд загального вигляду:

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots. \tag{34.3}$$

Цей ряд легко звести до попереднього, якщо позначити $x-a=z$.

34.2. Область і радіус збіжності

Розглянемо питання збіжності степеневого ряду вигляду (34.2). Надаючи змінній x певних числових значень, одержимо числові ряди, які залежно від значення x можуть бути як збіжними, так і розбіжними. У зв'язку з цим вводиться поняття області збіжності степеневого ряду.

Областю збіжності степеневого ряду називається сукупність усіх тих значень x, при яких степеневий ряд збігається.

Зазначимо, що степеневий ряд вигляду (34.2) завжди збігається при $x = 0$, а степеневий ряд вигляду (34.3) збігається при $x = a$.

Для відшукання області збіжності степеневого ряду використовується така теорема.

Теорема 34.1 (*теорема Абеля*). Якщо степеневий ряд збіжний для деякого значення $x_0 \neq 0$, то він збігається абсолютно при кожному значенні x, для якого виконується умова

$$|x| < |x_0|. \tag{34.4}$$

Якщо степеневий ряд розбігається для деякого значення x_0, то він розбігається при кожному значенні x, для якого виконується умова

$$|x| > |x_0|. \tag{34.5}$$

Доведення. Нехай при $x = x_0$ степеневий ряд (34.2) збігається, тобто числовий ряд

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 + a_3 {x_0}^3 + \ldots + a_n {x_0}^n + \ldots$$

є збіжним. Тоді за необхідною умовою збіжності дістанемо умову $a_n x_0^n \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, загальний член ряду $a_n x_0^n$ є обмеженою послідовністю, тобто знайдеться таке число M, що для довільних значень n буде виконуватись нерівність $|a_n x_0^n| < M$. Звідси дістанемо таку оцінку абсолютної величини загального члена ряду (34.2):

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = |a_n x_0^n| \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)\right|^n < Mq^n, \qquad n \in N, \qquad \text{де } q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

Таким чином, правильна нерівність

$$|a_n x^n| < Mq^n. \tag{34.6}$$

Тепер можна скористатись ознакою порівняння, взявши за еталонний ряд суму геометричної прогресії при $|q| < 1$. За ознакою порівняння дістанемо абсолютну збіжність степеневого ряду вигляду (34.2), що й потрібно довести.

Доведемо другу частину теореми. Нехай у точці $x = x_0$ степеневий ряд вигляду (34.2) розбігається. Треба довести, що ряд розбігається для усіх таких x, що $|x| > |x_0|$.

Припустимо, що це не так. Отже, ряд буде збіжним при деякому значенні x_1, для якого виконується нерівність $|x_1| > |x_0|$. Звідси на основі уже доведеної першої частини теореми отримаємо, що ряд буде збігатися і в точці x_0, що суперечить умові теореми, тобто, припущення про існування числа x_1 є хибним, а це й потрібно було довести.

Таким чином, для довільного степеневого ряду вигляду (34.2) маємо один із таких трьох випадків:

1) степеневий ряд ***збіжний*** для усіх довільних дійсних значень x;

2) степеневий ряд ***розбіжний*** для усіх довільних дійсних значень x, крім випадку $x = 0$;

3) існують такі значення x_1 та x_2, що ряд збігається при $x = x_1$ і розбігається при $x = x_2$. Згідно з теоремою Абеля, буде виконуватись нерівність $|x_1| \leq |x_2|$. Це значить, що множина усіх значень x, для яких степеневий ряд буде збіжним, обмежена зверху. Тому існує таке найбільше додатнє число R, що для усіх $|x| < R$ ряд збігається, причому абсолютно (за теоремою Абеля), а при $|x| > R -$ розбігається. Таке число R називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду, а інтервал $(-R, R) -$ ***інтервалом збіжності*** степеневого ряду.

Зрозуміло, що у першому випадку $R = +\infty$, у другому $-R = 0$, у третьому $-0 < R < \infty$. Зауважимо, що поняття інтервала збіжності і поняття області збіжності степеневого ряду є близькими, але не тотожними, тому що до області збіжності може належати не тільки інтервал збіжності, а й обидва його кінця, або ж один із його кінців.

Теорему Абеля можна використати для відшукання інтервала та радіуса збіжності степеневого ряду. Відмітимо, що згідно з теоремою Абеля інтервали збіжності ряду (34.2) та ряду, що складений з абсолютних величин членів даного ряду, співпадають. Отже, дослідимо на збіжність ряд

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \ldots + |a_n||x|^n + \ldots,$$

утворений з абсолютних величин членів даного степеневого ряду за умови, що $|a_n| \neq 0$. Застосуємо ознаку Даламбера до одержаного ряду.

Обчислимо границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}\|x|^{n+1}}{|a_n\|x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l,\quad (u_n=a_nx^n)$$

і порівняємо її з одиницею. Множина значень x, для яких $l<1$, утворює інтервал збіжності степеневого ряду (34.2). При усіх значеннях x, для яких $l<1$, ряд
розбігається. Отже, ряд збігається, якщо

$$|x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R,$$

де R – радіус збіжності степеневого ряду.

Тобто

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\ . \qquad (34.7)$$

Зауважимо, що формулу (34.7) не завжди можна використати. Наприклад, якщо серед чисел a_n є нескінченна кількість нульових. Тоді потрібно використати ознаку Даламбера і міркування теореми Абеля аналогічно тому, як це було зроблено вище.

Для дослідження поведінки ряду (34.2) у точках $x=\pm R$ потрібно проводити спеціальне дослідження на збіжність числових рядів, отриманих із даного степеневого ряду після підстановки значень $x=\pm R$, оскільки ознака Даламбера, на яку ми спирались при відшуканні радіуса збіжності, у цьому випадку не дає відповіді ($l=1$).

За співвідношенням (34.7) можна знайти радіус збіжності степеневого ряду вигляду (34.3). Це співвідношення можна отримати, якщо позначити $x-a=z$ і розглянути ряд зі змінною z. Виходячи з цього, інтервал збіжності ряду (34.3) матиме вигляд $(a-R;a+R)$. Дослідження ряду на збіжність у точках $x=a\pm R$ так само проводять окремо.



Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Загальний член степеневого ряду $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$, тоді $u_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Далі одержуємо:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right|.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0 < 1.$$

Остання нерівність виконується для будь-якого $x \in R$, тому ряд збігається на всій числовій осі: $-\infty < x < +\infty$.

Можна також відразу знайти R за співвідношенням (34.7), оскільки степеневий ряд містить всі степені x (серед коефіцієнтів a_n немає нульових):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$



Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} x^{2n-1}}{2n+1}.$$

У цьому степеневому ряді коефіцієнти при парних степенях x дорівнюють нулю, бо $a_{2n} = 0$, і формулу (34.7) використати неможливо. Однак безпосереднє застосування ознаки Даламбера дає:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}(2n+1)}{2^{2n-1}x^{2n-1}(2n+3)}\right|=4x^2.$$

Звідси отримуємо збіжність ряду, якщо $|x|<1/2$, і розбіжність, якщо $|x|>1/2$. Отже, $x\in(-1/2,1/2)$ – його інтервал збіжності.

Дослідимо поведінку степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності. Нехай $x=-1/2$. Підставимо це значення в степеневий ряд, отримуємо знакосталий числовий ряд з від'ємними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}.$$

Взявши за еталонний ряд гармонійний, за ознакою порівняння у граничній формі дістанемо розбіжність ряду із загальним членом $\frac{1}{2n+1}$. Тому даний ряд також розбіжний.

При значенні $x=1/2$ степеневий ряд перетворюється у числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$. Цей ряд, як ми вже з'ясували, є розбіжним. Таким чином, областю збіжності вихідного степеневого ряду є інтервал $x\in(-1/2;1/2)$.



Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n^2}.$$

Позначимо $x-5=z$. Отже, $u_n=\frac{z^n}{n^2}$, а $u_{n+1}=\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}$. Для знаходження радіуса збіжності можна застосувати формулу (34.7):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1.$$

Дослідимо поведінку ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $z=-1$ отримаємо знакопереміжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Цей ряд збігається згідно з ознакою Лейбніца.

При $z=1$ маємо знакосталий числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Він збігається як ряд Діріхле, оскільки $s=2$. Отже, областю збіжності степеневого ряду буде проміжок $-1\le z\le 1$. Повертаючись до змінної x, отримаємо $-1\le x-5\le 1$, тобто $4\le x\le 6$.

Таким чином, областю збіжності початкового ряду є проміжок $[4,6]$.

34.3. Властивості степеневих рядів

Сформулюємо властивості степеневих рядів, які можуть бути використані при дослідженні цих рядів (без доведення).

Нехай степеневий ряд (34.2) збігається на інтервалі $(-R,R)$. Тоді:

1^0. ***Сума членів степеневого ряду є функцією, неперервною в усіх точках інтервалу збіжності.***

2^0. ***Степеневий ряд можна почленно диференціювати у кожній точці інтервалу збіжності.*** Сума цього нового ряду дорівнює похідній від суми вихідного ряду, а радіус збіжності нового ряду дорівнює радіусу збіжності вихідного ряду.

3^0. ***Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на довільному проміжку*** $[a,x]$***, який належить до інтервалу збіжності.*** Інтеграл від суми степеневого ряду дорівнює сумі ряду, утвореного з інтегралів від членів початкового ряду. Радіус збіжності нового ряду дорівнює радіусу збіжності початково

4^0. ***Степеневі ряди можно почленно додавати та віднімати.*** Радіус збіжності отриманого ряду не буде меншим за найменший із радіусів збіжності вихідних рядів.



Проінтегрувати почленно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$ при $x\in(-1;1)$ і знайти область збіжності утвореного ряду.

Запишемо ряд у розгорнутому вигляді:

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\frac{1}{x+1}.$$

Цей ряд на заданому проміжку є сумою нескінченної спадної геометричної прогресії, а його сума дорівнює $\frac{1}{x+1}$.

Проінтегруємо почленно ліву та праву частини наведеної рівності в межах від 0 до деякого x, що належить інтервалу збіжності:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots.$$

Ми отримали ряд, загальний член якого $u_n=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}$, а сума дорівнює $\ln(1+x)$. Згідно з властивостями степеневих рядів, інтервалом збіжності цього ряду є $(-1;1)$. Дослідимо поведінку нового ряду на кінцях інтервалу збіжності.

Нехай $x=-1$. У цьому випадку дістанемо числовий ряд, загальний член якого дорівнює $u_n=(-1)^n\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)}=-\frac{1}{n+1}$, тобто ряд розбіжний.

Нехай $x=1$. Одержимо знакопереміжний числовий ряд, загальний член якого $u_n=(-1)^n\frac{1}{n+1}$. Цей ряд за ознакою Лейбніца є збіжним. Отже, областю збіжності отриманого після інтегрування степеневого ряду є проміжок $(-1;1]$.

На цьому прикладі ми побачили, що інтегрування степеневого ряду може розширити його область збіжності.



Проінтегрувати на інтервалі $x\in(-1;1)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\ldots=\frac{1}{1+x^2}.$$

Як і у попередньому прикладі, ми маємо ряд, утворений членами нескінченної спадної геометричної прогресії, для якого відомі інтервал збіжності і сума у будь-якій точці цього інтервалу. Проінтегрувавши в інтервалі збіжності цей ряд та його суму, одержимо:

$$\int_0^x \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

Дослідимо поведінку одержаного ряду на кінцях інтервалу збіжності.

Нехай $x = -1$. У цьому випадку загальний член степеневого ряду набуває вигляду $u_n = (-1)^{n-2} \frac{1}{2n-1}$. Тобто ми отримали знакопереміжний ряд, який за ознакою Лейбніца є збіжним.

Нехай $x = 1$. У цьому випадку також маємо знакопереміжний числовий ряд із загальним членом $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$, збіжний за тією самою ознакою.

Отже, областю збіжності утвореного інтегруванням степеневого ряду є $x \in [-1;1]$. Тут інтегрування степеневого ряду розширило область збіжності до замкненого проміжку.

34.4. Степеневі ряди Тейлора та Маклорена, необхідна і достатня умови збіжності

Степеневі ряди часто використовуються у наближених обчисленнях при складанні таблиць елементарних функцій, при обчисленні інтегралів, що не виражаються через елементарні функції, при розв'язуванні диференціальних рівнянь тощо.

Припустимо, що довільна функція $f(x)$, яка задана на множині X, є сумою степеневого ряду

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{34.8}$$

в області його збіжності, а саме розкладається у степеневий ряд. Треба визначити коефіцієнти степеневого ряду.

Теорема 34.2. *Якщо функція $f(x)$ має похідні будь-якого порядку в околі точки $x = a$ й розкладається у степеневий ряд (34.8) в інтервалі його збіжності $(a-R, a+R)$, то цей розклад можна здійснити єдиним способом.*

Доведення. Оскільки за умовою теореми на інтервалі $(-R; R)$ ряд збігається і $f(x)$ є його сумою, то за властивістю 2^0 степеневих рядів цей ряд

можна диференціювати почленно на заданому проміжку скільки завгодно разів. Здійснивши диференціювання ряду n разів, дістанемо:

$$f^{(n)}(x) = a_n n! + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \text{K} \cdot (n+1) a_{n+1}(x-a) + \text{K}, \quad n = 0,1,2,\text{K}$$

Звідси при $x = a$ знаходимо $f^{(n)}(a) = a_n n!$ або

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0,1,2,... \tag{34.9}$$

Таким чином, коефіцієнти степеневого ряду однозначно визначаються формулами (34.9), що і потрібно було довести.

Отже, якщо функція $f(x)$ розкладається в степеневий ряд, то цей ряд має вигляд

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots, \tag{34.10}$$

й називається ***рядом Тейлора*** для функції $f(x)$ в околі точки $x = a$.

Частинним випадком ряду Тейлора при $a = 0$ є ***ряд Маклорена:***

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{34.11}$$

Залишок ряду ***Тейлора*** (або ряду ***Маклорена***) отримуємо відкиданням від основного ряду перших n його членів, він позначається як $R_n(x)$. Тоді функцію $f(x)$ можна записати як суму перших n членів ряду $S_n(x)$ та його n-го залишку $R_n(x)$:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \tag{34.12}$$

тобто

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Залишок $R_n(x)$ можна подати за допомогою різних формул. Ми розглянемо одну із них, так звану ***форму Лагранжа:***

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ \text{ де }\ c=a+\theta(x-a),\quad 0<\theta<1.$$

Зазначимо, що на практиці частіше використовується ряд Маклорена.

Теорема 34.3 (***необхідна і достатня умова збіжності ряду Маклорена***). Нехай радіус збіжності ряду $R>0$. Для того щоб цей ряд Маклорена збігався в інтервалі $(-R,R)$ до функції $f(x)$, необхідно і достатньо, щоб у вказаному інтервалі виконувалась умова

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0. \tag{34.13}$$

Доведення. Для функції $f(x)$ запишемо формулу Маклорена у вигляді

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x),\ \text{ або }\ f(x)-S_n(x)=R_n(x).$$

Нехай ряд

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots$$

збігається до функції $f(x)$ у вказаному інтервалі $(-R,R)$, тобто $S_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$. Звідси виходить, що $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ в цьому інтервалі. Якщо, навпаки, в інтервалі $(-R,R)$ виконується умова $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$, то $S_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$. Теорему доведено.

Таким чином, ряд Тейлора (Маклорена) збігається до функції $f(x)$ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)\neq 0$, то ряд може бути збіжним, проте його сума не дорівнюватимо $f(x)$.

Теорема 34.4. Нехай похідні всіх порядків функції $f(x)$ на деякому проміжку $[-b,b]$ обмежені за абсолютною величиною одним і тим самим числом M, тобто існує така стала M, для якої нерівність $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$ виконується на проміжку $[-b,b]$ для усіх $n\geq 0$. Тоді в усіх точках цього проміжку функцію $f(x)$ можна розкласти у ряд Маклорена.

Доведення. Запишемо абсолютну величину залишкового члена у формі Лагранжа та оцінемо його:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} M .$$

Доведемо, що $\frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$, при $n \to \infty$. Для цього розглянемо числовий ряд, загальний член якого дорівнює $\frac{b^{n+1}}{(n+1)!}$, і доведемо, що цей ряд збіжний за ознакою Даламбера (пропонуємо здійснити дослідження самостійно). Враховуючи необхідну умову збіжності числових рядів, отримаємо потрібне.

Тепер з нерівності $|R_n(x)| < \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} M$ отримаємо умову $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ розкладання функції $f(x)$ в степеневий ряд Маклорена, вказану в теоремі (34.3).

Отже, щоб розкласти функцію $f(x)$ у степеневий ряд, необхідно:

1) ***знайти*** коефіцієнти ряду Тейлора (Маклорена);

2) ***знайти*** область збіжності отриманого степеневого ряду;

3) ***довести***, що даний ряд збігається до функції $f(x)$.



Розкласти у ряд Тейлора функцію $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ в околі точки $x = -4$.

Для цього знайдемо значення функції та її похідних при $x = -4$.

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$, $\quad f(-4) = -64 - 32 + 20 - 2 = -78$;

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$, $\quad f'(-4) = 48 + 16 - 5 = 59$;

$f''(x) = 6x - 4$, $\quad f''(-4) = -28$;

$f'''(x) = 6$, $\quad f'''(-4) = 6$,

…… $\quad$ ……

$f^{(n)}(x) = 0$ при $n \geq 4$, $\quad f^{(n)}(-4) = 0$ при $n \geq 4$.

Підставивши ці значення в ряд (34.10), отримаємо:

$$x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = -78 + \frac{59}{1!}(x+4) - \frac{28}{2!}(x+4)^2 + \frac{6}{3!}(x+4)^3,$$

або

$$x^3-2x^2-5x-2=-78+59(x+4)-14(x+4)^2+(x+4)^3.$$

Областю збіжності цього ряду (скінченної суми) є вся числова вісь: $-\infty<x<\infty$. Залишок ряду дорівнює нулю. Отже, даний ряд збігається до функції $f(x)$.



Розкласти функцію e^x у ряд Тейлора в околі точки $x=2$.

Для цього знайдемо значення функції та її похідних при $x=2$:

$$f(x)=e^x, \qquad f(2)=e^2;$$
$$f'(x)=e^x, \qquad f'(2)=e^2;$$
$$f^{(n)}(x)=e^x \ , \ n\geq 2, \qquad f^{(n)}(2)=e^2 \ , \quad n\geq 2.$$

Підставивши ці значення у ряд (34.10), одержимо:

$$e^x=e^2+\frac{e^2}{1!}(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\ldots+\frac{e^2}{n!}(x-2)^n+\ldots \Rightarrow \ e^x=e^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}\right).$$

Знайдемо область збіжності цього ряду. За ознакою Даламбера ряд збігається, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1,$$

тобто $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot(x-2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)}{n+1}\right|=|x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Отже, при будь-якому x ця границя менша за 1, а тому областю збіжності ряду буде вся числова вісь: $-\infty<x<\infty$.

Ряд збігається до функції $f(x)$ для довільних x, тому що у будь-якому проміжку $[-b,b]$ функція й її похідні обмежені, наприклад числом e^b.



Ключові терміни

Функціональний ряд; збіжність функціонального ряду; область збіжності функціонального ряду; степеневий ряд; радіус збіжності степеневого ряду; теорема Абеля; ряд Тейлора; ряд Маклорена; залишок ряду у формі Лагранжа.



Запитання для самоперевірки

1. Який ряд називається функціональним?
2. Що називається областю збіжності ряду?
3. Що таке степеневий ряд?
4. Сформулюйте теорему Абеля.
5. Як знайти радіус збіжності степеневого ряду?
6. Як використати ознаку Даламбера для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду?
7. Які властивості степеневого ряду вам відомі?
8. Що таке ряд Тейлора? Який вигляд має ряд Маклорена?
10. Яка умова збіжності ряду Тейлора до функції $f(x)$?

Глава 35. Розкладання в ряд основних елементарних функцій. Використання рядів для наближених обчислень. Ряди Фур'є

35.1. Розкладання в ряд Маклорена основних елементарних функцій

Розглянемо декілька важливих прикладів подання значень основних елементарних функцій у вигляді ряду Маклорена, тобто ***розкладання функції в ряд Маклорена***. Нагадаємо, що ряд Маклорена, який має вигляд

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots, \qquad (35.1)$$

збігається в інтервалі $(-R,R)$ до значення функції $f(x)$ (сума ряду знаходиться з рівності $S(x)=f(x)$), якщо на цьому інтервалі виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Аналогічно ряд Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \quad (35.2)$$

збігається в інтервалі $(a-R, a+R)$ до значення функції $f(x)$, якщо для ряду на цьому інтервалі виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Розглянемо розкладання в ряд Маклорена деяких елементарних функцій. Алгоритм розкладання функції в ряд передбачає такі кроки:

а) ***знаходження коефіцієнтів*** ряду Маклорена для даної функції;

б) ***обчислення радіуса збіжності*** отриманого ряду;

в) ***доведення*** того, що отриманий ряд збігається саме до функції $y=f(x)$.



Представимо функцію $f(x)=e^x$ як ряд Маклорена. Для цього обчислимо значення функції та її похідних при $x=0$.

$$f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ldots,\ f^{(n)}(x)=e^x.$$

Тоді числові коефіцієнти ряду (35.1) мають вигляд:

$$f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=1,\ldots,\ f^{(n)}(0)=1,\ n\in N.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд Маклорена, отримаємо:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (35.3)$$

Знайдемо радіус збіжності цього ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Отже, ряд збігається в інтервалі $(-\infty,+\infty)$.

Цей ряд збігається до функції e^x при довільних значеннях x, бо на будь-якому проміжку $[-b,b]$ функція e^x та її похідні за абсолютною величиною обмежені числом e^b.



Розглянемо функцію $f(x)=\sin x$.

Знайдемо значення функції та її похідних при $x=0$:

$$f(x)=\sin x,\quad f(0)=0;$$
$$f'(x)=\cos x;\quad f'(0)=1;$$

$$f''(x) = -\sin x; \quad f''(0) = 0;$$
$$f'''(x) = -\cos x; \quad f'''(0) = -1;$$
$$f^{\text{iv}}(x) = \sin x; \quad f^{\text{iv}}(0) = 0$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots.$$

Неважко помітити, що всі похідні парного порядку дорівнюють нулю: $f^{(2n)}(0) = 0$, а похідні непарного порядку почерзі дорівнюють числам 1 та -1: $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$, де $n = 1,2,3,\ldots$. Підставимо знайдені коефіцієнти в ряд Маклорена. Одержуємо розкладання функції $f(x) = \sin x$:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (35.4)$$

Знайдемо інтервал збіжності цього ряду. За ознакою Даламбера маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}(2n-1)!}{(2n+1)!\,x^{2n-1}}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} = 0 < 1$$

для будь-якого x. Отже, ряд збігається на всій числовій осі: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Цей ряд збігається до функції $\sin x$, бо модулі всіх її похідних обмежені зверху одиницею.



Розглянемо функцію $f(x) = \cos x$.

Знайдемо значення функції та її похідних при $x = 0$:

$$f(x) = \cos x, \quad f(0) = 1;$$
$$f'(x) = -\sin x; \quad f'(0) = 0;$$
$$f''(x) = -\cos x; \quad f''(0) = -1;$$
$$f'''(x) = \sin x; \quad f'''(0) = 0;$$
$$f^{\text{iv}}(x) = \cos x; \quad f^{\text{iv}}(0) = 1;$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Отже, коефіцієнти шуканого ряду обчислюються за такими формулами: $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ та $f^{(2n-1)}(0) = 0$. Таким чином, дістанемо

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots \qquad (35.5)$$

Аналогічно з попереднім рядом область його збіжності $(-\infty,+\infty)$. Ряд збігається до функції $\cos x$, бо модулі всіх її похідних обмежені зверху одиницею.

Звернемо увагу, що функція $\sin x$ є непарною, і вона розкладена в ряд за непарними степенями, а $\cos x$ – парна функція, яка розкладена в ряд за парними степенями.



Розглянемо біноміальний ряд $f(x)=(1+x)^m$, де m – довільна дійсна стала.

Знайдемо значення функції та її похідних при $x=0$:

$$f(x)=(1+x)^m; \qquad f(0)=1;$$
$$f'(x)=m(1+x)^{m-1}; \qquad f'(0)=m;$$
$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}; \qquad f''(0)=m(m-1);$$
$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}; \qquad f'''(0)=m(m-1)(m-2).$$

Звідси легко помітити загальну закономірність:

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots\big(m-(n-1)\big)(1+x)^{m-n},$$
$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\ldots\big(m-(n-1)\big).$$

Підставимо ці значення коефіцієнтів у ряд Маклорена. Одержуємо розкладання функції в степеневий ряд.

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots m(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad (35.6)$$

Знайдемо радіус збіжності цього ряду у випадку, коли число m не дорівнює додатному цілому числу (у випадку, коли число m – додатне ціле, функція $f(x)=(1+x)^m$ є многочленом, і радіус збіжності такого ряду нескінченний).

За ознакою Даламбера і формулою для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду дістанемо:

$$|a_n|=\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\right|;|a_{n+1}|=\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}\right|;$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right|=1.$$

Отже, $(-1,1)$– інтервал збіжності цього ряду. У граничних точках при $x=-1$ та $x=1$ ряд може збігатися чи розбігатися залежно від значення показника степеня m (провести дослідження самостійно).

Можна також показати, що досліджений ряд збігається на інтервалі $(-1,1)$ до функції $f(x)=(1+x)^m$, тобто сума ряду дорівнює $S(x)=(1+x)^m$ при $|x|<1$.



Розкладемо в ряд Маклорена функцію: $f(x)=\ln(1+x)$.

Для цього використаємо біноміальний ряд (35.6) при $m=-1$. Одержимо

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\ldots$$

Враховуючи, що степеневий ряд можна інтегрувати в області його збіжності (властивість 4^0 степеневих рядів), знайдемо інтеграл від лівої та правої частин даного ряду.

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^x=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (35.7)$$

Знайдемо область збіжності даного ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

тобто областю збіжності даного ряду є інтервал $(-1,+1)$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x=-1$ одержимо числовий ряд із загальним членом $u_n=(-1)^{2n-1}\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}$. Цей ряд є гармонійним рядом, тобто розбігається. При $x=+1$ одержимо числовий ряд із загальним членом $u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. За ознакою ***Лейбніца*** він збігається. Таким чином, областю збіжності даного ряду є проміжок $(-1,+1]$.



Розкладемо в ряд Маклорена функцію: $f(x)=\operatorname{arctg} x.$

Використаємо біноміальний ряд при $m=-1$, а замість x підставимо x^2. Одержимо

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\ldots \qquad (35.8)$$

Інтегруючи цей ряд на інтервалі збіжності $(-1,1)$, одержимо ряд

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x\Big|_0^x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots \qquad (35.9)$$

Можна перевірити, що цей ряд на кінцях інтервалу збігається, тобто його областю збіжності є проміжок $[-1,+1]$.



Знайти розклад у степеневий ряд інтеграла $\int \frac{\cos x}{x}dx$.

Спочатку запишемо розкладання в ряд функції $\cos x$ за формулою (35.5):

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}+\ldots$$

Тоді

$$\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\ldots+\frac{\left(-1\right)^n\cdot x^{2n-1}}{\left(2n\right)!}+\ldots$$

Тепер, виконуючи почленне інтегрування, отримуємо:

$$\int\frac{\cos x}{x}dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{2!}+\int\frac{x^3dx}{4!}-\ldots+\int\frac{\left(-1\right)^n\cdot x^{2n-1}}{\left(2n\right)!}dx+\ldots=$$

$$=C+\ln\left|x\right|-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}-\ldots+\frac{\left(-1\right)^n x^{2n}}{2n\cdot\left(2n\right)!}+\ldots$$

Знайдемо область збіжності залишку цього ряду, отриманого вилученням перших двох доданків. За ознакою Даламбера дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}\cdot 2n\cdot\left(2n\right)!}{\left(2n+2\right)\cdot\left(2n+2\right)!\cdot x^{2n}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2\cdot 2n}{\left(2n+2\right)^2\cdot\left(2n+1\right)}\right|=0.$$

Отже, ряд збігається на всій числовій осі. Таким чином, формула

$$\int \frac{\cos x}{x} dx = C + \ln|x| - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n \cdot (2n)!} + \ldots$$

правильна скрізь, за винятком значення $x = 0$.

35.2. Використання рядів у наближених обчисленнях

У наближених обчисленнях степеневі ряди відіграють надзвичайно велику роль. За їх допомогою свого часу було складено таблиці тригонометричних функцій, таблиці логарифмів, таблиці значень інших функцій, які використовують у різних областях знань, наприклад, у теорії ймовірностей та математичній статистиці. Крім того, розкладання функцій у степеневий ряд корисне для їх теоретичного дослідження.

Головним питанням при застосуванні степеневих рядів у наближених обчисленнях є питання ***оцінки похибки обчислення***, яка виникає при заміні суми ряду сумою його перших *n* членів.

35.2.1. Обчислення за допомогою знакопереміжних рядів

Нехай значення функції $f(x)$ розвинені в знакопереміжний ряд. Тоді при обчисленні значення функції для конкретного значення x отримуємо числовий ряд, до якого можна застосувати ознаку ***Лейбніца***. За цією ознакою, замінивши суму ряду частковою сумою його перших *n* членів, дістанемо абсолютну похибку, яка не перевищує першого члена залишку цього ряду, тобто

$$|S - S_n| < u_{n+1}. \qquad (35.10)$$



Обчислити $\cos 5^\circ$ з точністю до 0,0001. Для цього використаємо ряд Маклорена (35.5) для $f(x) = \cos x$, підставивши значення кута в радіанах:

$$\cos 5^\circ = \cos \frac{\pi}{36} = 1 - \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \frac{1}{4!} - \ldots$$

Якщо порівняти значення першого та другого членів ряду із заданою похибкою, отримаємо $u_1 = 1 > 0,00001$; $u_2 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \frac{1}{2!} \approx 0,0038 > 0,00001$. Оскільки для третього члена ряду вийде

$$u_3 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \frac{1}{4!} < \frac{(0.1)^4}{4!} = \frac{1}{24 \cdot 10000} < 0,00001,$$

тобто третій член ряду менший за задану похибку обчислення, то для обчислення $\cos 5°$ достатньо залишити перші два члени ряду, тому

$$\cos 5° \approx 1 - \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \frac{1}{2!} = 1 - 0,0038 = 0,9962.$$

Отже, отримали наближене значення $\cos 5° \approx 0,9962$, яке співпадає зі значенням $\cos 5°$, наведеним у довідкових таблицях.

 Обчислити $\sqrt[3]{9}$ з точністю 0,001.

Для цього застосуємо формулу біноміального ряду (35.6), записавши $\sqrt[3]{9}$ у вигляді

$$\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{\frac{9}{8}} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/3}.$$

У цьому виразі $m = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{1}{8}$,

$$\sqrt[3]{9} = 2\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{8}\right)^2 \frac{1}{2!} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3 \frac{1}{3!} + \ldots\right] =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{3\cdot 8} - \frac{2}{3^2 \cdot 8^2 \cdot 2!} + \frac{2\cdot 5}{3^3 \cdot 8^3 \cdot 3!} - \ldots\right) = 2 + 0,083 - 0,003 + 0,0002 - \ldots$$

Порівнюючи послідовно члени ряду з допустимою похибкою, бачимо, що $u_4 = \frac{4\cdot 5}{3^3 \cdot 8^3 \cdot 3!} \approx 0,0002 < 0,001$. Отже, для наближеного обчислення числа $\sqrt[3]{9}$ достатньо взяти три члени ряду:

$$\sqrt[3]{9} \approx 2\left(1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576}\right) \approx 2,080.$$

35.2.2. Обчислення за допомогою знакододатних рядів

Розглянемо приклади оцінки похибки за допомогою ряду з додатніми членами.



Обчислити число Ейлера e з точністю до 0,001. Для цього у формулу розкладання в ряд функції $f(x)=e^x$ (35.3) підставимо $x=1$. Одержимо

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

Оцінимо похибку, яка виникає при заміні суми ряду сумою перших його n членів. Запишемо очевидну нерівність

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=2+\frac{(1/2)\cdot(1-(1/2)^{n-1})}{1-1/2}=2+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3.$$

Скористаємося далі формулою залишкового члена ряду у формі Лагранжа:

$$R_n=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!},\ \ 0<\theta<1.$$

За умовою задачі достатньо знайти таке n, щоб виконувалась нерівність

$$R_n<0,001 \quad \text{або} \quad \frac{3}{(n+1)!}<0,001.$$

Легко перевірити, що ця нерівність правильна при $n = 6$, оскільки

$$R_6=\frac{e^{\theta}}{7!}<\frac{3}{7!}=\frac{3}{5040}\approx 0,0006<0,001.$$

Отже,

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}.$$

Звідси дістанемо

$$e\approx 2+0,5+0,1667+0,0417+0,0083+0,0014=2,7181\approx 2,718.$$



Обчислити $\ln 2$ з точністю 0,0001.

Зауважимо, що для обчислення логарифмів можна використовувати розкладання в ряд функції $f(x)=\ln(1+x)$, але цей ряд дуже повільно збігається і для досягнення заданої точності буває потрібно взяти дуже велику кількість його членів (!). Тому для обчислення логарифмів, як правило, використовується розкладання в ряд іншої функції:

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right). \qquad (35.11)$$

Легко перевірити, що цей ряд збігається на інтервалі $(-1,1)$.

Обчислимо $\ln 2$ за допомогою ряду (35.11). Оскільки у даному прикладі $\frac{1+x}{1-x}=2$, то $x=\frac{1}{3}$. Отже,

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ldots\right),$$

або

$$\ln 2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 9^2}+\frac{1}{7\cdot 9^3}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)\cdot 9^n}+\ldots\right).$$

Для обчислення $\ln 2$ із заданою точністю візьмемо суму перших чотирьох членів:

$$\ln 2\approx\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 9^2}+\frac{1}{7\cdot 9^3}\right).$$

Отже, відкидаємо залишок

$$R_4=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9\cdot 9^4}+\frac{1}{11\cdot 9^5}+\frac{1}{13\cdot 9^6}+\ldots\right).$$

Оцінимо похибку, зроблену при цьому. Очевидно, що

$$R_4<\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9\cdot 9^4}+\frac{1}{9\cdot 9^5}+\frac{1}{9\cdot 9^6}+\ldots\right),$$

тобто

$$R_4<\frac{2}{3\cdot 9^5}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\ldots\right).$$

Звідси

$$R_4 < \frac{2}{3\cdot 9^5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\cdot 9}{3\cdot 9^5\cdot 8} = \frac{1}{78732} < \frac{1}{10000} = 0,0001.$$

Отже, остаточно виходить:

$$\ln 2 \approx 0,66667 + 0,02469 + 0,00165 + 0,00006 = 0,69307 \approx 0,6931.$$

35.2.3. Обчислення визначених інтегралів

Розглянемо наближене обчислення визначених інтегралів за допомогою розкладання в ряд підінтегральної функції.



Обчислити з точністю до 0,001 значення інтеграла

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

Підінтегральну функцію розкладемо в ряд Маклорена. Для цього в ряді (35.3) для функції $f(x)=e^x$ замінимо x на $-x^2$. Одержуємо:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

Знайдемо інтеграл від лівої та правої частин цього ряду:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!} + \cdots \right)\Bigg|_0^1 \quad (35.12)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(n-1)!} + \cdots.$$

Отриманий ряд є знакопереміжним, тому похибку, яка виникає при заміні суми ряду сумою перших n його членів, оцінимо за ознакою ***Лейбніца***. Легко бачити, що при заміні суми ряду сумою його перших п'яти членів, похибка не перевищить $u_6 = \frac{1}{11\cdot 5!} < 0,001$. Отже,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} \approx 1 - 0,3333 + 0,1 - 0,0238 + 0,0046 = 0,7475.$$

Звідси остаточно з точністю до 0,001 одержимо:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0,748.$$

Зазначимо, що цей інтеграл не виражається через елементарні функції.

 Обчислити наближено $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ з точністю 0,001.

Для цього візьмемо ряд Маклорена (35.5) для функції $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

у якому змінимо x на $\sqrt{x}$. Тоді достанемо

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \ldots$$

Цей ряд збігається на всій числовій осі, у чому можна переконатися за допомогою ознаки Даламбера і теореми Абеля, як це уже робилося раніше. Інтегрування лівої та правої частин останньої рівності у межах від 0 до 1 дає:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \ldots\right) dx = \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(2n)!} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 = \qquad (35.13) \\
&= 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(n+1)(2n)!} + \ldots
\end{aligned}$$

За ознакою Лейбніца оцінимо похибку, яка виникає при заміні суми ряду сумою перших його n членів. Для цього обчислимо послідовні члени ряду та порівняємо їхні значення із заданою похибкою:

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0,25, \quad u_2 = 0,0139, \quad u_3 = 0,0003 < 0,001.$$

Отже, для обчислення інтеграла із заданою точністю достатньо взяти три члени ряду:

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx \approx 1 - 0.25 + 0,0139 \approx 0,764.$$

35.2.4. Використання рядів при розв'язуванні диференціальних рівнянь

Якщо інтегрування диференціального рівняння за допомогою елементарних функцій не вдається здійснити, його розв'язок у багатьох випадках можна відшукати у вигляді степеневого ряду:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(x - x_0\right)^n ,$$

де коефіцієнти C_n знаходять шляхом підстановки ряду у задане рівняння і порівнянням коефіцієнтів при однакових степенях x у лівій та правій частинах одержаної рівності, тобто вже знайомим методом невизначених коефіцієнтів.

Можна також шукати розв'язок рівняння у вигляді ряду Тейлора

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n ,$$

де $y\left(x_0\right) = y_0$, $y'\left(x_0\right) = f\left(x_0, y_0\right)$, а похідні вищих порядків $y^{(n)}\left(x_0\right)$ $\left(n = 2,3,\ldots\right)$ послідовно знаходяться за допомогою правил диференціювання лівої та правої частин даного рівняння і підстановки замість x числа x_0.



Знайти частинний розв'язок рівняння $y' = y + x^2$, $y\left(0\right) = -2$.

Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді степеневого ряда:

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$$

Потрібно тільки знайти коефіцієнти C_n $\left(n = 1,2,\ldots\right)$, оскільки за умовою $C_0 = y_0 = -2$. Підставимо цей ряд у вихідне рівняння, знайшовши y', оскільки степеневий ряд можна почленно диференціювати на інтервалі збіжності:

$$y' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + 4C_4 x^3 + \ldots$$

Тепер отримаємо рівність рядів, у якій скористаємось єдністю розкладання функції у степеневий ряд:

$$C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + 4C_4 x^3 + \ldots = x^2 + C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах одержаної рівності, отримаємо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів:

$$\begin{array}{c|ll} x^0 & C_1 = C_0, & C_1 = -2, \\ x^1 & 2C_2 = C_1, & C_2 = -1, \\ x^2 & 3C_3 = 1 + C_2, & C_3 = 0, \\ x^3 & 4C_4 = C_3, & C_4 = 0, \\ x^4 & 5C_5 = C_4, & C_5 = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x^{n-1} & nC_n = C_{n-1}, & C_n = 0. \end{array}$$

Отже, $y = -2 - 2x - x^2$.



Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' = xy$ при наявності початкових умов $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді степеневого ряду:

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots$$

Тепер треба знайти коефіцієнти $C_n\ (n = 0,1,2,\ldots)$, використавши початкові умови

$$C_0 = y(0) = 1.$$

Диференціюємо степеневий ряд:

$$y' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots + nC_n x^{n-1} + \ldots$$

Звідки знаходимо

$$C_1 = y'(0) = 0.$$

Диференціюємо ще раз степеневий ряд:

$$y'' = 2C_2 + 6C_3 x + 12C_4 x^2 + \ldots + n(n-1)C_n x^{n-2} + \ldots$$

Підставляємо у дане рівняння y, y'', дістаючи рівність рядів

$$2C_2 + 6C_3 x + 12C_4 x^2 + \ldots + n(n-1)C_n x^{n-2} + \ldots =$$
$$= C_0 x + C_1 x^2 + C_2 x^3 + \ldots + C_n x^{n+1} + \ldots$$

Тепер прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2C_2 = 0, \\ x^1 & 2\cdot 3C_3 = C_0, \\ x^2 & 3\cdot 4C_4 = C_1, \\ x^3 & 4\cdot 5C_5 = C_2, \\ \ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Розв'язуючи систему, отримуємо кілька перших невідомих коефіцієнтів, а потім помічаємо загальну закономірність їхнього утворення:

$$C_2 = 0,\ C_3 = \frac{1}{3!},\ C_4 = 0,\ C_5 = 0,\ C_6 = \frac{C_3}{5\cdot 6} = \frac{4}{6!},$$

$$C_7 = \frac{C_4}{6\cdot 7} = 0,\ C_8 = \frac{C_5}{7\cdot 8} = 0,\ C_9 = \frac{C_6}{8\cdot 9} = \frac{4\cdot 7}{9!},\ \ldots$$

Отже,

$$y = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4}{6!}x^6 + \frac{4\cdot 7}{9!}x^9 + \ldots + \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \ldots$$

35.3. Ряди Фур'є



У теорії функціональних рядів важливе місце займають ряди, які названі ім'ям французького математика і фізика Жан Батиста Жозефа Фур'є (1758 – 1830 рр.). Його "Аналітична теорія тепла" (1822 р.) стала початком теорії тригонометричних рядів, що набули широкого використання в різних галузях знань, в яких розглядаються коливальні процеси. Періодичні функції, які подаються у вигляді сум тригонометричних рядів, застосовують, наприклад, при побудові трендових моделей для прогнозування економічної динаміки, а також для виявлення скритих періодичних процесів, економічних циклів та ін.

35.3.1. Тригонометричні ряди

Розглянемо послідовність тригонометричних функцій

$$1/2,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots, \cos nx,\ \sin nx, \ldots\ n \in N\ . \qquad (35.14)$$

Відмітимо, що ця послідовність (35.14) має такі особливості:

1) функції послідовності (35.14) ***є періодичними*** з періодом 2π;

2) функції послідовності (35.14) є ***ортогональними*** на відрізку $[-\pi;\pi]$ у тому сенсі, що інтеграл на відрізку $[-\pi;\pi]$від добутку будь-яких двох різних функцій цієї системи дорівнює нулю, а інтеграл на відрізку $[-\pi;\pi]$ від квадрата будь-якої функції відмінний від нуля.

Дійсно,

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\frac{1}{2n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\big)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)}{m+n}+\frac{\sin(m-n)}{m-n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0\ \text{ï ðè }n\neq m.$$

Аналогічно знаходимо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=0\ \text{при}\ m\neq n;\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=0\ \textit{при}\ m\neq n.$$

У випадку, коли $m=n$, одержимо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Складемо функціональний ряд, загальний член якого має вигляд:

$$u_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx. \qquad (35.15)$$

Для зручності нульову гармоніку суми (35.15) позначимо $\frac{a_0}{2}$. Тоді відповідний функціональний ряд вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + \\ + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots, \tag{35.16}$$

або стисло

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right), \tag{35.17}$$

називається ***тригонометричним*** рядом, а сталі числа a_0, a_n, b_n, $n \in N$ називаються ***коефіцієнтами*** тригонометричного ряду.

Аналогічно із степеневими рядами вважається, що тригонометричний ряд (35.17) збігається до функції $f(x)$, якщо існує границя n-ї частинної суми $S_n(x)$ і дорівнює $f(x)$, тобто

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = f(x).$$

У цьому випадку сума ряда в точках його збіжности дорівнює $f(x)$, а відносно функції $f(x)$ кажуть, що вона ***розкладається*** в ряд, а саме:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right). \tag{35.18}$$

35.3.2. Тригонометричні ряди Фур'є

Розглянемо необхідну і достатню умови розкладання функції $f(x)$ в тригонометричний ряд.

Теорема 35.1 (*необхідна умова розкладання функції в ряд Фур'є*). Нехай функція $f\left(x\right)$, інтегровна на відрізку $\left[-\pi;\pi\right]$, розкладається в тригонометричний ряд (35.18), який можна почленно інтегрувати, то цей ряд є рядом Фур'є.

Доведення. Визначимо коефіцієнти тригонометричного ряду (35.18).

Проінтегруємо рівність (35.18) на відрізку $\left[-\pi;\pi\right]$, одержимо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right) dx. \tag{35.19}$$

Для знаходження коефіцієнтів a_n при $\cos nx$ домножимо рівність (35.18) на $\cos nx$ та проінтегруємо на відрізку $\left[-\pi;\pi\right]$ ліву та праву частини цієї рівності. Тоді, згідно з другою властивістю послідовності функцій (35.14), одержимо

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ n \in N. \qquad (35.20)$$

Аналогічно визначаємо коефіцієнти b_n, домноживши рівність (35.18) на $\sin nx$:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ \ n \in N. \qquad (35.21)$$

Таким чином, коєфіцієнти ряда (35.18) визначаются едиными формулами, що і доводить теорему.

Тригонометричний ряд (35.18) називається ***рядом Фур'є***, якщо його ***коефіцієнти*** обчислюються за формулами (35.19) – (35.21).

Отже, для кожної з періодичних інтегровних функцій можна обчислити коефіцієнти Фур'є a_0, a_n, b_n та формально побудувати ряд Фур'є, але про одержаний ряд не можна стверджувати, що він збігається, тим паче до функції $f(x)$. З'ясуємо, яким умовам повинна задовольняти функція $f(x)$, щоб її ряд Фур'є збігався і щоб його сума дорівнювала $f(x)$.

Теорема 35.2 (*достатні умови розкладання функції в ряд Фур'є*).

Якщо функція $f(x)$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$:

а) неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду;

б) монотонна або має скінченне число екстремумів, то ряд Фур'є збігається. При цьому:

1) в точках неперервності функції $f(x)$ він збігається до самої функції, тобто його сума $S(x) = f(x)$;

2) в кожній точці розриву x_k функції він збігається до півсуми односторонніх границь функції зліва і справа:

$$S(x_k) = \frac{1}{2}(\lim_{x \to x_k - 0} f(x) + \lim_{x \to x_k + 0} f(x));$$

3) в обох граничних точках інтервалу $[-\pi, +\pi]$ він збігається до півсуми односторонніх границь функції $f(x)$

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}(\lim_{x \to \pi + 0} f(x) + \lim_{x \to \pi - 0} f(x)).$$

Зауважимо, що теорему 35.2 називають теоремою Діріхле, а умови теореми, за якими ряд Фур'є збігається до функції $f(x)$, – умовами Діріхле.

Введемо поняття ***періодичного продовження*** функції $f(x)$, визначеної на відрізку $[-\pi,\pi]$. Функція $F(x)$, яка визначена на всій числовій осі і має період 2π, є періодичним продовженням функціїї $f(x)$, якщо на відрізку $[-\pi,\pi]$ $F(x)=f(x)$. Очевидно, якщо на відрізку $[-\pi,\pi]$ ряд Фур'є збігається до функції $f(x)$, то він збігається на всій числовій осі до періодичного продовження цієї функції.

35.3.3. Неповні ряди Фур'є

Якщо функція $f(x)$, яка задовольняє умовам розкладання в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi;\pi]$, є парною, то коефіцієнти Фур'є знаходяться за формулами:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx,\quad n\in N. \tag{35.22}$$

$$b_n=0.$$

Ряд Фур'є такої функції містить тільки косинуси:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx,\quad n\in N. \tag{35.23}$$

Якщо функція $f(x)$, що розкладається в ряд Фур'є, є непарною, то коефіцієнти Фур'є

$$a_0=a_n=0;$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx. \tag{35.24}$$

Для такої функції ряд Фур'є міститиме тільки синуси:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx,\quad n\in N. \tag{35.25}$$

Ряди (35.23) та (35.25) називають ***неповними***.



Розкладемо в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом 2π, що задана так:

$$f(x)=|x|,\qquad -\pi\le x\le\pi.$$

Графік цієї функції зображено на рис. 35.1.

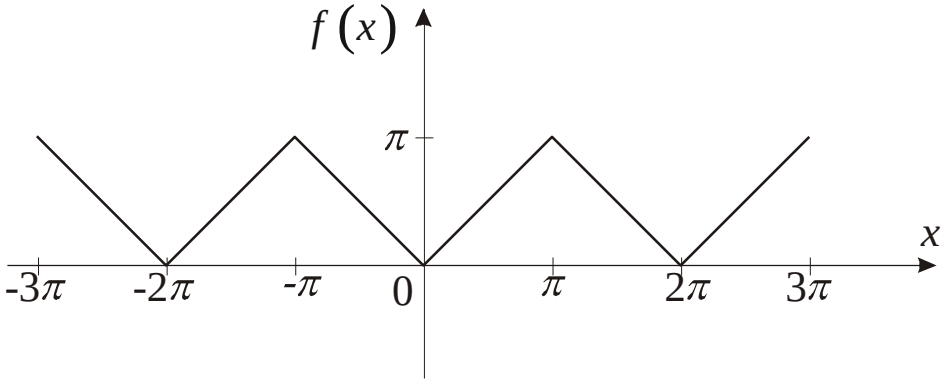


Рис. 35.1

Функція задовольняє умовам теореми Діріхле, тобто розкладається в ряд Фур'є. Вона парна, тому коефіцієнти ряду $b_n = 0$. Знайдемо a_0 і a_n.

За формулами **(**35.22**)** маємо

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx.$$

Для відшукання a_n застосуємо формулу інтегрування частинами

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Якщо $u = x,\ dv = \cos nx dx,$ то

$$du = dx,\ v = \int \cos nx dx = \frac{1}{n}\sin nx.$$

Тоді

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos \pi n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Таким чином,

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\text{K}+\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x+\text{K}\right)\cdot$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x\cdot$$

35.3.4. Ряд Фур'є для функції з довільним періодом

Розглянемо функцію $f(x)$, яка є періодичною з періодом $2l(l>0)$:

$$f(x+2l)=f(x),\ \forall x\in D. \tag{35.26}$$

Період 2π називають стандартним. Поклавши $x=\frac{l}{\pi}t$, кожну функцію з довільним періодом зведемо до функції із стандартним періодом. Тому рядом Фур'є для такої функції буде ряд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \tag{35.27}$$

а його коефіцієнти визначатимуться за формулами:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx; \tag{35.28}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ n\in N.$$

Розглянемо також розкладання в ряд Фур'є функції $f(x)$, яка задана на півінтервалі $[0,l]$. Таку функцію можна розкладати (за бажанням) в ряд, який містить тільки синуси або тільки косинуси.

Якщо функцію треба розкласти в ряд за синусами, продовжуємо її на півінтервал $[-l,0)$ так, щоб $f(-x)=-f(x)$. У результаті одержуємо непарну функцію на інтервалі $[-l,l]$. Ряд Фур'є в цьому випадку матиме вигляд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},\quad n\in N, \tag{35.29}$$

де $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$

Якщо функцію треба розкласти в ряд за косинусами, продовжуємо її на півінтервал $[-l,0)$ так, щоб $f(-x)=f(x)$. У результаті одержуємо парну функцію на інтервалі $[-l,l]$. Ряд Фур'є в цьому випадку:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{\pi n x}{l},\quad n\in N, \tag{35.30}$$

де $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx.$

Відносно збіжності рядів (35.29) та (35.30) виконується теорема, аналогічна теоремі Діріхле. А саме, якщо функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле, то ряди за синусами і косинусами збігаються. При цьому: у точках, у яких функція неперервна, суми рядів дорівнюють $f(x)$; у точках розриву функції $f(x)$ суми дорівнюють середньому арифметичному лівосторонньої та правосторонньої границь; на кінцях відрізку сума ряду за косинусами збігається зі значенням функції, а сума ряду за синусами дорівнює нулю.



Розкладемо в ряд Фур'є функцію $f(x)=2x$ в інтервалі $[0,1]$ за синусами.

Щоб одержати розкладання даної функції в ряд Фур'є, що має тільки синуси, треба продовжити її на сусідній зліва інтервал $[-1,0)$ так, щоб $f(-x)=-f(x)$ (рис. 35.2).

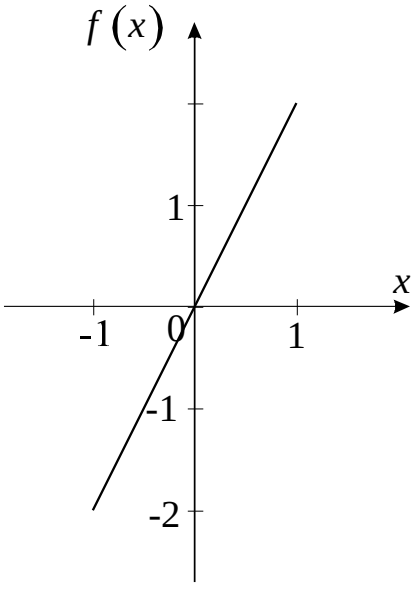


Рис. 35.2

Обчислюємо коефіцієнти Фур'є.

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,$$

$$b_n = 2\int_0^1 2x\sin\frac{n\pi}{1}xdx = 4\int_0^1 x\sin n\pi x dx.$$

Для обчислення b_n застосуємо формулу інтегрування частинами

$$b_n = 2\int_0^1 2x\sin\frac{n\pi}{1}xdx = 4\int_0^1 x\sin n\pi x dx = \left|\begin{matrix} u = x, & dv = \sin\pi x dx; \\ du = dx, & v = -\dfrac{1}{\pi n}\cos\pi nx \end{matrix}\right| =$$

$$= 4\left(-x\frac{\cos\pi nx}{\pi n}\bigg|_0^1 + \int_0^1\left(\frac{\cos\pi nx}{\pi n}\right)dx\right) =$$

$$= 4\left(-\frac{\cos\pi n}{\pi n} + \frac{1}{(\pi n)^2}\sin\pi nx\bigg|_0^1\right) = -\frac{4\cos\pi n}{\pi n} = (-1)^{n+1}\frac{4}{\pi n}.$$

Таким чином,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\pi x - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} - \text{K} + (-1)^{n-1}\frac{\sin n\pi x}{n} + \text{K}\right),$$

або $$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n}.$$

Ключові терміни

Розкладання функції в ряд Маклорена; похибка обчислення; оцінка похибки; ряд Фур'є; неповний ряд Фур'є; ряд Фур'є для функції з довільним періодом.

Запитання для самоперевірки

1. Запишіть розкладання в ряд Маклорена функції $y = e^x$.

2. Запишіть розкладання в ряд Маклорена функції $y = \sin x$.

3. Запишіть розкладання в ряд Маклорена функції $y = \cos x$.

4. Запишіть розкладання в ряд Маклорена функції $y = (1+x)^m$.

5. Запишіть розкладання в ряд Маклорена функції $y = \ln(1+x)$.

6. Запишіть розкладання в ряд Маклорена функції $y = \operatorname{arctg} x$.

7. Запишіть розкладання в ряд Маклорена функції $y = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

8. Запишіть розкладання в ряд Маклорена функції $y = e^{-x^2}$.

9. Вкажіть області збіжності розглянутих рядів.

10. Як здійснюється оцінка похибки при наближених обчисленнях за допомогою знакопереміжного ряду?

11. Як здійснюється оцінка похибки при наближених обчисленнях за допомогою знакосталого ряду?

12. Наведіть приклади наближеного обчислення: а) основних елементарних функцій; б) визначених інтегралів за допомогою рядів.

13. Наведіть приклади наближеного розв'язання диференціального рівняння за допомогою ряду.

14. Що таке тригонометричний ряд?

15. Що називається рядом Фур'є?

16. Який вигляд мають коефіцієнти Фур'є?

17. Які достатні умови розкладання функції в ряд Фур'є?

18. Що таке неповні ряди Фур'є?

19. Як розкладаються функції в ряд Фур'є з довільним періодом?



Приклади та вправи за розділом 8

Приклади застосування рядів до розв'язання задач економіки

8.1. Визначити поточну вартість цінних паперів, термін погашення яких становить 5 років, якщо відсоткова ставка за ними складає 7 %, щорічні витрати сягають 5 ум. од., а вартість на момент погашення дорівнює 200 ум. од.

Розв'язання. Якщо термін погашення цінних паперів – 5 років, а відсоткова ставка складає 7 %, при цьому щорічно власник отримує виплату 5 ум. од., то поточна вартість цінних паперів буде складати:

$$P = \frac{5}{1+0{,}07} + \frac{5}{(1+0{,}07)^2} + \frac{5}{(1+0{,}07)^3} + \frac{5}{(1+0{,}07)^4} + \frac{5}{(1+0{,}07)^5} + \frac{200}{(1+0{,}07)^5}.$$

Перші п’ять доданків утворюють часткову суму S_n ряду спадної геометричної прогресії, де:

$$b_1 = \frac{5}{1+0{,}07}, \quad q = \frac{1}{1+0{,}07}.$$

Використавши формулу

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1},$$

маємо:

$$S_n = \frac{\dfrac{5}{1+0{,}07}\left(\dfrac{1}{\left(1+0{,}07\right)^5} - 1\right)}{\dfrac{1}{1+0{,}07} - 1} = \frac{5\left(1-\left(1+0{,}07\right)^5\right)}{-0{,}07\left(1+0{,}07\right)^5} = \frac{5\left(\left(1+0{,}07\right)^5 - 1\right)}{0{,}07\left(1+0{,}07\right)^5}.$$

Тоді

$$P = \frac{5\left(\left(1+0{,}07\right)^5 - 1\right) + 0{,}07 \cdot 200}{0{,}07\left(1+0{,}07\right)^5} \approx 163{,}1 \text{(ум. од.)}.$$

Отже, поточна вартість цінних паперів складає приблизно 163,1 ум. од.

8.2. Обчислити кількість продукції, яка виробляється протягом першої години роботи, якщо відомо, що продуктивність праці протягом дня змінюється як $\sqrt{x}e^{-x}$ (в одиницях вартості продукції).

Розв’язання. Кількість продукції, що виробляється протягом першої години, обчислюється за формулою:

$$P = \int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx.$$

Оскільки первісну від підінтегральної функції знайти неможливо, то обчислимо цей інтеграл за допомогою рядів. Використовуємо розклад e^x в ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Для функції продуктивності одержуємо співвідношення:

$$\sqrt{x}e^{-x} = \sqrt{x}\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \left(-1\right)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) =$$

$$= x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2!} - \cdots + \left(-1\right)^n \frac{x^{\frac{2n+1}{2}}}{n!} + \cdots$$

Тоді

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{2}{2n+3}\frac{x^{\frac{2n+3}{2}}}{n!} + \cdots \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7\cdot 2!} - \frac{2}{9\cdot 3!} - \cdots + (-1)^n \frac{2}{(2n+3)n!} + \cdots$$

Обчислимо, наприклад, суму перших чотирьох членів ряду:

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx \approx 0,6667 - 0,4000 + 0,1429 - 0,0370 = 0,3726.$$

Похибка не перевищує за абсолютним значенням першого з відкинутих членів ряду $u_5 = \frac{2}{11\cdot 4!} = 0,0076 < 0,01.$

Отже, протягом першої години виробляється приблизно 0,37 ум. од.



Задачі та вправи для самостійного розв'язання

Записати загальний член ряду

8.3. $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \cdots$ **8.4.** $\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 2} + \frac{\sqrt{3}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\sqrt{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$

Записати ряд за його загальним членом

8.5. $u_n = \frac{3^n}{n!}$. **8.6.** $u_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}$.

8.7. За загальним членом $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ записати ряд і знайти його суму.

Дослідити на збіжність ряди за допомогою необхідної ознаки

8.8. $\frac{4}{7} + \frac{7}{12} + \frac{10}{17} + \cdots + \frac{3n+1}{5n+2} + \cdots$ **8.9.** $\sum_2^\infty \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^n$.

8.10. $\sum_{n=1}^\infty \frac{n\sqrt{4n^2+1}}{5n^2-3}$.

Дослідити на збіжність ряди, застосовуючи ознаку порівняння

8.11. $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n+1}{(n+2)n}+\cdots$

8.12. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\cdots$

8.13. $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

8.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

Дослідити на збіжність ряди, застосовуючи ознаки Даламбера або Коші

8.15. $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}+\cdots$.

8.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^2}{5^n}$.

8.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

8.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^{2n}$.

8.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Дослідити збіжність рядів за допомогою інтегральної ознаки Коші

8.20. $\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{13}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n+1}}+\cdots$

8.21. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}+\cdots$

8.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

8.23. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-6)\ln(n-2)}$.

Дослідити збіжність рядів, користуючись відомими ознаками

8.24. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots$

8.25. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$

8.26. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$

8.27. $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n+\cdots$

8.28. $\dfrac{arctg1}{2}+\dfrac{arctg2}{5}+\dfrac{arctg3}{10}+\cdots+\dfrac{arctgn}{1+n^2}$.

8.29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}2^n\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.

8.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n^2}$.

8.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{2n}n!}{n^n}$.

Дослідити на умовну та абсолютну збіжність задані ряди

8.32. $1-\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{13}-\cdots+(-1)^n\dfrac{n}{6n-5}+\cdots$

8.33. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n2^n}+\cdots$

8.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{2^n}$.

8.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{(2n+1)^n}$.

8.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^3}$.

8.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

Знайти області збіжності заданих функціональних рядів

8.38. $\dfrac{\sin x}{1}+\dfrac{\sin 2x}{2^3}+\dfrac{\sin 3x}{3^3}+\cdots+\dfrac{\sin nx}{n^3}+\cdots$

8.39. $x+x^4+\cdots+x^{n^2}+\cdots$

8.40. $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots$

8.41. $1+\dfrac{x}{3\cdot 2}+\dfrac{x^2}{3^2\cdot 3}+\dfrac{x^3}{3^3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{x^n}{3^n(n+1)}+\cdots$

8.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

8.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

8.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$.

Розкласти в степеневий ряд по степенях x задані функції

8.45. $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$.

8.46. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

8.47. $f(x)=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}$.

8.48. Обчислити наближено $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ з точністю до 0,0001.

8.49. Обчислити наближено $\ln 1{,}04$ з точністю до 0,0001.

8.50. Обчислити наближено $\sqrt[10]{1027}$ з точністю до 0,0001.

8.51. Обчислити наближено $\sin 0{,}4$ з точністю до 0,0001.

8.52. Обчислити наближено $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ з точністю до 0,0001.

8.53. Обчислити наближено $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ з точністю до 0,0001.

Розкласти в ряд Фур'є функції:

8.54. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\ 0\le x\le 2\pi$.

8.55. $f(x)=\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{x^2}{4},\ -\pi\le x\le\pi$.

8.56. $f(x)=x^2,\ 0\le x\le\pi$

8.57. $f(x)=1,\ 0<x<1$ за синусами.

Розв’язати задачі:

8.58. Визначити поточну вартість цінних паперів, що має термін погашення 3 роки, якщо відсоткова ставка складає 8 %, щорічні витрати становлять 6 ум. од., а вартість на момент погашення дорівнює 100 ум. од.

8.59. Обчислити кількість продукції, яка виробляється за першу годину роботи, якщо продуктивність праці протягом дня змінюється за законом $f(x)=\sqrt[3]{x^2}e^{-\frac{x}{2}}$.



Відповіді

8.3. $u_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

8.4. $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!}$.

8.5. $\frac{3}{1}+\frac{3^2}{1\cdot 2}+\frac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$ **8.6.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\cdots$

8.7. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots,\ S=1$

8.8. Розб. **8.9.** Розб. **8.10.** Розб.

8.11. Розб. **8.12.** Збіг. **8.13.** Розб.

8.14. Збіг. **8.15.** Збіг. **8.16.** Збіг.

8.17. Збіг. **8.18.** Збіг. **8.19.** Розб.

8.20. Розб. **8.21.** Розб. **8.22.** Розб.

8.23. Розб. **8.24.** Розб. **8.25.** Розб.

8.26. Збіг. **8.27.** Розб. **8.28.** Збіг.

8.29. Збіг. **8.30.** Збіг. **8.31.** Розб.

8.32. Розб. **8.33.** Збіг.абсол. **8.34.** Збіг.абсол.

8.35. Збіг.абсол. **8.36.** Збіг.абсол. **8.37.** Збіг.умов.

8.38. $(-\infty;\infty)$. **8.39.** $(-1;1)$. **8.40.** $(-1;1]$.

8.41. $[-3;\ 3)$. **8.42.** $(-1;1]$. **8.43.** $\left(-\frac{1}{e};\ \frac{1}{e}\right)$.

8.44. $[+1;\ 3)$. **8.45.** $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^2 2!}x^2+\frac{1}{2^3 3!}x^3+\cdots$

8.46. $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots$

8.47. $-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\cdots-\frac{x^{n-2}}{n}-\cdots$ **8.48.** 0,6065.

8.49. 0,0392. **8.50.** 2,0006. **8.51.** 0,3894.

8.52. 0,4931. **8.53.** 0,7468.

8.54. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. **8.55.** $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}$.

8.56. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right)\right)\sin nx\cdot$

8.57. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$.

8.58. 94,85 ум. од. **8.59.** 0,4425 ум. од.

Використана література

Барковський В. В. Математика для економістів : навч. посібн. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : НАУ, 1999. – 448 с.

Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 2002. – 384 с.

Валуєв К. Г. Вища математика : навч. посібн. / К. Г. Валуєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – 452 с.

Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник / І. П. Васильченко. – К. : Знання-Прес, 2002. – 454 с.

Вища математика : навч. посібн. для самост. вивч. дисц. / під ред. К. Г. Валуєва. – К. : КНЕУ, 1999. – 453 с.

Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 440 с.

Высшая математика : сборник задач / под ред. П. Ф. Овчинникова. – К. : Вища школа, 1999. – 350 с.

Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : ВШ, 2003. – 416 с.

Клетеник А. В. Сборник задач по аналитической геометрии / А. В. Клетеник. – М. : Наука, 2002. – 240 с.

Малярець Л. М. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах : навч. посібн. / Л. М. Малярець, А. В. Ігначкова. – Х. : Вид. Дім "ІНЖЕК". 2006. – 544 с.

Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посібн. : в 2-х ч. / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – Ч. 1. – 396 с. ; Ч. 2. – 368 с.

Малярець Л. М. Математика для економістів : практ. посібн. до розв'язання задач / Л. М. Малярець, Л. Д. Широкорад. – Х. : Вид ХНЕУ, 2008. – 476 с.

Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М. : Наука, 2002. – 352 с.

Общий курс высшей математики для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 464 с.

Тевяшев А. Д. Высшая математика. Сборник задач и упражнений / А. Д. Тевяшев, А. Г. Литвин. – Х. : ХТУРЭ, 1999. – 192 с.

Травкін Ю. І. Математика для економістів : підручник / Ю. І. Травкін,

Л. М. Малярець. – Х. : Вид. Дім "ІНЖЕК", 2005.– 816 с.

Предметний покажчик

А

Абеля теорема 720
Абсолютна величина числа 231
– – властивості 231
Алгебраїчне доповнення 33
Апроксимація 412
Аргумент функції 235
Асимптота 349
– вертикальна 349
– горизонтальна 349
– похила 349
Асимптоти гіперболи 176

Б

Базис координатний 85
– одиничний 84
– ортогональний 84
– ортонормований 84
– простору 83
Бернуллі рівняння 588
Біноміальний ряд 735

В

Вектор 129
– дії 75, 129
– нульовий 74, 128
– n-вимірний 74
– одиничний 75, 129
– проекція на вісь 132
Вектори колінеарні 138
– компланарні 132
– лінійно залежні 79
– – незалежні 79
– ортогональні 138
– рівні 74, 129
Величина абсолютна вектора 129
– змінна 234
– стала 234
Вершина параболи 178
Вершини гіперболи 175
– еліпса 172
Визначник матриці 32
– властивості 33
– другого порядку 32
– n-порядку 31, 37
– третього порядку 32
– трикутного вигляду 39
Вираз підінтегральний 452
Вирівнювання
– по параболі 419
– прямій 417
Відрізок 231
Відстань
– точки до прямої 163
– точки до площини 195
Власне значення матриці 96, 101
Власний вектор матриці 96, 101
Властивості добутку
– – векторного 139
– – мішаного 143
– – скалярного 137
– лінійних операцій над
– – векторами 130
– – матрицями 25, 26
Вронскіан 609

Г

Геометричне місце точок 149
Гессіан 400
Гіпербола 174
– канонічне рівняння 175
Гіперболи спряжені 177
Градієнт функції 297
Границя послідовності 250
– – властивості 257
– – геометричний зміст 250
– функції в точці 263, 381
– – властивості 268

– – геометричний зміст 264
– – одностороння 266
– – розкриття невизначеностей 270 – 273
Граничний дохід 359
Граничні витрати 354
Графік функції однієї змінної 236
– – двох змінних 379

Д

Діагональ матриці головна 21
– побічна 21
Діріхле ряд 712
Директриса параболи 178
Директриси гіперболи 176
– еліпса 173
Джині коефіцієнт 517
Динаміка ринкових цін 663
Диференціал першого порядку 323
– – властивості 325
– – геометричний зміст 325
– – інваріантність форми 326
– другого порядку 326
– *n*-порядку 327
– – незалежної змінної 324
функції двох змінних 388
– – повний 384
– – частинний 390
Диференціювання функції
– – основні правила 312
Диференціальні рівняння 577
– – геометричний зміст 577
– – загальний розв’язок 579
– – частинний розв’язок 579
– *n*-го порядку
– – загальний розв’язок 602
– – частинний розв’язок 602
– лінійні однорідні 608, 615
– – неоднорідні 619
– – що допускають зниження порядку 603
– другого порядку 608, 611
– – лінійні неоднорідні 620
– – – однорідні 612
– – – що допускають зниження порядку 603
– першого порядку 579
– – геометричний зміст 580
– – з відокремлюваними змінними 582
– – лінійне 589
– – однорідне 584
– – у повних диференціалах 596
Довжина вектора 129
– – відрізка 144
– – дуги 500
Дотична до кривої 308
Добуток векторів векторний 139
– – мішаний 142
– – скалярний 77, 136
– матриці на число 24
– матриць 24
Друга чудова границя 276

Е

Евклідів простір 78
Екстремум функції
– – двох змінних 399
– – – – достатня умова 400
– – – – необхідна умова 399
– – – – схема дослідження 401
– – однієї змінної 340
– – – – необхідна умова 341
– – – – перша достатня умова 341
– – – – друга достатня умова 343
– – – – схема дослідження 342
– – умовний 402, 406
Ексцентрисітет гіперболи 176
– еліпса 173
– кола 173
Еластичність
– функції однієї змінної 329
– частинна 425
Елементарні перетворення 50
Еліпс 171
– канонічне рівняння 172
Емпіричні формули 411

З

Задача про кредитування 659
– – використання сировини 18, 490
– – дисконтування 521
– – неперервного начислення відсотків 279
– – обсягу продукції 488
Загальний член послідовності 247
– – числового ряду 694
– – степеневого ряду 719
Загальне рівняння
– – площини 188
– – – дослідження 188
– – прямої 153
– – – дослідження 153
Закон попиту та пропозиції 167, 519
Залежність
– функціональна 235
– векторів 79
Залишок ряду 728
Збіжність ряду
– числового 695
– функціонального 719
Змінні базисні 57
– вільні 57
Значення функції
– – найбільше 292
– – найменше 292

І

Інверсія непарна 32
– парна 32
Інтеграл невизначений 452
– – властивості 453
Інтеграл визначений 486
– – властивості 490
– – геометричний зміст 486, 489
– – Ейлера – Пуассона 535
– – економічний зміст 489
– – методи обчислювання 496
– – обчислення довжини дуги 500, 501
– – – об’ємів тіл обертання 512, 515
– – – площини 505
– – – обсягу продукції 488
– – – наближене за формулами прямокутників 523
– – – Сімпсона 526
– – – трапецій 525
– – – абсолютна похибка 525
– – – відносна похибка 525
– невласний 532
– – збіжний 535
– – розбіжний 532
– подвійний 542
– – властивості 544
– – внутрішній 547
– – зовнішній 547
– – у полярних координатах 552
Інтегральна крива 578
Інтегральне числення 451
Інтегрування 451
– безпосереднє 456
– ірраціональностей 473 – 476, 483
– заміни змінної 458 – 460
– квадратного тричлена у знаменнику 467
– правильних раціональних дробів 469
– простіших раціональних дробів 466
– тригонометричних функцій 476
– частинами 461

К

Коло 171
– канонічне рівняння 171
– загальне рівняння 171
Компоненти вектора 132
Координати вектора 74, 133
Корені характеристичного рівняння
– – – дійсні та різні 612
– – – кратні 613
– – – уявні 613
Косинуси прямої напрямлені 201
Коші, задача 632

Крива другого порядку 170
– – – логістична 662
– – – навчання 518
– – – попиту 167
– – – пропозиції 167
Кут між векторами 138
– площинами 193
– прямими на площині 160
– – у просторі 206
– прямою і площиною 211

Л

Лейбніца ознака 715
Лінійна залежність векторів 79
Лінійна комбінація векторів 79
– – функцій 609
– незалежність векторів 79
– – функцій 609
Лінія рівня функції 579, 405
Логарифм натуральний 279
Локальний екстремум 342
Лоренца крива 517

М

Максимум функції
– – абсолютний 344
– – локальний 342
Матриця
– діагональна 21
– квадратна 21
– невироджена 40
– неособлива 40
– нульова 21
– обернена до даної 40, 67
– одинична 22
– особлива 40
– прямокутна 20
– рядок 20
– симетрична 21
– системи
– – основна 53
– – розширена 53
– стовпець 20
– транспонована 21
Метод варіації довільної сталої 590, 629
– Гаусса 58
– Жордана – Гаусса 58, 62
– найменших квадратів 412
– невизначених множників
– Лагранжа 404
Мінімум функції
– – абсолютний 344
– – локальний 342
Мінор елемента визначника 33
– матриці *k*-го порядку 50
Множина 227
– дійсних чисел 230
– дискретна 233
– злічена 233
– ірраціональних чисел 230
– натуральних чисел 230
– нескінченна 233
– порожня 227
– цілих чисел 230
– раціональних чисел 230
– симетрична відносно початку координат 239
– числова 230
Модуль вектора 231
Модель Леонтьєва 69
– лінійна 417
– природного зростання 659
– з умовою насиченості 660
– Самуельсона – Хікса 671
Мультиплікатор матричний 71

Н

Найбільше значення функції 292, 409
Найменше значення функції 292, 409
– – – на відрізку 344
– – – на площині 409
– – – двох змінних 383, 409
– – – однієї змінної 292

Напрямлений вектор прямої 154, 201
Напрямні косинуси 134, 201
n-залишок ряду 698
n-частинна сума ряду 695
Невідомі базисні 57
– вільні 57
Невизначений інтеграл 452
n-вимірний векторний простір 74
Неперервність функції в точці 284
– – – двох змінних 382, 383
– – – однієї змінної 284
– – на відрізку 291
– – на замкненій області 383
– – точки розриву 287, 382
– – першого роду 287
– – другого роду 288
Нормаль до кривої 309
Нормальний вектор площини 187
– – прямої 152
Нуль-вектор 74
Нуль-матриця 21

О

Область
– відкрита 378
– визначення функції 377
– замкнена 377
– значень функції 377
– збіжності ряду 719
– незамкнена 378
– правильна 417
Обчислення
– визначених інтегралів 742
– площі геометричної фігури 505
– площі криволінійного сектора 511
Обчислення наближене
– – за допомогою знакодотатного ряду 739
– – знакопереміжного ряду 738
Ознаки збіжності ряду
– – – абсолютна 714
– – – Даламбера 708
– – – інтегральна Коші 712
– – – Лейбніца 715
– – – необхідна 702
– – – порівняння 705
– – – радикальна Коші 711
Окіл точки 380
Опуклість (угнутість) функції 346
– – достатня умова 347
– – необхідна умова 347
– – схема дослідження 348

П

Парабола
канонічне рівняння 178
Параметр параболи 178
Перетворення координат 180
– – паралельний перенос 180
– – повернення на кут 181
Паутинна модель 670
Первісна функції 451
Перетин множин 229
Період 240
Періодична функція 240
Перша чудова границя 274
Підінтегральна функція 452
Підінтегральний вираз 452
Площа трикутника 146
Площини бісекторні 196
Поділ відрізку 147
Поверхня 186
Полувісь гіперболи
– – дійсна 175
– – уявна 175
– еліпса 173
Похибка
– абсолютна 327
– відносна 328
– моделі 413
Похідна
– другого порядку 322, 353
– – економічний зміст 310
– – механічний зміст 310

— *n*-го порядку 312
– першого порядку 306
– – за напрямом 395
– – логарифмічна 316
– – неявної функції 316
– – оберненої функції 315
– – складеної функції 314
– – степенево-показникової функції 316
– – від визначеного інтеграла
із змінною верхньою границею 393
Правило
– Лопіталя 334
– паралелограма 130
Проміжок нескінченний 231
– скінченний 230
Приріст аргументу 283
– функції 283
– – повний 384
– – частинний 383
Проекція вектора на вісь 132

Р

Радіус збіжності 722
Ранг матриці 49
Рівняння
– дотичної 308
– нормалі 309
– площини загальне 188
– – нормальне 191
– що проходить через дану точку
перпендикулярно вектору 187
– що проходить через три
дані точки 189
– у відрізках 190
– прямої на площині 149
– – – загальне 153
– – – з кутовим
коефіцієнтом 157
– – – канонічне 154
– – – параметричне 155
– – – сім'ї прямих 157
– – – що проходить через
дві точки 156
– – – що проходить через точку
в даному напрямі 156
– прямої у просторі 198
– – – загальне 199
– – – канонічне 200
– – – параметричне 200
– – – що проходить через дві
точки 202
Хікса 672
Різницеві рівняння 638
– – розв'язок загальний 639
– – – частинний 639
– – лінійні другого порядку 642
– – – неоднорідні 641
– – – зі спеціальною правою частиною 647
– – однорідні 641
Різниця векторів 76
– матриць 24
– множин 229
Розклад вектора по базису 83
– – – функції в ряд Маклорена 730
– – – Тейлора 730
Ряд числовий 694
– – гармонійний 698
– – геометрична прогресія 701
– – ознаки збіжності 705
– – функціональний 719
– – степеневий 719
– – – область збіжності 719
– Маклорена для функцій
– – – e^x 733
– – – $\sin x$ 734
– – – $\cos x$ 734
– – – $(1+x)^m$ 735
– – – $\ln(1+x)$ 736
– – – $\operatorname{arctg} x$ 737
– – – тригонометричний 748

С

Середнє значення
– – функції на проміжку 492
– – – на області 545
Система координат 133, 502, 503
Система лінійних алгебраїчних рівнянь 27
– однорідних 29, 53
– – властивості розв’язку 90
– – загальний розв’язок 57
Системи диференціальних рівнянь 631
– – – нормальні 631
– – – неоднорідні 631
– – – однорідні 631
– різницевих рівнянь 650
Система нормальних рівнянь 415
Системи лінійних алгебраїчних рівнянь загального виду 27
– – – – – – алгебраїчна форма 27, 53
– – – – – – векторна форма 78
– – – – – – матрична форма 28
– – – – – – неоднорідні 28, 94
– – – – – – однорідні 29, 90
– – – – – – дослідження 52
– – – – – – визначені 29
– – – – – – невизначені 29
– – – – – – несумісні 29
– – – – – – розв’язок 29
– – – – – – структура загального розв’язку 57, 94
Скалярний добуток векторів 136
Скалярний квадрат вектора 136
Слід матриці 101
Способи задання функції
– – – аналітичний 236
– – – графічний 236
– – – табличний 237
Степеневий ряд 719
– – властивості 725
– – інтервал збіжності 721
– – необхідна і достатня умови збіжності 727, 729
Сума векторів 75
– матриць 24
– ряду 695

Т

Таблиця
– основних інтегралів 456
– похідних 311
Теорема
– Кронекера – Капеллі 53
– Лагранжа 333
– Ролля 332
– Ферма 331
– економічна інтерпретація 353
Точка гранична 338
– – ізольована 233
– – максимума 340
– – мінімума 340
– – перегину 346
– – рівноваги 663
– – розриву 288

У

Умова паралельності
– – площин 192
– – площини і прямої 212
– – прямих 161, 204
– – перпендикулярності площин 193
– – площини ї прямої 212
– – – прямих 161

Ф

Фібоначчі числа 693
Фокус параболи 177
Фокуси гіперболи 174
– еліпса 171
Формула
– Ньютона – Лейбніца 495
– простих відсотків 166, 245
– складних відсотків 245
Фундаментальна система розв’язків
– – – однорідної системи 91
– – – диференціального рівняння 610, 615
– – – системи диференціальних рівнянь 635

Функція алгебраїчна 242
– – багатьох змінних 235, 376
– – дробово-лінійна 185
– – випуску продукції 244
– – виробнича 244, 310
– – граничних витрат 311
– – граничного доходу 311
– – Кобба – Дугласа 380, 426
– – зростаюча 237
– – елементарна 242
– – корисності 244, 354
– – логарифмічна 380
– – логістична 662
– – лінійна 244
– – монотонна 238
– – непарна 239
– – неелементарна 243
– – обернена 240
– – обернена тригонометрична 242
– – обмежена 239
– – парна 239
– – періодична 240
– – показникова 242
– – похибок 413
– – складена 243
– – спадна 238
– – споживання 244
– – сталої еластичності 389
– – степенева 242
– – трансцендентна 242
Фур'є ряд
– – коефіцієнти 748
– – необхідна і достатня умови збіжності 748, 749
– – неповний 750
– – функції з довільним періодом 753

Х

Характеристичний многочлен матриці 98
Характеристичне рівняння
– – диференціального 612, 634
– – різницевого 643, 644

Ц

Ціна рівноваги 663
Циліндр криволінійний 513, 514

Ч

Частинна похідна 384
– – другого порядку 386
– – першого порядку 384
– – – геометричний зміст 385
Числова послідовність
– – збіжна 250
– – зростаюча 249
– – нескінченно мала 251
– – – властивості 252
– – нескінченно велика 252
– – обмежена 248
– – спадна 250
– – розбіжна 250
Число e 277, 740

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Малярець Людмила Михайлівна
Афанасьєва Лідія Михайлівна
Денисова Тетяна Володимирівна та ін.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Підручник
для студентів галузі знань 0305
«Економіка та підприємництво»

Відповідальний за випуск **Малярець Л. М.**

Відповідальний редактор **Сєдова Л. М.**

Редактор **Семенова І. М.**

Коректор **Семенова І. М.**

План 2012 р. Поз. № 54-П.
Підп. до друку Формат 60 × 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 48,25. Обл.-вид. арк. 60,31. Тираж прим. Зам. №
Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9а
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
Дк № 481 від 13.06.2001 р.