

них засад оцінки й вимірювання рівня диверсифікації з урахуванням світового досвіду та формуванням вітчизняної статистичної і нормативно-довідкової бази оцінювання.

**Література:** 1. Герасимчук В. Г. Стратегічне управління підприємством. Графічне моделювання: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2000. – С. 58 – 72. 2. Корінько М. Д. Диверсифікація як стратегія розвитку // Актуальні проблеми економіки. – 2006. – №5. – С. 12 – 17. 3. Філіпенко А. С. Україна і світове господарство: взаємодія на межі тисячоліть / А. С. Філіпенко, В. С. Будкін, А. С. Гальчинський. – К.: Либідь, 2002. – С. 143 – 157. 4. Бумен К. Основы стратегического менеджмента. – М.: Банки и биржи, 1997. – С. 169. 5. Стратегия предприятия и стратегический менеджмент: Учебн. пособие / Ю. В. Соболев, В. Л. Дицкан, А. Г. Дейнека, Л. А. Позднякова. – Харьков: Олант, 2002. – С. 207 – 245. 6. Экономическая теория: истоки и перспективы. – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2006. – 1000 с. 7. Baumol W. J. Business Behavior, Value and Growth. – New York: Harcourt Brase Jovanovich, 1967. – Ch. 10. 8. Gollop F. M. A Generalized Index of Diversification: Trends in U. S. Manufacturing / F. M. Gollop, J. L. Monahan // The Review of Economic and Statistics. – 1991. – Vol. 73. – P. 318 – 330. 9. Экономико-математический энциклопедический словарь / Гл. ред. В. И. Данилов-Данильян. – М.: Большая Российская энциклопедия; ИНФРА-М, 2003. – С. 162. 10. Utton M. A. Large Firm Diversification in British Manufacturing Industry // Economic Journal. – 1997. – Vol. 87. – P. 96 – 113. 11. Rondi L. Determinants of Diversification Patterns / L. Rondi, A. Sembenelli, E. Ragazzi // Davies S. Industrial Organization in the European Union / S. Davies, B. Lyons. Oxford: Oxford University Press, 1996. – Ch. – 10.

Стаття надійшла до редакції  
22.04.2008 р.

УДК 330.42

## Мельников О. С.

### ОПТИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК В КОММЕРЧЕСКИХ БАНКАХ

This paper offers a micro-level approach to determining the term structure of interest rates for fixed-income securities. To this end, the author casts an individual investor's decision-making problem with regard to selection of investment with different maturities into von Neumann-Morgenstern expected utility framework. The proposed model explains a positive slope of the yield curve even in the absence of the short-term interest rate uncertainty. Aggregating upon decisions of individual investors yields market demand curves for instruments of different maturities. This allows to determine the profit-maximizing term structure of interest rates from the issuer's perspective.

Розвиток фінансових інститутів в Україні, возрастання ролі інструментів довгострокового кредитування і іпотеки повышают интерес к методам фінансової математики.

Основним інструментом фінансової діяльності комерційних банків і прочих фінансових інститутів являється процентна ставка. На рівень процентних ставок оказуєт

влияння цілий ряд факторів: макроекономіческа ситуація в країні, рівень розвитку фінансової інфраструктури, інвестиційні ризики, інфляційні очікування та ін. Одним з важливих факторів є також строк дії відповідного фінансового інструменту. Вплив цього фактора на рівень процентних ставок відомий під назвою временної структури процентних ставок (ВСПС).

Аналізу ВСПС присвячені роботи Ф. Блэка, О. Васичека, Д. Ингерсолла, С. Росса, А. Уайта, Д. Халла, Д. Хіса, К. Ярроу та ін. [1 – 5]. Основні їх результати відображені в роботах [6 – 8]. Вместе з тим, що існують теорії ВСПС мають ряд недостатків, зв'язаних з тим, що виникає необхідність дальнішого розвитку дослідження в цій області. Цілью настоящої роботи є розробка математичної моделі та оптимізація ВСПС в комерційних банках.

Подібно до временної структури процентних ставок, вона включає залежність розміру процентної ставки від строка дії фінансового інструменту (срока погашення облігації, строка депозитного договору та ін.). Графік подібної залежності називається кривою доходності. На рис. 1 представлена криві доходності по депозитним вкладам в гривні для фізичних осіб в окремих українських банках по состоянию на 06.01.2008 г., побудовані на основі даних Інтернет-сайтів цих банків.

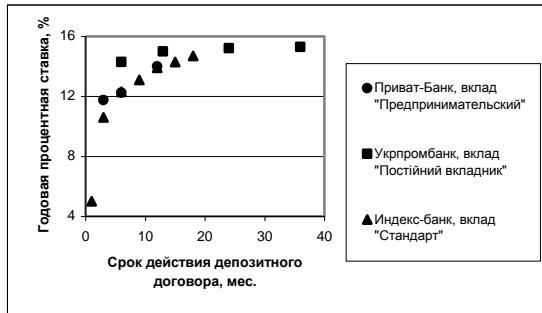


Рис. 1. Кривая доходности в некоторых украинских банках

Как видно из рис. 1, долгосрочные инвестиции предлагают инвестору большую доходность. Такая ситуация есть достаточно типичной, то есть в большинстве случаев кривая доходности является возрастающей функцией от времени.

Существуют две основные теории ВСПС. Согласно арбитражной теории, форма кривой доходности объясняется исключительно ожиданиями участников рынка относительно будущего поведения краткосрочных процентных ставок. Предположим, в момент времени  $t$  у инвестора есть возможность заключить депозитный договор сроком на два года с годовой доходностью  $r_t^l$  или на один год с годовой доходностью  $r_t^s$ . Альтернативой первому варианту является выбор краткосрочного депозитного договора и продление его через год под (неизвестную на текущий момент времени) процентную ставку  $r_{t+1}^s$ . Поскольку эти два варианта по сути эквивалентны, то они должны давать инвестору одинаковую ожидаемую доходность, то есть

$$(1 + r_t^l)^2 = M[(1 + r_t^s)(1 + r_{t+1}^s)], \quad (1)$$

где  $M[\cdot]$  – оператор математического ожидания.

Таким образом, согласно арбитражной теории, кривая доходности будет возрастающей (убывающей) функцией от времени, если рынок ожидает повышения (понижения) процентных ставок. Поскольку на достаточно длительном интервале времени как повышение, так и понижение процентных ставок рановероятно, то в среднем кривая доходности должна быть горизонтальной. Однако это следствие из арбитражной теории плохо согласуется с эмпирическими данными.

## 48

Чтобы объяснить положительный в среднем наклон кривой доходности, была выдвинута теория предпочтения ликвидности. Согласно этой теории, долгосрочные инвестиции связаны с большим риском, чем краткосрочные, в частности, из-за возможности изменения процентных ставок в будущем. В результате, чтобы заинтересовать инвесторов в долгосрочных финансовых инструментах, эмитенты должны предлагать им премию за риск в виде повышенной доходности, чтобы компенсировать связывание свободных средств инвестора на продолжительный срок. Следовательно, кривая доходности должна характеризоваться положительным наклоном даже в отсутствие каких-либо ожиданий будущего повышения ставок.

Теория предпочтения ликвидности, таким образом, объясняет эмпирическую форму кривой доходности, однако лишь на качественном уровне. Очевидно, существенный интерес представила бы модель, объясняющая размер премии за риск на количественном уровне.

В настоящей работе предлагается математическая модель, позволяющая формализовать предпочтения инвестора к ликвидности и определить оптимальный размер премии за риск с позиций теории ожидаемой полезности фон Неймана-Моргенштерна (ТОПНМ) [6; 9; 10].

Рассмотрим модель принятия решений потенциальным инвестором в случае, когда ему доступны две альтернативы вложения свободных средств, различающиеся по сроку погашения и доходности.

Примем следующие предположения. Время дискретно,  $t \in \{0, 1, 2\}$ . Состояние инвестора в момент времени  $t$  обозначим через  $w_t$ . Инвестору доступны две альтернативы:

- краткосрочный депозит на один период с доходностью  $r_s$ ;
- долгосрочный депозит на два периода с доходностью  $r_i$ .

Будем считать краткосрочную доходность  $r_s$  постоянной, независящей от времени, исключив тем самым риск изменения процентных ставок в будущем.

Выбирая долгосрочный вклад, инвестор связывает свои свободные денежные средства на два периода времени. Это может привести к проблемам, если у вкладчика возникнет потребность в наличных денежных средствах. Будем считать, что в каждом периоде времени вкладчик находится в одном из двух возможных состояний: благоприятном ( $F_t=0$ ) или неблагоприятном ( $F_t=1$ ). Наступление неблагоприятного состояния влечет за собой досрочный разрыв депозитного договора. В свою очередь, в случае преждевременного расторжения договора вкладчик теряет ранее начисленные проценты. Состояние  $F_t$  определяется в начале каждого периода времени. Таким образом, вкладчик находится в ситуации полной определенности на один период времени вперед и в ситуации неопределенности – на последующие периоды. Вероятность возникновения неблагоприятного состояния не зависит от времени и равна  $\pi : \Pr\{F_t=1\} = \pi \forall t$ .

Финансовые последствия выбора инвестором того или иного типа вклада удобно представить в виде дерева (рис. 2, 3).

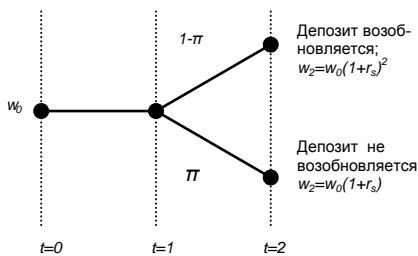


Рис. 2. Финансовые последствия выбора краткосрочного депозита

На рис. 2 изображен случай, когда инвестор выбирает краткосрочный вклад. В первом периоде времени неопределенность отсутствует, следовательно, на момент времени  $t=1$  вкладчик с вероятностью 1 будет иметь сумму, равную

$w_1 = w_0 \cdot (1 + r_s)$ . В начале периода 2 определяется состояние инвестора  $F_2$ . Если  $F_2 = 0$ , инвестор возобновляет вклад на следующий период. Тогда к моменту времени  $t=2$  вкладчик получит сумму  $w_2 = w_0 \cdot (1 + r_s)^2$ . Вероятность этого исхода равна  $(1 - \pi)$ . Если же  $F_2 = 1$ , то депозит не продлевается и доход вкладчика к окончанию второго периода составит  $w_2 = w_0 \cdot (1 + r_s)$ . Вероятность такого исхода равна  $\pi$ .

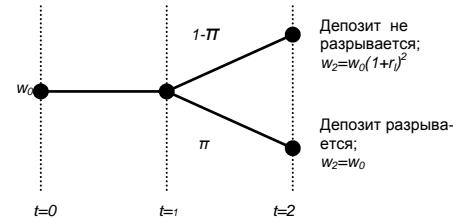


Рис. 3. Финансовые последствия выбора долгосрочного депозита

На рис. 3 изображен случай, когда вкладчик выбирает долгосрочный вклад. Эта ситуация отличается от предыдущей тем, что в случае реализации состояния  $F_2 = 1$  инвестор будет вынужден досрочно расторгнуть депозитный договор, потеряв ранее начисленные проценты и получит, таким образом, сумму  $w_2 = w_0$ . Вероятность такого исхода равна  $\pi$ .

Сопоставляя рис. 2 и 3, легко видеть, что в случае совпадения процентных ставок  $r_s$  и  $r_i$  обе альтернативы будут обеспечивать равный доход в состоянии  $F_2 = 0$ , а в состоянии  $F_2 = 1$  доходность первой альтернативы строго выше. Следовательно, первая альтернатива доминировала бы второй. Таким образом, банк должен предлагать более высокую ставку по долгосрочным вкладам, чтобы заинтересовать потенциальных инвесторов.

Рассмотрим, насколько значительной должна быть разница в уровне ставок (называемая также премией за риск или спредом), чтобы инвестор получал одинаковую полезность при выборе любой из этих двух альтернатив. Для этого необходимо сделать дополнительные предположения о предпочтениях ЛПР по отношению к риску.

Согласно ТОПНМ, при достаточно общих предположениях относительно рациональности поведения ЛПР, отношение ЛПР к риску полностью характеризуется функцией полезности ЛПР  $U(w)$ ,  $U'(w) \geq 0$ , где  $W$  – доход ЛПР. Выбор решения в условиях риска сводится тогда к максимизации ожидаемой полезности ЛПР:

$$a^* = \arg \max_a M[U(\tilde{w}, a)], \quad (2)$$

где  $a$  – действие ЛПР,  $\tilde{w}$  – случайная величина, характеризующая доход ЛПР в случае выбора действия  $a$ .

Ожидаемая полезность инвестора при выборе краткосрочного вклада составит:

$$M_s(w_0, \pi, \gamma, r_s) = M[U(w_2)] = (1 - \pi) \cdot U(w_0 R_s^2) + \pi \cdot U(w_0 R_s), \quad (3)$$

а при выборе долгосрочного –

$$M_i(w_0, \pi, \gamma, r_i) = M[U(w_2)] = (1 - \pi) \cdot U(w_0 R_i^2) + \pi \cdot U(w_0), \quad (4)$$

где  $R_s = 1 + r_s$ ;  $R_i = 1 + r_i$ .

Назовем эквивалентным спредом величину  $\Delta = r_i - r_s$ , при которой краткосрочный и долгосрочный вклады будут обеспечивать инвестору одинаковую ожидаемую полезность. Размер эквивалентного спреда можно определить из уравнения

$$M_s(w_0, \pi, \gamma, r_s) = M_i(w_0, \pi, \gamma, r_s + \Delta). \quad (5)$$

Предположим, что предпочтения ЛПР по отношению к риску описываются функцией полезности CRRA (Constant Relative Risk Aversion) с постоянным коэффициентом относительного уклонения от риска [6]:

$$U(w) = \begin{cases} \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & 0 \leq \gamma < 1 \\ \ln(w), & \gamma = 1 \end{cases}, \quad (6)$$

где  $\gamma$  – коэффициент относительного уклонения от риска Эрроу-Пратта.

Легко показать, что для функции полезности коэффициент относительного уклонения от риска не зависит от  $w$  и равен  $\gamma$ :

$$\rho(w) = -\frac{U''(w) \cdot w}{U'(w)} = \gamma, \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (7)$$

Если предпочтения инвестора описываются функцией CRRA (6), то эквивалентный размер спрэда (5) не зависит от  $w_0$  и определяется формулой

$$\Delta(r_s, \pi, \gamma) = \begin{cases} \left( R_s^{2(1-\gamma)} + \frac{\pi}{1-\pi} \left[ R_s^{1-\gamma} - 1 \right] \right)^{\frac{1}{2(1-\gamma)}} - R_s, & 0 \leq \gamma < 1 \\ R_s \left( R_s^{2(1-\pi)} - 1 \right), & \gamma = 1 \end{cases}. \quad (8)$$

На рис. 4 приведены результаты численного расчета значений спрэда  $\Delta(r_s, \pi, \gamma)$  при различных значениях параметров. Можно показать, что  $\Delta(r_s, \pi, \gamma)$  является возрастающей функцией по каждому из аргументов.

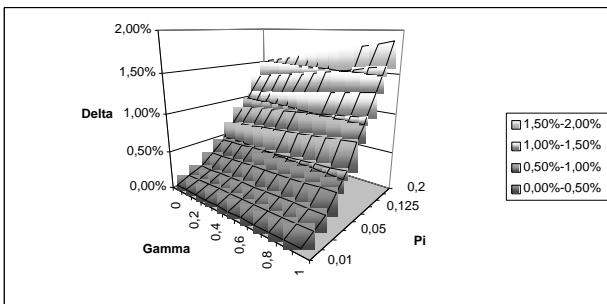


Рис. 4. Размер эквивалентного спрэда  $\Delta(r_s, \pi, \gamma)$  при различных значениях параметров ( $\gamma, \pi$ ) ( $r_s = 14\%$ )

Полученные результаты позволяют также рассмотреть вопрос о выборе оптимального уровня процентной ставки.

При наличии двух альтернатив, различающихся сроком погашения, инвестор выберет ту из них, которая обеспечивает большую ожидаемую полезность (3), (4). При структуре предпочтений (6) выбор оптимального решения зависит от следующих факторов:

$\Delta$ , размер спрэда между краткосрочной и долгосрочной процентными ставками;

$\gamma$ , коэффициент относительного уклонения ЛПР от риска (7);

$\pi$ , субъективная оценка вероятности реализации неблагоприятного события  $\{F_2 = 1\}$ .

Предположим, что распределение параметров  $(\gamma, \pi) \in \Omega$  на множестве потенциальных инвесторов задается совместной плотностью распределения  $f(\gamma, \pi)$ . Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} j^*(\Delta) &= \operatorname{argmax}_{j \in \{s, l\}} M_j(\pi, \gamma, r_j); \\ A_s(\Delta) &= \{(\gamma, \pi) \mid j^*(\Delta) = s\}; \quad A_l(\Delta) = \Omega \setminus A_s(\Delta). \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда вероятность выбора инвестором краткосрочного (долгосрочного) депозита (а значит, и доли рынка соответствующих финансовых инструментов) будет определяться по формулам:

$$\begin{aligned} s_s(\Delta) &= \iint_{A_s(\Delta)} f(\gamma, \pi) d\gamma d\pi; \\ s_l(\Delta) &= 1 - s_s(\Delta). \end{aligned} \quad (10)$$

Прибыль коммерческого банка на каждом из предлагаемых вариантов депозита зависит от:

суммы вклада, внесенного  $i$ -м инвестором  $w_i$ ;

разницы между ставкой кредитования  $r_c$  и ставкой, выплачиваемой по депозитному договору;

временем фактического пребывания денег на депозите.

В соответствии с ранее введенными предположениями о поведении инвесторов (рис. 2, 3) легко видеть, что прибыль банка при выборе  $i$ -м инвестором краткосрочного вклада составит:

$$\Pi_{si} = w_i [(1-\pi)(R_c^2 - R_s^2) + \pi(R_c - R_s)], \quad (11)$$

а при выборе долгосрочного вклада –

$$\Pi_{li} = w_i [(1-\pi)(R_c^2 - R_l^2) + \pi R_c]. \quad (12)$$

Тогда средневзвешенная прибыль банка на каждом потенциальном вкладчике составит:

$$\Pi_i(\Delta) = \iint_{\Omega} [\Pi_{si} I\{(\gamma, \pi) \in A_s(\Delta)\} + \Pi_{li} I\{(\gamma, \pi) \in A_l(\Delta)\}] f(\gamma, \pi) d\gamma d\pi, \quad (13)$$

где  $I\{\cdot\}$  – индикаторная функция. Тогда оптимальный уровень спрэда может быть найден путем численной максимизации (13) по  $\Delta$ . (Легко видеть, что оптимальный размер спрэда не зависит от характера распределения инвестируемых средств в генеральной совокупности инвесторов.)

Таким образом, предложенная модель не только объясняет положительный в среднем наклон кривой доходности, но и позволяет оптимизировать временную структуру процентных ставок с точки зрения коммерческого банка. Модель может быть обобщена на случай произвольного количества периодов с использованием методов динамического программирования.

- Література:**
- Black F. A One-Factor Model of Interest / F. Black, E. Derman, W. Toy Rates and Its Application to Treasury Bond Options // Financial Analysts Journal – 1990. – №46(1). – Pp. 33 – 39.
  - Vasicek O. An Equilibrium Characterization of the Term Structure // Journal of Financial Economics. – 1977. – №5. – Pp. 177 – 88.
  - Cox J. A Theory of the Term Structure of Interest Rates / J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross // Econometrica – 1985. – №53. – Pp. 385 – 407.
  - Hull J. One factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities / J. Hull, A. White // Journal of Financial and Quantitative Analysis. – 1993. – №28(2). – Pp. 235 – 254.
  - Heath D. and Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology / D. Heath, R. Jarow, A. Morton // Econometrica. – 1992. – №60(1). – Pp. 77 – 105.
  - Ingersoll J. Theory of Financial Decision Making. – Rowman & Littlefield Publishers, 1987. – 452 p.
  - Боди З. Принципы инвестиций / З. Боди, А. Кейн, А. Маркус. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2008. – 984 с.
  - Лю Ю. Д. Методы и алгоритмы финансовой математики – М.: Бином, 2007. – 752 с.
  - Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн – М.: Наука, 1970. – 708 с.
  - Varian, H. Microeconomic Analysis. – New York: W. W. Norton&Co., 1992. – 508 p.